FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

Escola de Pós-Graduação em Economia

Dissertação de Mestrado em Economia

COMPETIÇÃO OLIGOPOLÍSTICA EM AMBIENTE DE INCERTEZA KNIGHTIANA

Autor: HUGO PEDRO BOFF

Orientador: Prof. SERGIO RIBEIRO DA COSTA WERLANG

Riode Janeiro

Dezembro l995

199602 137

T/EPGE B673c

1000076499

RESUMO

Este artigo aplica um teorema de existência de equilibrios de Nash sob incerteza (Dow & Werlang, 1994) à um problema clássico da Teoria da Competição Oligopolística. Particularmente, mostra como se pode mapear todos os equilibrios de Cournot (que incluem as soluções de monopólio e de bloqueio total da produção) unicamente em função da aversão à incerteza dos produtores. Os efeitos das variações destes parâmetros sobre as produções de equilibrio são estudados. Também, as soluções de Cournot sob incerteza são comparadas com a solução do monopolio standard. Particularmente, mostra-se que existe um nível de incerteza tal que toda aversão à incerteza (do mercado) superior à este nível, induz os agentes a produzir, agregadamente, quantidades menores que as de monopolio. Enfim, as soluções de equilibrio são particularizadas explícitamente nos casos da Demanda Linear e do Duopolio de Cournot

APRESENTAÇÃO

Este trabalho reporta resultados que inserem-se em uma análise mais ampla, sobre "Decisões de Produção e de Preço em Ambiente de Incerteza Knightiana". Até aqui, o estímulo pessoal e a orientação segura do Prof. Sergio Ribeiro da Costa Werlang tem sido imprescindíveis. À ele se devem os agradecimentos do autor e boa parte dos títulos (mas não dos defeitos) que o presente estudo venha merecer. Uma primeira versão (em co-autoria com o orientador) foi apresentada no XVII Encontro Brasileiro de Econometria, realizado em Salvador (BA) entre 13 e 15 de dezembro de 1995.

Agradecemos os comentários e observações de Humberto L.A.Moreira (UMPA) que debateu aquela apresentação. Algumas sugestões por ele apresentadas foram incorporadas nesta segunda versão. Também, a seção 3.3 foi inteiramente desenvolvida à partir de idéias sugeridas na ocasião pelo Prof. Sergio R.C.Werlang. O autor agradece enfim seus colegas de estudo, particularmente a Flavio A.F.Barreto e Marcelo Fernandes cujo convívio amistoso e intercâmbio acadêmico, no seio do "Seminário dos Alunos", também serviu de estímulo para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

I - INTRODUÇÃO p.03

II - EQUILIBRIOS DE NASH COM INCERTEZA p.04

III - COMPETIÇÃO OLIGOPOLÍSTICA p.05
3.1 O Modelo p.05
3.2 Efeitos da Aversão à Incerteza sobre os Níveis da Produção p.08
3.3 Comparações com o Monopólio p.12

IV - EQUILIBRIO OLIGOPOLÍSTICO COM INCERTEZA E DEMANDA LINEAR p.15
4.1 Comparações com o Monopólio p.16
4.2 Duopólio de Cournot p.17
4.3 Prolongamentos da Análise Formal p.19

V - CONCLUSÕES p.20

Bibliografia p.22

I - INTRODUÇÃO

No modelo de escolha racional sob incerteza knightiana[1], construído por Schmeidler (1989) e Gilboa (1987), os agentes probabilizam seus conjuntos de escolha recíprocos subaditivamente, e maximizam sua utilidade esperada usando a integral de Choquet[2]. Quando as distribuições subaditivas P são convexas (i.e. exibem aversão à incerteza) este modelo é equivalente ao modelo "maximim" (Schmeidler, 1989 e Schmeidler & Gilboa, 1989) no qual a distribuição relevante é construída como o ínfimo de todas as distribuições aditivas (subjetivas) que a majoram em cada alternativa do conjunto de escolha.

Para todo evento A, B no conjunto de escolha, a convexidade de **P** requer $P(A)+P(B) \leq P(A \cap B)+P(A \cup B)$, o que implica $P(A)+P(A^c) \leq 1 \ (B = A^c)$. Na perspectiva da axiomática de Schmeidler e Gilboa, a diferença $c(P,A) = 1 - P(A) - P(A^c)$ interpreta-se como um coeficiente de "aversão à incerteza" associado ao evento A e, recentemente Dow & Werlang (1994) estendem para este contexto a noção de equilíbrio de Nash de um jogo com 2 agentes, e demonstram um teorema que garante a existência de Equilíbrios de Nash sob Incerteza (ENI) para cada par (c_1, c_2) de aversão à incerteza dos jogadores.

Neste artigo, reproduziremos inicialmente esta definição e o teorema de existência dos ENI (Sec II). Em seguida (Sec III), aplicaremos o teorema ao modelo clássico de competição oligopolística com N produtores. Mostraremos, no caso geral, como as produções de equilíbrio reagem a variações nos parâmetros de incerteza. Também, mostraremos que existe um nível de aversão à incerteza comum a todos os produtores ("incerteza do mercado") além do qual os agentes serão induzidos à um comportamento de

[1] Knight (1921): Os agentes não conhecem as distribuições de probabilidade das variáveis de controle.
[2] Para uma exposição didática das probabilidades subaditivas e aplicações deste modelo às finanças, veja-se Simonsen & Werlang (1991) e Dow & Werlang (1992a,b).

prudência que redundará em uma produção agregada menor que a produção de monopólio. Aplicações são feitas nos casos de retorno de escala constantes, demanda com elasticidade-preço constante e demanda de mercado linear (Sec. IV). O mapeamento dos ENI em função da aversão à incerteza das firmas será explicitado, neste último caso, para o duopólio de Cournot. Na última seção (Sec. V) sumariaremos algumas intuições econômicas que se inferem destes resultados.

