FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

MATHEUS LOPES PUGLIELE DANELLA

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXA DE JUROS DO MERCADO BRASILEIRO ENTRE 2020 E 2022 VIA MODELO DE BLACK-KARASINSKI

SÃO PAULO

2023

MATHEUS LOPES PUGLIELE DANELLA

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXA DE JUROS DO MERCADO BRASILEIRO ENTRE 2020 E 2022 VIA MODELO DE BLACK-KARASINSKI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Finanças Quantitativas.

Orientador:
Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO

2023

Danella, Matheus Lopes Pugliele.
Análise do Comportamento da Estrutura a Termo de Taxa de Juros do Mercado Brasileiro Entre 2020 e 2022 via Modelo de Black-Karasinski / Matheus Lopes Pugliele Danella – 2023.
60 f.

Orientador: Afonso de Campos Pinto.
Dissertação (mestrado profissional MPE) – Fundação Getulio Vargas, Escola de Economia de São Paulo.

1. Taxas de juros 2. Modelos matemáticos. 3. Mercado financeiro - Brasil. I. Pinto, Afonso de Campos. II. Dissertação (mestrado profissional MPE) – Escola de Economia de São Paulo. III. Fundação Getulio Vargas. IV. Título.

CDU 336.781.5(81)

Ficha Catalográfica elaborada por: Isabele Oliveira dos Santos Garcia CRB SP-010191/O

Biblioteca Karl A. Boedecker da Fundação Getulio Vargas - SP

MATHEUS LOPES PUGLIELE DANELLA

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA A TERMO DE TAXA DE JUROS DO MERCADO BRASILEIRO ENTRE 2020 E 2022 VIA MODELO DE BLACK-KARASINSKI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de concentração:
Finanças Quantitativas.

Data da Aprovação: 25 / 07 / 2023

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto
(Orientador)
FGV - EESP

Prof. Dr. Alessandro Martim Marques
FGV-EESP

Prof. Dr. Flávio Almeida de Magalhães Ciparrone
Poli-USP

Agradecimentos

Agradeço à minha família, aos meus amigos a e todos os colegas de trabalho que me acompanharam ao longo do tempo. Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto, pela orientação e disponibilidade durante a formulação e escrita deste trabalho. Agradeço à minha mãe, por todo o apoio e incentivo dado ao longo da minha trajetória acadêmica e agradeço à minha esposa Millena, pela paciência, apoio e compreensão ao longo dessa jornada.

Por fim, agradeço a Deus pela minha saúde e por guardar o meu caminho até aqui.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar como a aplicação do modelo de Black-Karasinski implementado a partir de árvores trinomiais se compara à curva base de juros do mercado brasileiro. Os períodos utilizados na análise foram fechamentos mensais de 2020 (momento de início da pandemia do Covid-19), fechamentos mensais de 2022 (período final da pandemia) e datas em 2022 nas quais a taxa básica de juros do mercado brasileiro foi ajustada positivamente após reuniões do Copom. As diferenças entre as curvas de juros simuladas e a curva de juros de mercado foram menores para momentos de juros baixos (níveis em cerca de 2%) e maiores para momentos de ajustes de taxa de juros ou juros altos (níveis entre 10% e 14%). Além disso, as diferenças são crescentes ao longo das *forwards* da curva, portanto o uso para produtos com prazos longos deve ser feito com cautela. Por fim, em relação à janela de calibração utilizada, somente os resultados obtidos em 2022 indicaram que a calibração utilizando séries históricas curtas produz maior aderência à curva de mercado, sendo que no restante dos períodos não houve nenhum indicativo de superioridade na utilização de um tamanho específico de série histórica.

Palavras-chave: Modelo de Black-Karasinski. Taxas de juros. Árvores trinomiais. Mercado financeiro brasileiro.

ABSTRACT

This work aims to analyze how the application of the Black-Karasinski model implemented from trinomial trees compares to the interest rates base curve of the Brazilian market. The periods used in the analysis were the monthly closings of 2020 (the start of the Covid-19 pandemic), the monthly closings of 2022 (the end of the pandemic) and dates in 2022 in which the basic interest rate in the Brazilian market was adjusted positively after the Copom meetings. The differences between the simulated yield curves and the market yield curve were smaller for moments of low interest rates (levels around 2%) and larger for moments of interest rate adjustments or high interest rates (levels between 10% and 14%). Furthermore, the differences are increasing along the *forwards* of the curve, so the use for products with long terms must be done with caution. Finally, regarding the length of the interest rate historical series used for calibration, only the results obtained in 2022 indicated that the calibration using shorter series produced greater adherence to the market curve, while for the rest of the periods there was no concrete indication of better adherence by using shorter or longer historical series.

Keywords: Black-Karasinski model. Interest rates. Trinomial trees. Brazilian financial market.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de ramificações para o método de árvores trinomiais. 19
Figura 2 – Histórico de 12 anos da taxa de juros brasileira. 23
Figura 3 – Exemplo de ETTJ obtida a partir de 50 simulações. 25
Figura 4 – Comparativo das ETTJs obtidas a partir de n simulações 26
Figura 5 – Momentos de juros base escolhidos para simulações 27
Figura 6 – Simulações da curva pré em 29/05/2020. 30
Figura 7 – Simulações da curva pré em 31/07/2020. 32
Figura 8 – Simulações da curva pré em 31/05/2022. 34
Figura 9 – Simulações da curva pré em 31/10/2022. 35
Figura 10 – Simulações da curva pré em 17/03/2022. 37
Figura 11 – Simulações da curva pré em 20/06/2022. 39
Figura 12 – Simulações da curva pré em 30/06/2020. 46
Figura 13 – Simulações da curva pré em 31/08/2020. 48
Figura 14 – Simulações da curva pré em 30/09/2020. 49
Figura 15 – Simulações da curva pré em 30/10/2020. 50
Figura 16 – Simulações da curva pré em 30/11/2020. 51
Figura 17 – Simulações da curva pré em 30/06/2022. 52
Figura 18 – Simulações da curva pré em 29/07/2022. 53
Figura 19 – Simulações da curva pré em 31/08/2022. 54
Figura 20 – Simulações da curva pré em 30/09/2022. 55
Figura 21 – Simulações da curva pré em 30/11/2022. 56
Figura 22 – Simulações da curva pré em 03/02/2022. 57
Figura 23 – Simulações da curva pré em 05/05/2022. 58
Figura 24 – Simulações da curva pré em 04/08/2022. 59

Lista de tabelas

Tabela 1 – Quantidade de dias úteis de cada janela utilizada 24
Tabela 2 – Datas escolhidas para a simulação 24
Tabela 3 – Diferença entre curva base e BK para 29/05/2020. 31
Tabela 4 – Diferença entre curva base e BK para 31/07/2020. 33
Tabela 5 – Diferença entre curva base e BK para 31/05/2022. 35
Tabela 6 – Diferença entre curva base e BK para 31/10/2022. 36
Tabela 7 – Diferença entre curva base e BK para 17/03/2022. 38
Tabela 8 – Diferença entre curva base e BK para 20/06/2022. 40
Tabela 9 – Diferença entre curva base e BK para 30/06/2020. 47
Tabela 10 – Diferença entre curva base e BK para 31/08/2020. 48
Tabela 11 – Diferença entre curva base e BK para 30/09/2020. 49
Tabela 12 – Diferença entre curva base e BK para 30/10/2020. 50
Tabela 13 – Diferença entre curva base e BK para 30/11/2020. 51
Tabela 14 – Diferença entre curva base e BK para 30/06/2022. 52
Tabela 15 – Diferença entre curva base e BK para 29/07/2022. 53
Tabela 16 – Diferença entre curva base e BK para 31/08/2022. 54
Tabela 17 – Diferença entre curva base e BK para 30/09/2022. 55
Tabela 18 – Diferença entre curva base e BK para 30/11/2022. 56
Tabela 19 – Diferença entre curva base e BK para 03/02/2022. 57
Tabela 20 – Diferença entre curva base e BK para 05/05/2022. 58
Tabela 21 – Diferença entre curva base e BK para 04/08/2022. 59

Lista de abreviaturas e siglas

ALM	Gestão de ativos e passivos *(Asset and Liability Management)*
BK	Black-Karasinski
BM&F	Bolsa de Mercadorias e Futuros
CDI	Certificado de depósito interbancário
CIR	Cox, Ingersoll e Ross
Copom	Comitê de Política Monetária
DI	Depósitos interfinanceiros
ETTJ	Estrutura a termo de taxa de juros
IDI	Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia

Sumário

1 Introdução 11

2 Revisão Bibliográfica 13

3 Modelo Proposto 16

3.1 Modelo de Black-Karasinski 16

3.2 Método de Calibração 17

3.3 Discretização e Implementação do Modelo 18

4 Metodologia 21

4.1 Curva de Juros Pré-fixados 21

4.2 Dados de Entrada 22

4.3 Calibração do Modelo 23

4.4 Simulação da ETTJ brasileira 25

5 Resultados 29

5.1 Estrutura a Termo 29

5.1.1 Fechamentos mensais em 2020 29

5.1.2 Fechamentos mensais em 2022 33

5.1.3 Datas após reuniões do Copom com mudanças nos juros 37

6 Conclusão 41

Referências 43

Apêndices 45

APÊNDICE A Demais datas simuladas 46

A.1 Fechamentos mensais em 2020 46

A.2 Fechamentos mensais em 2022 52

A.3 Datas após reuniões do Copom com mudanças nos juros 57

1 Introdução

O mercado brasileiro em sua grande maioria é composto por investimentos atrelados à taxa de juros local. Esta por sua vez vêm passando por vários momentos de oscilações, sejam eles advindos de políticas monetárias específicas ou condições econômicas globais e internas. No âmbito de uma instituição financeira, portanto, é fundamental a correta estimação do cenário de juros. É a partir dele que a precificação de produtos é possível, o *hedge* de operações financeiras é realizado e as métricas de risco são produzidas.

Desde a segunda metade do Século XX, diversos foram os modelos elaborados com o objetivo de estimar preços ou fatores de riscos em instantes futuros. No escopo dessa teoria, uma classe específica denominada de modelos de *short-rate* interpreta que a estimação do preço ou taxa de um determinado instrumento pode ser realizada para cada um dos instantes subsequentes de maneira infinitesimal. Essa estimação, por sua vez, dependeria de um valor de taxa média ou preço médio de longo prazo, uma velocidade de reversão à essa média e, por fim, a volatilidade do ativo subjacente a ser estimado.

No entanto, os primeiros modelos da classe dos *short-rate* tinham como resultado final o valor absoluto da taxa de juros de longo prazo. Portanto, a distribuição dos resultados dos primeiros modelos a serem criados assumia caráter normal. Considerando que as taxas de juros e preços praticados pelo mercado possuem valores majoritariamente positivos, modelos resultantes em distribuições normais introduzem o problema de estimação de taxas e valores negativos. O modelo proposto por Black e Karasinski (1991) (BK) mitiga essa inconsistência, afinal sua formulação matemática deixa explícita a ideia de que o logaritmo natural da taxa de juros ou preço é o produto da estimação.

Mesmo solucionando o problema de taxas ou preços negativos, o modelo BK não admite uma solução analítica. Portanto, para realizar uma aplicação deste num caso prático, é necessária a implementação via árvores. A denominação vem da ideia de que para um valor num instante de tempo específico, estima-se o próximo instante de tempo considerando que o valor suba, desça ou se mantenha constante. Como temos três possibilidades para cada nó da árvore, esta é denominada árvore trinomial.

Outro aspecto que influencia de forma crucial os resultados do modelo é o método de calibração. Nele é onde os parâmetros de entrada são estimados. Neste trabalho, foi utilizada a técnica de calibração proposta em Brigo et al. (2007) que tem como objetivo estimar os parâmetros de entrada de forma conjunta.

Por fim, os períodos selecionados para verificação da efetividade das estimações de curva de juros produzidas pelo modelo BK foram fechamentos mensais em 2020, num período de juros baixos e de início de pandemia do Covid-19; fechamentos mensais em

2022, num período de juros mais altos e de fim de pandemia; e também datas específicas em que pode ser observado um *stress* na curva de juros advindo de decisões do Copom em que a taxa básica de juros sofreu aumento.

Em 2020, a economia brasileira passou por uma forte retração do nível da taxa de juros base, iniciado em meados de 2019. Em 2020 foram observados os menores níveis de juros históricos já registrados na economia brasileira. No entanto, nos dois anos seguintes a taxa básica de juros sofreu seguidos aumentos definidos via reuniões do Copom e, em meados de 2022, o cenário dos juros na economia brasileira já era completamente diferente do cenário observado em 2020. Isto deve-se em parte à pandemia do Covid-19, esta contribuiu para um aumento geral nos juros de vários outros países ao redor do mundo. Portanto, este trabalho visa comparar o desempenho do modelo de Black-Karasinski implementado a partir de árvores trinomiais para estimar a curva de juros do mercado brasileiro em momentos completamente distintos da economia.

Além disso, foram comparadas as efetividades das estimações produzidas com *inputs* calibrados a partir de janelas históricas distintas. Neste trabalho, foram utilizadas janelas de 1 mês, 3 meses, 6 meses, 2 anos, 5 anos e 10 anos. Logo, é interessante verificar a efetividade do modelo BK para cenários de taxa de juros distintos, momentos de stress da taxa de juros e a aderência dos resultados do modelo a partir de parâmetros de entrada gerados por diferentes janelas históricas.

Este trabalho está organizado em seis Capítulos. No Capítulo 2 é realizada uma revisão bibliográfica a fim de contextualizar este trabalho entre os estudos já feitos sobre o tema. No Capítulo 3 é apresentado o modelo BK, a teoria da calibração e o método de discretização e implementação do modelo. No Capítulo 4, são descritos a curva de juros, os dados de entrada, a implementação da calibração e simulações do modelo. No Capítulo 5 são apresentados os resultados e a partir destes temos as conclusões no Capítulo 6.

2 Revisão Bibliográfica

O estudo da aplicação do cálculo estocástico para projeção da dinâmica da taxa de juros é uma área com grande arcabouço teórico e variados estudos práticos envolvendo uma lista extensa de mercados e instrumentos financeiros.

Dentre os modelos de estimação de taxas de curto prazo (*Short-Rates*), o modelo de Merton (1973) foi o primeiro a considerar um movimento browniano para estimar a taxa de juros, porém com *drift* nulo. Posteriormente, Vasicek (1977) incorpora um termo de *drift* na estimativa, sendo este função de uma velocidade de reversão à média e taxa de juros de longo prazo. Porém, ambos modelos admitem possibilidade de taxas de juros negativas.

Na década seguinte, o modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985), impede a possibilidade de estimação de taxas de juros menores do que zero, incorporando a raiz quadrada da taxa de juros estimada no termo aleatório do modelo. No entanto, os três modelos citados admitem a possibilidade de arbitragem, ou seja, não levam em consideração a estrutura da taxa de juros da curva no cenário base.

Visando propor uma estrutura de não-arbitragem, no âmbito do cálculo estocástico, o modelo de Ho e Lee (1986) considera calibrar o termo do *drift* a partir de dados de mercado e função do tempo. Porém, levando em consideração que a distribuição resultante dos valores de saída do modelo é gaussiana, há possibilidade de taxas de juros negativas. Além disso, não há reversão à média. Neste escopo, o modelo de Hull e White (1990) incorpora a reversão à média num contexto de não-arbitragem, porém mantendo a distribuição gaussiana das saídas do modelo e, consequentemente, admitindo possibilidade de taxas negativas.

Uma das soluções possíveis para eliminar a possibilidade de *outputs* negativos é encontrada em Black e Karasinski (1991), tendo framework semelhante ao de Hull-White, porém com taxas de juros apresentando distribuição log-normal. Sendo assim, todas as taxas estimadas têm valor positivo.

O estudo da aplicação de modelos da classe *short-rate* para variados mercados é tema de uma lista extensa de trabalhos já realizados. Em Gluckstern (2001), é realizado estudo da aplicação dos modelos Hull-White e Black-Karasinski para a precificação de opções sobre o IDI a partir de árvores trinomiais, aplicando o coeficiente de desigualdade de Theil para medir o desempenho de ambos. Neste estudo, o modelo de Hull-White obteve maior aderência mesmo com suas limitações conceituais.

Em Almeida, Yoshino e Schirmer (2003), foi realizado outro estudo verificando a

possibilidade de uso do modelo de Hull-White unifatorial em derivativos de renda fixa brasileiros, e seu resultado mostrou viabilidade de calibração deste modelo, apesar da escassez de dados do mercado local, somente nos períodos de estabilidade.

