LUIZ FERNANDO ZANONCINI LINS

TÍTULOS SOBERANOS E RISCO DE CRÉDITO:
uma análise do caso brasileiro

TÍTULOS SOBERANOS E RISCO DE CRÉDITO:
uma análise do caso brasileiro

Banca Examinadora

Prof. Orientador Richard Saito
Prof. Dr. Marcos Fernandes Gonçalves da Silva
Prof. Dr. Paulo Pichetti

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO

LUIZ FERNANDO ZANONCINI LINS

TÍTULOS SOBERANOS E RISCO DE CRÉDITO:
uma análise do caso brasileiro

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Economia de Empresas da Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas (FGV-EAESP), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia de Empresas.

Orientador: Prof. Dr. Richard Saito

SÃO PAULO
2003

LINS, Luiz Fernando Zanoncini. Títulos soberanos e risco de crédito: uma análise do caso brasileiro. São Paulo: EAESP/FGV, 2003. 88 p. (Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação de Economia de Empresas da EAESP/FGV).

Resumo: A recente discussão sobre o impacto do risco de crédito sobre a oferta de financiamento a países emergentes é o motivador deste trabalho, que procura estimar modelos de apreçamento de ativos que levam em consideração as expectativas de investidores em relação à probabilidade de não cumprimento integral por parte do emissor das disposições estabelecidas na emissão do título. Estimam-se modelos com o objetivo de extrair de uma série de preços de títulos informações sobre a probabilidade de default e a expectativa de valor recuperado em caso de default. Estes dois fatores apresentam comportamento bastante volátil no período da amostra, indicando a fragilidade da arquitetura de contratos atuais de dívida soberana.

Palavras-Chave: Estrutura Temporal de Juros; Risco de Crédito; Máxima Verossimilhança.

Agradecimentos

Agradeço ao prof. Richard Saito por sua orientação no desenvolvimento deste trabalho. Um agradecimento especial à prof. Maria Carolina da Silva Leme por sua dedicação ao curso de mestrado em economia de empresas da FGV-EAESP.

À CAPES pelo auxílio financeiro através de bolsa de mestrado .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 1

Casos Recentes de Inadimplência 3

A Proposta do FMI 5

2 REVISÃO DA LITERATURA 10

3 MODELO 14

O Processo de Default 14

Valor Recuperado 15

Apreçamento 16

Especificação da dinâmica dos fatores 18

Estimação 22

4 TESTES EMPÍRICOS 30

Dados 31

Resultados 34

5 CONCLUSÕES 47

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 49

ANEXO A 54

ANEXO A 54

ANEXO B 56

ANEXO C 58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Curva Swap – Parâmetros estimados para as equações diferenciais estocásticas determinantes da dinâmica do fator de volatilidade e da taxa de juros de curto prazo 35
Tabela 2: Erros de Apreçamento - Curva de Swaps– Valor médio, valor máximo e desvio padrão das diferenças entre preços da amostra e preços gerados com parâmetros da Tabela 1 para swaps com maturidades fora da amostra 36
Tabela 3: Erros de Apreçamento - Valor médio, valor máximo e desvio-padrão das diferenças entre preços observados e preços obtidos do modelo com os parâmetros apresentados abaixo. 38
Tabela 4: Parâmetros Estimados Global 2008 - Parâmetros das equações diferencias estocásticas com a expectativa de valor recuperado definida como constante, obtidas dos preços do Global 2008 39
Tabela 5: Erros de Apreçamento – Valor médio, máximo e desvio padrão das diferenças de preços observados e preços obtidos attravés da utilização dos parâmetros da Tabela 4 para títulos fora da amostra. 40
Tabela 6: Parâmetros Estimados Global 2027 Parâmetros para as equações diferenciais estocásticas com a expectativa de valor recuperado definida como constante, obtidas dos preços do Global 2027 40
Tabela 7: Parâmetros – valor recuperado estocástico - Parâmetros para as equações diferenciais estocásticas com a expectativa de valor recuperado estocástica, obtidas dos preços do Global 2008 e Global 2027 41
Tabela 8: Erros de Apreçamento – valor recuperado estocástico - Valor médio, máximo e desvio padrão das diferenças de preços observados e preços obtidos attravés da utilização dos parâmetros da Tabela 7 para títulos fora da amostra. 42
Tabela 9: Liquidez de Globals emitidos pelo Brasil – Ratings de liquidez dados pelo banco J.P. Morgam para vários títulos externos do Brasil. 54

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Global 2008 e 2027 - Preços de títulos brasileiros no mercado internacional no período de 03/04/98 a 14/06/02 33
Figura 2: Comportamento dos Títulos Públicos Americanos – Rendimento dos Títulos Sintéticos do Tesouro Americano de dez e trinta anos no período de 03/04/98 a 14/06/02. 34
Figura 3: Comparação entra taxa de juros estimada e Taxas LIBOR – Taxa de juros livre de risco implícita no modelo em comparação a taxas de curto prazo de mercado 37
Figura 4: Intensidade de Default e Expectativa de Valor Recuperado Implícitos – Intensidade de default (apresentada no eixo vertical esquerdo) e expectativa de valor recuperado (eixo vertical direito) obtidos através do modelo de apreçamento de quatro fatores. 43
Figura 5: Carregamento dos Fatores – Coeficientes das variáveis de estado para o cálculo do rendimento de um título no modelo afim. 44
Figura 6: Coeficiente do Fator Expectativa de Valor Recuperado – Impacto da expectativa de valor recuperado no preços dos títulos, em função da maturidade. 46

1 Introdução

Este trabalho estima um modelo de apreçamento de ativos sujeitos a risco de crédito a títulos emitidos pelo Brasil no mercado internacional. O modelo contempla a possibilidade de não pagamento por parte do emissor e de incerteza no valor recebido após a reestruturação da dívida em caso de inadimplemento. O modelo permite estabelecer o comportamento de fatores que determinam a dinâmica dos preços dos títulos. A motivação para o desenvolvimento do modelo é dada pela recente discussão sobre o impacto dos termos dos contratos de dívida soberana no acesso de países em desenvolvimento ao mercado internacional.