II - EQUILÍBRIOS DE NASH COM INCERTEZA (ENI)

Seja $\Gamma(A_1, A_2, u_1, u_2)$ um jogo de 2 pessoas onde A_1 e A_2 são seus conjuntos de escolha e u_1, u_2, suas funções de utilidade. Um ENI do jogo Γ vem definido pelo par de estratégias mistas subaditivas (P_1, P_2) para as quais existem os suportes $(\text{Supp}[P_1], \text{Supp}[P_2])$[3] tais que para cada $a_i \in \text{Supp}[P_i]$, a_i maximiza a utilidade esperada do jogador i dado que P_j representa a conjectura de i a respeito das escolhas do jogador j sobre A_j:

$$a_i \in \text{Arg} \max_{a \in \text{Supp}[P_i]} E_{Pj} u_i(a,.) \qquad (i, j = 1,2)$$

Note que esta definição inclui o equilíbrio de Nash padrão (S_1, S_2) onde S_1 e S_2 são probabilidades aditivas. O teorema seguinte permite mapear os ENI através das aversões à incerteza (c_1, c_2) dos jogadores sob a hipótese de que estas são constantes e que (P_1, P_2) são compressões uniformes das estratégias mistas (aditivas) de Nash (S_1, S_2) do jogo transformado $\Gamma'(A_1, A_2, u_1', u_2')$; isto é: $P_i = (1 - c_j) S_i$, onde u_i' é tal que $E_{P_j} u_i = E_{S_j} u_i'$ para i, j = 1,2

[3] O suporte de uma distribuição subaditiva P é um conjunto B tal que $P(B^c) = 0$ e $P(D^c) > 0 \quad \forall D \subset B. \quad (D \neq B)$.

Teorema [Dow & Werlang, 1994][4]

Seja $\Gamma(A_1, A_2, u_1, u_2)$ um jogo finito de 2 pessoas. $\forall(c_1, c_2) \in [0,1]^2$, existe um equilíbrio de Nash sob incerteza (P_1, P_2), tal que c_1 é a aversão à incerteza associada à P_2 e c_2 a aversão à incerteza associada à P_1.

Na aplicação do teorema, devemos ter presente dois aspectos importantes do ENI assim definido:

1. A expressão $P_i = (1 - c_j)S_i$ requer a consistência entre as conjecturas do jogador j a respeito das escolhas do jogador $i(P_i)$ e as estratégias standard S_i ótimas do jogo Γ' (com objetivo "maximin"). Esta exigência torna-se particularmente forte no jogo com N pessoas no qual a compatibilidade se deve verificar entre as estratégias ótimas de cada jogador e as conjecturas dos N-1 parceiros (como na aplicação abaixo);

2. Todavia, a racionalidade implícita ao ENI não implica 'ommisciencia lógica', no sentido de que os agentes podem não deduzir todas as implicações de uma determinada ação previamente conhecida por eles (Dow & Werlang, 1994, p. 320).

III - COMPETIÇÃO OLIGOPOLÍSTICA

3.1 - <u>O Modelo</u>

Consideremos inicialmente um oligopólio competitivo envolvendo N firmas $(N \geq 2)$ dotadas de funções de custo $\phi_i(q_i)(i = 1,2,\ldots,N)$ e fazendo face à demanda (inversa) do mercado $R = R(Q)$ se $0 \leq Q \leq \alpha$ $(\alpha > 0)$ e $R = 0$ se $Q > \alpha$, onde $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ é a produção total $(q_i \geq 0)$. Suponhamos que ϕ_i e R sejam C^2 (duas vezes continuamente diferenciáveis) e

[4] A demonstração do teorema está baseada no fato de que se P é uma compressão uniforme de uma distribuição aditiva S $(P = (1-c)S \quad 0 \leq c \leq 1)$, então, pela integral de Choquet: $EpU = c \min_{a \in A} U(a) + (1-c)E_S U$.

que todos os custos e receitas marginais sejam respectivamente, não decrescentes e decrescentes, isto é, que $\phi_i'' \geq 0$ e $(Rq_i)'' < 0$ $(i = 1,2,...N)$. Nestas condições, as funções de lucro $\Pi_i(q_i, q_{-i}) = q_i \max\{R(Q),0\} - \phi_i(q_i)$ são estritamente côncavas em $q_i \in [0,\alpha]$, dado $q_{-i} = (q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n)$, e consideraremos então a economia $\Gamma([0,\alpha],\ldots[0,\alpha],\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_N)$.

Notemos P_i e P_{-i} as distribuições de probabilidade subaditivas (marginal e conjunta, respectivamente) representando as conjecturas dos N-1 concorrentes do produtor i, com relações aos planos de produção da firma i(P_i) e, reciprocamente, as conjecturas do produtor i a respeito dos planos de produção dos seus N-1 competidores (P_{-i}).

Para aplicar o teorema acima é preciso adotar algumas hipóteses suplementares que permitem sua generalização para a economia com $N \geq 3$ produtores. Consideraremos a economia sem incerteza $\Gamma'([0,\alpha],\ldots[0,\alpha],\Pi_1',\Pi_2',\ldots,\Pi_N')$, e as seguintes hipóteses:

H_1: Consistência (forte) entre as estratégias conjuntas ótimas S_{-i} dos $N-1$ produtores no jogo Γ' e as conjecturas (P_{-i}) da firma i sobre estas estratégias, no seguinte sentido:

$$P_{-i} = (1 - c_i)S_{-i}$$

onde c_i é a aversão à incerteza (constante) da firma i, associada à conjectura P_{-i};

H_2: Reciprocamente, consistência (forte) entre as estratégias marginais ótimas (S_i) no jogo Γ' e as conjecturas dos N-1 produtores (P_i) sobre estas estratégias, no seguinte sentido:

$$P_i = (1 - c_{-i})S_i$$

onde c_{-i} é a aversão à incerteza (constante) das N-1 firmas, associada à conjectura P_i da coalisão[5].