Barbachan e Ornelas (2003) se utilizam do modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985) unifatorial para apreçar opções de IDI a partir de dados históricos. Além disso, o preço teórico proposto a partir do modelo CIR é comparado ao preço teórico considerando a modelagem em Vasicek (1977). Para dados de frequência mensal, os prêmios teóricos do modelo CIR ficaram próximos aos prêmios de mercado, enquanto o modelo de Vasicek apresentou prêmios muitos superiores. Para dados de frequência diária, ambos os modelos apresentaram prêmios abaixo dos prêmios de mercado.

Poon, Khan e Guan (2008) apresentam um estudo comparativo da implementação dos modelos de Hull-White e Black-Karasinski para ALM no mercado Europeu e Americano a partir de dados históricos entre 2005 e 2007. Os resultados mostraram que em relação à simulação da estrutura a termo, o modelo Hull-White unifatorial apresentou superioridade em relação ao modelo de Black-Karasinski. No entanto, para aplicações em derivativos, mais especificamente *Swaptions* de Bermuda, o modelo de Black-Karasinski obteve melhor performance.

Borges (2017) utiliza a fórmula fechada do modelo CIR atualizada com a adição do preço de mercado ao risco, como proposto em Barbachan e Ornelas (2003), para calcular o preço de opções de IDI. No entanto, os resultados obtidos foram inconsistentes em relação aos preços praticados no mercado.

No âmbito de calibragem dos modelos da classe de *short-rate*, Brigo et al. (2007) introduz alguns métodos de calibração para os parâmetros de *input* (volatilidade e parâmetro de reversão à média) a partir de dados históricos. Os métodos em sua maioria apresentam resultados acoplados, ou seja, os parâmetros dos modelos *short-rate* são obtidos de forma interdependente.

Silva (2010) apresenta três métodos distintos de calibragem para o modelo de Black-Karasinski a partir da hipótese de não-arbitragem. Sendo o primeiro a solução numérica da condição de não-arbitragem, o segundo a inversão dos parâmetros do modelo de forma exata e o terceiro uma solução aproximada a partir da redução do problema. Os resultados dos trabalho indicam que os três métodos são equivalentes para uma curva de rendimento específica.

Mais recentemente, Nakamura (2020) realizou um estudo de aplicação do modelo CIR considerando eventuais saltos ao mercado brasileiro. O interessante neste estudo é a incorporação de efeitos similares ao ocorridos na taxa de juros local após reuniões do COPOM. Os resultados foram satisfatórios para parte da amostra de derivativos tomados, porém a autora ressalta cautela ao uso generalizado do modelo proposto por conta de

alguns resultados divergentes.

Outro estudo muito relacionado com o presente trabalho é o apresentado em Oliveira (2005), no qual o modelo de Black-Karasinski foi aplicado a partir de árvores trinomiais com finalidade de previsão da ETTJ brasileira; apreçamento de opções de vencimentos e classes específicas; e comparação dos preços com os obtidos pelo modelo de Black (1976). Os resultados indicaram um bom *fit* à ETTJ brasileira e superioridade do modelo BK em relação ao de Black para opções cujo vencimento era superior ao de trinta dias. Como sequência do trabalho é introduzida a ideia de abordagens alternativas para a calibração dos parâmetros e de *hedge* de opções via gregas (delta, gama e vega).

Por fim, o presente estudo propõe a aplicação do modelo de Black-Karasinski implementado a partir de árvores trinomiais e a comparação dos resultados obtidos em relação à curva de juros base do mercado brasileiro em momentos de juros baixos (em 2020), juros altos (em 2022) e momentos de *stress* na curva de juros após decisões do Copom. Além disso, são escolhidas algumas janelas históricas específicas para calibrar os parâmetros de entrada e os resultados obtidos a partir de cada calibração serão comparados à curva de juros do mercado.

O próximo capítulo apresenta o arcabouço teórico e prático necessário para realização do estudo descrito neste trabalho.

3 Modelo Proposto

Nas próximas subseções será apresentado o modelo de Black-Karasinski, o método de calibração utilizado para produzir os parâmetros de entrada e, por fim, a discretização e implementação do modelo.

3.1 Modelo de Black-Karasinski

Em 1991, Fischer Black e Piotr Karasinski formularam uma nova dinâmica de evolução das taxas de curto prazo (*short-rate*) a partir de uma distribuição log-normal. Este tipo de distribuição, portanto, não possibilita taxas de juros negativas, o que para a época o diferenciou dos modelos propostos anteriormente, já que a maioria assumia distribuição normal das taxas de juros. Dentro do arcabouço dos modelos de taxa de curto prazo, o modelo de Black-Karasinski é considerado de não-arbitragem, ou seja, seu *output* reflete a dinâmica dos preços de mercado. Em sua forma analítica, a equação proposta para a dinâmica das taxas de curto prazo pode ser visualizada abaixo:

$$dln(r) = [\theta_t - \alpha_t ln(r)]dt + \sigma_t dW_t \tag{3.1}$$

Em que:

- θ_t é a taxa de juros de longo prazo no instante t;
- α_t é a velocidade de reversão à média no instante t;
- σ_t é a volatilidade instantânea da taxa de juros no instante t;
- dW_t é um movimento browniano padrão.

O modelo acima soluciona o problema de taxas de juros negativas observado em Hull e White (1990), pois neste a distribuição das taxas de curto prazo assume caráter normal. Em linhas gerais, o modelo BK apresenta as seguintes propriedades:

1. Reversão à média: o modelo assume que a taxa de juros de curto prazo ao longo do tempo convergirá à uma taxa média de longo prazo;
2. O modelo assume que a volatilidade da taxa de juros de curto prazo é uma função do nível desta;

3. O modelo admite possibilidade de diferentes estruturas a termo a partir da modificação dos parâmetros de entrada.

Neste estudo em específico, o modelo de calibração escolhido foi o proposto em Brigo et al. (2007). A implementação do modelo foi realizada a partir de árvores trinomiais. A teoria por trás de ambos os métodos será abordada nas próximas duas seções.

3.2 Método de Calibração

Como comentado na Seção anterior, a estrutura a termo produzida pelo modelo de Black-Karasinski é função de dos parâmetros de entrada taxa de reversão à média, velocidade de reversão à média e a volatilidade da taxa de juros. Este trabalho utilizou um método de calibração a partir dos mínimos quadrados ordinários, considerando a estrutura da taxa de juros como um processo de reversão à média auto-regressivo de grau 1. Brigo et al. (2007) propõe um modelo de calibração considerando um processo de Ornstein-Uhlenbeck revertendo à média θ:

$$dx_t = \alpha(\theta - x_t)dt + \sigma dW_t \tag{3.2}$$

A solução para a equação diferencial estocástica acima pode ser visualizada abaixo:

$$x_t = \theta\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) + x_s e^{-\alpha(t-s)} + \sigma e^{-\alpha t}\int_s^t e^{\alpha u} dW_u \tag{3.3}$$

A versão discreta da equação acima utilizando um grid de tempo $t = t_0, t_1, t_2, ...$ com passos $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ é:

$$x(t_i) = c + bx(t_{i-1}) + \delta\epsilon(t_i) \tag{3.4}$$

na qual os coeficientes são definidos por:

$$c = \theta\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right) \tag{3.5}$$

$$b = e^{-\alpha\Delta t} \tag{3.6}$$

na qual $\epsilon(t)$ é um ruído branco Gaussiano ($\epsilon \sim N(0,1)$). A volatilidade associada ao ruído branco gaussiano pode ser encontrada a partir da isometria de Ito como:

$$\delta = \sigma\sqrt{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})/2\alpha} \tag{3.7}$$

A equação (3.4) pode ser interpretada também como um processo autoregressivo de primeira ordem $AR(1)$ e, considerando $0 < b < 1$ quando $\alpha > 0$ implicar que o $AR(1)$ é estacionário e reverte à uma média de longo prazo dada por θ. Logo, o valor esperado e sua variância de $x(t)$ dado $x(s)$ pode ser derivado da equação (3.3):

$$\mathbb{E}_s[x_t] = \theta + (x_s - \theta)e^{-\alpha(t-s)} \tag{3.8}$$

$$Var_s[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right) \tag{3.9}$$

Por fim, o método de estimação por mínimos quadrados ordinários do processo $AR(1)$ nos dá os parâmetros c, b e δ. A partir da resolução do sistema de três equações para os parâmetros, é possível encontrar a reversão a média de longo prazo θ, a velocidade de reversão à média α e a volatilidade σ:

$$\theta = c/(1 - b) \tag{3.10}$$

$$\alpha = -ln(b)/\Delta t \tag{3.11}$$

$$\sigma = \frac{\delta}{\sqrt{(b^2 - 1)\Delta t/2ln(b)}} \tag{3.12}$$

3.3 Discretização e Implementação do Modelo

Como pode ser visto na Seção anterior, o método de calibração proposto segue uma equação diferencial estocástica que admitia solução analítica. Para sua implementação fez-se necessária a discretização dessa solução em (3.4). A mesma necessidade é encontrada na aplicação do modelo, em que é preciso definir os passos ao longo da estrutura a termo da curva de juros e as probabilidades envolvidas na estimação.

O método escolhido para gerar a curva simulada foi o das árvores trinomiais. O método de árvore, basicamente, simula os possíveis caminhos de uma taxa de juros de curto prazo. No caso de árvores binomiais dois caminhos são simulados, enquanto no caso de árvores trinomiais temos três caminhos simulados. Para este estudo, os caminhos a serem sorteados foram p_u, p_m e p_d, que denotam uma taxa maior (p_u), igual (p_m) ou menor (p_d) do que a taxa de curto prazo no instante anterior, como pode ser visto na 1 a seguir:

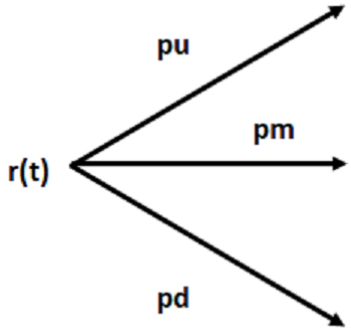

Figura 1 – Exemplo de ramificações para o método de árvores trinomiais.

Como p_u, p_m e p_d representam as probabilidades de um nó (i, j) da árvore de estados ter seu valor subsequente aumentado, mantido ou diminuído, a soma das probabilidades é 1. Para iniciar o método de implementação com os respectivos parâmetros de entrada já calibrados (a partir do modelo exposto no Subseção anterior), define-se o tamanho no passo no tempo Δt e o tamanho do passo no espaço Δx que neste caso assume a seguinte forma:

$$\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t} \tag{3.13}$$

Considerando um nó qualquer da árvore definido como (i, j), e associado à t a partir de $t = i\Delta t$, os caminhos p_u, p_m e p_d são definidas como:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{j^2\Delta t^2 - j\Delta t}{2} \tag{3.14}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - j^2\Delta t^2 \tag{3.15}$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{j^2\Delta t^2 + j\Delta t}{2} \tag{3.16}$$

O sorteio do caminho $a(t)$ a ser escolhido em cada nó é dado a partir do sorteio de um número p entre 0 e 1, seguindo as condições:

$$\begin{gathered}\text{Se } 0 \leq p \leq p_d \Rightarrow \text{escolhe-se o ramo inferior } (a_t = -1)\\ \text{Se } p_d \leq p \leq p_d + p_m \Rightarrow \text{escolhe-se o ramo do meio } (a_t = 0)\\ \text{Se } p_d + p_m \leq p \leq 1 \Rightarrow \text{escolhe-se o ramo superior } (a_t = 1)\end{gathered}$$

Após a escolha do ramo entre as probabilidades p_d, p_m e p_u, a distância a ser percorrida na árvore de espaços é dada por:

$$x_t = x_{t-1} + a_t \Delta x \tag{3.17}$$

em que $x_0 = 0$. Com isto a taxa de curto prazo para um instante t, denominada r_t, é calculada como:

$$r_t = exp(x_t) \tag{3.18}$$

Após o sorteio da direção do passo em um determinado instante de tempo t, é realizado o ajuste do *drift* considerando-se o fator de desconto da curva pré-fixada realizada no mercado. Para calcular o ajuste, foi utilizado um método numérico denominado *Newton-Raphson* a fim de encontrar o valor médio do *drift* denotado por $\phi_{n,t}$ que minimize a função de diferença $Dif(r_t^*, x_{n,t}, \phi_t)$ entre o fator de desconto da taxa da curva de mercado r^* versus o fator de desconto calculado a partir da média das taxas simuladas somadas a um *drift* $r_{n,t} = exp(x_{n,t} + \phi_t)$ num instante t para cada n simulação:

$$Dif(r_t^*, x_{n,t}, \phi_t) = \frac{1}{(1 + r_t^*)^{t/252}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + exp(x_{n,t} + \phi_t))^{t/252}} \tag{3.19}$$

Portanto, após encontrado o ajuste no *drift* ϕ_t para um instante t, é necessário recalcular os resultados das simulações da árvore de taxas de curto prazo $r_{n,t}$ para que seja possível capturar a dinâmica da curva observada no mercado:

$$r_{n,t} = exp(x_{n,t} + \phi_t) \tag{3.20}$$

Finalmente, o valor final da taxa de curto prazo r_t é calculado pela da média das n simulações:

$$r_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{i,t}}{n} \tag{3.21}$$

Em resumo, a partir do sorteio dos nós da árvore trinomial, são definidos os caminhos a serem percorridos para cada simulação. Com os caminhos definidos, as taxas de juros simuladas são obtidas utilizando (3.17) e (3.18). A partir da obtenção das taxas de juros, é realizado o ajuste do *drift* das simulações *versus* o comportamento observado no mercado via método de *Newton-Raphson*. Este ajuste é aplicado à todas as simulações, assim o comportamento da árvore condiz com a curva de juros realizada. Por fim, as taxas simuladas são recalculadas e o valor esperado (média) das simulações é obtido para cada uma das *forwards* em t.

4 Metodologia

O objetivo deste capítulo é apresentar o passo a passo da implementação do modelo de Black-Karasinski, a partir da coleta de dados de fontes oficiais externas (B3) até a aplicação do método de árvores trinomiais para gerar os possíveis cenários da estrutura a termo da taxa de juros do mercado brasileiro.

As simulações foram realizadas para datas em 2020 e 2022, enquanto o tamanho das curvas resultantes do modelo cobre os instantes de maturidade entre $\tau \in [1, 2520]$ dias úteis, com passos de 1 dia útil.

4.1 Curva de Juros Pré-fixados

No Brasil, o produto Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros (Futuro de DI), é o referencial para a taxa de renda fixa. Cada contrato de Futuro de DI tem como ativo subjacente a taxa média diária dos Depósitos Interfinanceiros (DI) entre a data de negociação e a data de vencimento. Diariamente, a BM&F constrói uma curva denominada DI x PRÉ e, tal como exposto em BM&F (2022), esta corresponde à curva de juros construída a partir dos preços de ajustes dos vencimentos do Futuro de DI de um dia (DI1) negociado na BM&F.

Para a construção da curva *DI x PRÉ* de um determinado dia t, são necessários os seguintes insumos:

- r: representa a taxa CDI referencial do dia t;
- r_{DI1}: valor da taxa de ajuste do Futuro de DI1 do dia t.

Após serem obtidos os insumos, a construção da curva é dada da seguinte forma:

- **Primeiro vértice**: representado pelo parâmetro r_1;
- **Vértices não interpolados**: representados pelo valor r_{DI1} num instante *forward* τ;
- **Vértices interpolados**: calculados a partir de uma função de interpolação *flat forward* 252;
- **Após o último vértice não interpolado**: *flat-forward* 252 considerando como vértice anterior o penúltimo vértice de DI1 não interpolado.

A função de interpolação *flat-forward* 252 para uma *forward* específica r_τ pode ser visualizada abaixo:

$$r_\tau = \left(\left(\left(1 + \frac{r_{\tau-a}}{100}\right)^{\frac{\tau-a}{252}} \times \left(\frac{\left(1 + \frac{r_{\tau+b}}{100}\right)^{\frac{\tau+b}{252}}}{\left(1 + \frac{r_{\tau-a}}{100}\right)^{\frac{\tau-a}{252}}} \right)^{\frac{\tau-(\tau-a)}{\tau+b-(\tau-a)}} \right)^{\frac{252}{\tau}} - 1 \right) \times 100 \tag{4.1}$$

Em que:

- r_τ é a taxa de juros *forward* a ser estimada no instante τ;
- $r_{\tau-a}$ é a taxa de juros *forward* no instante anterior $\tau - a$;
- $r_{\tau+b}$ é a taxa de juros *forward* no instante posterior $\tau + b$;

Assim, é possível construir a curva pré que após as simulações será utilizada como dado referencial para comparação e avaliação do desempenho da aplicação proposta neste trabalho.

