ENSAIO EM COMPETIÇÃO MONOPOLÍSTICA

Carlos Ivan Simonsen Leal

RESUMO

O presente artigo trata da noção de competição monopolística, interpretada como equilíbrio de mercado em um oligopólio de Cournort, e mostra-se sua íntima relação com o equilíbrio não-cooperativo de Nash. Examina-se a existência de equilíbrio de mercado sob a hipótese de livre entrada.

SUMMARY

This article treats the topic of monopolistic competition, interpreted as a Cournot oligopoly in market equilibrium. The notion of a Cournot oligopoly is discussed, and its relation to the non-cooperative Nash equilibrium is shown. The existence of market equilibrium under the hypothesis of free entry is examined.

INTRODUÇÃO

O presente artigo(1) trata da noção de competição monopolística, interpretada como equilíbrio de mercado em um oligopólio de Cournot. Esta tem sido a tendência da literatura atual, uma vez que a noção definida por Caanbelin(1) não é precisa.

Na primeira seção discute-se o que é o oligopólio de Cournot, e mostra-se sua íntima relação com o equilíbrio não cooperativo de Nash. Inclui-se também o caso de incerteza.

Na seção seguinte discute-se a existência de equilíbrio de mercado. Aqui, em geral, não se pode garantir a existência de equilíbrio, a não ser sob hipóteses muito restritivas.

Por último, na terceira seção, mostra-se o caso de livre entrada. Novamente neste caso várias são hipóteses necessárias para que se prove a existência de equilíbrio do oligopólio com livre entrada. Porém, um resultado interessante garante o equilíbrio quando são variados slguns parâmetros da função custo e da função inversa de demanda.

O instrumental matemático não é dos mais complicados, porém é interessante que o leitor possua conhecimento da teoria de correspondências. Recomenda-se para tanto Berge [1].

I. COMPETIÇÃO MONOPOLÍSTICA

I.1 - EQUILÍBRIO DE COURNOT

Em 1838, Augustin Cournot fazia publicar o seu livro "Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses". Este

---

(1) Este artigo foi apresentado pelo autor como tese para obtenção do grau de Mestre em Economia Matemática no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada).

Princípios trazia um modelo que ficou conhecido como equilíbrio de Cournot. Trata-se de um modelo de equilíbrio parcial das firmas atuantes num certo mercado, i.e., a curva, ou curvas de demanda, é dada. Cada firma maximiza o seu lucro considerando como dada a produção das demais firmas.

Se indicarmos por ϕ a correspondência inversa de demanda, por C_i a função de custo da i-ésima firma, por S_i o seu conjunto de possibilidades de produção e, finalmente, por x e y a produção da firma e o agregado das demais produções respectivamente; então o problema acima é

$$\max_{x \in S_i} \{\phi(x + y) \cdot x - C_i(x)\}$$

onde o ponto indica o produto simples se x é um número e produto escalar se x é um vetor.

Se $S := \overset{n}{\underset{i=1}{X}} S_i$, definimos:

Definição 1: $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ é um equilíbrio de Cournot se e somente se cada s_i é solução do i-ésimo problema acima com $y = \sum_{j \neq i} s_j$

Exemplo 1: Temos n firmas, $S_i = \ldots = S_n = R^+$; todas as funções custo são iguais e estão definidas por $C(y) = \alpha y$. A demanda permite exprimir o preço p em função da quantidade demandada q como $P = a - q^2$.

Dada a produção y das demais firmas o problema da i-ésima firma é escolher x de forma a maximizar

$$L_i(x) = (a - (x+y)^2)x - \alpha x$$

donde (derivando, igualando a zero e resolvendo a equação resultante), obtemos:

$$x + y = \frac{2y + \sqrt{4y^2 - 12(a-\alpha)}}{6}$$

e como $x \geqq 0$ e $y \geqq 0$ obtemos a condição $a - \alpha \geqq y^2$. Assim obtemos

$$x(y) = \begin{cases} x = \dfrac{-4y + \sqrt{4y^2 + 12(a-\alpha)}}{6} \\ \qquad \text{se } a-\alpha \geqq y^2 \\ x = 0 \text{ em caso contrário.} \end{cases}$$

A existência de um equilíbrio de Cournot é sempre verdadeira, pois se $a-\alpha \leqq 0$ colocamos todas as firmas produzindo zero unidades de produto. E se $a-\alpha > 0$ colocamos $(n-1)x = y$ no 1º caso acima, para obter

$$x = \sqrt{\frac{a-\alpha}{n(n+2)}} \Longrightarrow y^2 = (n-1)^2 x^2$$
$$= \frac{(n-1)^2}{n(n+2)}(a-\alpha) < (a-\alpha).$$

No que se seguirá aparecerão funções ou, mais geralmente, correspondências, permitindo obter x a partir de y. Usaremos a seguinte:

<u>Definição 2:</u> A <u>reação</u> da i-ésima firma é uma função (ou correspondência se for o caso) que associa a cada $\hat{s}_i := (s_1, .. s_{i-1}, s_{i+1}, s_{i+1}, .. s_n) \in \hat{S}_i := \underset{j\neq i}{X} S_j$ um (ou um conjunto de) $r_i(\hat{s}_i) \in S_i$ tal que se $(\hat{s}_i; s) := (s_1, .. s_{i-1}, s, s_{i+1}, .. s_n)$, então $L_i(\hat{s}_i; r_i(\hat{s}_i)) = \max_{s\in S_i} L_i(\hat{s}_i; s)$ onde L_i é a função de lucro.

Definindo $r: S \to P(S)$ por $r(s) = r_1(\hat{s}_1) \times \ldots \times r_n(\hat{s}_n)$ onde x é o produto cartesiano usual, podemos afirmar que existirá um equilíbrio de Cournot se e somente se existir um $\bar{s} \in S$ tal que $\bar{s} \in r(\bar{s})$, i.e., um ponto fixo para r.

I.2 - EQUILÍBRIO DE NASH

A idéia original de Nash (veja Nash [1]) era a prova de existência de um ponto de equilíbrio num jogo não cooperativo.

Para nós o que acontecerá é que cada firma escolherá um $s_i \in S_i$ tomando $\hat{s}_i \in \hat{S}_i$, i.e. as ações das demais firmas, como dado, de forma a maximizar o seu lucro. Um ponto $\bar{s} \in S$ ê, por definição, um equilíbrio se $L_i(\bar{s}) = \max\limits_{s_i \in S_i} L_i(\hat{s}_i, s_i)$ para todo i. Observemos que um ponto $\bar{s} \in S$ é um ponto de equilíbrio se e somente se é um ponto fixo para r (veja seção anterior). Chamaremos este equilíbrio de equilíbrio de Cournot-Nasch ou equilíbrio CN.