A hipótese H_1 permite-nos mostrar que as estratégias de Nash do jogo standard Γ' são equivalentes às estratégias com incerteza do jogo original Γ, dado que $E_{S_{-i}}\left[\Pi_i'(q_i,q_{-i})\right] = E_{P-i}\Pi_i(q_i,q_{-i})$: $\forall_i$:1,2,...,N. A hipótese H_2 nos permite calcular estas estratégias após a obtenção das estratégias mistas de Nash (S_i) do jogo transformado Γ'.

Assim, sob H_1, H_2, obtemos pela integral de Choquet:

$$E_{P-i}\Pi_i(q_i,q_{-i}) = (1-c_i)E_{S-i}\Pi_i(q_i,q_{-i}) + c_i \min_{q_{-i}\in[0,\alpha]^{N-1}} \Pi_i(q_i,q_{-i}) = (1-c_i)E_{S-i}\Pi_i(q_i,q_{-i}) - c_i\phi_i(q_i), \quad (1)$$

ou, notando $\Pi_i'(q_i,q_{-i}) = (1-c_i)\Pi_i(q_i,q_{-i}) - c_i\phi_i(q_i)$,teremos:

$$\Pi'_i(q_i,q_{-i}) = (1-c_i)q_i \max(R(Q),0) - \phi_i(q_i) \quad (2)$$

Vemos pela expressão (1) que os ENI da economia Γ são proporcionais às estratégias de Nash 'maximin' da economia Γ'.

A obtenção dos equilíbrios desta economia pressupõe a verificação das seguintes condições de 1ª ordem:

---

[5]Note que se não há possibilidade de coalisão entre as firmas e que estas empreendem suas ações e conjecturas independentemente, então, sob H_1, H_2, obtemos: $(1-c_i)(1-c_{-i}) = (1-c_k)(1-c_{-k})$, $\forall_i$; K = 1,2,...,N. Em particular, $c_i = c_k$ ou $c_{-i} = c_{-k}$ ou $c_i = c_{-i}$ $(\forall i,k)$ implicam $c_i = c_{-i} = c(\forall i)$, isto é, conhecimento comum entre as firmas.

$$\frac{\partial \Pi'_i}{\partial q_i}(q_i, q_{-i}, c_i) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,N) \tag{3}$$

Usando-se (2) vemos que o sistema acima só admite soluções não triviais para $c_i \in [\ 0,1\ )$.

3.2 - Efeitos da Aversão à Incerteza sobre os Níveis de Produção

Examinaremos agora os efeitos das variações na aversão à incerteza sobre as produções de equilíbrio do oligopólio. Para tanto, retomaremos a $i^{ésima}$ equação do sistema acima:

$$\frac{\partial \Pi'_i}{\partial q_i}(q_i(c_i,\ldots,c_N), q_{-i}(c_i,\ldots,c_N), c_i) = 0$$

Diferenciando esta equação com relação à c_i e c_j sucessivamente $(i \neq j)$ obteremos:

$$\frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i^2}\frac{\partial q_i}{\partial c_i} + \left(\frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i, \partial q_{-i}}\right)\left(\frac{\partial q_{-i}}{\partial c_i}\right) + \frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i, \partial c_i} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i^2}\frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \left(\frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i, \partial q_{-i}}\right)\left(\frac{\partial q_{-i}}{\partial c_j}\right) = 0 \tag{5}$$

Da equação $\Pi'_i(q_i, q_{-i})$ dada em (2) obtemos as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial \Pi'_i}{\partial q_i} = (1 - c_i)[q_i R'(Q) + R(Q)] - \phi'_i(q_i)$$

$$\frac{\partial \Pi'_i}{\partial q_{-i}} = (1-c_i) q_i R'(Q) 1_{N-1} \qquad (1_{N-1}\text{: vetor 1 de dimensão } N-1)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i \partial c_i} = -[q_i R'(Q) + R(Q)] < 0 \qquad \text{(no equilíbrio)}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i^2} = (1-c_i)[2R'(Q) + q_i R''(Q)] - \phi''_i(q_i) < 0 \qquad (\Pi'_i \text{ é côncava em } q_i)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi'_i}{\partial q_i \partial q_{-i}} = (1-c_i)[q_i R''(Q) + R'(Q)] 1_{N-1}$$

Levando estas derivadas em (3) e (4) obtemos:

$$\left\{(1-c_i)[q_i R''(Q) + 2R'(Q)] - \phi''_i(q_i)\right\}\frac{\partial q_i}{\partial c_i} + \\ +(1-c_i)[q_i R''(Q) + R'(Q)] 1'_{N-1} \frac{\partial q_{-i}}{\partial c_i} = q_i R'(Q) + R(Q) \qquad (4a)$$

$$\left\{(1-c_i)[q_i R''(Q) + 2R'(Q)] - \phi''_i(q_i)\right\}\frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \\ +(1-c_i)[q_i R''(Q) + R'(Q)] 1'_{N-1} \frac{\partial q_{-i}}{\partial c_j} = 0 \qquad (5a)$$