4.2 Dados de Entrada

Para alimentar o método de calibração proposto em Brigo et al. (2007) e também para construir as curvas pré-fixadas referenciais a fim de comparar o desempenho da aplicação do modelo de Black-Karasinski, foi necessário capturar o referencial BM&F da taxa DI x Pré disponível no *website* <https://www2.bmf.com.br/pages/portal/bmfbovespa/boletim1/txref1.asp>. Os dados da curva Pré foram coletados de 30/10/2012 até a data 30/11/2022 e interpolados quando necessário para gerar a curva pré base. No caso do método de calibração, o dado de entrada foi o primeiro vértice da curva de DI para um histórico de aproximadamente 12 anos (Abril/2012 até Novembro/2022):

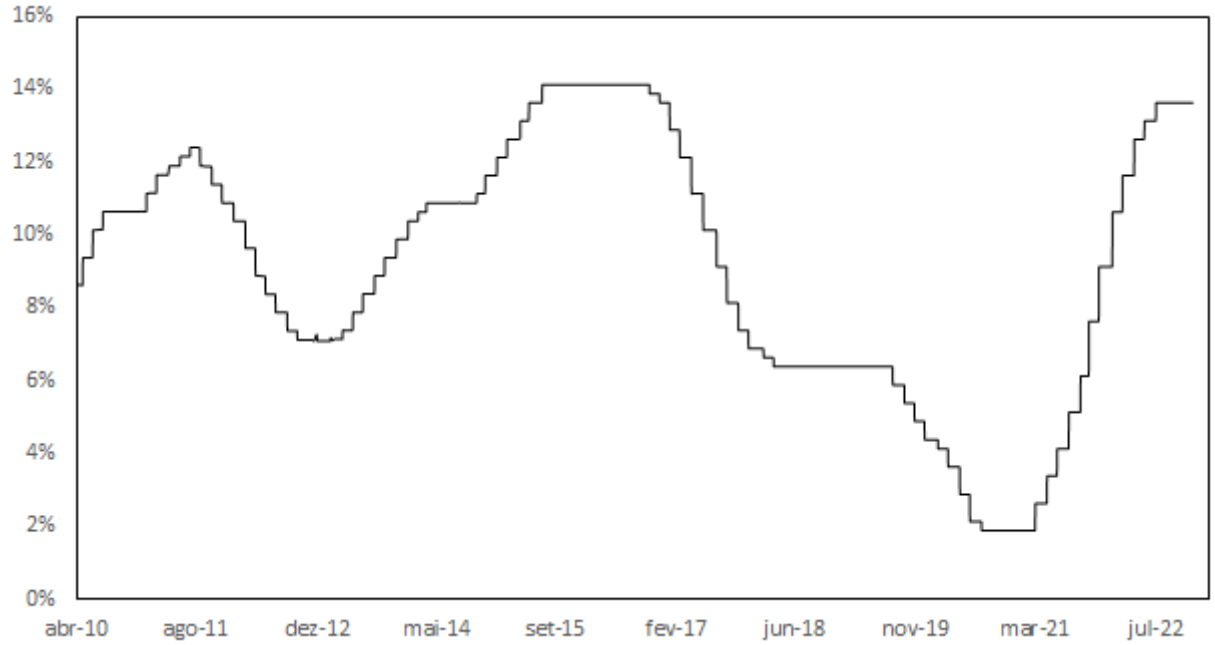

Figura 2 – Histórico de 12 anos da taxa de juros brasileira.

Como é possível visualizar na Figura 2, a taxa de juros brasileira passou por várias fases ao longo dos ciclos econômicos no passado. No entanto, o mais notável é a baixa de juros ocorrida durante o governo Dilma até meados de 2018 e, mais recentemente, a baixa histórica ao patamar de cerca de 2% em meados de 2021. No entanto, de 2021 até a metade de 2022, a taxa de juros seguiu um movimento de subida em cada reunião do Copom e voltou a um patamar na casa de dois dígitos, em 13.65%.

4.3 Calibração do Modelo

Como pode ser visto em Brigo et al. (2007), o *framework* de calibração de modelo proposto não é sugerido para nenhum comprimento de janela histórica em específico. Portanto, para poder avaliar o efeito da janela do tempo nos dados de entrada, o autor deste trabalho decidiu elencar alguns tamanhos específicos destas a fim de comparar a aderência dos resultados obtidos em relação à curva pré-fixada base do mercado.

Na Seção anterior, ficou claro o caráter transitório da taxa de juros brasileira quando olhamos um histórico de um pouco mais de uma década. Como não há um consenso sobre o nível da taxa de juros do mercado brasileiro, faz-se interessante testar janelas de tempo longas e curtas para gerar os parâmetros de entrada do modelo de Black-Karasinski. Consequentemente, as seguintes janelas históricas foram utilizadas para estimar os parâmetros de entrada do modelo:

Janela	**Qtde. de dias úteis**
1 mês	21
3 meses	63
6 meses	126
1 ano	252
2 anos	504
5 anos	1260
10 anos	2520

Tabela 1 – Quantidade de dias úteis de cada janela utilizada

Na Tabela 1 acima, pode ser visto que as janelas escolhidas foram as de 1, 3 e 6 meses, e também as de 1, 2, 5 e 10 anos. A quantidade de dias úteis para cada uma das janelas é de 21, 63, 126, 252, 504, 1260 e 2520 dias, respectivamente.

Após a definição do tamanho das séries históricas a serem utilizadas, é necessário também definir as datas nas quais as ETTJs serão simuladas. Para isso, o autor utilizou o período de início de pandemia em 2020 e o período pós pandemia em 2022. Além disso, durante 2020, foram escolhidas datas em que o mercado de juros sofreu *stress* por conta da decisão do Copom. Nestas datas, a taxa de juros base do mercado brasileiro foi alterada pelo comitê. Por ser um momento de transição entre um nível de taxa de juros baixo (em 2020) e um nível de taxa de juros alto (em 2022), 2021 foi emitido das analises realizadas neste trabalho.

Data	**Descrição**
30/11/2022	
31/10/2022	
30/09/2022	
31/08/2022	Fechamentos 2022
29/07/2022	
30/06/2022	
31/05/2022	
04/08/2022	
20/06/2022	
05/05/2022	Copom 2022
17/03/2022	
03/02/2022	
30/11/2020	
30/10/2020	
30/09/2020	
31/08/2020	Fechamentos 2020
31/07/2020	
30/06/2020	
29/05/2020	

Tabela 2 – Datas escolhidas para a simulação

Na Tabela 2, é possível ver as datas dos fechamento dos meses Novembro, Outubro, Setembro, Agosto, Julho, Junho e Maio de 2020 e 2022. Além disso, as datas do Copom escolhidas compreendem reuniões entre os meses de Agosto e Fevereiro de 2022 com alteração na taxa básica de juros do mercado brasileiro.

4.4 Simulação da ETTJ brasileira

Somente após definição da estrutura a termo da taxa de juros e sua interpolação *flat-forward*; a metodologia de calibração do modelo e as janelas históricas utilizadas; e por fim as datas nas quais o modelo será botado a prova, é possível implementar o método de árvore trinomial para a geração de possíveis cenários da ETTJ brasileira.

Como definido no Seção 3.3, as possibilidades de ramificações descritas em (3.14), (3.15) e (3.16) a cada caminho simulado geram uma grande variedade de cenários. Sendo assim, a ideia deste trabalho foi a de considerar um total de 500 simulações de ETTJ com *forwards* de até 10 anos (2520 dias úteis). A média (valor esperado) dessas simulações é considerada como a curva de juros estimada. Um exemplo de simulação da ETTJ pode ser visualizado na Figura 3 para 50 simulações:

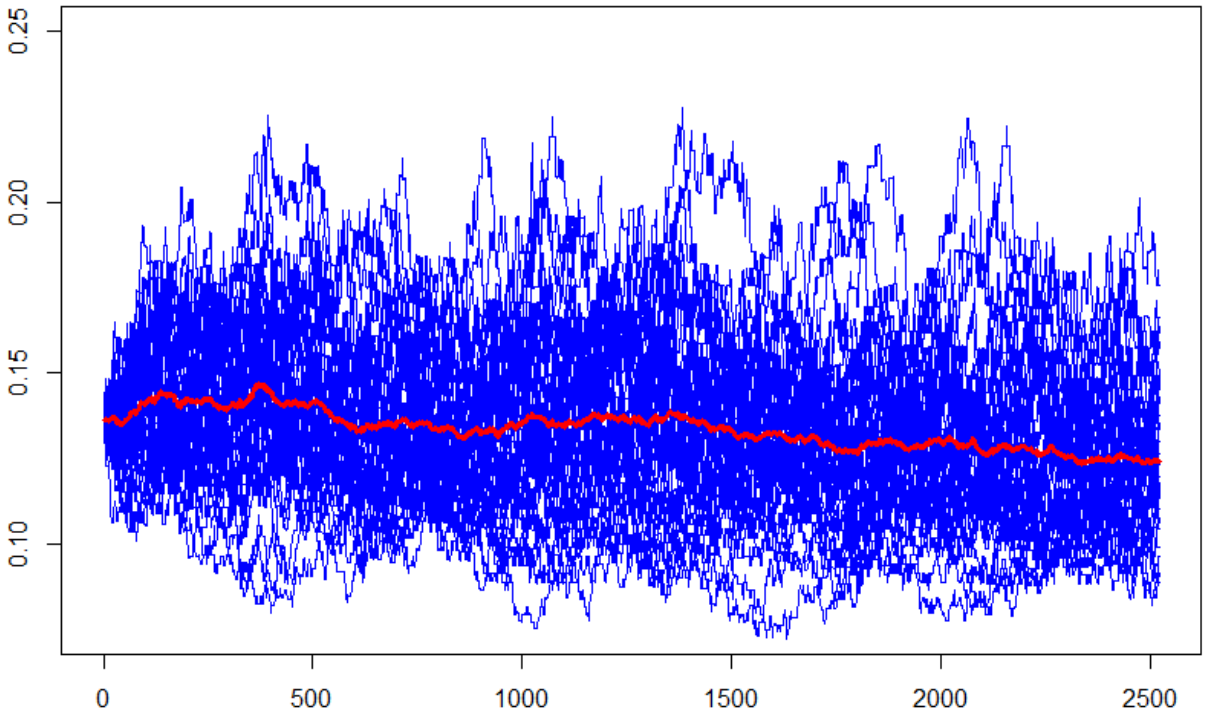

Figura 3 – Exemplo de ETTJ obtida a partir de 50 simulações.

Na Figura 3, as linhas em azul representam as cinquenta simulações realizadas e a linha vermelha é a média de todas as simulações. Nota-se que pela quantidade de simulações realizadas a curva de juros resultante é irregular, portanto é necessário um maior número de simulações para que a ETTJ resultante seja suavizada.

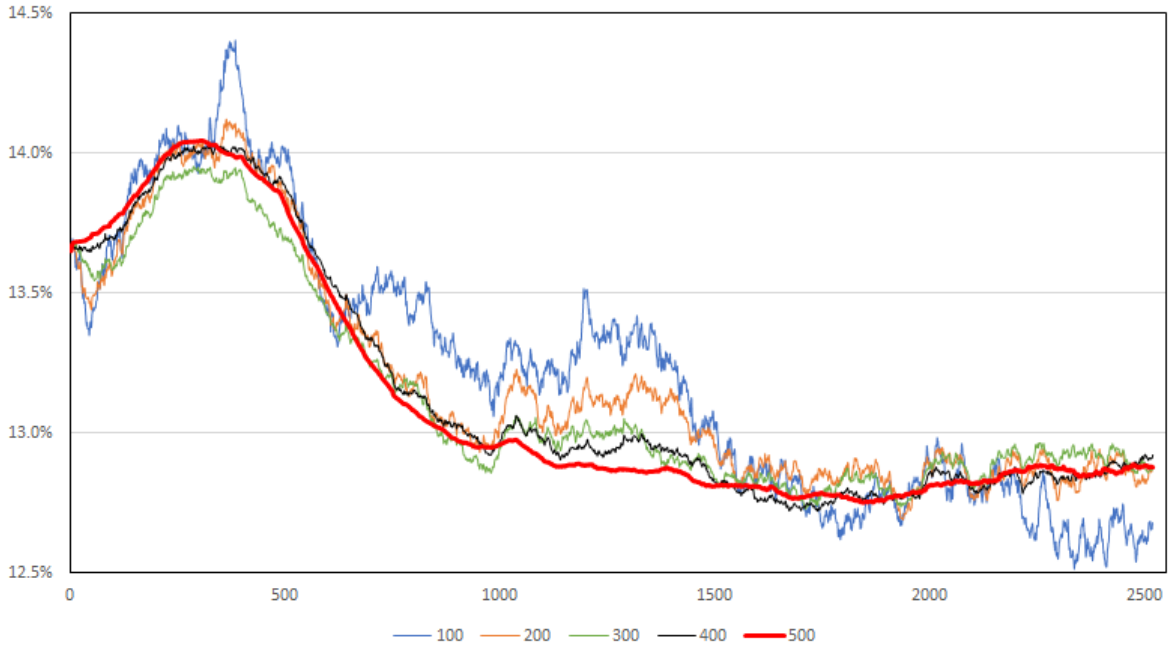

Figura 4 – Comparativo das ETTJs obtidas a partir de n simulações

Na Figura 4, pode-se verificar que a ETTJ resultante das 500 simulações é mais suave do que as curvas obtidas a partir de 100, 200, 300 e 400 simulações. Logo, a quantidade de simulações realizadas neste trabalho para estimação da ETTJ foi de 500. No exemplo descrito acima, o autor não testou quantidades maiores do que 500, portanto não se descarta a possibilidade de simular a ETTJ a partir de mais de 500 simulações, nem a possibilidade de obter um ajuste mais suave também com uma maior quantidade de simulações. Idealmente, o número de simulações poderia ser maior, porém para otimizar a execução do código para obter um tempo de processamento razoável, foi escolhido simular a curva por 500 iterações.

Em relação aos períodos escolhidos para serem simulados, a ideia do trabalho foi analisar como o modelo de Black-Karasinski se comportou no momento de início da pandemia do Covid-19 (2020) e compará-lo a um momento de fim de pandemia, em 2022. No entanto, como os fechamentos do mês não apresentaram nenhuma mudança brusca nos níveis de taxa de juros base do mercado brasileiro, foram escolhidas datas logo após reuniões do Copom em 2022 nas quais a taxa básica de juros foi alterada. Com isso, pode-se observar também como os resultados do modelo de Black-Karasinski calibrado com dados históricos se comparam à curva base de juros em momentos de *stress*.