O conceito de jogo não-cooperativo se refere para Nash a um jogo com um número finito, igual a n, de participantes, cada um tendo os seus ganhos representados por uma função $L_i: S \to R$, onde cada jogador escolhe independentemente um ponto $s_i \in S_i$. Sobre os S_i nada exigimos nesta definição. No caso dos jogadores serem firmas os S_i podem ser conjuntos de vetores de preço, de forma a que a função de lucro da firma i dependa dos preços fixados por ela e por suas concorrentes.

Por sinal, o tipo de equilíbrio enunciado no final do parágrafo acima é conhecido como equilíbrio de Bertrand. Nós voltaremos a ele não seção 3 abaixo. Antes vamos definir certas noções que nos permitirão enunciar os teoremas de existência do capítulo 2.

Definição 3: Diremos que o jogo acima é côncavo se:

a) Cada S_i é um subconjunto convexo de um espaço vetorial.
b) Cada L_i é uma função côncava em s_i: quaisquer $\hat{s}_i$ fixo, $\lambda \in [0,1]$ e s_i', $s_i'' \in S_i$ temos:

$$L_i(\hat{s}_i, \lambda s_i' + (1-\lambda)s_i'') \geqq$$

$$\geqq \lambda L_i(\hat{s}_i, s_i') + (1-\lambda) L_i(\hat{s}_i, s_i'')$$

Diremos que uma função real h é quase-côncava se $h(x') > h(x)$ implicar $h(\lambda x' + (1-\lambda) x) \geqq h(x)$ para todo $\lambda \in (0,1)$. Diremos que a h é estritamente quase-côncava se ao invés de $\geqq$ tivermos $>$.

Definição 4: Diremos que um jogo ê quase-côncavo (resp. estritamente quase côncavo) se ao invés de (b) na definição 3 tivermos L_i quase-côncava (resp. estr. quase côncava) na i-ésima variável.

Definição 5: Um jogo é dito topologicamente superior, se:

a) Cada S_i é um espaço topológico compacto.

b) Para todo $\hat{s}_i \in \hat{S}_i$, cada função $L_i(\hat{s}_i, \cdot) S_i \to R$ for semi-contínua superiormente.

Se ao invés de (b) acima tivermos $L_i(\hat{s}_i; \cdot)$ semi-contínua superiormente, diremos que o jogo é topologicamente inferior para i. E, finalmente:

Definição 6: O jogo será dito topológico se:

a) Cada S_i é um espaço topológico compacto.

b) Cada função L_i é contínua em S.

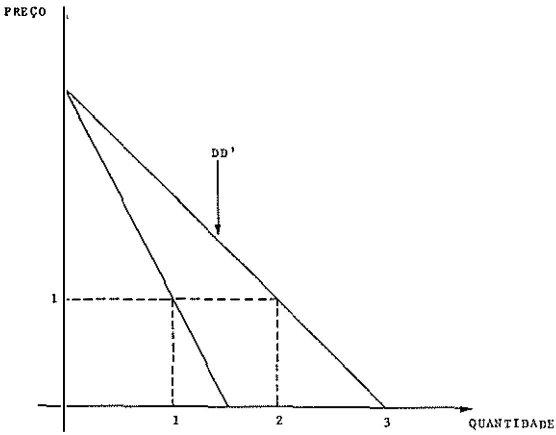
De uma forma geral um equilíbrio para esse jogo é dito não-cooperativo.

I.3 - A CRÍTICA DE BERTRAND A COURNOT

Quase meio século após o aparecimento dos Princípios (Cournot [1]), J. Bertrand (veja Bertrand [1]) fez uma célebre crítica à idéia do equilíbrio de Cournot. Essencialmente ele se perguntava por que é que as variáveis de quantidades deveriam ser fixados sobre a curva de demanda agregada. O exemplo a seguir é devido a Edgeworth.

Duas firmas podem produzir sem nenhum custo até 1,5 unidades, e nada mais, de água mineral de idêntica qualidade. Existem dois consumidores idênticos que se comportam como tomadores de preço e têm cada um a sua demanda dada pela reta dd' (veja figura abaixo), de forma a que a demanda agregada seja DD'. O preço competitivo desta economia é zero.

Suponha que a demanda total seja $q = 3 - p$, então cada firma venderá 1 unidade de produto a um preço $p = 1$. Se no entanto a 1ª firma baixar seu preço para 0,95 ela venderá 1,5 unidades de água mineral, enquanto que a 2ª firma venderá um máximo de 0,55 unidades. É de se esperar que vendo os seus lucros baixarem a 2ª firma alterasse o seu preço. Bertrand argumentava que nenhum preço acima do preço competitivo poderia ser sustentado.



Obviamente podemos supor que esse processo de ajuste e reajuste dos preços não leva necessariamente ao preço zero, como supunha Bertrand. O fato importante é que o lucro auferido por cada uma das firmas depende do preço de oferta da outra firma.

Este tipo de equilíbrio já descrito na seção anterior é chamado do equilíbrio de Bertrand. O trabalho que tivemos na seção 2 se justifica: os teoremas que apresentaremos no capítulo 2 se aplicam, regra geral, a jogos não-cooperativos como os equilíbrios de Bertrand e C.N.

I.4 - INCERTEZA

Todo significado econômico dos equilíbrios anteriormente descritos seria vazio se não pudéssemos levar em conta a incerteza que cada firma deve ter com respeito à ação das demais.

Nós admitimos que dado Ω o conjunto de todos os possíveis estados da natureza, existe uma medida de probabilidade P associada à t-álgebra de Borel de Ω. Um ponto $w \in \Omega$ é uma descrição quantitativa completa de todas as qualidades que estudamos. Intuitivamente $P(\{A\})$ é a probabilidade de que ocorram os estados da natureza $w \in A$.

A cada w e a cada firma i nós associamos um conjunto S_{iw} de possibilidades de atuação da i-ésima firma dado que aconteça o estado da natureza w. Definimos

$$S_w := \overset{n}{\underset{i=i}{X}} S_{iw} \quad \text{e} \quad \hat{S}_{iw} := \underset{j \neq i}{X} S_{jw}$$

As funções de lucro também variam com w e são notadas $L_{iw}\ S_w \to R$.

Se $S: = \underset{w \in \Omega}{X} S_w$ e S_i, $\hat{S}_i$ são definidos analogamente, então definimos a função lucro esperado $L_i : S \to R$ como

$L_i(\hat{s}_i; s_i) : = \int_r L_{iw}(\hat{s}_{iw}, s_{iw})\, dP(w)$ se esta fizer sentido onde $\hat{s}_{iw}$ (resp. s_{iw}) é a projeção de $\hat{s}_i \in \hat{S}_i$ (resp. $s_i \in S_i$) sobre $\hat{S}_{iw}$ (resp. S_{iw}).

Definição 7: Um jogo não-cooperativo com incerteza nas condições acima é um jogo no qual a i-ésima firma escolhe s_i de forma a maximizar L_i dado $\hat{s}_i$.