Após a renegociação da dívida externa dos países em desenvolvimento, realizada na primeira metade da década de 1990, a estratégia de financiamento destes países sofreu significativa alteração em relação à década anterior, com o seu retorno aos mercados internacionais de títulos de renda fixa. Uma base maior de investidores e uma melhor diversificação do risco expandiriam o acesso dos países emergentes ao mercado de capitais e reduziriam seus custos de financiamento. As diversas crises da segunda metade da década – México em 1994 e 1995, Ásia em 1997, Rússia em 1998 e Brasil em 1999 - mostram, no entanto, que os mercados de dívida de países emergentes apresentaram-se extremamente voláteis neste período. Em momentos de crise sofreram retrações ou completo fechamento e não têm se mostrado como uma forma consistente de financiamento externo.

A dificuldade de reinserção de países emergentes no mercado de títulos de renda fixa em um período de tantas crises faz ressurgir a discussão sobre a capacidade da arquitetura atual dos contratos de dívida em manter níveis de financiamento estáveis a custos razoáveis sem provocar a paralisia econômica dos países emissores em eventos de crise. Dois fatores intimamente relacionados podem ser determinantes do comportamento errático do mercado para títulos de países emergentes: a probabilidade de default e a expectativa de recuperação em caso de default. A probabilidade de default é a probabilidade antecipada por investidores do não pagamento integral das obrigações estabelecidas em contrato – a ocorrência de default[1]. O mercado de títulos soberanos

[1] A definição de default é vasta para acomodar vários eventos. Na documentação dos *globals bonds* brasileiros um evento de default é: a) um atraso de mais de trinta dias no pagamento de juros ou principal,

também introduz dificuldades nas negociações em caso de crises de liquidez e insolvência pela ausência de procedimentos estabelecidos de renegociação de dívidas entre investidores privados e emissores soberanos, gerando incertezas em relação à expectativa de valor recuperado.

O default soberano é um evento complexo. Difere do default de uma emissão privada em seu mercado doméstico pela relativa imunidade que países gozam em tribunais de outros países,[2] pela dificuldade de se estabelecer garantias viáveis aos instrumentos emitidos e pela ausência de um mecanismo semelhante aos processos de liquidação e reorganização, que reestruturem o pagamento a diversos credores, estabelecendo prioridades de pagamentos e preservando os ativos do devedor. O evento de default soberano geralmente é seguido por um processo de renegociação entre devedor e credores o qual é condicionado à legislação pela qual a dívida é regida, pela probabilidade de ações legais por parte de investidores insatisfeitos com o resultado das negociações, pela base de investidores e pela expectativa de suporte por parte de organismos multilaterais.

O início de um processo de renegociação não implica necessariamente um valor recuperado previsível. Uma base mais heterogênea de investidores do que o modelo de empréstimos sindicalizados cria novas incertezas. Tome-se como referência a negociação da crise da dívida da década de 1980: um comitê relativamente pequeno de credores negociava condições que se aplicariam à dívida como um todo. Este grupo de bancos estrangeiros tinha muitas vezes interesses de longo prazo nos países devedores, além de estarem sujeitos a pressões de organismos internacionais e de órgãos de supervisão que facilitavam uma renegociação coordenada. Em um novo cenário, com uma base difusa de investidores, a coordenação torna-se muito mais difícil, pois a) investidores individuais não possuem outros interesses nos países emissores e nem mesmo interesses comuns, b) existe a possibilidade de se distanciar da negociação e tentar obter, através de litígio, melhores condições e c) a existência de novos instrumentos financeiros, como os derivativos de crédito, faz com que alguns investidores pressionem para a ocorrência de default.

---

b) a aceleração de qualquer principal agregado da dívida externa pública que exceda US$ 25.000.000,00, c) atraso de qualquer pagamento da dívida externa pública, que exceda US$ 25.000.000,00, d) declaração de moratória, f) rejeição ou repúdio de obrigações da mesma série.

[2] MOODY'S (2000) apresenta algumas considerações sobre a possibilidade de ações legais contra países em cortes estrangeiras.

CASOS RECENTES DE INADIMPLÊNCIA

O default soberano não é um fenômeno novo. Na década de 1930 houve uma sucessão de default de dívidas de emissores da América Latina e Europa Central. Em sua maioria as negociações eram conduzidas por um conselho privado de representantes de detentores de títulos. A experiência recente mostra que após o default de um título soberano o resultado mais provável é uma reestruturação do título através de alterações nos termos do título ou através de uma troca por um novo instrumento (*exchange offer*). Exemplos significativos mais recentes são os casos da Rússia, Equador, Ucrânia e Paquistão.[3]

Em 17 de agosto 1998 a Rússia anunciou uma série de medidas, entre elas a reestruturação de títulos da dívida doméstica, os GKO com vencimentos anteriores a 1º de janeiro de 1999. A Rússia declarou também moratória das dívidas da antiga União Soviética com o Clube de Paris e o Clube de Londres e aplicou uma redução no valor do principal que seria pago em maio de 1999, referente ao título MinFin3 emitido em 1993. A reestruturação foi conduzida através de um comitê de bancos comerciais no estilo das renegociações dos anos 1980. Obteve-se uma redução do principal em torno de 30% e houve a emissão de um novo título em troca de juros atrasados.

O Equador tornou-se inadimplente a partir de setembro de 1999 em toda dívida renegociada (*bradies)* e em *eurobonds*, com valor de face de US$ 6,5 bilhões. Estabeleceu um grupo consultivo com os maiores investidores institucionais e obteve reestruturação da dívida em julho e agosto de 2000 através de oferta de troca de toda a dívida por um único título denominado em dólares com maturidade de 30 anos. Houve redução estimada no estoque de 41% mas com aumento em pagamentos de cupons.[4]

Em 2000 a Ucrânia anunciou uma reestruturação em quatro estágios de US$ 2,5 bilhões em *eurobonds*. Para títulos com cláusulas de ação coletiva[5] (CAC) obteve

---

[3] FMI (2002) faz uma análise da dinâmica da crise que precede o default na Rússia, Ucrânia, Equador e Paquistão e dos efeitos sobre a economia doméstica da reestruturação da dívida soberana. Aspectos legais das reestruturações e estratégias de renegociação são abordados em BUCHHEIT (2000).