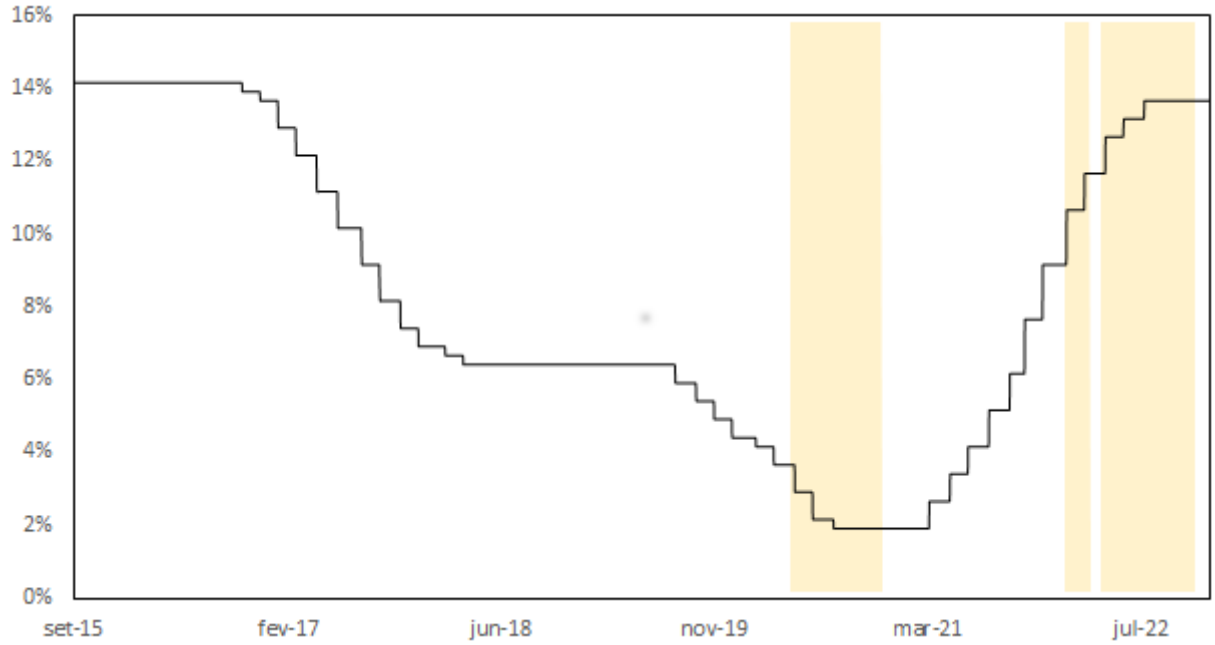

Figura 5 – Momentos de juros base escolhidos para simulações

Na Figura 5, é possível ver a diferença entre 2020, na qual os juros estavam beirando os 2% e no período subsequente em 2022 no qual os juros já voltaram a se aproximar da marca de 14%. As reuniões do Copom citadas na Seção 4.3 englobam a subida de juros mais recente, na parte direita do gráfico. Os parâmetros gerados pelo método de calibração escolhido e a comparação das simulações em relação às curvas de juros base serão vistos no capítulo a seguir. A metodologia da implementação do trabalho proposto seguiu o passo-a-passo abaixo:

1. Coleta das informações de juros brasileiros da BM&F: o primeiro passo deste trabalho é a coleta de dados a partir do site da bolsa brasileira BMF. Os dados constituem-se de taxas de juros negociadas nos prazos de um dia e futuros. A coleta de dados foi realizada para um histórico de 12 anos, assim foi possível realizar as calibrações em todos os instantes e prazos mencionados neste trabalho.

2. Construção das curvas de juros: a construção da curva de juros é realizada seguindo o manual de curvas em BM&F (2022). Portanto, o método aplicado foi o de interpolação *flat-forward*, mencionado na Seção 4.1.

3. Organização dos dados para execução do método de calibração: para o método de calibração, os dados extraídos refletem o histórico de 12 anos da taxa de juros de um dia. Portanto, os dados de taxas *forwards* não foram considerados e uma série histórica dos juros foi construída a partir deste único vértice.

4. Calibração do modelo: a calibração do modelo seguiu o método proposto em Brigo et al. (2007) e descrito na Seção 3.2. A calibração foi realizada para as datas mencionadas em (4.3).

5. Obtenção dos resultados: os resultados obtidos a partir do método de calibração proposto em Brigo et al. (2007) foram a taxa de juros média de longo prazo θ, a velocidade de reversão à média α e a volatilidade σ. Com estes parâmetros definidos, é possível iniciar a implementação da simulação da curva de juros.

6. Simulação das curvas de juros: a curva de juros foi simulada pelo modelo de Black e Karasinski (1991) implementado a partir do método de árvores trinomiais descrito na Seção 3.3. Como a implementação segue um processo aleatório, foi escolhido um número de simulações $n = 500$ e o valor esperado da curva de juros consiste da média de todas as simulações. Além disso, a simulação foi realizada para calibrações levando em consideração um histórico de 1 mês, 3 meses, 6 meses, 2 anos, 5 anos, 10 anos.

7. Comparação entre simulações e curva de juros de mercado: a comparação entre as simulações realizadas e a curva de juros observada no mercado foi realizada a partir do cálculo da diferença em *basis-points* (bps) entre o simulado e o realizado para *forwards* específicas [6M, 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 6Y, 7Y, 8Y, 9Y, 10Y]. Sendo assim, é possível observar a efetividade da simulação para instrumentos negociados em taxas de juros para prazos curtos e longos.

5 Resultados

Neste capítulo, serão apresentados os resultados da simulação da curva pré-fixada do mercado brasileiro a partir do modelo de Black e Karasinski (1991) implementado por árvore trinomial. Os parâmetros de entrada foram calibrados seguindo a metodologia proposta em Brigo et al. (2007). Nos gráficos, as legendas BK_1M, BK_3M, BK_6M, BK_2Y, BK_5Y e BK_10Y correspondem às simulações utilizando *inputs* calibrados via janelas históricas de 1 mês, 3 meses, 6 meses, 2 anos, 5 anos e 10 anos, respectivamente.

5.1 Estrutura a Termo

Após calibrados os parâmetros de entrada das simulações, a aplicação do método de árvore trinomial foi realizada para estimação da curva de juros pré-fixados do mercado brasileiro. As datas simuladas e as janelas de calibração consideradas estão listadas na Seção 4.3.

5.1.1 Fechamentos mensais em 2020

Para os fechamentos mensais em 2020, os níveis de taxa de juros base com vencimento de 1 dia no período a ser simulado ficaram entre 2% e 4%. Além disso, a inclinação e o nível da taxa com vencimento em 10 anos sofreram mudanças ao longo do tempo para acompanhar o movimento de subida de taxa de juros decidido nas reuniões do Copom. É importante observar que nesse período a economia brasileira já mostrava os efeitos causados a partir da crise econômica por conta da pandemia do Covid-19. Em 2019, o PIB brasileiro havia apresentado crescimento, enquanto em 2020 a situação observada foi a oposta. Outro ponto contrastante desse cenário em relação ao de 2019 e 2022 é o de que a economia brasileira viveu um período de taxas mínimas de juros, estas já preditas nos futuros negociados em curvas em instantes de tempo anteriores. No entanto, a retração observada nos juros foi prontamente substituída por uma subida íngreme até o nível dos 13%, observado ao longo do ano de 2022.

A ideia de observar como o modelo de Black-Karasinski implementado a partir de árvores trinomiais se compara à ETTJ em 2020, portanto, tem como objetivo verificar o desempenho das estimações do modelo para momentos econômicos de taxas de juros baixas relativamente bem comportadas (quando comparados a outros momentos econômicos).

- **Resultados para a data 29/05/2020**

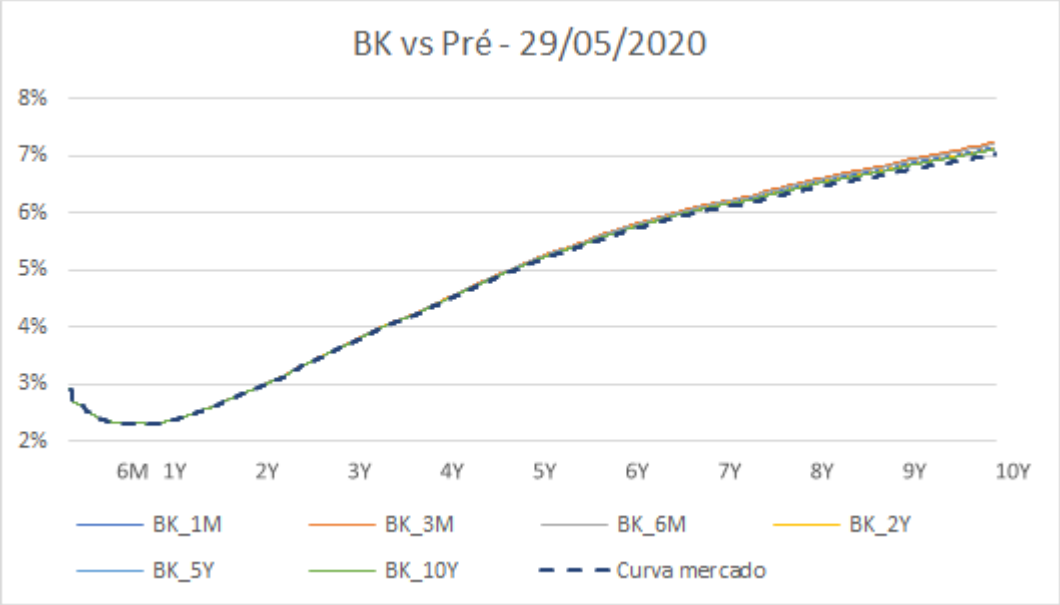

Figura 6 – Simulações da curva pré em 29/05/2020.

Na figura 6, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 2,90%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 7,03%. Portanto, em Maio/20 a taxa de juros do mercado brasileiro ainda não estava no seu patamar mínimo observado. A perspectiva num curto prazo era ainda a retração para níveis inferiores aos atuais naquela época — o que de fato ocorreu. No entanto, é possível observar que os níveis de juros para instantes mais longos já apresentavam uma subida abrupta. Portanto, a perspectiva de aumento de juros já começava de certa forma a ser precificada no mercado daquela época, mesmo que em níveis menores do que os observados nas curvas de juros realizadas para 2022.

Em Maio/22, a inclinação da curva era negativa até cerca de 8 meses e após isso positiva e de certa forma acentuada, pois os juros estimados em 10 anos era superior ao dobro dos juros praticados na *forward* de 1 dia. Além disso, a inclinação observada é mais abrupta para os instantes após 2 anos até cerca de 5 anos. Portanto o mercado previa uma subida mais abrupta dos juros em instantes mais próximos em Maio/22. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	0	0	0	0	0	0
1Y	0	0	0	0	0	0
2Y	1	1	1	0	0	0
3Y	1	2	2	1	1	1
4Y	2	4	3	2	1	1
5Y	3	6	5	3	2	2
6Y	5	9	7	4	3	3
7Y	6	11	9	5	4	4
8Y	8	15	12	7	6	6
9Y	10	18	15	8	7	7
10Y	12	22	18	10	9	8

Tabela 3 – Diferença entre curva base e BK para 29/05/2020.

Para a Tabela 3 de diferenças entre as curvas estimadas e a curva de juros realizada no fechamento de Maio/22, fica evidente que janelas mais longas produziram diferenças menores. A calibração utilizando uma janela de 10 anos obteve resultados melhores do que as demais. No entanto, as diferenças em relação à janela de um mês ficaram em cerca de 4bps na *forward* de 10Y, o que não constitui um erro absoluto tão significante no ponto de vista de sensibilidade aos juros.

Portanto, fica claro que para uma curva de juros com níveis relativamente baixos e inclinação bem comportada, a estimação a partir do método proposto neste trabalho apresentou resultados bons, pois as diferenças ficaram em patamares baixos. No entanto, é necessário observar que a janela histórica utilizada para o método de calibração pode não apresentar uma tendência específica entre utilizar histórico mais longo ou mais curto. Por fim, o utilizador deste tipo de modelo com a aplicação proposta precisa realizar rotina de *backtesting* para verificar num instante de tempo a efetividade de cada janela de calibração.

- **Resultados para a data 31/07/2020**

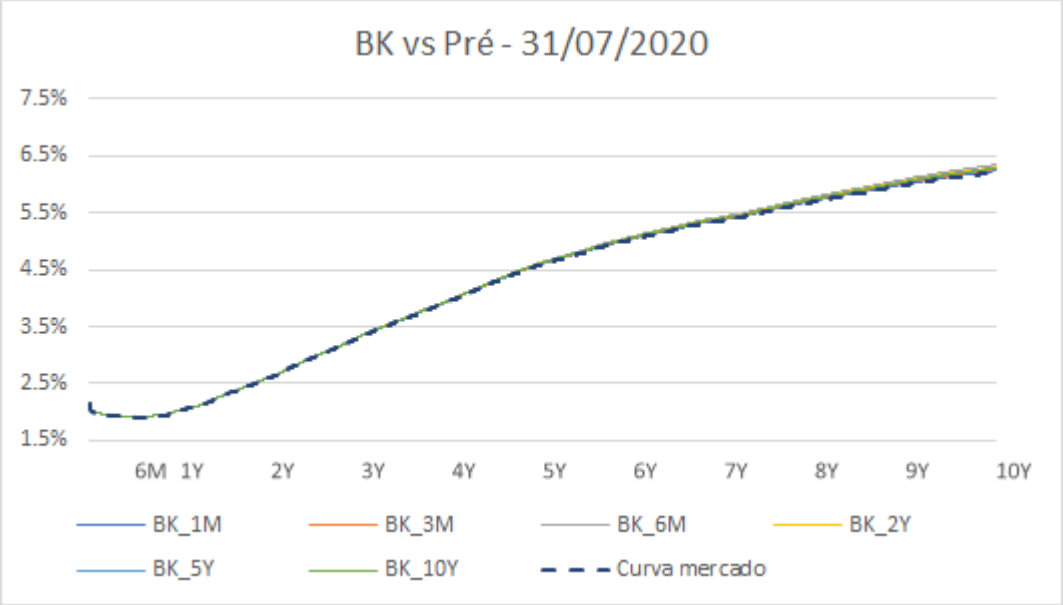

Figura 7 – Simulações da curva pré em 31/07/2020.

A partir da Figura 7, a taxa de juros base de 1 dia já apresentava valor mais próximo à mínima histórica observada no mercado brasileiro, já que a *forward* de 1 dia era 2,15%, enquanto a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 6,22%. É importante observar que este foi um período de juros mais comportados, com níveis baixos e estáveis. Além disso, mesmo em vértices longos a taxa de juros estava num patamar próximo à 6%, o que também é considerado um nível próximo ao médio quando olhamos o histórico de juros desde 2015. Sendo assim, quando comparado por exemplo a mercados de países que apresentam níveis de taxas de juros menores e *forwards* mais comportadas, a curva observada em Julho/20 assemelha-se mais do que quando comparada à curva de fechamentos em 2022.

Sobre a inclinação, esta era negativa até cerca de 6 meses e após isso positiva. Portanto, o mercado ainda observava possibilidade de redução num curto prazo e aumento em prazos mais longos. No entanto, a precificação dos juros ainda ocorria em patamares muito abaixo aos observados em 2022, mesmo em *forwards* mais longas como a de 10Y, por exemplo. Este é um dado que mostra o quão abrupta e intensa foi a guinada acima dada pelo nível dos juros no mercado brasileiro em 2022. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	0	0	0	0	0	0
1Y	0	0	0	0	0	0
2Y	0	0	1	0	0	0
3Y	0	1	1	1	1	1
4Y	0	1	2	1	1	1
5Y	0	1	4	2	2	2
6Y	1	2	5	3	3	3
7Y	1	3	7	4	4	4
8Y	1	3	8	6	5	5
9Y	1	4	10	7	6	5
10Y	2	5	12	8	7	7

Tabela 4 – Diferença entre curva base e BK para 31/07/2020.

A partir da Tabela 4, apresentando as diferenças entre as curvas simuladas para as janelas de calibração especificadas *versus* a curva de juros praticada no mercado para o fechamento de Julho/20, observa-se que a calibração utilizando janela de 1 mês foi a mais aderente à curva praticada. Na *forward* de 10Y, a diferença entre simulado e realizado foi de somente 2bps. No entanto, é importante observar que as diferenças também foram pequenas para as outras janelas de calibração, sejam elas curtas ou longas. Sendo assim, é importante frisar aqui que tal como em Maio/20, num cenário de juros com níveis baixos e curva bem comportada, as diferenças calculadas não apontam especificamente para uma superioridade de alguma janela em específico. Portanto, o ideal neste caso para um utilizador do modelo de Black-Karasinski seguindo a implementação descrita neste trabalho é a realização de rotina de *backtesting* frequente, a fim de verificar a efetividade de uma calibração em específico e, também, capturar as volatilidades da taxa de juros que ocorrem no mercado.

5.1.2 Fechamentos mensais em 2022

Em 2022, o nível da taxa de juros base sofreu forte subida até a casa dos dois dígitos após redução da intensidade dos efeitos da pandemia do Covid-19. Portanto, este período apresenta uma nova configuração da curva e também um nível bastante diferente do observado em 2020. Sendo assim, é interessante verificar a aderência do modelo de Black-Karasinski para um período de juros altos e mercado com maior volatilidade. Além disso, 2022 marca o fim da pandemia do Covid-19, iniciada em 2019. A expansão dos juros vem como uma força contrária à retração observada em 2019 e 2020, na qual os juros foram reduzidos ao patamar de 2%. É fundamental a comparação do método proposto neste trabalho para períodos distintos, afinal somente assim é possível verificar o desempenho da aplicação em termos gerais. Ou seja, em períodos de juros baixos e juros altos no mercado brasileiro.