A noção de equilíbrio se estende trivialmente. E chamaremos o equilíbrio de CN equilíbrio com incerteza se os S_{iw} forem conjuntos de possibilidades de produção.

Um outro ângulo no qual a incerteza também pode ser usada pode ser caricaturizado pela seguinte situação: as firmas joguem um número infinito enumerável de vezes um jogo de tipo de Cournot-Nash, só que os seus objetivos são maximizar o valor presente dos respectivos fluxos de renda. Não veremos esse caso; para maiores referências ver Friedman [1], [2] e Sobel [1], [2].

II. OS TEOREMAS DE EXISTÊNCIA

Nós começaremos provando o teorema original de Nash [1]. Este resultado se encontra contido nos teoremas que se seguirão. A sua apresentação se justifica pelo modo como a sua prova é feita, o artifício usado foi muito empregado em diversas demonstrações de teoremas na teoria do Equilíbrio Geral Competitivo.

II.1 - O TEOREMA DE NASH

Façamos duas hipóteses:

a) Para cada i, S_i é um simplexo de vértices $\pi_{i\alpha}$ (os $\pi_{i\alpha}$ são, por definição, pontos linearmente independentes)

Se $s_i \varepsilon S_i$, então

$$s_i = \sum_\alpha c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$$

onde $c_{i\alpha} > 0$ e $\sum_\alpha c_{i\alpha} = 1$

b) A função de lucro de cada firma L_i: $S \to R$ é uma transformação a fim na i-ésima variável.

Nestas condições podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1: Existe um equilíbrio CN.

Prova: Seja $\hat{s}_i \varepsilon \hat{S}_i$, então é fácil ver que

$$\max_{s_i \varepsilon S_i} L_i (\hat{s}_i, \hat{s}_i) = \max L_i (\hat{s}_i, \pi_{i\alpha})$$

Definindo $L_{i\alpha}(s)$: $L_i (\hat{s}_i, \pi_{i\alpha})$ a igualdade acima nos leva a concluir que $\bar{s} \varepsilon S$ é um equilíbrio se e somente se

$$L_i (\bar{s}) = \max_\alpha L_{i\alpha}(\bar{s})$$

para todo i. Finalmente, se $\bar{s}_i = \sum_\alpha c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$, então $L_i(\bar{s}) = \sum_\alpha c_{i\alpha} L_{i\alpha} (\bar{s})$, então uma nova condição necessária e suficiente para o equilíbrio é que se $c_{i\alpha} > 0$, então $L_{i\alpha}(\bar{s}) = \max_\beta L_{i\beta}(\bar{s})$ para todo i.

Assim tomemos

$$\psi_{i\alpha}(s) = \max (0, L_{i\alpha}(s) - L_i(s))$$

e $T: S \to S$, $T(s) = s'$, onde

$$s'_i = \frac{s_i + \sum_\alpha \psi_{i\alpha}(s) \pi_{i\alpha}}{1 + \sum_\alpha \psi_{i\alpha}(s)}$$

Pelo teorema de Brouwer (veja Berge [2]) T possui um ponto fixo $\bar{s}$. Escrevendo $\bar{s}_i = \sum_\alpha c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$, a independência dos $\pi_{i\alpha}$ implica

$$\frac{c_{i\alpha} + \psi_{i\alpha}(\bar{s})}{1 + \sum_\beta \psi_{i\beta}(\bar{s})} = c_{i\alpha}$$

Se $c_{i\alpha} > 0$ temos

$$\psi_{i\alpha}(\bar{s}) = c_{i\alpha} \sum_\beta \psi_{i\beta}(\bar{s})$$

Como $\bar{s}_i \in S_i$ algum dos $c_{i\alpha}$ deve ser maior que zero. Se só um for, então $c_{i\alpha} = 1$, donde $\psi_{i\alpha}(\bar{s}) = 0$ e portanto $\psi_{i\beta}(\bar{s}) = 0$ para todo β. Se existir mais que um $c_{i\alpha} > 0$, então existem duas possibilidades: ou os $L_{i\alpha}(\bar{s})$ são todos iguais, ou existe um que é menor que os outros; a conclusão é sempre a mesma: $\sum_\beta \psi_{i\beta}(\bar{s}) = 0$. Portanto, para todo i e β, $\psi_{i\beta}(\bar{s}) = 0$.

Os $\psi_{i\beta}(\bar{s})$ serem todos iguais a zero implica que na verdade não existe um $c_{i\alpha'} > 0$ com seu $L_{i\alpha'}(\bar{s})$ menor que os dos outros $c_{i\alpha} > 0$.

Suponhamos que sim, então

$$L_{i\alpha}(\bar{s}) - L_i(\bar{s}) =$$

$$= L_{i\alpha'}(\bar{s}) - \sum_\alpha c_{i\alpha} L_{i\alpha}(\bar{s})$$

$$> L_{i\alpha'}(\bar{s}) - \sum_\alpha c_{i\alpha} L_{i\alpha}(\bar{s}) = 0$$

donde $\psi_{i\alpha}(\bar{s}) = 0$. Contradição. Logo $\bar{s}$ é um equilíbrio CN.

II.2 - A EXTENSÃO DO TEOREMA DE NASH

Teorema 2: Todo jogo topológico estritamente quase-côncavo num espaço métrico, i.e, $S_i \subset x_i$ onde x_i é um espaço métrico, possui um equilíbrio CN.

Prova: Seja r_i a reação da i-ésima firma, a quase-concavidade estrinta implica que r_i; é uma função. Podemos escrever $r_i: S \to S_i$.

Tome uma seqüência $\{s_n\} \subset s$ tal que $s_n \to s$. Vamos provar que $r_i(s_n) \to r_i(s)$, provando que r_i é contínua. Porque S_i é compacto o conjunto dos pontos de aderência de $r_i(s_n)$ é não vazio. Seja a um ponto deste conjunto e $r_i\ (s_{nk}) \to a$

Da definição de r_i temos

$$L_i(\hat{s}_{nk}\ i;\ r_i\ (s_{nk})(s_{n_k})) > L_i(\hat{s}_{n_k}\ i;\ r_i(s))$$

Passando ao limite vem

$$L_i\ (\hat{s}_i,\ a) \geqq L_i(\hat{s}_i,\ r_i\ (s))$$

o que pela quase-concavidade escrita acarreta $a = r_i(s)$.

Isto prova que o conjunto dos pontos de aderência de $r_i(s_n)$ só tem um único ponto $r_i(s)$. E como é um subconjunto compacto de um espaço métrico concluímos que $r_i(s_n) \to r_i(s)$. Logo, r_i é contínua.

Em seguida tomamos $r:S \to S$ definida por $r(s) = (r_1(s), \ldots r_n(s))$ e aplicamos o teorema do ponto fixo de Tychonoff (veja Dugundji [1]) para achar um ponto fixo para r.