Notando $\sigma_i = 1'_{N-1}\frac{\partial q_{-i}}{\partial c_i} + \frac{\partial q_i}{\partial c_i} = \frac{\partial Q}{\partial c_i}$ para o efeito sobre a produção total de um aumento da aversão à incerteza da firma i, e após arranjo dos termos, (4a) e (5a) podem escrever-se como:

$$(1-c_i)[q_i R''(Q) + R'(Q)]\sigma_i + \left[(1-c_i)R'(Q) - \phi''_i(q_i)\right]\frac{\partial q_i}{\partial c_i} = [q_i R'(Q) + R(Q)] \qquad (4b)$$

$$(1-c_i)[q_i R''(Q) + R'(Q)]\sigma_j + \left[(1-c_i)R'(Q) - \phi''_i(q_i)\right]\frac{\partial q_i}{\partial c_j} = 0 \qquad (5b)$$

Por hipótese, $(q_iR)' \geq 0$, $(q_iR)'' \leq 0$ e $\phi_i''(q_i) \geq 0$. Assim, em (4b), qualquer que seja o sinal de σ_i, a equação sempre poderá verificar-se se $\frac{\partial q_i}{\partial c_i} < 0$.

Por (5b) o exame dos sinais mostra que:

$$\sigma_j < 0 \Rightarrow \operatorname{Sin}\left(\frac{\partial q_i}{\partial c_j}\right) = -\operatorname{Sin}\left[q_iR''(Q) + R'(Q)\right]$$

$$\sigma_j > 0 \Rightarrow \operatorname{Sin}\left(\frac{\partial q_i}{\partial c_j}\right) = \operatorname{Sin}\left[q_iR''(Q) + R'(Q)\right]$$

Somando (5b) em $i(i \neq j)$, obtemos:

$$\sigma_j\left[(Q-q_j)R''(Q) + (N-1)R'(Q)\right] + \left[\sigma_j - \frac{\partial q_j}{\partial c_j}\right]R'(Q) = \sum_{i(\neq j)}^{N} \frac{1}{1-c_i}\phi_i''(q_i)\frac{\partial q_i}{\partial c_j}$$

ou, notando $a_j = \sum_{i(\neq j)} \frac{1}{1-c_i}\phi_i''(q_i)\frac{\partial q_i}{\partial c_j}$,

$$\sigma_j\left[(Q-q_j)R''(Q) + NR'(Q)\right] - \frac{\partial q_j}{\partial c_j}R'(Q) = a_j$$

Resolvendo a equação (4b) em $\frac{\partial q_j}{\partial c_j}$ (para i = j) e substituindo o resultado na equação acima obtemos:

$$\sigma_j = \frac{a_j\left[(1-c_j)R'(Q) - \phi_j''(q_j)\right] + R'(Q)\left[q_jR'(Q) + R(Q)\right]}{R''(Q)\left[QR'(Q)(1-c_j) - (Q-q_j)\phi_j''(q_j)\right] + R'(Q)\left[(1-c_j)(N+1)R'(Q) - N\phi_j''(q_j)\right]} \qquad (6)$$

Com base em σ_j acima, podemos calcular $\frac{\partial q_i}{\partial c_i}$ e $\frac{\partial q_i}{\partial c_j}$ a partir das equações (4b), (5b) anteriores:

$$\frac{\partial q_i}{\partial c_i} = \frac{q_i R' + R - (1-c_i)[q_i R'' + R']\sigma_i}{(1-c_i)R' - \phi_i''} \tag{7}$$

e

$$\frac{\partial q_i}{\partial c_j} = -\frac{(1-c_i)[q_i R'' + R']\sigma_j}{(1-c_i)R' - \phi_i''} \tag{8}$$

Casos particulares:

a) Retornos de escala Constantes $\left(\phi_j'' = 0 \;;\; i = 1,2,\ldots,N\right)$

Se $R(Q)$ for linear, obtemos, por substituição nas equações (6)-(8):

$$\sigma_j = \frac{q_j R' + R}{(1-c_j)(N+1)R'} = -\frac{\partial q_i}{\partial c_j} < 0 \;; \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial c_i} = \left(\frac{N}{N+1}\right)\left[\frac{q_i R' + R}{(1-c_i)R'}\right] < 0$$

Se $R(Q) = Q^{-\delta}$ $(0 < \delta \leq 1)$: elasticidade-preço da demanda constante $\left(= -\frac{1}{\delta}\right)$.

$$\sigma_j = \frac{Q}{N+1}\left(\frac{1}{1-c_j}\right)\left(r_j - \frac{1}{\delta}\right) \quad \text{onde} \quad r_j = q_j/Q$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial c_i} = \left(\frac{Q}{N+1}\right)\left(\frac{1}{1-c_j}\right)\left(r_i - \frac{1}{\delta}\right)\left(N + (1+\delta)r_i\right)$$

BIBLIOTECA
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

$$\frac{\partial q_i}{\partial c_j} = -\frac{(\delta+1)Q}{(N+1)(1-c_j)}\left(r_i - \frac{1}{\delta}\right)\left(r_j - \frac{1}{1+\delta}\right)$$

Assim, dado que $r_i \leq \frac{1}{\delta}$, teremos $\sigma_i \leq 0$ e $\frac{\partial q_i}{\partial c_i} \leq 0$ e

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{\partial q_i}{\partial c_j}\right) = \mathrm{Sin}\left(r_j - \frac{1}{1+\delta}\right)$$

b) Custos Quadráticos $\left(\phi_j'' = K > 0 \;\; j = 1,2,\ldots,N\right)$

Se $c_j = c \;\; (j = 1,2,\ldots,N)$, então $q_j = q(j = 1,2,\ldots,N)$.