- **Resultados para a data 31/05/2022**

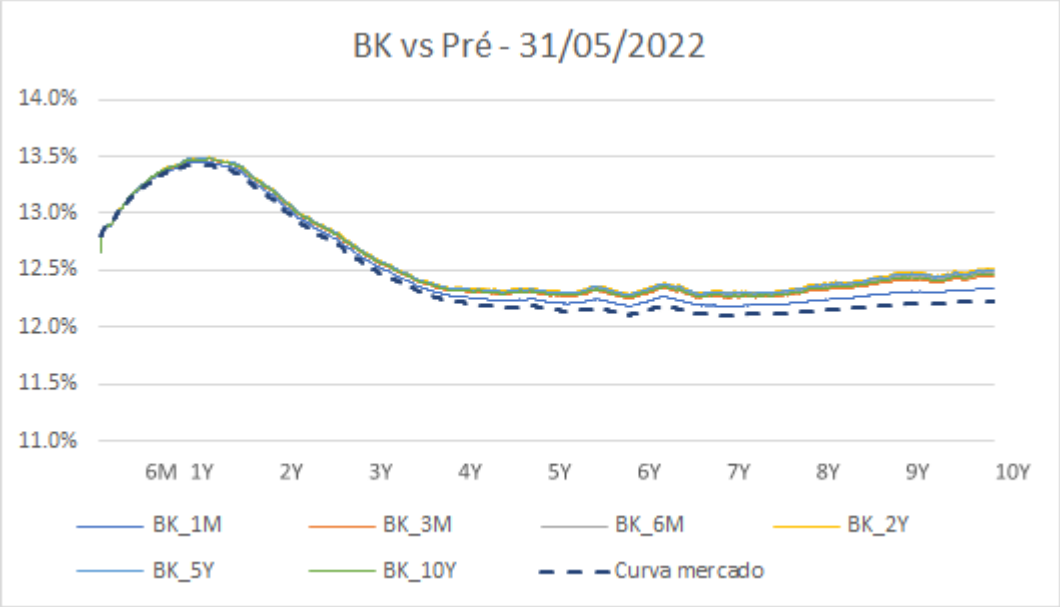

Figura 8 – Simulações da curva pré em 31/05/2022.

Em Maio/22 (curva apresentada na Figura 8, como já comentado, a taxa de juros do mercado brasileiro já havia passado por grande parte do período expansor em 2021 e 2022, estando próxima do topo de 13.75% observado alguns meses depois. Nessa data, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 12,65%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 12,34%. Além disso, a curva projetava um aumento dos juros num prazo curto e uma descida até o patamar de 12% em períodos mais longos, o que pode ser observado nos meses subsequentes em 2022.

Em relação à inclinação da curva, esta era positiva para os intervalos [0, 1Y] e [5Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,5Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	2	3	3	3	2
1Y	2	4	5	5	5	4
2Y	3	7	8	8	8	7
3Y	4	8	9	10	9	8
4Y	5	10	11	13	12	11
5Y	6	12	14	16	15	13
6Y	8	15	17	19	18	16
7Y	8	16	19	21	20	17
8Y	9	18	21	24	22	20
9Y	11	22	25	28	27	24
10Y	11	22	25	28	26	23

Tabela 5 – Diferença entre curva base e BK para 31/05/2022.

Logo, para o fechamento de Maio/22, num cenário de juros mais altos após a íngreme subida observada em 2021 e início de 2022, ficou evidente que a janela de calibração de 1 mês apresentou melhores resultados quando comparadas as diferenças entre esta e as outras janelas (Tabela 20). Portanto, o resultado observado acima corrobora a tese de que para períodos nos quais a volatilidade da taxa de juros é maior, uma calibração mais frequente e utilizando janelas históricas mais curtas apresenta resultados mais próximos à curva de mercado em relação àqueles calculados a partir de calibrações por janelas históricas mais longas.

- **Resultados para a data 31/10/2022**

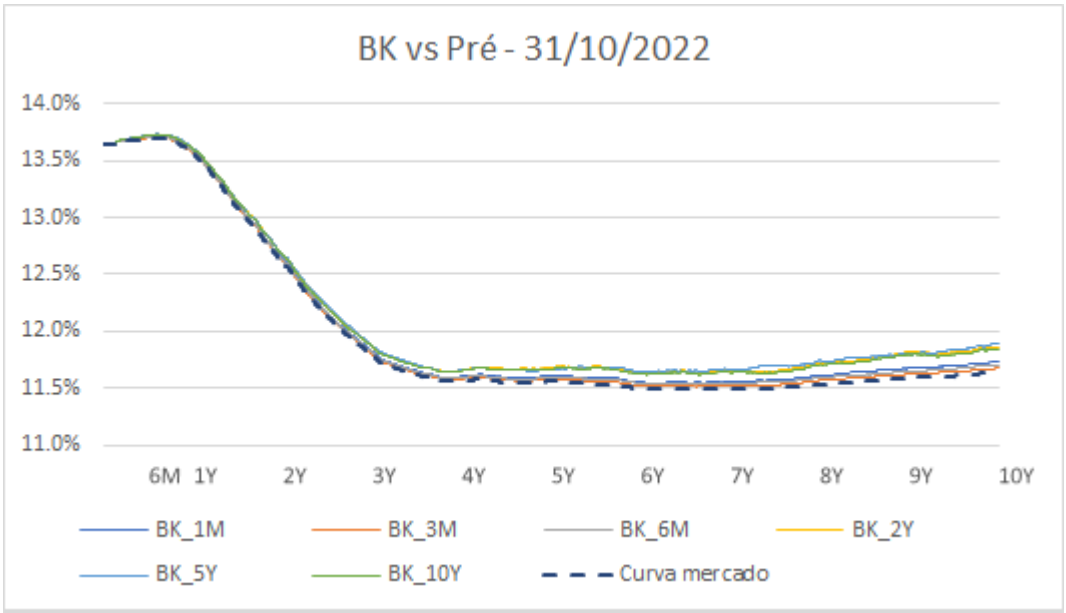

Figura 9 – Simulações da curva pré em 31/10/2022.

Em Outubro/22 (Figura 9), a taxa de juros base do mercado brasileiro atingiu seu topo na subida observada entre 2021 e 2022, para o valor de 13,75%. O mercado nessa data precificava uma queda nos juros até o prazo de cerca de 3 anos e uma estabilização no nível de cerca de 12% para o longo prazo. É interessante observar que num curto prazo a curva ainda reflete uma pequena subida em nível da taxa de juros, o que acabou não sendo observado nos meses subsequentes. Além disso, a curva observada não indica nenhum grande movimento no longo prazo, já que para 10 anos o nível está somente cerca de 2% abaixo do nível da taxa de 1 dia. Em relação à inclinação da curva, esta era positiva para os intervalos de [0, 6M] e [4Y, 10Y] e negativa no intervalo]6M,4Y[, portanto para o ano de 2023 o mercado naquela época precificava a queda dos juros, o que até a data em que este trabalho foi escrito (Junho/23) ainda não ocorreu. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	0	1	3	3	2
1Y	2	1	1	5	4	4
2Y	3	1	2	7	7	6
3Y	3	1	2	8	8	7
4Y	4	2	3	10	9	9
5Y	5	2	4	12	11	11
6Y	6	3	5	15	15	14
7Y	6	3	5	16	18	15
8Y	8	3	6	19	21	17
9Y	9	3	6	22	21	20
10Y	10	4	7	22	25	20

Tabela 6 – Diferença entre curva base e BK para 31/10/2022.

Para o fechamento de Outubro/22, portanto, é novamente corroborada a ideia de que janelas de calibração de curto prazo são mais adequadas para a estimação da curva de juros num histórico de juros mais voláteis (Tabela 6). No entanto, ao contrário do mês de Maio/22, a janela de calibração de 3 meses apresentou resultados um pouco mais aderentes do que os resultados para janela de 1 mês. É importante destacar aqui a necessidade de uma rotina de *backtesting* na aplicação do modelo, afinal em momentos que apresentam maiores mudanças na configuração de juros, a aderência de determinadas janelas históricas pode mudar. Por exemplo, quando comparamos os resultados observados nos fechamentos de 2022 aos resultados observados nos fechamentos de 2020, fica evidente que a implementação precisa levar em consideração os cenários econômicos distintos nesses dois períodos.

5.1.3 Datas após reuniões do Copom com mudanças nos juros

Nas duas subseções anteriores, a aderência do modelo foi avaliada para momentos de juros baixos, já que 2020 foi marcado pela descida dos níveis de juros para a mínima histórica, além disso a sociedade brasileira passava pelos efeitos da pandemia do Covid-19. Enquanto isso, a outra ideia do estudo foi verificar também a aderência do modelo para momentos de juros na casa dos dois dígitos, já que em 2022 a pandemia do Covid-19 estava chegando ao fim e a taxa de juros básica da economia havia sofrido uma grande alta a partir das reuniões do Copom realizadas em 2021 e 2022.

Por fim, nesta Seção, a ideia proposta é verificar a efetividade do modelo para datas em que há *stress* de mercado de juros. Isto ocorre majoritariamente após reuniões do Copom em que a decisão para os juros é a mudança. Em 2022, as reuniões realizadas resultaram em estabilidade ou aumento dos juros. Portanto, o teste aqui realizado é útil para observar como as diferenças se comportam após ajustes nos juros realizados via Copom.

- **Resultados para a data 17/03/2022**

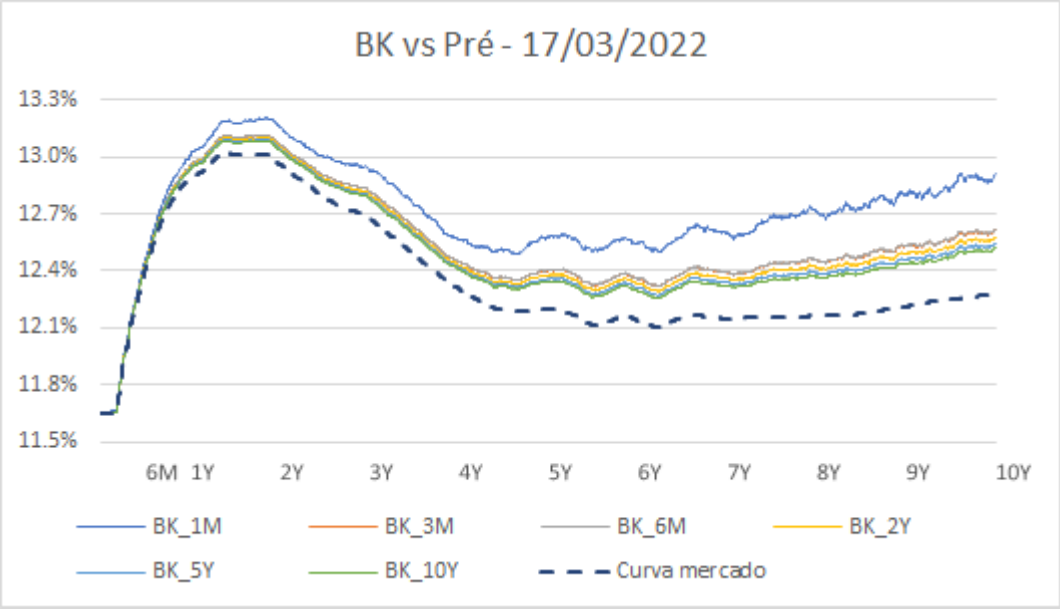

Figura 10 – Simulações da curva pré em 17/03/2022.

Esta data marca um dia após o ajuste positivo de 1% na meta para a taxa de juros básicos (Selic). Além disso, em 2022 os juros estavam em crescente iniciada em 2021 e, como pode ser visto pelo histórico dos juros do mercado brasileiro, teve seu ápice no nível de 13,17% ao ano. Portanto, a ideia neste exemplo é estudar a efetividade da implementação descrita neste trabalho para uma curva de juros estressada após reunião do Copom. É importante observar que o cenário aqui descrito é de subida íngreme nos

juros, já ocorrido em reuniões de Copom anteriores em 2022 e 2021. Em relação às taxas de longo prazo, pode ser visualizado na Figura 10 que o vértice de 10Y negociado estava em cerca de 12,30%, ou seja, o mercado nessa data precificava uma subida de juros no longo prazo e no médio prazo a curva apresentava níveis superiores a 13% — o que de fato ocorreu.

Sobre a inclinação da curva, esta era positiva para os intervalos de [0, 1Y] e [5Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,5Y[. Ou seja, o mercado negociava uma subida de juros até cerca de 1 ano, após isso um ajuste negativo nos juros até o vértice de 5Y e no longo prazo uma subida gradual. A Tabela abaixo apresenta a diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré negociada em função dos seus vértices:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	5	3	3	3	2	2
1Y	12	6	6	6	5	4
2Y	19	10	10	9	8	7
3Y	25	14	14	12	11	10
4Y	25	14	14	12	11	10
5Y	38	20	20	18	16	14
6Y	41	22	22	19	17	16
7Y	44	24	24	21	19	17
8Y	55	29	29	26	23	21
9Y	59	32	32	28	25	22
10Y	63	34	34	30	26	24

Tabela 7 – Diferença entre curva base e BK para 17/03/2022.

É interessante observar que a calibração considerando janela de um mês apresentou os piores resultados quando comparada às outras janelas de calibração propostas. Além disso, observa-se uma redução nas diferenças quando tomamos em consideração históricos maiores do comportamento da taxa de juros brasileira. No entanto, quando comparamos as diferenças apresentadas na Tabela 7 àquelas apresentadas para fechamentos em 2020 e 2022, é possível verificar que a aderência do modelo diminuiu para um momento em que houve ajuste na curva de juros. Logo, é possível concluir que o modelo proposto perde aderência à curva negociada quando há algum ajuste nos juros via reunião do Copom.

- **Resultados para a data 20/06/2022**

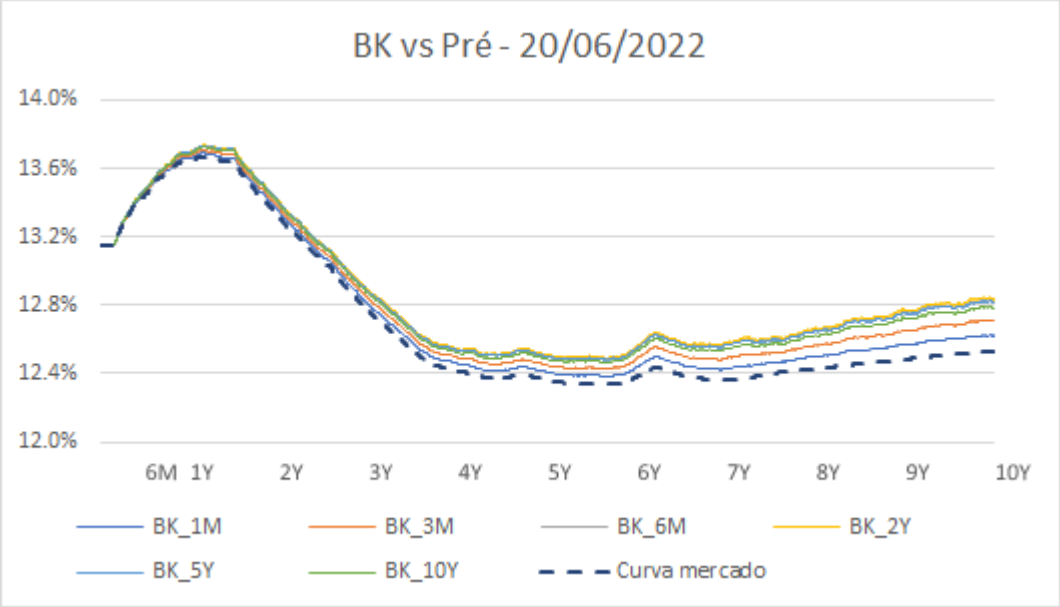

Figura 11 – Simulações da curva pré em 20/06/2022.

Na Figura **??**, a taxa de juros base de 1 dia era de 13,15%, e o mercado apreçava uma subida até valores próximos à 13,75% (o que de fato ocorreu). Em Julho/22 a política monetária dos juros brasileiros estava chegando perto do ápice observado, e os efeitos da crise pandêmica do Covid-19 e da inflação dos produtos alimentícios já era observada nos índices de juros. Logo, essa época marca uma aproximação do pico de juros e também uma diminuição da volatilidade no índice de juros brasileiro. Afinal, até meados de 2023 o índice se mantém no nível de 13,75% definido em 2022. Para os vértices mais longos, no entanto, o mercado estava precificando o índice de 10Y em cerca de 12,50%, um pouco acima do observado na data analisada anteriormente. Portanto, é possível observar que as projeções para prazos curtos e longos subiram em nível.