Nós vamos relaxar muito as hipóteses do teorema 2. Antes porém vamos precisar de dois resultados técnicos:

Teorema do Máximo: Sejam X e Y dois espaços topológicos e $\phi : X \times Y \to R$ uma função semi-contínua superiormente, se Γ é uma correspondência semi-contínua superiormente, então $M : X \to R$ definida por

$$M(x) = \max\ \{\phi(x,y)\ :\ y \in \Gamma\ x\}$$

é semi-contínua superiormente.(1)

Prova: Suponha que $x_o \in x$; para cada $y \in \Gamma_{x_o}$ correspondem vizinhanças $U_y\ (x_o)$ e $V\ (h)$ tais que

$$(x,z) \in U_y\ (x_o) \times V\ (y) \to \phi(x,z) \leqq \phi(x_o h) + \varepsilon$$

Já que Γ_{x_o} é compacto, ele pode ser coberto por um número finito de vizinhanças da forma $V(Y)$, digamos $V\ (Y_1), \ldots V\ (Y_n)$.

(1) A imagem de cada $x \in X$ por uma correspondência semi-contínua superiormente é sempre suposta um conjunto compacto, veja Berge [2].

Colocando $U'(x_o) = \bigcap_{i=i}^{n} U_{y_i}(x_o)$ e $V(\Gamma x_o) = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)$, temos

$$x \in U'(x_o),\ y \in V(\Gamma x_o) \rightarrow$$
$$\rightarrow \phi(x,y) \leq \max \phi(x_o, y_i) \leq$$
$$\leq M(x_o) + \varepsilon.$$

Além disso existe uma vizinhança $U(x_o)$ tal que $x \in U(x_o) \rightarrow \Gamma x \subset V(\Gamma x_o)$ e portanto

$$x \in U(x_o) \cap U'(x_o)$$
$$\rightarrow M(x) = \max_{y \in \Gamma x} \phi(x,y) \leq M(x_o) + \varepsilon$$

O segundo resultado é uma generalização do teorema de Tychonoff e pode ser obtido a partir do teorema de Kakutani (veja Berge [2]).

<u>Teorema</u> (Tychonoff - Kakutani): Se K é um subconjunto compacto convexo de um espaço vetorial X localmente convexo, e se Γ é uma correspondência semi-contínua superiormente de K em K tal que Γx é convexo e não vazio para todo x, então existe um $x_o \in \Gamma x_o$.

A prova deste teorema se deve a Ky Fan [1], também podendo ser encontrado em Berge [1].

<u>Teorema 3:</u> Todo jogo topológico côncavo possui um equilíbrio não-cooperativo.

<u>Prova</u>: A correspondência $s_i \xrightarrow{\Gamma} S_i$, Γ = identidade, é semi-contínua superiormente além disso as L_i são contínuas. Pelo teorema do máximo $r_i : \hat{S}_i \rightarrow P(S_i)$ é semi-contínua superiormente. Como as L_i são contínuas e os S_i compactos é fácil concluir que $r_i(\hat{s}_i) \neq \phi$ sempre. Além disso $L_i(\hat{s}_i; \lambda s' + (1-\lambda)s''_i) \geq \lambda L_i(\hat{s}_i; s'_i) + (1-\lambda) L_i(\hat{s}_i;$
s'_i $\qquad$ $_1$ $\quad$ $_1$ $\quad$ $r_i(\hat{s}_i)$ temos de ter $\lambda s'_i + (1-\lambda)s''_i \in r_i(\hat{s}_i)$. Definindo $r(s) = r_1(\hat{s}_1) \times \ldots \times r_n(\hat{s}_n)$ podemos aplicar o teorema de Kakutani e achar um ponto fixo para r.

É fácil estender o resultado acima para jogos topológicos quase-côncavos.

Também poderíamos ter admitido que as L_i fossem semi-contínuas superiormente ao invés de contínuas, i.e, se supusermos o jogo topologicamente superior, se admitíssemos simultaneamente que o jogo fosse num espaço métrico. Isto é uma conseqüência de que se Γ é semi-contínua superiormente e que se K é compacto num espaço métrico é limitado.

O teorema a seguir estuda o caso bem geral, nas aplicações econômicas, onde a função lucro da i-ésima firma está definida num subconjunto F_i de S. A firma não está se importando com o quantoas outras produzem, mas sim como e o que elas produzem e como.

Vamos supor que F_i é compacto convexo, que as L_i são contínuas e côncavas na i-ésima variável e que para qualquer $\hat{s}_i \in \hat{S}_i$ existe $s_i \in S_i$ tal que $(\hat{s}_i, s_i)$ F_i.

<u>Teorema 4</u>: Nas condições acima existe um equilíbrio CN.

<u>Prova</u>: É trivial que a correspondência.

$$F^*_i(\hat{s}_i) = \{s \mid \hat{s}_i \in \hat{S}_i, (\hat{s}_i; s_i) \in F_i\}$$

é semi-contínua superiormente e convexa. Daí, aplicando o teorema do Máximo, vem que as funções de reação

$$r_i(\hat{s}_i) = \{s \in S_i \; : \; s \text{ resolve } \max L_i(\hat{s}_i, s) \text{ com } s \in F^*_i(\hat{s}_i)\}$$

é semi-contínua superiormente. Aplicamos então o teorema de Kakutani à r definida como antes.

Nossos resultados têm dois pecados graves do ponto de vista econômico: a concavidade das funções de lucro e a convexidade dos conjuntos de possibilidades de produção (no equilíbrio de Bertrand essa hipótese não é irrazoável). Na seção a seguir damos um resultado na direção do 1º problema. O 2º não será discutido neste trabalho.

II.3 - AUSÊNCIA DE CONCAVIDADE DA FUNÇÃO DE LUCRO[1]:

<u>Teorema 5</u>: Sejam m firmas produzindo sem custos em $[0,1]$. A correspondência inversa de demanda $\phi : [0,m] \to R^+$ é fechada e compacta.

(1) Ver Roberts e Sonnenschein [1].

Então existe um equilíbrio de Cournot dado por $(\bar{p}, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_m)$ onde $\bar{y}_1 = \ldots = \bar{y}_m = \bar{y}$ e $\bar{p} = \max \phi\ (m\bar{y})$.

Antes de provar essse resultado teremos de provar um lema técnico.

Lema:[1] Para cada $x \in [0,1]$, seja $F(x)$ um subconjunto não-vazio de de 0,1 e seja $f: [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = \inf\{y: y \in F(x)\}$. Suponha que F é fechada à direita e que f é semi-contínua superiormente à esquerda. Então existe $\bar{x} \in [0,1]$ tal que $\bar{x} \in F(\bar{x})$.