Assim, $a_j = \frac{K}{1-c}\left(\sigma - \frac{\partial q}{\partial c}\right)$; $\sigma_j = \sigma(j = 1,2,\ldots,N)$

Logo, substituindo estes valores em (6) obtemos:

$$\sigma = \frac{\left(R' - \frac{K}{1-c}\right)\left(\frac{Q}{N}R' + R\right)}{R'\left[(1-c)(N+1)R' - NK\right] + R''Q\left[R'(1-c) - (N-1)\left(K/N\right)\right] - \frac{K}{1-c}\left[(1-c)\left(\frac{Q}{N}R'' + 2R'\right) - K\right]}$$

3.3 - Comparações com o Monopólio

É possível que o grau de aversão à incerteza das firmas oligopolizadas seja suficientemente elevado a ponto de induzí-las a um comportamento individual de prudência que, agregadamente, resulte em uma produção menor ou igual à de monopólio. Na sequência mostraremos que existe um grau de aversão à incerteza do mercado, c(N), que igualiza a produção oligopolizada ($\hat{Q}$) com a produção de monopólio (Q_m).

Com efeito escrevendo a iésima equação do sistema (3) obtemos:

$$(1-c_i)R(Q_m)\left[1-\frac{\hat{f}_i}{\bar{\varepsilon}}\right]=\phi_i'.(\hat{q}_i) \qquad (9)$$

onde $\hat{f}_i=\frac{\hat{q}_i}{\hat{Q}}$ e $\bar{\varepsilon}$ é o módulo de elasticidade-preço da demanda $\left[\varepsilon=-\frac{\partial\, Q.(R)}{\partial\, R}.\frac{R}{Q}\right]$ avaliada ao preço de monópolio $R_m=R(Q_m)$. Supõe-se que $\bar{\varepsilon}>1$. A equação análoga à (9) correspondente ao caso de monopólio é:

$$R(Q_m)\left[1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right]=\phi_m'(Q_m) \qquad (10)$$

onde $\phi_m'(Q_m)$ é o custo marginal do monopólio.

Fazendo $c_i=c\ (i=1,2,\ldots,N)$ e somando em i obtemos, na equação (9): $(1-c)R(Q_m)\left[N-\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right]=\sum_{i=1}^{N}\phi_i'(\hat{q}_i)$. Resolvendo-se (10) em $R(Q_m)$ e levando este valor na expressão acima obtemos:

$$c(N)=1-\frac{\left(1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right)}{\left(1-\frac{1}{N\bar{\varepsilon}}\right)}\left(\frac{\hat{s}}{s_m}\right) \qquad (11)$$

onde $\hat{s}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi_i'(\hat{q}_i)$ e $s_m=\phi_m'(Q_m)$.

Por exemplo, para $R(Q) = Q^{-\delta}(0 < \delta < 1)$ teremos: $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\delta}$ e $c(N) = \frac{(N-\delta) - N(1-\delta)\left(\frac{\hat{s}}{s_m}\right)}{(N-\delta)}$. Assim, quando $\frac{\partial Q}{\partial c} < 0$ (eq. 6), um $c \geq c(N)$ conduzirá à uma produção oligopolizada menor ou igual que a de monopólio $\left(\hat{Q} \leq Q_n\right)$.

É interessante verificar como c(N) varia com N. Para tanto, suponhamos rendimentos de escala constantes: $\phi_i'(\hat{q}_i) = s_i$ e $\phi_m'(Q_m) = s_m$. Neste caso, podemos verificar que $\frac{\partial c(N)}{\partial N} \geq 0$ se ocorrer a seguinte desigualdade: $(N-1)\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-1}\right)\bar{\eta}_{\varepsilon N} \leq 1 - (N\bar{\varepsilon} - 1)\eta_{\hat{s}N}$, onde $\eta_{\hat{s}N}$ e $\eta_{\varepsilon N}$ são as elasticidades de $\hat{s}$ e ε com relação à N. O termo $\bar{\eta}_{\varepsilon N}$ é a avaliação de $\eta_{\varepsilon N}$ no ponto $R_m = R(Q_m)$, e $\eta_{\hat{s}N} = \frac{s_{N+1}}{\hat{s}_N} - 1$ com $\hat{s}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i$.

Por outro lado, pode-se provar que:

$$\eta_{\varepsilon N} = N\left[\frac{\partial^2 Q / \partial R \partial N}{\partial Q / \partial R} + \frac{\partial R}{\partial N}\left(\frac{1+\varepsilon}{R}\right)\right]$$

como $\frac{\partial R}{\partial N}$ e $\frac{\partial Q}{\partial R}$ são negativos teremos: Sin $(\eta_{\varepsilon N})$ = - Sin $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial R \partial N}\right)$. Pode-se esperar que $\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial Q}{\partial R}\right)$ seja positivo, de maneira que $\eta_{\varepsilon N}$ deverá ser negativa.

A desigualdade que garante a não negatividade de $\frac{\partial c(N)}{\partial N}$ pode ser ainda expressa como:

$$(N-1)\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-1}\right)\bar{\eta}_{\varepsilon N} \leq N\bar{\varepsilon}\left(1 - \frac{s_{N+1}}{\hat{s}_N}\right) + \frac{s_{N+1}}{\hat{s}_N}$$

Vemos então que se a (N+1)ésima firma tiver custo marginal não muito superior à média do mercado $(\hat{s}_N)$, o limite de aversão à incerteza que limita a produção de Cournot à produção de monopólio aumentará.