Em relação a inclinação da curva, esta era positiva para os intervalos [0, 1Y] e [6Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,5Y[. Portanto, a mesma tendência do cenário anterior é também observada aqui. Logo, não houve nenhuma grande mudança de como o mercado percebia os juros brasileiros entre a data estimada neste exemplo e a data estimada no exemplo anterior (Março/22). A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	1	3	3	3	2
1Y	2	3	5	6	5	5
2Y	3	5	9	9	9	8
3Y	4	7	11	12	11	10
4Y	4	8	12	13	12	11
5Y	4	9	14	15	14	12
6Y	6	11	17	18	17	15
7Y	7	13	21	22	20	18
8Y	7	14	22	24	22	20
9Y	8	16	27	28	26	23
10Y	9	18	29	30	28	25

Tabela 8 – Diferença entre curva base e BK para 20/06/2022.

Na Tabela 14, ao contrário do exemplo anterior, uma calibração considerando a janela de tempo mais curta (1 mês), obteve resultados superiores à todas as outras janelas de calibração testadas. Isto deve-se ao fato de que no dia 20/06/2022 já fazia 3 dias desde o ajuste nos juros realizado definido em 16/03/2022 e realizado em 17/03/2022. Portanto, é possível contrastar este teste com o teste realizado anteriormente, pois no teste anterior os resultados indicaram que janelas maiores resultaram em menor erro para uma data um dia após a reunião do Copom. Enquanto isso, para uma data alguns dias após a reunião do Copom, uma janela curta resultou em parâmetros que capturaram melhor a evolução do mercado de juros.

No entanto, é importante observar que para o primeiro caso, a aderência do modelo diminuiu para uma data logo após a reunião do Copom. Enquanto isso, para uma data três dias posterior ao ajuste nos juros, o ideal foi levar em consideração uma janela mais curta. Estes fatos indicam a necessidade de rotina de *backtesting* do modelo, assim é possível quantificar o erro e definir a melhor janela de calibração para uma data em específico. Além disso, a calibração do modelo é necessária para manter a aderência das curvas projetadas em relação à curva negociada no mercado. Em todos os casos aqui estudados, os parâmetros foram gerados para datas subsequentes à definição destes. Portanto, é de se esperar uma perda de aderência dos resultados projetados ao utilizarmos parâmetros que não refletem mais as condições de mercado observadas. As demais comparações para outras datas em 2020, 2022 e fechamentos diários após reuniões do Copom podem ser visualizadas no Apêndice A.

6 Conclusão

O principal objetivo deste trabalho foi verificar a aderência do modelo de Black e Karasinski (1991) implementado a partir de árvores trinomiais utilizando calibração proposta em Brigo et al. (2007) para diferentes comprimentos de janelas históricas, com foco no mercado brasileiro. Além disso, outro aspecto importante do trabalho foi a possibilidade de comparar a aderência do modelo em relação à diferentes momentos da taxa de juros do mercado brasileiro. Afinal, em 2020 os níveis da taxa básica de juros ficaram entre 2% e 4%, enquanto em 2022 tivemos níveis entre 12% e 14%.

Em 2020, num cenário de nível de juros mais baixo e com poucas variações de nível e inclinação da curva, foi possível observar uma boa aderência dos resultados do modelo à curva base de juros. A maior diferença observada entre simulado e realizado da curva foi 22bps no vértice 10Y utilizando calibração com janela de 3 meses de comprimento em 29/05/2022. Além disso, as diferenças observadas na aderência da curva simulada em função da janela de calibração foram muito pequenas. Portanto, para momentos em que a taxa de juros base é baixa e o mercado está comportado, a janela de calibração não teve influência chave nos resultados obtidos da aplicação do modelo.

Nas simulações realizadas para os mesmos fechamentos mensais porém em 2022, no entanto, os resultados apresentaram características diferentes àqueles em 2020. Primeiramente, é necessário observar que o nível de juros estava mais alto naquela época (entre 12% e 14% ao longo do ano) e a taxa de juros base estava em movimento de subida até atingir seu ápice em 13,75% (este que perdura até os dias de hoje, em Julho/2023). Para as simulações realizadas em 2022, ficou evidente que janelas mais curtas (1 mês, 3 meses e 6 meses) apresentaram resultados mais aderentes à curva básica de juros quando comparados aos resultados de calibração a partir de janelas longas (2 anos, 5 anos e 10 anos). Portanto, em momentos econômicos de subida gradual de juros, o ideal para esta aplicação em específico é limitar a janela de calibração a um período mais recente, ao invés de tomar em conta informações de 2, 5 ou 10 anos atrás.

Por fim, para a simulação da curva de juros base em datas após reunião do Copom em que houve mudança na taxa básica de juros, ficou evidente que o modelo perde aderência à curva de juros realizada quando comparamos os resultados obtidos nessas datas aos fechamentos analisados em 2020 e 2022. Além disso, não foi observada uma tendência de maior aderência ao se utilizar uma janela histórica específica para executar o método de calibração para os momentos de stress.

Em resumo, as simulações resultantes da implementação do modelo proposto neste trabalho se mostraram mais aderentes à curva pré-fixada do mercado brasileiro em situações

nas quais o nível da taxa de juros é baixo. Além disso, em 2022 (após a subida de taxa de juros ocorrida nesse ano) a calibração dos parâmetros utilizando janelas históricas inferiores a 6 meses apresentou resultados mais aderentes à curva de mercado quando comparadas as janelas históricas acima de 2 anos. Para datas de *stress* de mercado, no caso deste trabalho representadas por datas após decisões do Copom, o modelo apresentou menor aderência à curva de juros pré-fixados do mercado e não houve janela histórica de calibração que indicou melhor performance. Portanto, é imprescindível uma rotina de *backtesting* dos resultados do modelo para garantir a melhor calibração para um determinado período, visto que o modelo proposto é dependente de dados históricos da taxa de juros.

Na prática, o usuário do modelo e implementação propostos neste trabalho precisa garantir que os dados de entrada são calibrados com informações recentes; o backtesting do modelo é executado, assim é possível verificar a janela histórica que produz curva simulada mais próxima a de mercado; e por fim utilizar o resultado com cautela para instrumentos longos, afinal foi possível visualizar que as diferenças em *basis-points* aumentaram ao longo das ETTJs. Além disso, para períodos de stress de mercado ou mudança de taxa de juros base por conta de decisão do Copom, é de se esperar um aumento das diferenças entre a curva simulada e a curva de mercado.

Em relação às limitações do trabalho, pode-se afirmar que o ajuste ao *drift* observado na curva de mercado é feito a partir da média resultante de todas as simulações. Isto pode gerar distorções na curva resultante, afinal a aplicação de somente um *drift* para uma *forward* t pode não ser o melhor ajuste para uma determinada simulação em específico, mesmo esse *drift* indicando uma tendência central (ajuste a partir da média das taxas simuladas). Além disso, o trabalho aqui apresentado não explorou a possibilidade de apreçamento de derivativos para verificar a aderência dos preços resultantes comparados aos preços de mercado. Esta seria outra forma de comparar a aderência das simulações resultantes do modelo. Em relação ao método de calibração realizado, outra possibilidade interessante seria a utilização de janelas ainda menores de tempo, a fim de verificar a aderência da simulação para um curtíssimo prazo.

Portanto, uma possível extensão deste trabalho seria comparar a aplicação deste modelo calibrado a partir de janelas históricas mais curtas para datas após reuniões do Copom, assim seria possível verificar se para janelas muito curtas a aderência da simulação à curva básica de juros realizada seria maior. Além disso, outras possíveis abordagens seriam realizar a aplicação do modelo BK porém com método de calibração diferente do utilizado, ou então a comparação da aderência do modelo BK a algum outro modelo da classe *short-rate*.

Referências

ALMEIDA, L.; YOSHINO, J.; SCHIRMER, P. Derivativos de renda fixa no brasil: Modelo hull-white. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, Ipea, 2003.

BARBACHAN, J. S. F.; ORNELAS, J. R. H. Apreçamento de opções de idi usando o modelo cir. *Estudos Econômicos*, v. 33, n. 2, p. 287 – 323, 2003. ISSN 0101-4161. Disponível em: <https://search.ebscohost.com.sbproxy.fgv.br/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,uid&db=edsdoj&AN=edsdoj.f5f10898eec4865a7ee351119e019c0&lang=pt-br&site=eds-live>.

BLACK, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 167–179, 1976.

BLACK, F.; KARASINSKI, P. Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, Routledge, v. 47, n. 4, p. 52–59, 1991.

BM&F. *Manual de Curvas*. 2022. Disponível em: <https://www.b3.com.br/data/files/47/77/2A/76/99BCB710D30FE9B7AC094EA8/Manual%20de%20Curvas.pdf>.

BORGES, R. J. d. C. S. *Precificação de opções sobre IDI com preço de mercado de risco variável*. 2017. Disponível em: <https://search.ebscohost.com.sbproxy.fgv.br/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,uid&db=ir00572a&AN=fgv.10438.18426&lang=pt-br&site=eds-live>.

BRIGO, D. et al. A stochastic processes toolkit for risk management. 2007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1109160>.

BRIGO, D.; MERCURIO, F. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

COX, J.; INGERSOLL, J.; ROSS, S. A theory of the term structure of interest rates. *Econometricas*, The Econometric Society, v. 53, n. 2, p. 385–407, 1985.

GLUCKSTERN, M. *Aplicação do modelo de Hull-White a precificação de opções sobre IDI*. 2001. Disponível em: <https://search.ebscohost.com.sbproxy.fgv.br/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,uid&db=ir00572a&AN=fgv.10438.4503&lang=pt-br&site=eds-live>.

HO, T.; LEE, S.-B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, Wiley, v. 41, p. 1011–1029, 1986.

HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, v. 3, n. 4, p. 573–592, 1990.

MERTON, R. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, RAND Corporation, v. 4, n. 1, p. 141–183, 1973.

NAKAMURA, E. M. *Aplicação do modelo CIR com saltos ao mercado brasileiro*. 2020. Disponível em: <https://search.ebscohost.com.sbproxy.fgv.br/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,uid&db=ir00572a&AN=fgv.10438.29924&lang=pt-br&site=eds-live>.

OLIVEIRA, A. d. *Aplicação do Modelo de Black-Karasinski ao Apreçamento de Opções de Taxa de Juros no Mercado Brasileiro.* 2005.

POON, S.-H.; KHAN, A.; GUAN, E. *Short Rate Models: Hull-White or Black-Karasinski? Implementation Note and Model Comparison for ALM.* [S.l.], 2008. (Manchester Business School Working Paper Series,).

SILVA, M. G. E. d. *Calibragem Do Modelo Generalizado Black-karasinski Para Títulos De Desconto.* 2010. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/27157>.

VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977.

Apêndices

APÊNDICE A – Demais datas simuladas

Além dos resultados apresentados no Capítulo 5, as seguintes datas tiveram suas taxas de juros simuladas pelo modelo e implementação propostos e os resultados podem ser verificados a seguir:

A.1 Fechamentos mensais em 2020

- **30/06/2020**

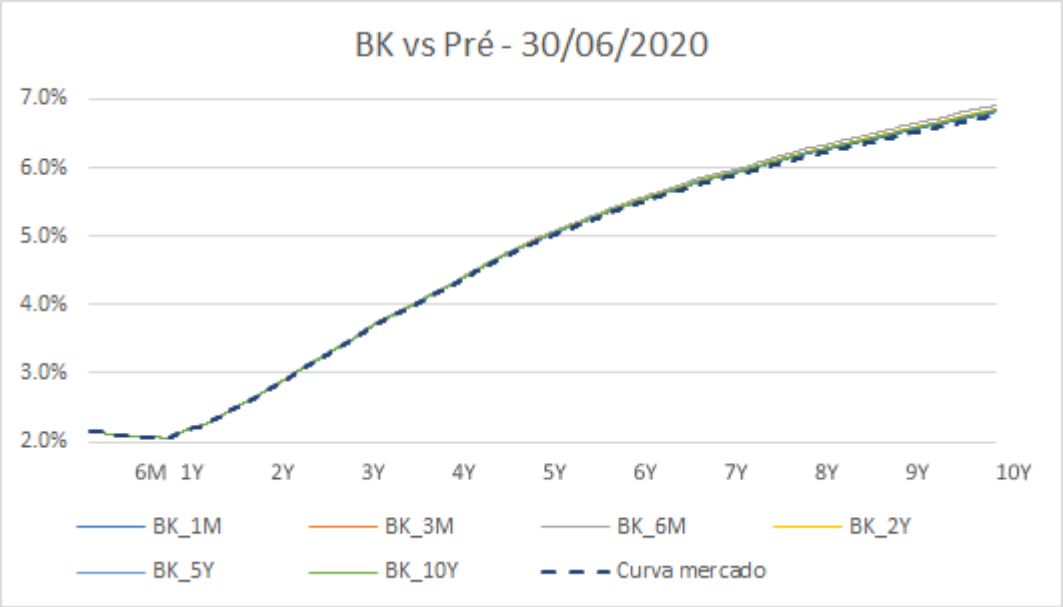

Figura 12 – Simulações da curva pré em 30/06/2020.

Na Figura 12, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 2,15%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 6,77%. A inclinação da curva era negativa até cerca de 7 meses e após isso positiva. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 9 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	0	0	0	0	0	0
1Y	0	0	0	0	0	0
2Y	0	0	1	0	0	0
3Y	1	1	2	1	1	1
4Y	1	1	2	1	1	1
5Y	2	3	5	3	2	2
6Y	2	4	6	4	3	3
7Y	3	5	8	5	4	4
8Y	3	6	11	6	6	5
9Y	4	7	13	8	7	6
10Y	5	9	15	9	7	7

Tabela 9 – Diferença entre curva base e BK para 30/06/2020.

Logo, para Junho/2020, observa-se que a calibração utilizando janela de 1 mês foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações, porém as diferenças foram pequenas. Somente a calibração utilizando janela de 6 meses apresentou diferenças maiores do que 10bps no vértice 10Y.

- **31/08/2020**

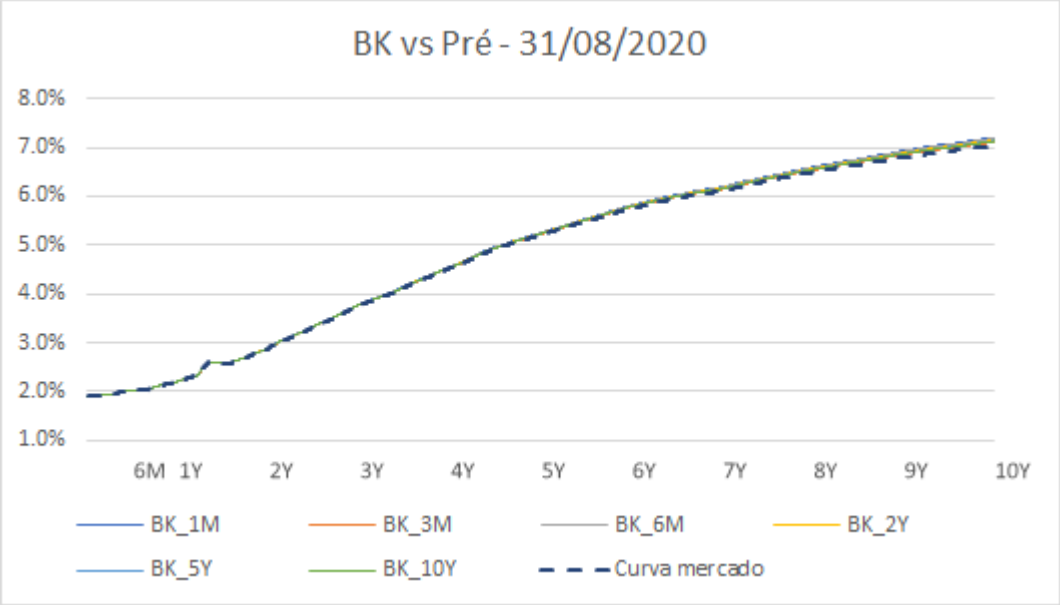

Figura 13 – Simulações da curva pré em 31/08/2020.

Na Figura 13, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 1,91%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 7,05%. A inclinação da curva era positiva ao longo de toda a trajetória até o vértice 10Y, o que já previa a evolução positiva dos juros descrita na Figura 2. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 9 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	0	0	0	0	0	0
1Y	0	0	0	0	0	0
2Y	1	0	1	0	0	0
3Y	2	1	1	1	1	1
4Y	3	1	2	2	1	1
5Y	4	2	4	3	2	2
6Y	6	3	5	4	3	3
7Y	8	3	7	5	5	4
8Y	10	4	9	7	6	5
9Y	13	5	12	9	7	7
10Y	15	6	13	10	8	8

Tabela 10 – Diferença entre curva base e BK para 31/08/2020.