[4] A reestruturação dos títulos do Equador é um exemplo de título regido pela lei do estado de Nova York, e portanto, sem a presença de cláusulas de ação coletiva no estilo inglês, que facilitariam a imposição de uma reestruturação de prazos e pagamentos. O uso de *exit consents*, revogação de cláusulas como listagem em bolsa, *cross default* e aceleração, permitiu enfraquecer o poder de barganha de investidores resistentes à oferta do novo título (MOODY'S, 2001).

[5] Títulos que permitem que seus termos, inclusive referentes a prazos e pagamentos, sejam alterados com a aprovação da maioria dos detentores do título, impossibilitando ações legais posteriores. As cláusulas de

aprovação prévia da maioria dos investidores para restabelecer novos termos de pagamento e para o título sem CAC houve troca voluntária por novo título.

O Paquistão reestruturou *eurobonds* sem garantias através de oferta de troca de dívida em novembro de 1999 com valor de face de US$ 608 milhões. A reestruturação foi conduzida através de oferta unilateral de um novo título, após consultas privadas com grandes investidores. A Ucrânia e o Paquistão tinham uma base de investidores pequena e concentrada e, conseqüentemente era baixa a probabilidade de litígio.

A reestruturação da dívida do Peru é o caso amplamente citado sobre os problemas de investidores não colaborativos (*hold outs*). Um investidor não participante da reestruturação em 1996 obteve da justiça americana o direito de apreender o pagamento de cupons de títulos *bradies* em setembro de 2000 para liquidação do valor total de face da dívida em sua posse, em um total de US$ 56 milhões. Para evitar o atraso no pagamento dos cupons de seus títulos, o governo do Peru fez acordo com o litigante pagando o valor pedido integralmente.

As propostas para reformulação dos termos de títulos soberanos estão inseridas em contexto maior de resolução de crises de países emergentes. Após a crise do México em 1994/1995 voltou-se a discutir como países podem solucionar crises de liquidez sem gerar perdas expressivas de produto e sem depender de empréstimos de organismos multinacionais. Defensores da reformulação do sistema financeiro internacional acreditam que o setor privado deve assumir sua responsabilidade na resolução das crises de países emergentes, arcando com os riscos decorrentes de empréstimos a estes países. A dificuldade de reestruturação dos instrumentos de dívida atuais leva países a adiar ajustes necessários para não ameaçar a relação com os credores privados. A demora em uma solução negociada com o setor privado força, em várias oportunidades, a ação de organismos multilaterais.

Existem várias propostas para mecanismos de reestruturação da dívida. Podem ser agrupadas em dois grandes grupos: a) as baseadas em uma solução de

---

ação coletiva são subdivididas em: a) cláusulas de representação coletiva, estabelecendo organismos de representação dos detentores dos títulos, como *trustees*, b) cláusulas de ação majoritária, permitindo maioria qualificada decidir alterações de termos do contrato, c) cláusulas de compartilhamento, pelas quais pagamentos do devedor são divididos p*ro-rata* entre credores e d) cláusulas de não aceleração,

mercado, que incluiriam reformulação dos contratos como cláusulas de ação coletiva e prorrogação de pagamentos e b) a institucionais, como a criação de uma "corte de falências internacional" que organize o processo de reestruturação de dívidas ou a possibilidade que o FMI permita interrupções temporárias de pagamento enquanto fornece empréstimos emergenciais.

A PROPOSTA DO FMI

Segundo o FMI o processo atual de reestruturação de títulos de países emergentes é demasiadamente imprevisível, demorado e danoso ao país e aos credores, gerando maior incerteza em relação ao valor recuperado (FMI, 2002b). Sob a sigla SDRM (*Sovereign Debt Restructuring Mechanism*) sugere os seguintes pontos: a) reestruturação da dívida sujeita à aprovação da maioria dos detentores dos diversos instrumentos e não apenas da totalidade dos investidores de um instrumento específico, permitindo que a maioria decida sobre alterações nos termos de pagamento e de prazo, b) paralisação da possibilidade de ações legais contra o devedor, evitando que investidores utilizem recursos legais para obter ganhos em prejuízo a outros investidores, c) monitoramento das políticas do devedor para que os interesses dos credores sejam preservados e d) financiamento prioritário, pelo qual parcela do financiamento privado após o default seria excluída dos acordos de reestruturação.

Como benefícios a proposta vê a possibilidade de uma reestruturação mais previsível permitir que países com dívidas insustentáveis promovam ajustes antes que reversas internacionais sejam esgotadas agravando a crise financeira e impossibilitando futuras renegociações. A maior previsibilidade de mecanismo impediria que o devedor utilizasse artifícios para a redução do valor da dívida, diminuindo a insegurança dos credores quanto ao valor da dívida após o default. A diminuição da incerteza de todo o processo levaria a uma redução dos custos de financiamento para os países emergentes. A simples existência de um processo pré-definido que renegociação induziria credores e investidores a trabalhar em reestruturações voluntárias, sem a aplicação dos dispositivos.

---

requerendo percentual mínimo de credores para pedir pagamento imediato do principal em caso de default.