IV - EQUILÍBRIO OLIGOPOLÍSTICO COM INCERTEZA E DEMANDA LINEAR

Obteremos aqui as soluções explícitas do equilíbrio oligopolístico no caso da demanda linear: $R(Q) = \max\{\alpha - Q, 0\}$. Para a economia standard $\Gamma'([0,\alpha],...[0,\alpha],\Pi_1',...,\Pi_N')$, com custo marginal idêntico e constante $(\phi'_i(q_i) = s < \alpha)$, o uso de (2) e das condições de 1ª ordem (3) conduzirá às soluções:

$$\hat{Q} = \frac{1}{N+1}(N\alpha - s\beta) \qquad \text{:produção total.}$$

$$\hat{q}_i = \frac{1}{N+1}\left[\alpha - s\left(\frac{N}{1-c_i} - \beta_{-i}\right)\right] \qquad \text{:produção da firma i.}$$

$$\hat{\Pi}_i = \hat{q}_i'(\alpha - \hat{Q} - s) = \left(\frac{1}{N+1}\right)^2\left[\alpha - s\left(\frac{N+1}{1-c_i} - \beta\right)\right]\left[\alpha - s(N+1-\beta)\right] \qquad \text{:lucro da firma i.}$$

onde:

$$\beta = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{1-c_j} \quad ; \quad \beta_{-i} = \sum_{j(\neq i)}^{N}\frac{1}{1-c_j}$$

A produção e lucro de monopólio $(q^M \text{ e } \Pi^M)$ são obtidos diretamente colocando-se $N = 1$ e $c_i = 0(\forall_i = 1,2,...,N)$ nas equações acima:

$$q^M = \frac{1}{2}(\alpha - s) \quad ; \quad \Pi^M = \frac{1}{4}(\alpha - s)^2$$

Note que a condição para que a iésima firma participe do mercado $(\hat{q}_i > 0)$ escreve-se $c_i < \bar{c}_i = 1 - \frac{sN}{\alpha + s\beta_{-i}}$, o que exigirá uma aversão à incerteza não muito elevada. Todavia, a firma que tiver aversão à incerteza nula $(c_i = 0)$, sempre participará do mercado: com efeito, $+\infty \geq \beta_{-i} \geq N-1$ e $\alpha > s$ implicam, sucessivamente, $1 > \bar{c}_i \geq 1 - \frac{sN}{(\alpha - s) + sN} = c_N > 0$, para N finito. Logo, uma condição suficiente para que a iésima firma produza será $c_i < c_N$. Consideremos agora as condições (necessárias e suficientes) $c_i < \bar{c}_i$. Ordenemos as N firmas por ordem crescente de seus graus de aversão à incerteza, de maneira que: $c_{(1)} \leq c_{(2)} \leq \ldots \leq c_{(N)}$. Definamos correspondentemente $\beta_{-(i)} = \beta - \frac{1}{1 - c_{(i)}}$. Então, as condições $c_{(i)} < \bar{c}_{(i)} = 1 - \frac{sN}{\alpha + s\beta_{-(i)}}$ podem escrever-se, sucessivamente:

$$\beta_{-(i)} > \frac{1}{N+1}\left(N\beta - \frac{\alpha}{s}\right) \text{ ou; } c_{(i)} < 1 - \frac{(N+1)s}{\alpha + \beta s} = c_0$$

Assim, $n = \max\left\{i \in \{2,3,\ldots,N\} : c_{(i)} < 1 - \frac{(N+1)s}{\alpha + \beta s}\right\}$ será o número máximo de firmas presentes no mercado, e $c_{(n)} < c_0$ será o maior grau de aversão à incerteza admitido. Consequentemente, N-n firmas ficarão de fora do mercado.

4.1 - <u>Comparações com o Monopólio</u>

Podemos verificar que $\hat{Q} \leq q^M$ se (e somente se) $\beta/N \geq \alpha/s - \frac{N+1}{2N}(\alpha/s - 1) = \bar{\beta}$. Assim, a produção oligopolizada pelas N firmas não será maior que a de monopólio se: $\bar{\beta} \leq \beta/N < \alpha/s$.

Um caso de particular interesse é aquele onde $c_i = c(i = 1,2,\ldots,N)$, no qual c pode ser interpretado como uma aversão à incerteza do mercado. Neste caso, $\hat{Q} = \left(\frac{N}{N+1}\right)\left(\alpha - \frac{s}{1-c}\right)$, $\hat{q} = \frac{1}{N+1}\left(\alpha - \frac{s}{1-c}\right)$; $\hat{\Pi} = \left(\frac{1}{N+1}\right)^2\left(\alpha - \frac{s}{1-c}\right)^2$. Logo, se $\frac{1}{1-c} < \alpha/s$, isto é se $c < 1 - s/\alpha$, então um número qualquer de firmas poderá participar do mercado. Por outro lado, a produção oligopolizada não será maior que a de monopólio se $\left(\frac{1}{1-c}\right) \geq \overline{\beta}$, o que implica $c \geq 1 - \frac{2s}{\alpha\left(1-\frac{1}{N}\right)+s\left(1+\frac{1}{N}\right)} = c(N)$. Vemos então que, mesmo na situação extrema de competição pura $(N \uparrow \infty)$, poderemos ter $\hat{Q} \leq q^M$, quando $c \geq 1 - \frac{2s}{\alpha+s} = \frac{\alpha/s-1}{\alpha/s+1}$ [6].

4.2 - Duopólio de Cournot

Particularizamos aqui o oligopólio de Cournot para o caso N=2 de maneira a poder explicitar, em função unicamente dos parâmetros de aversão à incerteza (c_1, c_2), as regiões onde o ENI é possível.