Logo, para Agosto/2020, observa-se que a calibração utilizando janela de 3 meses foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações, além dela as janelas de 5 e 10 anos apresentaram diferenças menores do que 10bps no vértice 10Y. A calibração com 1 mês de janela foi a que mais apresentou diferença.

- **30/09/2020**

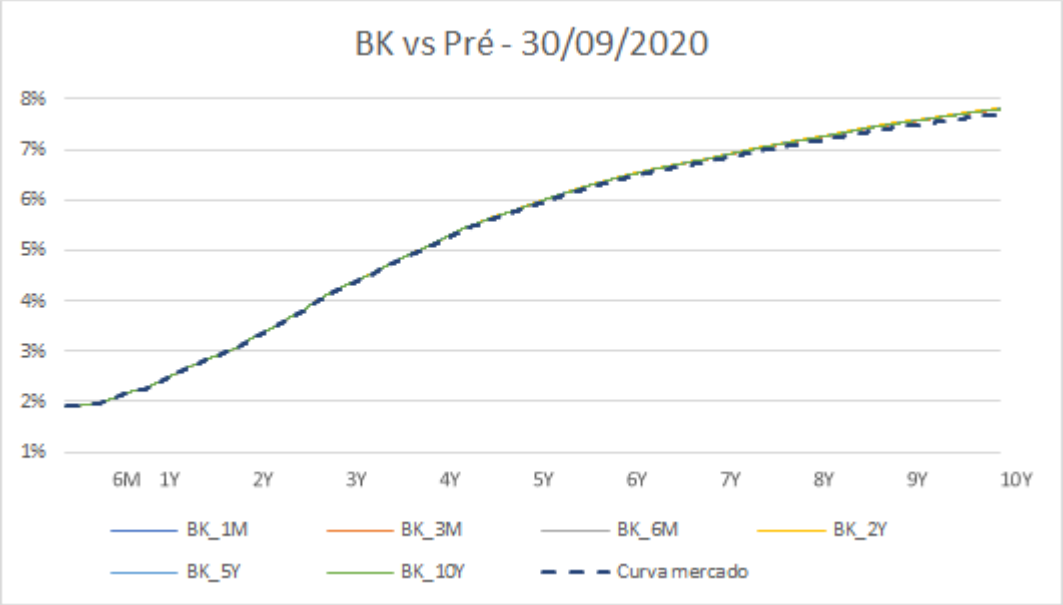

Figura 14 – Simulações da curva pré em 30/09/2020.

Na Figura 14, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 1,91%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 7,71%. A inclinação da curva era positiva ao longo de toda a trajetória até o vértice 10Y. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 11 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	0	0	0	0	0	0
1Y	0	0	0	0	0	0
2Y	1	0	1	1	1	1
3Y	1	1	1	1	1	1
4Y	2	2	2	2	2	2
5Y	3	3	3	4	3	3
6Y	5	4	5	6	5	4
7Y	6	5	6	7	6	5
8Y	7	6	6	7	6	6
9Y	9	8	9	10	8	8
10Y	10	8	10	11	9	9

Tabela 11 – Diferença entre curva base e BK para 30/09/2020.

Logo, para Setembro/2020, observa-se que a calibração utilizando janela de 3 meses foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações, além dela as janelas de 5 e 10 anos apresentaram diferenças menores do que 10bps no vértice 10Y.

- **30/10/2020**

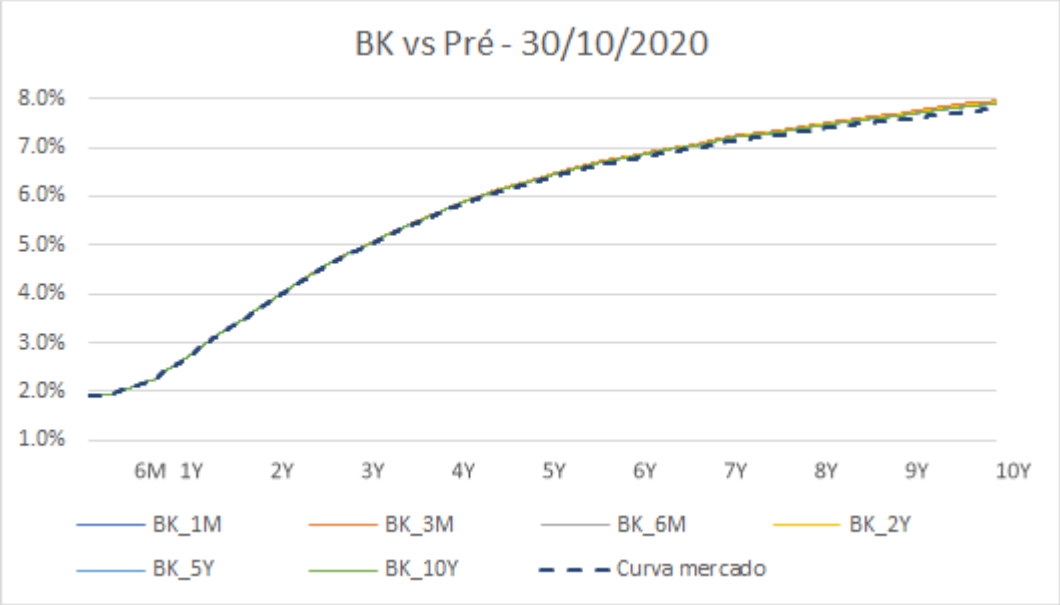

Figura 15 – Simulações da curva pré em 30/10/2020.

Na Figura 15, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 1,90%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 7,79%. A inclinação da curva era positiva ao longo de toda a trajetória até o vértice 10Y. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 12 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	0	0	0	0	0	0
1Y	0	0	0	0	0	0
2Y	1	1	1	1	1	1
3Y	2	2	1	2	1	1
4Y	3	4	2	3	2	2
5Y	4	6	3	4	4	4
6Y	5	7	4	6	5	5
7Y	6	10	5	7	6	6
8Y	8	11	6	8	7	7
9Y	10	13	7	10	8	8
10Y	12	17	9	13	11	10

Tabela 12 – Diferença entre curva base e BK para 30/10/2020.

Logo, para Outubro/2020, observa-se que a calibração utilizando janela de 6 meses foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações, no entanto as diferenças em geral foram pequenas ao longo dos vértices da curva.

- **30/11/2020**

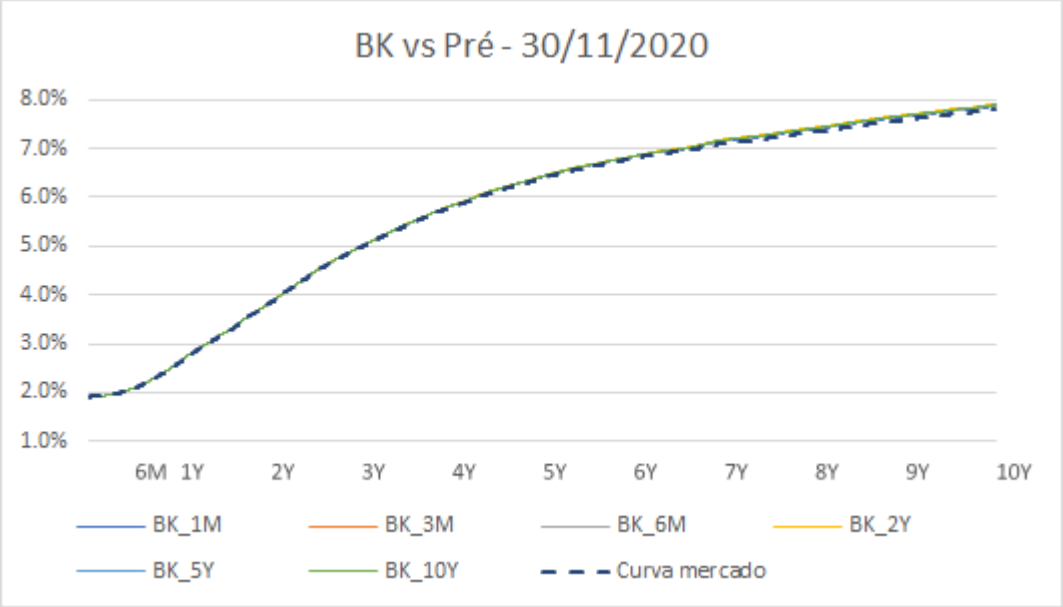

Figura 16 – Simulações da curva pré em 30/11/2020.

Na Figura 16, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 1,90%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 7,80%. A inclinação da curva era positiva ao longo de toda a trajetória até o vértice 10Y. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 13 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	0	0	0	0	0	0
1Y	0	0	0	0	0	0
2Y	0	1	1	1	1	1
3Y	1	1	1	2	2	1
4Y	2	2	2	3	3	3
5Y	2	3	3	4	3	3
6Y	3	3	3	5	4	4
7Y	4	5	5	7	6	6
8Y	5	7	7	9	8	7
9Y	6	7	7	10	8	8
10Y	6	8	8	11	9	9

Tabela 13 – Diferença entre curva base e BK para 30/11/2020.

Logo, para Novembro/2020, observa-se que a calibração utilizando janela de 1 mês foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações, no entanto as diferenças em geral foram pequenas ao longo dos vértices da curva.

A.2 Fechamentos mensais em 2022

- **30/06/2022**

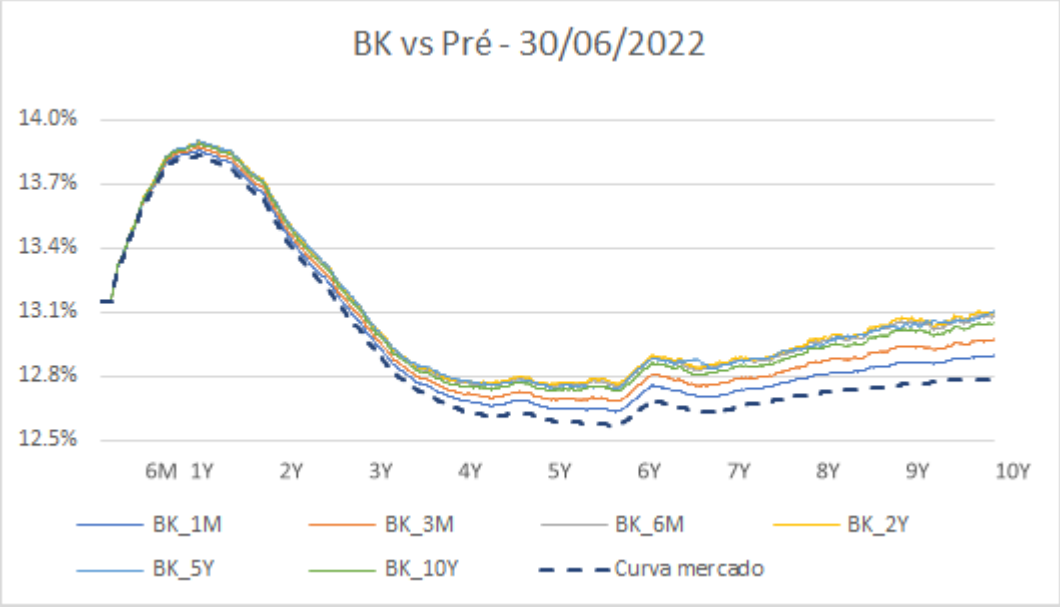

Figura 17 – Simulações da curva pré em 30/06/2022.

Na Figura 17, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 13,15%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 12,79%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 1Y] e [5Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,5Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 14 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	2	3	3	2	3
1Y	2	3	5	6	6	5
2Y	3	5	9	9	9	8
3Y	4	6	10	11	11	9
4Y	4	8	13	13	13	11
5Y	6	10	16	17	16	14
6Y	7	12	19	20	19	17
7Y	7	13	21	22	21	19
8Y	9	15	24	26	23	21
9Y	10	18	29	31	28	26
10Y	10	17	29	30	31	25

Tabela 14 – Diferença entre curva base e BK para 30/06/2022.

Logo, para Junho/2022, observa-se que a calibração utilizando janela de 1 mês foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações.

- **29/07/2022**

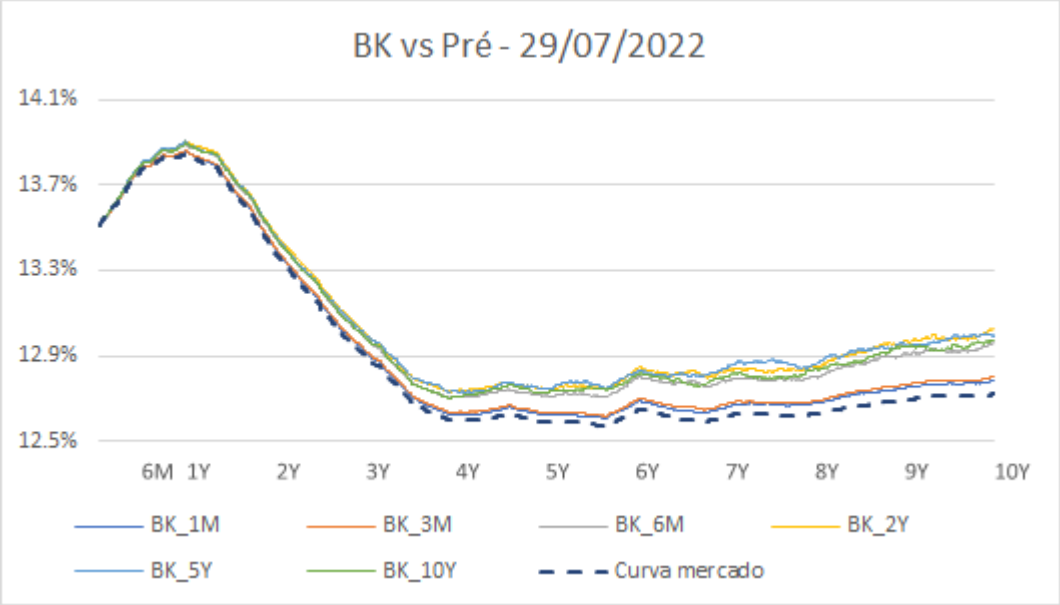

Figura 18 – Simulações da curva pré em 29/07/2022.

Na Figura 18, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 13,50%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 12,72%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 1Y] e [4Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,4Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 15 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	1	2	3	3	3
1Y	1	1	4	6	5	5
2Y	2	2	7	9	8	7
3Y	2	3	8	11	10	9
4Y	3	4	10	13	13	11
5Y	3	4	12	15	15	14
6Y	4	5	15	19	18	17
7Y	4	6	16	21	22	18
8Y	5	6	17	22	23	21
9Y	6	7	22	28	26	25
10Y	6	8	24	30	28	25

Tabela 15 – Diferença entre curva base e BK para 29/07/2022.

Logo, para Julho/2022, observa-se que a calibração utilizando janelas de 1 mês e 3 meses foram mais aderentes à curva base em relação às outras calibrações.

- **31/08/2022**

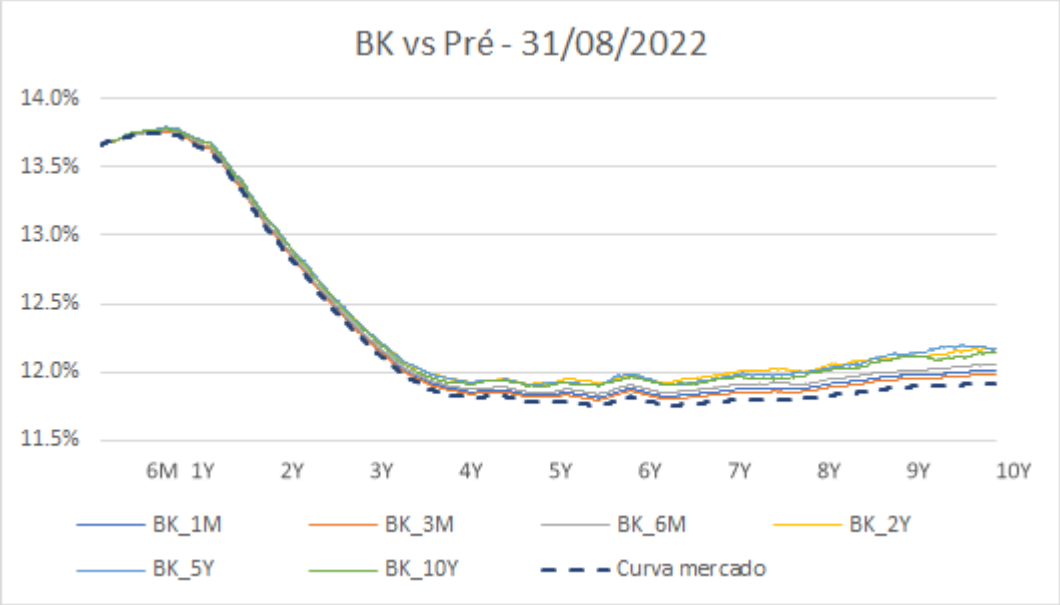

Figura 19 – Simulações da curva pré em 31/08/2022.