Prova: Seja $\bar{x}$ o menor valor de x tal que existe $y \in F(x)$ com $y \leq x$, e seja $\bar{y} \leq \bar{x}$ pertencente a $F(\bar{x})$. A existência de tal $\bar{x}$ e $\bar{y}$ se deve a que F é fechada à direita. Então $\bar{x}$ é um ponto fixo para F. Para ver isto, note que se $\bar{x} = 0$ então $0 \leq \bar{y} \leq \bar{x} = 0$, enquanto que se $\bar{x} > 0$ podemos aproximar $\bar{x}$ por baixo por uma seqüência x_n a qual obedece $x_n \leq f(x_n)$. Logo $\bar{x} \leq \lim\sup f(x_n)$, mas como f é semi-contínua superiormente à esquerda, temos $\lim\sup f(x_n) \leq f(\bar{x}) S\ \bar{y} \leq \bar{x}$. Logo $\bar{x} = \inf F(\bar{x})$. Mas $\bar{x} \geq \bar{y} \in F(\bar{x})$, logo $\bar{x} \in F(\bar{x})$.

Prova do teorema: Seja $R: [0, (m-1)] \to P([0,1])$ definida por $R(x) = \{y \in 0,1 \mid y \text{ maximiza } y\ \phi\ (x + y)\}$, isto é, R é a função de reação de uma firma qualquer. Se existir $\bar{y} \in R((m-1)\ \bar{y})$, com $\bar{y} \in 0,1$, então $(f(m\bar{y}), \bar{y}, \ldots \bar{y})$ será um equilíbrio de Cournot, onde $f(y) = \max \phi\ (y)$. A existência desse $\bar{y}$ depende de que exista um ponto fixo para $F : [0,1] \to P([0,1])$ definida por $F(x) = R((n-1)\ x)$. Já que F será não-vazia e fechada à direita se e somente se R tiver essas propriedades, enquanto que $f = \inf F$ será semi-contínua superiormente à direita se e somente se $r = \inf R$ o for, bastará provar que R e r possuem essas propriedades.

Que R é não-vazia segue-se de que $(p, y) \to py$ é continua e que o conjunto dos $p \in \phi(x + y)$ é compacto para cada x.

Para provar que R é fechada à direita, tome $x_n \searrow x$ e $y_n \in R(x_n)$ com $y_n \to y$. Se $y \in R(x)$, então existe $\bar{y} \in 0,1$ tal que $f(x + \bar{y})\bar{y} > f(x + y)y$. Já que $x_n > x$, a menos que $\bar{y} = 0$, a firma poderia ter to

(1) Também pode ser obtido como conseqüência de um teorema devido a Tarski (ver Tarski [1]).

mado, para n grande, $\bar{y}_n = \bar{y} + (x-x_n)$ ao invés de y_n. Para esta escolha, $\Phi\,(x_n + \bar{y}_n) = \Phi\,(x + \bar{y})$, e portanto, $f(x_n + \bar{y}_n)\bar{y}_n = f(x+y)\bar{y}_n \searrow f(x + \bar{y})\bar{y}\ f(x + y)y$. Mas como Φ tem o gráfico fechado, temos $f(x+y)\,y \geq \lim\sup f(x_n + y_n)y_n$. Isto nos leva a uma contradição se $\bar{y} > 0$, enquanto que se $\bar{y} = 0$, temos $0 = f(x + \bar{y})\bar{y} > f(x + y)y \geq 0$, nova contradição.

Observe que $r(x) = \min R(x)$ pois Φ é compacta. Tome $x_n \nearrow x$ e seja $\bar{y} = r(x)$. Para qualquer $y \geq \bar{y}$ temos $f(x + \bar{y})\bar{y} \geq f(x + y)y \geq f(x + y)\bar{y}$ já que $f \geq 0$. Logo, para $y \geq \bar{y}$, $\delta \geq 0$ vale $(\bar{y}+\delta)\ f(x+\bar{y}) \geq (y + \delta)\ f(x + y)$, o que equivale a $(\bar{y} + \delta)\ f((x - \delta) + (\bar{y} + \delta)) \geq nf(x - \delta + n)$, onde $n = y + \delta \geq \bar{y} + \delta$.

Donde $r(x - \delta) \leq \bar{y} + \delta = r(x) + \delta$.

Colocando $\delta = x - x_n$ e passando ao limite vem que $\lim\sup r(x_n) \leq r(x)$, provando o que faltava.

II.4 - INCERTEZA

Se Ω é um conjunto finito podemos usar os resultados da seção 2 para provar, em uma situação análoga, existência de um equilíbrio. Se escrevermos $\Omega = \{1,2, .. K\}$ e $P(i) = p_i$, então

$$L_i = p_1 L_{i1} + \ldots + p_k L_{ik}$$

se L_i for côncava e contínua em $S_i = \mathop{X}\limits_{j=1}^{k} S_{ij}$, e este for compacto convexo, bastará usar os resultados anteriores para obter o equilíbrio.

III. EQUILÍBRIO COM LIVRE ENTRADA

III.1 - A VERSÃO SIMPLES[1]

Até agora o número de firmas atuando no mercado tem sido um dado exógeno. Isto é uma grosseira caricatura da realidade. É o mer

(1) Ver Novshek [1].

cado e a situação tecnológica da economia que regulam o número de firmas existentes.

Vamos começar definindo as coisas de forma fácil para que a nossa análise seja factível. Assim aceitamos por equilíbrio com livre-entrada o seguinte:

Definição 1: Numa economia onde o custo para uma firma qualquer de nada produzir é zero, uma situação de equilíbrio com livre entrada (ELE) é, por definição, aquela onde o número de firmas produzindo é finito e onde uma nova firma que se decida a produzir o fará necessariamente com lucro negativo.

Vamos apresentar um único resultado de existência sobre o ELE acima, estaremos trabalhando com uma das hipóteses mais usuais da Teoria da Firma: curva de custo médio em forma de U; e com uma curva de demanda decrescente. Os exemplos a seguir mostram um caso de existência (exemplo 1) e um caso de não existência (exemplo 2).

Exemplo 1: Suponha a seguinte situação:

a) As firmas são monoprodutoras e todas possuem a mesma tecnologia, descrita pela função de custo

   $C: [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por

$$C(y) = \begin{cases} \frac{3y}{2} - \frac{y^2}{2} & \text{se } y \in [0,1] \\ \frac{1y}{2} + \frac{y^2}{2} & \text{se } y \in (1,\infty) \end{cases}$$

b) A função inversa de demanda $F(0,\infty) \to (0,\infty)$ é definida por

$$f(q) = 3 - \frac{q}{4}$$

Com essas condições a correspondência de reação é dada por:

$$y(X) = \begin{cases} \frac{5}{3} - \frac{X}{6} & \text{para } X \in [0,4) \\ 1 & \text{para } X \in [4,7) \\ \{0,1\} & \text{se } X = 7 \\ 0 & \text{para } X \in (7,\infty) \end{cases}$$

onde X denota a produção das demais firmas.