A posição da indústria parece ser de forte oposição à iniciativa do FMI.[6] As reestruturações de Rússia, Ucrânia, Equador e Paquistão seriam exemplos de que a renegociação é possível na arquitetura atual através de propostas de trocas de títulos. Um acesso mais fácil à reestruturação permitiria países emergentes forçar renegociações danosas aos interesses dos credores em situações nas quais caberiam outros recursos. Contrapartidas de proteção de direitos dos credores presentes em dispositivos legais de falência e reorganização, como reestruturação de atividades e alteração de diretoria, inexistiriam em um contexto de negociações com países soberanos e, portanto, a comparação com o processo de falência no setor privado ou de reorganização de dívidas de governos locais é falha. A introdução de cláusulas de ação coletiva ocasionaria, por estes motivos, um aumento de custos para os países e redução no volume de crédito ofertado.

Para os países em desenvolvimento, diversas questões são postas. Os argumentos dos organismos internacionais e dos investidores divergem quanto ao impacto da adoção de medidas como cláusulas de ação coletiva nos custos de financiamento. Para o FMI a maior previsibilidade quanto ao valor recuperado em caso de default implica redução da remuneração por uma redução de risco de perda. Para alguns detentores de títulos a adoção do SDRM geraria um aumento da probabilidade de default, dado o risco moral da maior facilidade de reestruturação, portanto, demandaria uma maior remuneração. Esperam-se assim dois efeitos distintos com a flexibilização da renegociação: a) aumento da probabilidade de default, o que reduziria o valor dos títulos e b) diminuição da volatilidade do valor recuperado e, por conseqüência, um aumento no valor dos títulos. Como estes dois efeitos combinam-se e qual é o impacto líquido nos custos de financiamento são aspectos empíricos a serem investigados.

Um elemento complicador na análise de mudanças da arquitetura do sistema financeiro internacional é o papel de programas de ajuda econômica dos organismos internacionais. Na estrutura atual espera-se que os organismos venham em socorro de países chave para evitar o agravamento e contágio da crise. Existe a possibilidade de risco moral de devedores e credores, os primeiros assumindo dívidas maiores que seus

[6] Exemplos são as cartas enviadas ao diretor do FMI Horst Koehler em 06/02/2002 por EMTA (*Emerging Markets Traders Association*), IPMA (*International Primary Market Association*), ISMA (*International Securities Market Association*), SIA (*Securities Industry Association*) e TBMA (*The Bond Market Association*) e ao secretário do tesouro dos EUA Paul O'Neil em 03/06/2002 por EMCA (*Emerging Markets Creditors Association*), EMTA, IIF (*Institute of International Finance*), IPMA, SIA e TBMA disponíveis em http://www.emta.org.

fundamentos sustentariam, e os credores tomando decisões não baseadas em risco de crédito do país, mas sim na expectativa sobre o plano de salvamento dos organismos internacionais.

EICHENGREEN e MODY (2000 e 2001) analisam estas questões de forma agregada para os países em desenvolvimento. As reformas apresentadas teriam diferentes impactos sobre diferentes tipos de devedores. EICHENGREEN e MODY basearam seu estudo em uma comparação entre rendimentos de títulos privados emitidos sob a lei do estado de Nova York e a sob a lei inglesa, ou seja, sem e com cláusulas de ação coletiva, respectivamente. Para países com baixos *ratings* de crédito a adoção de CACs implica maiores custos, enquanto que países com melhores *ratings* apresentam custos menores nos títulos sob lei inglesa. A justificativa é que para países com piores *ratings* de crédito a inclusão de cláusulas de ação coletiva agrava o risco moral, permitindo mais facilmente a ocorrência de um default estratégico – portanto aumenta a probabilidade de default. Para países com melhor qualidade de crédito a possibilidade de um default estratégico é menor, e o incremento no valor do título por um valor recuperado menos volátil tem um impacto maior.

A crítica de EICHENGREEN e MODY (2001) de que há um descompasso entre o prolífico desenvolvimento de modelos teóricos que fundamentam as diversas propostas de reformulação de contratos de dívida soberana e a modesta constatação empírica destes modelos é um dos motivadores deste trabalho. Uma grande dificuldade para testes empíricos destes modelos é que a probabilidade de default e a expectativa de valor recuperado não são diretamente observáveis e não têm uma relação simples com os preços de títulos que pagam cupons negociados no mercado internacional.[7]

É comum na análise do risco de crédito de títulos de renda fixa o cálculo de *spreads*, diferenciais de taxas de rendimento, entre títulos sem risco de default e títulos com risco de crédito com fluxos de pagamentos semelhantes. A análise dos *spreads* dos títulos soberanos não oferece, porém, informação suficiente para um estudo sobre os impactos individuais de variações na probabilidade de default ou na expectativa de valor recuperado nos preços dos títulos. Alterações no *spreads* podem ser resultado de mudanças na percepção sobre a capacidade de pagamento de um país, portanto, não

[7] Estes fatores podem ser observados diretamente de preços de derivativos de crédito, como *Credit Default Swaps* (CDS), mas estes instrumentos são recentes e pouco líquidos.

relacionadas com os problemas de risco moral de conflitos entre credores ou de default estratégico motivadores da discussão sobre a reformulação dos contratos de dívida soberana. O presente trabalho procura extrair dos preços dos títulos dois componentes da formação de preços, a probabilidade de default e a expectativa de valor recuperado em caso de default, e analisar sua dinâmica nos últimos anos. A expectativa de valor recuperado em caso de default é um indicativo da percepção dos investidores quanto à garantia de seus direitos na ocorrência de inadimplência.