Na Figura 19, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 13,65%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 11,92%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 8M] e [4Y, 10Y] e negativa no intervalo]8M,4Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 16 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	1	2	3	3	3
1Y	2	1	3	5	5	5
2Y	3	2	4	8	8	7
3Y	3	2	5	9	9	8
4Y	4	3	6	12	11	10
5Y	5	3	7	14	14	12
6Y	6	4	8	16	17	15
7Y	7	5	10	20	17	16
8Y	8	5	11	20	20	18
9Y	9	6	12	23	24	22
10Y	9	6	13	25	25	22

Tabela 16 – Diferença entre curva base e BK para 31/08/2022.

Logo, para Setembro/2022, observa-se que a calibração utilizando janelas de 1 mês e 3 meses foram mais aderentes à curva base em relação às outras calibrações.

- **30/09/2022**

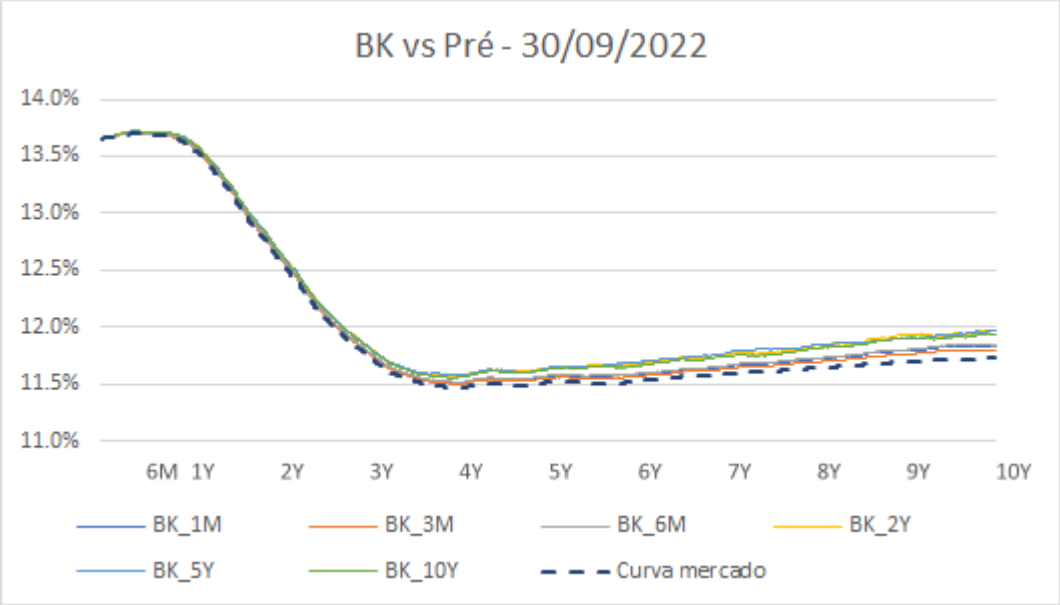

Figura 20 – Simulações da curva pré em 30/09/2022.

Na Figura 20, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 13,65%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 11,73%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 6M] e [4Y, 10Y] e negativa no intervalo]6M,4Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 17 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	1	1	3	3	3
1Y	2	1	2	5	5	4
2Y	3	2	3	7	7	6
3Y	3	2	4	8	8	7
4Y	4	3	5	10	11	9
5Y	5	4	6	13	13	11
6Y	6	4	7	16	17	14
7Y	7	5	8	17	19	15
8Y	8	5	9	20	20	18
9Y	9	6	10	24	21	21
10Y	10	7	11	24	24	21

Tabela 17 – Diferença entre curva base e BK para 30/09/2022.

Logo, para Setembro/2022, observa-se que a calibração utilizando janela de 3 meses foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações.

- **30/11/2022**

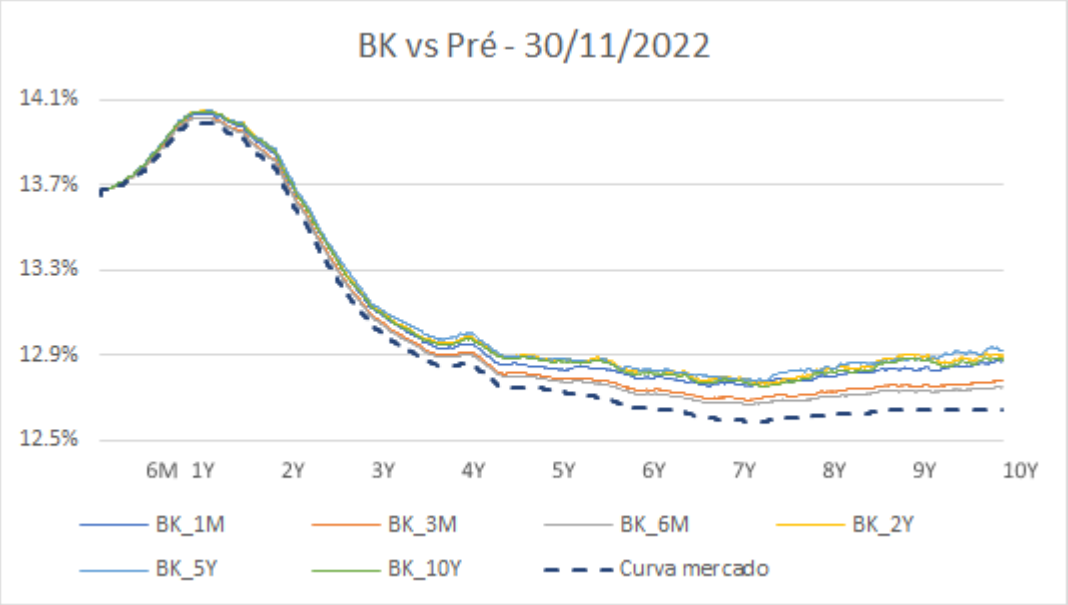

Figura 21 – Simulações da curva pré em 30/11/2022.

Na Figura 21, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 13,65%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 11,73%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 1Y] e [7Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,7Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 18 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	2	1	1	3	3	3
1Y	4	2	2	5	5	5
2Y	6	4	3	8	9	7
3Y	8	5	4	9	10	9
4Y	9	5	4	12	14	11
5Y	10	6	5	15	15	14
6Y	14	8	7	18	18	16
7Y	17	10	8	19	19	18
8Y	19	11	9	22	22	20
9Y	19	11	9	26	24	24
10Y	23	14	11	26	28	24

Tabela 18 – Diferença entre curva base e BK para 30/11/2022.

Logo, para Novembro/2022, observa-se que a calibração utilizando janela de 6 meses foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações.

A.3 Datas após reuniões do Copom com mudanças nos juros

- **03/02/2022**

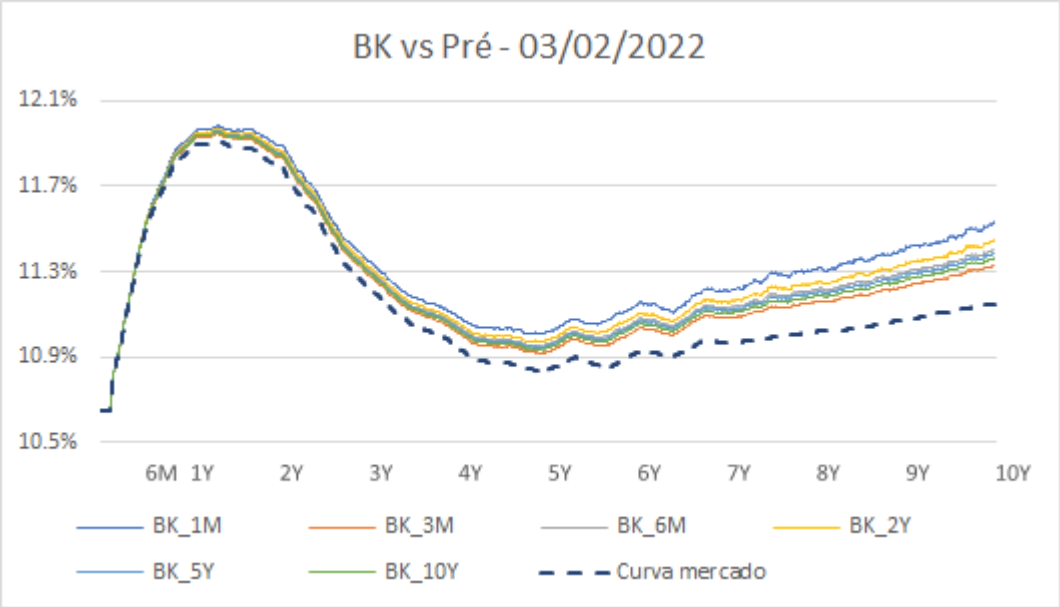

Figura 22 – Simulações da curva pré em 03/02/2022.

Na Figura 22, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 10,65%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 11,15%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 1Y] e [5Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,5Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 19 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	3	2	2	3	2	2
1Y	6	3	4	5	4	3
2Y	10	5	7	8	7	6
3Y	13	6	8	10	8	7
4Y	15	7	10	12	9	8
5Y	18	8	12	14	11	10
6Y	22	10	15	17	14	12
7Y	24	12	16	19	15	14
8Y	29	14	20	23	18	17
9Y	34	16	22	26	21	19
10Y	38	18	26	30	24	21

Tabela 19 – Diferença entre curva base e BK para 03/02/2022.

Logo, para a reunião do Copom realizada em Fevereiro/2022, observa-se que a

calibração utilizando janela de 3 meses foi mais aderente à curva base em relação às outras calibrações.

- **05/05/2022**

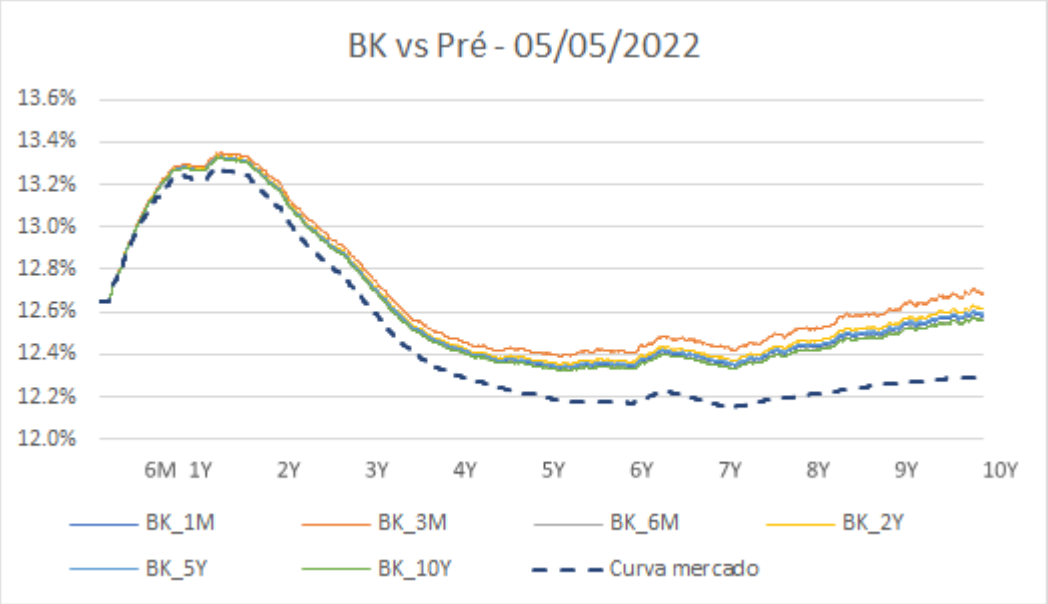

Figura 23 – Simulações da curva pré em 05/05/2022.

Na Figura 23, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 12,65%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 12,30%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 1Y] e [6Y, 10Y] e negativa no intervalo]1Y,5Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 20 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	2	3	2	3	2	2
1Y	4	6	4	5	5	4
2Y	9	12	8	10	9	8
3Y	11	15	10	12	11	10
4Y	12	17	11	14	13	11
5Y	15	21	14	17	16	14
6Y	17	24	16	19	18	16
7Y	20	28	19	22	21	19
8Y	23	32	22	26	24	22
9Y	25	34	24	28	26	23
10Y	28	39	27	32	29	26

Tabela 20 – Diferença entre curva base e BK para 05/05/2022.

Logo, para a reunião do Copom realizada em Maio/2022, observa-se que as calibrações de 1 mês, 6 meses e 10 anos obtiveram resultados semelhantes quando comparadas à curva de juros base para a mesma data.

- **04/08/2022**

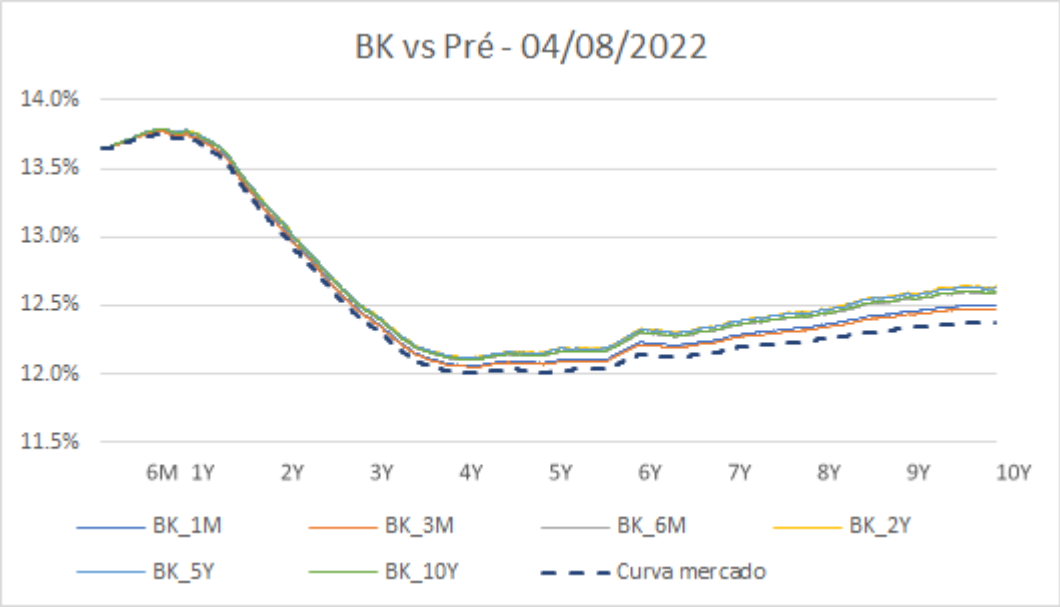

Figura 24 – Simulações da curva pré em 04/08/2022.

Na Figura 24, a taxa de juros base de 1 dia era aproximadamente 13,65%, e a taxa de juros no vértice de 10 anos era aproximadamente 12,40%. A inclinação da curva era positiva para os intervalos [0, 6M] e [4Y, 10Y] e negativa no intervalo]6M,4Y[. A diferença em *basis-points* (bps) entre curvas estimadas e curva pré base em função dos vértices pode ser visualizada na Tabela 21 abaixo:

Vértice	Janela de Calibração					
	1 mês	3 meses	6 meses	2 anos	5 anos	10 anos
6M	1	1	2	3	3	2
1Y	3	2	4	5	5	5
2Y	4	4	8	9	9	8
3Y	5	4	9	11	10	9
4Y	5	4	9	11	11	10
5Y	7	6	13	15	15	13
6Y	9	7	15	18	18	16
7Y	9	8	17	20	19	17
8Y	10	8	17	21	20	18
9Y	12	10	21	26	25	22
10Y	13	10	22	27	26	23

Tabela 21 – Diferença entre curva base e BK para 04/08/2022.

Logo, para a reunião do Copom realizada em Agosto/2022, observa-se que a calibração utilizando janelas de 1 mês e 3 meses foram mais aderentes à curva base em relação às outras calibrações.