Afirmamos que existe um equilíbrio de Cournot onde todas as firmas produzirão igual quantidade. Com efeito, nesse caso deveremos encontrar n e X tais que

$$(n - 1)\ y(X) = X$$

o que acontece para $n = 8$ e $X = 7$ com $y = 1$

Exemplo 2: Com a mesma função de custo do exemplo anterior, porém com os preços obededendo a $F(q) = 3-2q$ não há ELE. Pois neste caso se existisse um ELE $\{y_1, \dots y_n\}$ então, se $X_i = \sum_{j \neq i} y_j$, as funções de reação seriam dadas por:

$$y_i(X_i) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} - X_i\right) & \text{se} \quad X_i \in [0, 3/4] \\ 0 & \text{se} \quad X_i \in (3/4, \infty) \end{cases}$$

e usando a igualdade $\sum_{i=1}^{n} X_i = (n-1) \sum_{i=1}^{n} y_i$, concluiríamos que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{3}{4}\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Usando que $X_i = \sum_{j=1}^{n} y_j - y_i$ vem que $y_i = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{n+1/2}\right)$

e daí que

$$X_i = \frac{3}{4}\,\frac{n-1}{n+1/2}$$

Ora, a equação acima indica que sempre podemos aumentar n, permanecendo $y_i > 0$. Logo não é possível que a situação descrita seja um ELE.

Definição: Uma economia (α, β, F, f) é onde:

a) As firmas agem como no equilíbrio de Cournot com livre entrada.

b) Dado $\alpha \in (0, \infty)$ a curva de custo médio de uma firma qualquer é definida por $CM_\alpha(y) = f\left(\frac{y}{\alpha}\right)$, onde $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ é C^2, estritamente descrescente para $y < 1$, e estritamente crescente para $y > 1$ e $f''(1) > 0$.

O custo de nada produzir é zero.

c) Para $\beta \in (0,\infty)$ a função inversa de demanda é definida por $F_\beta(q) = F(\frac{q}{\beta})$, onde $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é C^2, estritamente decrescente e para a qual vale:

$$X < 1 \qquad F(X) < f(1)$$
$$X > 1 \qquad F(X) > f(1)$$

Se $E(\alpha, \beta, F, f)$ indica os ELE de Cournot de (α, β, F, f) então com $F(q) = 3-2q$ e $yf(y) = C(y)$ os resultados dos dois exemplos são:

Exemplo 1: $E(1, 8, F, f) \neq \Phi$

Exemplo 2: $E(1, 1, F, f) = \Phi$

Enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 1: Existe $K > 0$ tal que se $\alpha/\beta < K$, então $E(\alpha,\beta,F,f) \neq \Phi$.

A prova do teorema será dividida em lemas:

Lema 1: Se $\{y_1, \dots y_n\}$ é um elemento de $E(\alpha, \beta, F, f)$, então

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \in [\beta - \alpha, \beta]$$

Prova: Se $\sum_{i=1}^{n} y_i > \beta$ é porque existe $y_i > 0$, mas $F_\beta (\sum_{i=1}^{n}) y_i < f(1)$ que é o custo médio mínimo. Absurso, pois as firmas sempre podem tomar $y_i = 0$.

Se $\sum_{i=1}^{n} y_i < \beta - \alpha$, então uma nova firma pode entrar produzindo α e $F_\beta (\sum_{i=i}^{h} y_i + \alpha) > F_\beta(\beta) = f(1) = CM_\alpha (\alpha)$. Absurdo pois contraria o ELE.

Lema 2: Existem $\delta \in (0,1]$ e $Z \in (0,1)$ tais que o custo marginal é crescente em $(\alpha(1-\delta), \alpha(1+\delta)) \cap [0, \beta - X]$ e tais que para qualquer $X \geq \beta Z$ todas as respostas ótimas são zero ou estão nesse intervalo.

Prova: Temos $C''_{\alpha}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} f''(1) > 0$, logo existe $\delta \in (0,1)$ tal que $C''(y) > 0$ para todo $y \in (\alpha(1-\delta), \alpha(1+\delta))$. Tomando tal δ e um $Z \in (0,1)$ tal que

$f(1) < F(Z) < \min \{f(1-\delta), f(1+\delta)\}$ vem o resultado. Com efeito, se $y > B - X$, então

$$F\beta(x+y) < f(1) \leq CM_{\alpha}(y)$$

enquanto que se $y \neq 0$ e $y \notin (1-\delta), \alpha(1+\delta))$ então

$$CM_{\alpha}(y) > F_{\beta}(\beta Z) > F_{\beta}(x+y)$$

Lema 3: Existe $K > 0$ tal que $\alpha/\beta > K$ implica que a receita marginal é decrescente para qualquer $X \in [\beta - 2\alpha, \bar{X}]$ onde $\bar{X} = \sup\{x : y(x) \neq \{0\}\}$.

Prova: A receita marginal de y dado X é $RMg(y) = F_{\beta}(X+y) + y\, F'_{\beta}(X+y)$, logo $\frac{dRMg}{dy} = 2F'_{\beta}(X+y) + y\, F''_{\beta}(X+y)$. Se $F''_{\beta}(X+y) \leq 0$ então a RMg é decrescente. Se $F''_{\beta}(X+y) > 0$, então

$$\frac{dRMg}{dy} = -F''_{\beta}(X+y) - \frac{2F'_{\beta}(X+y)}{F''_{\beta}(X+y)} - y$$

Definindo

$$K = \frac{1}{4} \min \{g(X), 1 - Z\}$$

$$\text{onde } g(X) = \min_{X \in [Z,1]} \left\{ \frac{-F'(X)}{\max(0, F''(X))} \right\}$$

Tomamos $X \in [\beta(1-2K), \beta]$ e $y \in [0, \beta - X] \subset [0, 2\beta K]$

E nesse caso temos

$$\frac{dRMg}{dy} \leq -F''_{\beta}(X+y) \left[\frac{-F'_{\beta}(X+y)}{F''_{\beta}(X+y)} - 2\beta K \right] < 0$$

pois $\frac{X + y}{\beta} \in [1 - 2K, 1] \subset [z,1]$. Finalmente $\alpha/\beta < K$ implica que $[\beta\ 2\alpha, \bar{X}] \subset [\beta(1 - 2K), \beta]$.