Pretende-se contribuir à discussão sobre nova a arquitetura do sistema financeiro internacional ao tentar estabelecer evidências empíricas sobre as expectativas dos investidores quanto ao comportamento da probabilidade de default e do valor recuperado em caso de default. O objetivo principal deste trabalho é estimar os parâmetros que determinam a dinâmica dos fatores que apresentam melhor adequação à amostra utilizada e apresentar a evolução dos fatores não observados. A significância e a correlação entre os diversos fatores podem ser indicativos da percepção do mercado sobre as relações entre taxas de juros de mercados desenvolvidos, probabilidade de default e expectativa de recuperação para títulos soberanos emitidos pelo Brasil. Limitações de identificação e estimação de parâmetros, além do esforço computacional, impõem certas restrições à modelagem. O modelo assume que um único evento de crédito é considerado no apreçamento, e na ocorrência do evento o valor recuperado é pago integralmente. Este valor, ainda que estocástico, é determinado de forma exógena e, portanto, o pagamento de cupons e amortizações não afetam este valor. Instrumentos de uma mesma classe, os *global bonds* de diversas maturidades para a dívida soberana pós-renegociação, apresentam características comuns de crédito, probabilidade de default e valor recuperado, e de liquidez. Para os *globals* a hipótese de homogeneidade de crédito é bem razoável e as diferenças de liquidez não são significativas. No caso dos *bradies* deve-se atentar para o fluxo de pagamentos de cada título, pois apresentam estruturas de capitalização, pagamento de cupons e amortização distintos, além de haver emissões com títulos do tesouro americano como garantia.

Duas hipóteses são essenciais na construção do modelo: a) inexistência de oportunidades de arbitragem e b) que a dinâmica dos fatores pode ser expressa por equações diferenciais estocásticas. As variáveis consideradas, probabilidade de default e valor recuperado, não são variáveis observadas. São variáveis latentes em um modelo que se baseia em hipóteses de não arbitragem para estabelecer uma relação entre os

preços observados e os fatores latentes. A inversibilidade dos preços observados em variáveis latentes só é garantida se os títulos são apreçados conforme esta hipótese. Diferenças de liquidez dos títulos que gerem distorções nos preços não são consideradas. A dinâmica dos fatores, especificada através de equações diferenciais estocásticas lineares, define distribuições de probabilidade para as quais parâmetros devem ser estimados.

A próxima seção introduz uma breve revisão da literatura sobre default soberano e apreçamento de ativos sujeitos a risco de crédito. A seção 3 introduz o modelo de apreçamento de ativos sujeitos a risco de crédito e a especificação da dinâmica dos fatores. Dados utilizados, método de estimação e resultados são apresentados na seção 4, e a seção 5 apresenta considerações finais.

2 Revisão da Literatura

A dificuldade em se fundamentar a motivação para o pagamento de dívidas contraídas por países em um contexto de inexistência de mecanismos supranacionais de manutenção de contratos gerou uma literatura que procura explicitar que incentivos levam um país a honrar suas dívidas.[8] A ameaça de exclusão do mercado internacional de capitais apresentada por EATON e GERSOVITZ (1981), a perda de reputação de bom devedor (COLE e KEHOE, 1992), perda potencial de produto (COHEN e SACHS, 1982) e a ameaça de sanções diretas sobre o comércio e as finanças internacionais do país devedor (BULOW e ROGOFF, 1989b) são algumas das penalidades que garantiriam a oferta de crédito a países.

Outra vertente da literatura procura desenvolver modelos econômicos que expliquem imperfeições observadas no mercado de dívida soberana. Três problemas relacionados com risco moral têm sido abordados mais freqüentemente na literatura. A possibilidade de pacotes de ajuda de instituições multilaterais levar a níveis inadequados de endividamento de países emergentes é analisada por BULOW e ROGOFF (1988), problemas de falta de coordenação entre credores são analisados por MILLER e ZHANG (1999) e a probabilidade de default estratégico é analisada por DOOLEY (2000).

MILLER e ZHANG (1999) apresentam um modelo em que o risco do conflito entre os detentores dos títulos é mais significativo que o risco moral do devedor e a redução de *grab races* é a principal motivação para introdução de mecanismos de reestruturação de dívida soberana. A quase inevitável ajuda oficial induziria ainda a uma falta de monitoramento por parte dos credores da real capacidade de pagamento do emissor do título. Um organismo multilateral, como o FMI, teria dois papéis complementares: emprestador de última instância para evitar o default técnico e assim minimizar os efeitos de uma crise de liquidez e "corte de falência" para autorizar paralisação temporária de pagamentos e organizar reestruturações da dívida em caso de insolvência do emissor.

[8] EATON e FERNANDEZ (1995) e ROGOFF e ZETTELMEYER (2002) apresentam uma revisão da literatura sobre dívida soberana.

A ameaça de perda de produto em caso de crise é o único incentivo efetivo para o pagamento de dívidas soberanas em DOOLEY (2000) e os contratos internacionais atuais são desenhados para manter esta ameaça crível. A dificuldade de renegociação inviabiliza novos empréstimos ao elevar os custos de captação e forçar mesmo nível de garantias entre créditos novos e antigos, gerando uma crise financeira no país emissor. Este desenho afasta a probabilidade de default estratégico, mas gera uma distorção ao dificultar a renegociação quando o país está insolvente e o default é inevitável. O autor sugere a idéia de default sancionado, pela qual o país devedor recebe crédito oficial enquanto renegocia com credores privados e implementa um programa de ajuste, como alternativa à criação de mecanismos institucionalizados de reestruturação.

A literatura de apreçamento de títulos soberanos sujeitos a risco de crédito é recente e esparsa. A maioria dos trabalhos procura adaptar modelos inicialmente desenvolvidos para títulos corporativos. É padrão na literatura de títulos corporativos a classificação de modelos entre duas abordagens: estrutural e reduzida. A abordagem estrutural procura modelar os ativos do emissor e o default é a primeira passagem deste valor em uma determinada barreira, exemplos representativos são MERTON (1974), o primeiro trabalho a desenvolver esta idéia e LONGSTAFF e SCHWARTZ (1995), que elimina a hipótese de taxas de juros constantes, incorporando o risco de variações nas taxas de juros, e permite violações nas regras de prioridade absoluta. A abordagem reduzida parte de um processo intensidade de default, ou seja, indicativo da probabilidade "instantânea" de inadimplência sem construir um modelo do qual esta probabilidade é derivada. Exemplos de modelos reduzidos são DUFFIE e SINGLETON (1999), que apresenta um modelo de apreçamento de títulos corporativos ou soberanos com risco de default, JARROW e TURNBULL (1995), que define um modelo aplicável a derivativos sujeitos a risco de crédito, SCHÖNBUCHER (1997), que estende o modelo para múltiplos eventos de default e formulação baseada em taxas a termo, e LANDO (1998), que utiliza um processo específico, um processo de Poisson duplamente estocástico, para modelar a intensidade de default. Ambas as abordagens podem, porém, relacionar os preços dos títulos a fatores como variáveis macroeconômicas, outros instrumentos de renda fixa, etc.