Colocando N=2 nos valores de equilíbrio da produção e dos lucros da seção anterior $(\hat{Q}, \hat{q}_i \text{ e } \hat{\Pi}_i)$, obtemos os valores de Cournot $(Q^c, q_i^c \text{ e } \Pi_i^c)$ seguintes:

$$Q^c = \frac{2}{3}\left[\alpha - \frac{s}{2}\left(\frac{1}{1-c_1} + \frac{1}{1-c_2}\right)\right]$$

$$q_i^c = \frac{1}{3}[\alpha - sB_i]; \qquad i = 1,2$$

---

[6] Lembra-se que o equilíbrio das firmas em competição perfeita pressupõe demanda infinita $(\alpha \uparrow \infty)$. Evidentemente, o valor c(N) dado acima pode ser diretamente obtido da equação (11). Neste caso temos $\overline{\varepsilon} = \frac{\alpha+s}{\alpha-s}$ e $\hat{s} = s_n = s$.

$$\Pi_i^c = \frac{1}{9}\left[\alpha - Q^c - s\right] = \frac{1}{9}\left[\alpha - s\left(\frac{3}{1-c_i} - \frac{1}{1-c_1} - \frac{1}{1-c_2}\right)\right]\left[\alpha - s\left(3 - \frac{1}{1-c_i} - \frac{1}{1-c_2}\right)\right]$$

$$\text{com } B_i = \frac{2}{1-c_i} - \frac{1}{1-c_j}; \qquad j,i = 1,2$$

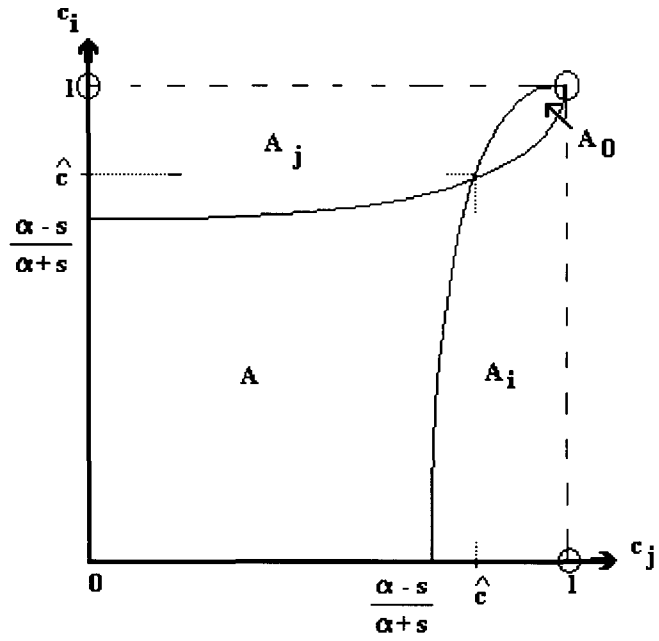
O mapeamento dos equilíbrios de Nash com incerteza (ENI) da economia $\Gamma\left([0,\alpha],[0,\alpha],\Pi_1,\Pi_2\right)$ será então dado pela condição: $q_i^c \geq 0 \Leftrightarrow \alpha/s \geq B_i$ ou, ainda:

$$c_i \leq 1 - \frac{2s(1-c_j)}{\alpha(1-c_j)+s} = f(c_j) \qquad i,j = 1,2$$

Notemos que f é contínua, crescente e convexa $(f', f'' > 0)$, com $f(0) = \frac{\alpha - s}{\alpha + s}$, e ponto fixo em $\hat{c}$=1–s/α.

No plano (c_j, c_i) representamos abaixo as regiões compatíveis com o ENI: A: produção conjunta de Cournot: $(q_j^c\ q_i^c) > (0,0)$; A_j monopólio da firma j: $(q_j^M, 0)$; A_i monopólio da firma i: $(0, q_i^M)$; A_0: bloqueio da produção: $(0,0)$.

Pelo teorema de Dow e Werlang (Sec. II) sabemos que para cada ponto (c_j, c_i) existe um ENI do tipo correspondente à região A na qual este ponto está situado.



Podemos nos interessar também nos níveis de incerteza mínimos à partir dos quais a produção da firma i não seria superior à sua parcela correspondente na produção de monopólio $\left(q^M = \frac{1}{2}(\alpha - s)\right)$ repartida igualitariamente entre as firmas: $q_i^M = \frac{1}{2}q^M$. Mostra-se, com efeito que $q_i^c \leq q_i^M$ (se somente se) $c_i \geq 1 - \frac{s(1-c_j)}{(1-c_j)(\alpha+3s)+1}$, $(i, j = 1,2)$ restrições estas que engendram 4 regiões análogas àquelas representadas no gráfico acima para os ENI: a primeira (A) na qual $(q_j^c, q_i^c) \geq (q_j^M, q_i^M)$; a segunda (A_i) na qual $q_i^c \geq q_i^M$ e $q_j^c < q_j^M$; a terceira (A_j), na qual $q_i^c < q_i^M$ e $q_j^c \geq q_j^M$; e a quarta (A_0) onde ambas as produções de Cournot são menores que as de monopólio: $(q_j^c, q_i^c) < (q_j^M, q_i^M)$. Notemos enfim que se $c_1 = c_2 = c$, a produção de Cournot sempre será menor ou igual à de monopólio se $c \geq \frac{\alpha - s}{\alpha + 3s}$.

4.3 - Prolongamentos da Análise Formal

A presente análise pode aplicar-se, é claro, à todo problema de decisão econômica sob incerteza que possa ser modelado como um jogo simultâneo. No presente

contexto, a competição em preços, ou a competição em preços com produção diferenciada por padrões de qualidade (onde a aversão à incerteza porta unicamente sobre a escolha dos níveis de qualidade, por exemplo), podem figurar entre os casos passíveis de um tratamento análogo a este dado ao oligopólio clássico[7].