<u>Prova do Teorema 1</u>: Se $\alpha/\beta < K$ então $\alpha\ \beta < \frac{1 - Z}{Z}$ e como conseqüência vale o resultado do lema 2 para $X \in [\beta - 2\alpha, \bar{X}]$. Isto mais o lema 3 diz que existe um único $y \in y(X)$ tal que $y \neq 0$. Aplicando o teorema das funções implícitas à equação RMg = CMg obtemos

$$\frac{dy}{dx}(X) = \frac{-\ F'_\beta(X + y)\ +\ y\,F''_\beta(X + y)}{2F'_\beta(X + y) + y\ F''_\beta(X + y) - C''_\alpha(Y)} < 0$$

$$\text{Tome } n = \left[\frac{\bar{X} + \bar{y}}{\bar{y}}\right] \quad \text{onde } \bar{y} = \sup\{y \in y(\bar{X})\}$$

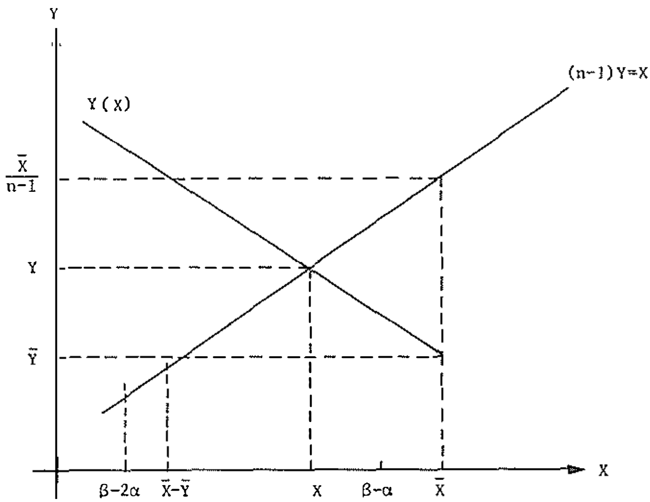
Pelo lema 1 $\bar{X} \geq \beta - \alpha$ e $\bar{y} \leq \beta - \bar{X}$, donde $\bar{X} - \bar{y} \geq \beta - 2\alpha$.

Pela definição de n temos também

$$\bar{X} - \bar{y} < (n - 1)\bar{y} \leq \bar{X};$$

do gráfico abaixo se conclui que existem y e X tais que

$$(n - 1)y = X \text{ e } y = y(X)$$



$[x]$ = maior inteiro menor ou igual a x.

Por outro lado, a condição de livre entrada também é satisfeita pois $X + y > \bar{X} - \bar{y} + \bar{y} = \bar{X}$ e portanto a única resposta ótima para uma firma que desejasse entrar seria zero.

O grande problema com o teorema acima não é, como se poderia pensar, o conjunto de hipóteses sobre F_β e CM_α. Curvas de custo médio em forma de U são admitidas como uma situação muito razoável quando o estoque de capital é dado. Um exemplo clássico é o da agricultura: considerando-se o volume de terras aráveis como dado e supondo que o único outro insumo seja o trabalho humano, existe uma produção para a qual o custo médio das unidades produzidas é mínimo. Intuitivamente, quando a produção é pequena os trabalhadores são forçados a desenvolver certas tarefas - por exemplo, a construção de um dique para irrigação - que também seria a mesma para o caso de uma produção um pouco maior. É claro que talvez precisássemos de mais trabalhadores, mas assim mesmo existiria um trecho em que o custo médio estaria caindo. Por outro lado, se a produção cresce muito é de se esperar que mais e mais cuidados devam ser tomados com a terra, não haveria também a possibilidade dos salários se manterem constantes se os excedentes de mão-de-obra fossem pequenos.

A demanda inversa F_β ser decrescente é uma hiótese muito natural, ela pode ser obtida como conseqüência, por exemplo, da hipótese de utilidade marginal decrescente.

Finalmente, o grande problema econômico com o teorema acima é a hipótese que as firmas possam nada produzir a um custo zero.

III.2 - A VERSÃO DE NTI-SHUBIK

Suponha que existam n firmas produzindo, firmas ativas, e que haja uma firma que pode ou não passar a produzir, mas se o fizer fará a um custo $D > 0$, firma potencial. Os custos variáveis são expressos para todas as firmas por uma função C duas vezes diferenciável, tal que $C' > 0$ e $C'' \geq 0$. Para as firmas ativas não existem custos fixos. E, finalmente, a função inversa de demanda é decrescente.

Definimos $\delta = 0$ ou 1 conforme a firma potencial produz ou não, então o lucro π_j da j-ésima firma é:

$$\pi_j^{\delta} = q_j \; F\left(\sum_{i=1}^{n} q_i + \delta q_o\right) - C(q_j)$$

onde j = 1 até n indica qual das firmas ativas e F é a função inversa de demanda. Colocando subscrito 0 como indicador da firma potencial temos:

$$\pi_o^{\delta} = \delta \left[q_o \; F\left(\sum_{i=1}^{n} q_i + \delta q_o\right) - C(q_o) - D \right]$$

Definamos uma estratégia para a j-ésima firma ativa como sendo uma função de distribuição sobre todas as produções não-negativas. Para a firma potencial temos uma função de distribuição sobre as produções não negativas se ela se decide a produzir e uma distribuição de probabilidade sobre a sua decisão de produzir.

$$F_j(\varepsilon) = \text{Prob}\,\{q_j < \xi\}$$

$$F_o(\varepsilon) = \text{Prob}\,\{q_o < \xi \mid \delta \mid\}$$

$$h_j = \text{Prob}\,\{\delta = \nu\}, \; \nu = 0,1.$$

O lucro esperado nessas estratégicas é:

$$E\Pi_j^{\delta} = \sum_{\delta=0}^{1} \left[\int \Pi_j^{\delta} \; dF \right] h_j$$

j = 1 até n e

$$E\Pi_o^{\delta} = \sum_{\delta=0}^{1} \left[\int \Pi_o^{\delta} \; dF \right] h_j$$

onde $dF = \prod_{i=1}^{n} dF_i$

<u>Definição 2</u>: Um equilíbrio com livre entrada estocástico é um conjunto de n + 2 distribuições de probabilidade F_j^*, j = 1 até n F^*_o e h_δ^* tal que se uma firma trocar F_j^* por uma F_j ou F^*_o, h_δ^* por F_o, h_δ ela não poderá aumentar o seu lucro esperado.

É possível sob certas hipóteses se mostrar (Nti e Shubik [1]) que sem perda de generalidades na procura de um equilíbrio não-cooperativo estocástico podemos nos restringir ao caso em que as firmas produzem quantidades não aleatórias de produto e onde a única randomização possível é a decisão de entrar ou não da firma potencial.