BAKSHI, MADAN e ZHANG (2001) utilizam um modelo reduzido para extrair os fatores taxa de juros livre de risco, intensidade de default e expectativa de valor recuperado de preços de títulos corporativos para comparar diversas

especificações de expectativa de valor recuperado. Estabelecem uma correlação negativa entre intensidade de default e expectativa de valor recuperado.

PAGÈS (2001) aplica um modelo reduzido para um *brady* brasileiro com garantia e vencimento em 2024 no qual modela a dinâmica conjunta da taxa Libor e da intensidade de default através de um modelo de dois fatores. O trabalho considera o valor recuperado em caso de default nulo[9] e estabelece uma correlação negativa entre taxa de juros livre de risco e *spread* de crédito.

KESWANI (2000) estima modelos reduzido e estrutural para *bradies* da Argentina, México e Venezuela. Utilizando-se das hipóteses simplificadoras que o valor recuperado esperado é equivalente às garantias dadas, a taxa de juros de curto prazo é uma soma de dois processos CIR[10] independentes e a intensidade de default é um processo raiz quadrada transladado, o modelo reduzido apresenta evidência que existe uma correlação negativa entre a taxa de juros de curto prazo e a intensidade de default.[11]

A proposta deste trabalho assemelha-se ao trabalho de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003), os quais desenvolveram um modelo de apreçamento de MinFins, títulos denominados em dólar e emitidos pelo Ministério de Finanças russo sob legislação local. Deste modelo eles extraíram informações sobre a evolução da probabilidade instantânea de default e de expectativa de perda em caso de default para períodos antes e depois do default de 1998. Seus resultados sugerem que a expectativa de valor recuperado em caso de default sofreu expressiva queda após o default dos GKOs.

A escolha do trabalho de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003) como referência deve-se a seu caráter inovador. É um dos primeiros trabalhos que aplicam modelos de apreçamento de ativos sujeitos a risco de crédito para títulos emitidos por países em desenvolvimento baseados em especificações de estruturas temporais de juros livres de oportunidade de arbitragem com dinâmica determinada por parâmetros estáveis ao longo da amostra.

---

[9] O autor afirma que em seu modelo não há recuperação no evento de default, o que não é correto para um título com garantias como o *Discount Bond* emitido pelo Brasil em 1994, mas o modelo é adequado ao estimar a taxa de perda média.

[10] Modelo apresentado por COX, INGERSOLL e ROSS (1985).

[11] Outros estudos não utilizam mesma metodologia de apreçamento, mas analisam o risco de default em títulos soberanos, como Merrick (2001) para *eurobonds* russos e argentinos.

Do trabalho de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003) utiliza-se também uma técnica desenvolvida para a aproximação da função de verossimilhança de difusões multivariadas sem fórmulas fechadas. O procedimento denominado de *Simulated Maximum Likelihood Estimation* (SMLE) foi proposto independentemente por PEDERSEN (1995) e Santa-Clara em 1995 e apresentado em BRANDT e SANTA CLARA (2002). DURHAM e GALLANT (2002), que apresenta técnicas de otimização do procedimento de estimação, e DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003) são exemplos de trabalhos deste método, no qual a densidade de transição sem fórmula conhecida é aproximada através de discretizações do processo contínuo e de simulações de várias trajetórias entre dois valores observados. BRANDT e SANTA CLARA (2002) demonstram que, sob algumas hipóteses, o estimador SML converge para o estimador de máxima verossimilhança, que por sua vez converge ao vetor de parâmetros real quando o número de observações tende a infinito.

3 Modelo

A incerteza é modelada em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$, com a filtração $\{\Im_t : t \geq 0\}$, que representa a chegada de informação ao longo do tempo. Existe uma medida de probabilidade **Q** equivalente a **P**, sob a qual o processo preço de todos os ativos descontado pela taxa de juros de curto prazo é um martingal. HARRISON e KREPS (1979) e HARRISON e PLISKA (1981) mostram que a existência desta medida martingal equivalente **Q** corresponde essencialmente à inexistência de oportunidades de arbitragem no mercado.

Neste trabalho, quando não especificada explicitamente uma medida de probabilidade, subentende-se a medida de probabilidade martingal equivalente **Q**.

O PROCESSO DE DEFAULT

O evento de default é modelado como um tempo de parada[12] τ totalmente inacessível no conjunto de informação dos investidores. A hipótese de inacessibilidade garante a existência de um processo intensidade de default, que pode ser entendido como a taxa de chegada condicional de default dado que não ocorreu default até o tempo:[13]

$$l_t = \lim_{d \to 0} \frac{1}{d} \frac{P\left(t < t < t + d \middle| \Im_t\right)}{P\left(t < t \middle| \Im_t\right)} \qquad (1)$$

A não previsibilidade do default garante três características observadas empiricamente no comportamento dos preços de títulos: saltos no evento de default, *spreads* de curto prazo não são necessariamente iguais a zero e mercados não são

[12] Tempo de parada é uma variável aleatória positiva t tal que o evento {t<t} seja $\Im_t$ mensurável. O tempo de parada é inacessível quando não existe uma seqüência de tempos de parada previsíveis que anuncie o evento.

[13] O processo intensidade λ do tempo de parada τ com função indicadora $N_t = 1_{t \leq t}$ é definido como o processo para o qual $N_t - \int_0^t l_s ds$ é um martingal.

completos, ou seja, existem estados da natureza para os quais não existe *hedge* com os ativos negociados.