Um desafio importante que se coloca para a ampliação da teoria da escolha sob incerteza knightiana consiste na obtenção de um teorema para jogos sequenciais, análogo ao de Dow & Werlang. Tal sucesso permitir-nos-ia, por exemplo, estudar as condições sobre os parâmetros de incerteza que garantiriam a propriedade de Nash para o equilíbrio de Stackelberg[8]. Também o estudo da estabilidade do oligopólio de Cournot dinamizado[9] poderia ser efetuado sobre as mesmas bases.

V - Conclusões

O presente trabalho permite-nos ressaltar os seguintes pontos:

1. Quando as firmas de um mercado oligopolizado, competindo em quantidades, fazem face à um ambiente de incerteza knightiana, os equilíbrios (de Nash) deste mercado podem ser mapeados unicamente em função dos graus de aversão à incerteza dos produtores. No caso de uma demanda de mercado linear, a solução de monopólio e o bloqueio total da produção aparecem como soluções particulares, quando as aversões à incerteza entre os produtores, são díspares (alta e baixa) ou elevadas e próximas umas das outras, respectivamente;

[7]Estes modelos podem ser encontrados em Laffont & Moreaux (1991), Crampes & Hollander (1995).
[8]No jogo standard (sem incerteza), a perfeição em subjogos é obtida, por exemplo, quando considera-se o custo de instalação das firmas entrantes. Para uma resenha, ver Schymura de Oliveira (1991).
[9]Um modelo dinâmico é apresentado em Szidarovsky & Yen (1995).

2. Nos casos aqui analisados, o aumento na aversão à incerteza do produtor j reduz sua produção de equilíbrio e aumenta (ou diminui) a produção das firmas concorrentes, dependendo de sua parcela de mercado $\left(r_j = \frac{q_j}{Q} \right)$ e da elasticidade-preço da demanda;

3. Este estudo permitiu-nos evidenciar que para níveis de incerteza do mercado suficientemente elevados, a produção de equilíbrio do mercado oligopolizado poderá ser menor que a produção de monopólio. Tal resultado teórico tem significativo apelo empírico, na medida em que contribui para explicar o comportamento defensivo usualmente adotado pelas firmas oligopolistas nos períodos de elevada e persistente instabilidade monetária e institucional. Ainda que o modelo convencional aqui apresentado não permita estilizar mudanças nos padrões de competitividade intervenientes na esteira da racionalização de processos e diferenciação de produtos a que recorrem as firmas nestes períodos, certo é que o aumento nas incertezas do mercado oligopolizado quase sempre são acompanhadas de uma redução global nas quantidades produzidas e de um aumento no preço dos produtos[10].

4. Sob a hipótese de retornos de escala constantes, o limite inferior da aversão à incerteza que torna a produção do mercado oligopolizado menor que a do monopólio tende a aumentar à medida que aumenta o número de firmas (mas desde que as firmas entrantes não tenham custo médio, muito superior ao do mercado).

5. Enfim, nossa análise evidencia também como a aversão à incerteza dos agentes desempenha o papel de barreira à entrada intrínseca para as firmas proponentes ao ingresso em um mercado oligopolizado. Tal resultado sugere que em ambiente de elevada incerteza

[10]Com relação aos preços, conclusões análogas são obtidas em um enfoque estruturalista (pós-keynesiano), à partir de modelos de precificação ('mark-up') em ambiente de elevada inflação onde os riscos assumidos pelos produtores vêm associados a possíveis perdas de mercado e à subestimação do custo futuro dos insumos (Frenkel, 1979).

knightiana, qualquer legislação protecionista ou anti-trust (baseada em tamanho do mercado) pode tornar-se perfeitamente supérflua e inócua para a regulação deste mercado.

Bibliografia

Crampes, C. & A. Hollander (1995) "Duopoly and Quality Standards", European Economic Review 39, 71-82.

Dow, J. & Werlang, S.R.C. (1992a) "Uncertainty Aversion, Risk Aversion, and the Optimal Choice of Portfolio", Econometrica 60 (1), 197-204.

_____ (1992b) "Excess Volatility of Stock Prices and Knightian Uncertainty", European Economic Review 36, 631-638.

_____ (1994) "Nash Equilibrium Under Knightian Uncertainty: Breaking Down Backward Induction", Journal of Economic Theory 64, 305-324.

Frenkel, R. (1979) "Decisiones de Precio em Alta Inflacion", Estudios Cedes 2, nº 3.

Gilboa, I. (1987) "Expected Utility Theory with Purely Subjective Non-Additive Probabilities", Journal of Mathematical Economics 16, 65-88.

Gilboa, I. & D. Schmeidler (1989) "Maximin Expected Utility with Non-Unique Prior", Journal of Mathematical Economics 18, 141-153.

Laffont, J-J. & M. Moreaux (Ed.) (1991) "Dynamics, Incomplete Information and Industrial Economics", Basil Blackwell.

Schymura de Oliveira, L.G. (1991) "Barreira à Entrada nas Indústrias: O Papel da Firma Pioneira", Revista de Econometria XI (1), Abril.

Schmeidler, D. (1989) "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity", Econometrica, Vol. 57, nº 3.

Simonsen, M.H. & Werlang, S.R.C. (1991) "Subadditive Probabilities and Portfolio Inertia", Revista de Econometria XV (1), 1-19.

Szidarovszky, F. & J. Yen (1995) "Cournot Oligopolies with Productive Adjustment Costs", Journal of Mathematical Economics 24, 95-101.