Neste caso acima chamaremos, sem medo de confusão, a probabilidade da firma potencial de entrar de δ. Da mesma forma os lucros esperados se escreverão:

$$\Pi_o^{\delta} = \delta \left[q_o F \left(\sum_{i=1}^{n} q_i + q_o \right) - C(q_o) - D \right]$$

$$\Pi_j^{\delta} = (1 - \delta) \left[q_j F \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right) - C(q_j) \right] + \delta \left[q_j F \left(\sum_{i=1}^{n} q_i + q_o \right) - C(q_j) \right]$$

Vamos completar as hipóteses sobre a F dizendo que ela é duas vezes diferenciável, $F(0) > 0$, existe $Q > 0$ tal que $F(q) = 0$ se $q > Q$ e F é decrescente em $0, Q$. Além disso, $F'(q) < 0$ e $F''(q)$ para todo $q \in (0,Q)$ são convexos, o que implica que são contrácteis. Da mesma forma, fixado $\hat{q}_o = (q_1, \ldots q_n)$ tomamos

$$\beta_o(\hat{q}_o) = \{(\delta^*, q^*_o) : \Pi_o^{\delta^*} (\hat{q}_o; q_o^*) \geq \Pi_o^{\delta} (\hat{q}_o; q_o), \forall (\delta, q_o)\}$$

e afirmamos que $\beta_o(\hat{q}_o)$ é contráctil. Com efeito, como

$$q_o F \left(\sum_{i=1}^{n} q_i + q_o \right) - C(q_o) - D$$

é estritamente côncava em q_o, existe um ponto $\bar{q}_o$ no qual ela vale sem máximo. Temos então três possibilidades:

1ª) $\bar{q}_o F \left(\sum_{i=1}^{n} q_i + \bar{q}_o \right) - C(\bar{q}_o) - D < 0;$

neste caso a resposta ótima é $\beta_o(\hat{q}_o) = \{(0, q_o^*) : 0 \leq q_o^* \leq Q\}$

2ª) $\bar{q}_o F \left(\sum_{i=1}^{n} q_i + \bar{q}_o \right) - C(\bar{q}_o) - D > 0;$

neste caso a resposta ótima é

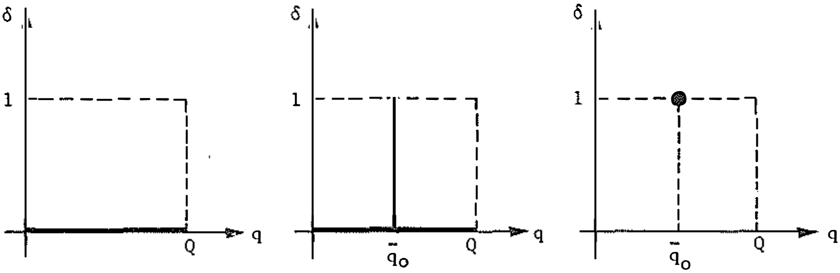
$$\beta_o(\hat{q}_o) = \{(1, \bar{q}_o)\}$$

3ª) $\bar{q}_o F(\sum_{i=1}^{n} q_i + \bar{q}_o) - C(\bar{q}_o) - D = 0;$

neste caso a resposta ótima é

$$\beta_o(\hat{q}_o) = \{(0, q_o^*) : q_o^* \varepsilon [0,Q]\} \cup \{(\delta, \bar{q}_o) : 0 < \delta < 1\}$$

As três situações estão apresentadas abaixo.



Logo $\beta_o(\hat{q}_o)$ é contráctil.

Usamos então o seguinte teorema devido a Eilenberg e Montgomery [1].

<u>Teorema</u>: Seja Z um poliedro contráctil e g: Z → Z uma correspondência semicontínua superiormente, então se para cada z ε Z, g(z) é contráctil, existe um z*ε g(z*).

Observando que agora um equilíbrio não-cooperativo estocástico é uma (n + 2) - upla $(\delta^*, q_o^*, \ldots q_n^*)$ podemos enunciar:

<u>Teorema 2</u>: Nas condições acima existe um equilíbrio estocástico não-cooperativo.

<u>Esboço de Prova</u>: Fixe $(\delta, \hat{q}_j) = (\delta, q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots q_n)$ e com a notação da seção II tome

$$\beta_j(\delta, \hat{q}_j) = \{q^*j : \Pi_j^{\delta}(\hat{q}_j; q^*_j) >$$
$$\geq \Pi_j^{\alpha}(\hat{q}_j; q_j), \ \forall q_j\}$$

Como Π_j^δ é côncava em q_j, os $\beta_j(\delta, \hat{q}_j)$ são convexos, e a definição de g é feita naturalmente como

$$g: (\delta, q_o, \ldots q_n) \longrightarrow \beta_o (\bar{q}_o) \times \beta_1 (\delta, \bar{q}_1) \times \ldots \times \beta_n (\delta, \bar{q}_n)$$

Deixamos sem fazer a prova de que a g é semi-contínua superiormente e podemos concluir pelo teorema acima que existe um equilíbrio.

BIBLIOGRAFIA

1) BERGE, C.- Topological Spaces -Oliver and Boyd - Edinburg 1963.

2) BERGE, C.- Théorie Générale des Jeux a n Personnes Gauthier-Villars - Paris 1957.

3) BERTRAND, J. - Théorie Mathématique de la Richese Sociale et Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses - Jornal des Savants 1883, 499-508.

4) CHAMBERLAIN, E.H. - The theory of Monopolistic Competition - Harvard University Press. - Cambridge, Mass. 1956.

5) COURNOT, A. - The Mathematical Principles of the Theory of Wealth - Richard D. Irwin, Inc. - Homewood, Illinois, 1963.

6) DUGUNDJI, J. - Topology - Allyn and Bacon, New York.

7) EILENBERG, S. e MONTGOMERY, D. - Fixed Point Theorems for Multivalued Transformations - Amer. J. Math. 68 (1945), 214-222.

8) FRIEDMAN, J. - Oligopoly and the Theory of Games - North-Holland - Amsterdam, 1979.

9) FRIEDMAN, J. - Reaction Functions as Nash Equilibria - Review of Economic Studies 43, pag. 83-90.

10) HART, O. - Monopolistic Competition in a Large Economy with Differentiated Commodities - Review of Ec. Studies 1979, 1-30.

11) KAKUTANI, S. - A Generalization of Brower fixed point theorem - - Duke Math. Journal 8 (1941), 457-459.

12) LIMA, E.L. - Elementos de Topologia Geral - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. - Rio de Janeiro 1976.

13) NASH, J. - Non-cooperative games - Annals of Mathematics 45(1951), 286-295.

14) NOVSHEK, W. - Cournot Equilibrium with Free Entry - Rev. Ec. Studies 1980, 473-486.

15) NOVSHEK, W. e SONNENSCHEIN, H. - Cournot and Walras Equilibrium - Journal of Economic Theory 19 (1978), 223-266.

16) NTI, K.O. e SHUBITH, M. - Noncooperative Oligopoly with Free Entry. - J.E.T. 24 (1981), 187-204.

17) SIMONSEN, M.H. - Teoria Microeconômica - Fundação Getúlio Vargas - Rio de Janeiro 1967.

18) SOBEL, M.J. - Noncooperative Stochastic Games - Annals of Mathematical Statistics 42 (1971), 1930-1935.

19) SOBLE, M.J. - Continuos Stochastic Games - J. Appl. Prob. 10 (1973), 597-604.

20) ROBERTS, J. e SONNENSCHEIN, H. - On the Existence of Cournot Equilibrium without Concave Profit Functions - J.E.T. 13 (1976), 112-117.

21) TARSKI, A. - A Lattice-Theoretical Fixpoint Theorem and its Applications - Pacific J. Math. 5 (1955), 285-309.