A intensidade de default, que nos modelos de forma reduzida é assumida por hipótese e sem fundamentação econômica, pode ser gerada por um modelo estrutural com assimetria de informação. Quando o default é definido como a primeira vez que os ativos do emissor caem a uma determinada barreira, DUFFIE e LANDO (2001) e GIESECKE (2001) mostram que, se os investidores não têm informação completa sobre estes ativos e a barreira, o evento de default não é previsível e o processo indicador de default admite uma decomposição não trivial em um martingal e um processo compensador estritamente crescente. Assumindo-se que o processo compensador é absolutamente contínuo e, portanto, admite uma intensidade[14] obtém-se uma representação reduzida. A intensidade assim construída torna-se dependente do estado.

O processo indicador de default pode ser representado pelo primeiro salto de um processo de Poisson duplamente estocástico, também chamado de processo de Cox, para o qual a probabilidade de ocorrência de default até o tempo T é dada por:

$$P(t \le T) = 1 - E\left(e^{-\int_0^T l_u du} \right) \qquad (2)$$

VALOR RECUPERADO

O valor recuperado é uma variável aleatória W limitada e mensurável em τ. Conforme DUFFIE (1998b), define-se o processo compensador $\overline{W}(t)$, previsível tal que $\overline{W}(t) = E^Q[W|\Im_{t-}]$. O processo compensador $\overline{W}(t)$ é o pagamento esperado neutro ao risco, dada toda informação até imediatamente antes de t, se o default ocorresse em t.

Três hipóteses sobre o valor recuperado são mais freqüentes na literatura sobre risco de crédito em títulos de renda fixa: a) recuperação parcial do valor de

[14] Segundo GIESECKE (2001), se há ruído na observação da barreira, mas a observação dos ativos é perfeita então o compensador é singular e não admite intensidade. Condições técnicas para a existência do processo intensidade são apresentadas no teorema 4.4 de GIESECKE (2001).

mercado (RMV) de DUFFIE e SINGLETON (1999), no qual o valor recuperado é uma fração do preço de mercado do título imediatamente antes do default, b) recuperação parcial de valor de face (RF), como DUFFIE (1998a) e LANDO (1998) e c) recuperação do valor presente (RT), de JARROW e TURNBULL (1995) e COLLIN-DUFRESNE e GOLDSTEIN (2000), no qual o valor recuperado é uma fração de um título livre de risco.

O modelo RMV permite que o impacto da recuperação seja incorporado ao fator de desconto, simplificando o cálculo dos títulos, mas tem a desvantagem de não permitir a determinação da intensidade de default e do valor recuperado esperado separadamente. No modelo RF, dois títulos com maturidade e cupons diferentes, mas com mesmo valor de face apresentam o mesmo valor recuperado, o que se aproxima mais de uma interpretação estrita do critério de liquidação no qual credores com instrumentos de mesma senioridade devem receber o mesmo valor. O modelo RT é o que mais se aproxima à idéia de troca de um título em default por um novo e também mais adequado para o apreçamento de títulos com garantias, como alguns *bradies*.

Neste trabalho utilizou-se a especificação de valor recuperado como fração do valor de face do título. Esta especificação permite que a probabilidade de default e a expectativa de valor recuperado sejam identificadas separadamente. Comparada à hipótese de recuperação de valor presente, esta hipótese apresenta uma formulação mais simples, e mais adequada à estimação dos parâmetros. É usual na literatura considerar que o valor recuperado dos cupons a serem pagos é igual a zero e apenas uma parcela do valor de face é recuperada.

APREÇAMENTO

A economia não apresenta oportunidades de arbitragem e existe um processo de curto prazo r_t, que pode ser interpretado como uma taxa de juros de curto prazo livre de risco composta continuamente. Sob a medida martingal equivalente **Q**, um ativo com preço terminal S_T e processo cumulativo de dividendos D_t deve obedecer ao seguinte processo de preço S_t:[15]

[15] Neste trabalho assume-se que todos os processos satisfazem as condições necessárias para que as integrais e valores esperados apresentados existam e sejam bem definidos, ver DUFFIE (1996) para detalhes técnicos.

$$S_t = E^Q\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^u r_v dv\right) dD_u + \exp\left(-\int_t^T r_v dv\right) S_T \middle| \Im_t\right]; t \le T \qquad (3)$$

Um título com principal F_T pago na maturidade T e processo cumulativo de cupons C_t e sujeito a default tem seu preço terminal *ex dividend* S_T igual a zero e o processo cumulativo de dividendos D_t definido como:

$$D_t = \int_0^t 1_{\{t>u\}} dC_u + \overline{W}_t 1_{\{t \le t\}} + F1_{\{t>T, t\ge T\}} = \int_0^t (1 - N_u) dC_u + \int_0^{t\wedge T} \overline{W}_u dN_u + F1_{\{t>T, t\ge T\}}$$

O processo N_t é o processo indicador de default $1_{\{t \le t\}}$. Os dividendos acumulados são compostos de a) acumulação normal dos cupons até a ocorrência do default, expressa pela primeira integral, b) valor recuperado, após a ocorrência de default e antes da maturidade do título, expresso pela segunda integral e c) pagamento do principal, se não houver default até a maturidade.

A proposição abaixo resume o resultado fundamental dos modelos reduzidos, pelo qual os fluxos de caixa futuros podem ser descontados por um novo fator de desconto, a soma da taxa de juros livre de risco e da intensidade de default. O valor de um título é o valor esperado da soma dos cupons e do valor de face descontados pela taxa de juros ajustada à intensidade de default mais um integral que representa a acumulação do valor descontado de um ativo que paga w_t se o default ocorre em t+dt e zero se o default não ocorre.

Proposição 1: Seja o processo V definido por:

$$V_t = E^Q\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^u (r_v + l_v) dv\right) dC_u + \exp\left(-\int_t^T (r_v + l_v) dv\right) F + \int_t^T \exp\left(-\int_t^u (r_v + l_v) dv\right) l_u W_u du \middle| \Im_t\right] \qquad (4)$$

Se V_t não salta no evento de default τ quase certamente, então $S_t = V_t 1_{\{t>t\}}$.

DUFFIE e SINGLETON (1999), LANDO (1998) e JEANBLANC e RUTKOWSKI (1999) apresentam provas da proposição 1 em diversos graus de generalidade. A condição de inexistência de saltos é satisfeita se, por exemplo, a taxa de juros de curto prazo, a intensidade de default e o valor recuperado são modelados como funções de valores correntes de difusões.

ESPECIFICAÇÃO DA DINÂMICA DOS FATORES

A taxa de juros de curto prazo, a intensidade de default e a expectativa de valor recuperado são funções de um vetor de variáveis de estado não observado. O vetor estado X é um processo markoviano em um espaço de estado $D \subset \Re^n$ e é solução para a equação diferencial estocástica

$$dX_t = m(X_t)dt + s(X_t)dW_t$$

onde W é um movimento browniano padrão em $\Re^n$, $m : D \to \Re^n$ é o vetor de deriva e $s : D \to \Re^{n \times n}$ é uma matriz de difusão.[16]

Um importante resultado de DUFFIE e KAN (1996) é que os rendimentos de um título com apenas um fluxo no seu vencimento são funções afins das variáveis de estado se, e somente se, as funções de deriva e difusão das equações diferenciais estocásticas que regem a dinâmica dos fatores também são funções afins do nível do vetor das variáveis de estado[17]. Os coeficientes da função que relaciona os fatores aos rendimentos são relativamente fáceis de serem calculados, pois são soluções de equações diferenciais ordinárias. A hipótese de um modelo afim permite uma simplificação, ao dispensar a solução de equações diferenciais parciais ou métodos de Monte Carlo para o cálculo dos valores esperados envolvidos nas fórmulas dos preços dos títulos, apresentados na equação (4).

---

[16] Ver OKSENDAL (1992) ou PROTTER (1990), por exemplo, para ver condições de regularidade de μ e σ para que a solução da equação diferencial estocástica exista e seja única. DUFFIE, PAN e SINGLETON (2000) apresentam um tratamento mais geral do vetor de estado, incluindo a possibilidade de saltos.

[17] A equação diferencial estocástica deve ser uma difusão afim na medida de probabilidade neutra ao risco.

Pela hipótese do modelo afim o processo X obedece a uma difusão linear, na qual os coeficientes de deriva e de difusão são funções afins do vetor de estado:[18]

$$dX_t = \tilde{k}\left(\tilde{q} - X_t\right)dt + \Sigma\begin{pmatrix} \sqrt{v_1(X_t)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{v_2(X_t)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{v_n(X_t)} \end{pmatrix} d\tilde{W}_t \qquad (5)$$

onde $\kappa \in \Re^{nxn}$, $\theta \in \Re^n$ $\Sigma \in \Re^{nxn}$ e $v_i = a_i + b_i x$ com $\alpha_i, \beta_i \in \Re^n$.

A principal vantagem da especificação AJD é a possibilidade de fórmulas fechadas para preços de títulos zero cupom. Formulações tradicionais como VASICEK (1977) e COX, INGERSOLL e ROSS (1985) são casos particulares da especificação acima. DUFFIE e KAN (1996) mostram que o preço de um título zero-cupom é dado por:

$$P(t,t) = E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\Im_t\right] = e^{A(t)+B(t)'X(t)} \qquad (6)$$

onde A(τ) e B(τ) satisfazem as equações diferenciais ordinárias abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= -\tilde{q}'\tilde{k}'B(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\Sigma' B(t)\right]_i^2 a_i - d_0, \quad A(0) = 0 \\ \frac{dB(t)}{dt} &= \tilde{k}'B(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\Sigma' B(t)\right]_i^2 b_i + d_X, \qquad B(0) = 0_{Nx1} \end{aligned} \qquad (7)$$

DUFFIE, PAN e SINGLETON (2000) expandem o resultado de DUFFIE e KAN (1996) para ativos que possam ser expressos pelo valor esperado abaixo:

[18] DUFFIE e KAN (1996) apresentam as condições para que exista uma solução forte com coeficientes de volatilidade v_i não negativos.

$$f = E\left[\exp\left(-\int_t^T R(X_s, s)ds\right)(u_0 + uX_T)e^{vX_T}\middle|\Im_t\right] \qquad (8)$$

Em um modelo afim, sob condições de regularidade, ϕ pode ser expresso por $f = \exp\left(a(t,u) + b(t,u)X(t)\right)\left(\hat{a}(t,u,v) + \hat{b}(t,u,v)X(t)\right)$, sendo os coeficientes $a, b, \hat{a}, \hat{b}$ dados por equações diferenciais ordinárias Riccati similares a (7).

DAI e SINGLETON (2000) apresentam as condições para que um modelo afim seja admissível, ou seja, com um processo v(t) estritamente positivo e, portanto, capaz de gerar soluções reais para as equações diferenciais estocásticas. Apresentam também um modelo canônico com as restrições paramétricas mínimas para que seja identificável econometricamente. Através de transformações invariantes - que não alteram a taxa de juros instantânea e, conseqüentemente, os preços dos títulos - modelos apresentados na literatura podem ser derivados da formulação canônica. Exemplos são modelos como BALDUZZI et al. (1996), nos quais um dos fatores é a própria taxa de juros de curto prazo e outros fatores têm uma interpretação intuitiva como volatilidade e tendência central.

Curva dos Títulos

A especificação máxima de um modelo de quatro fatores que garante a admissibilidade do modelo e a identificabilidade dos parâmetros é apresentada abaixo. Na expressão de apreçamento associam-se os processos v(t) a um fator de volatilidade, r(t) à taxa de juros instantânea livre de risco, $\lambda(t)$ como a intensidade do processo de default e w(t) ao valor recuperado em caso de default:

$$\begin{aligned} v(t) &= X_1(t) \\ r(t) &= d_0 + d_1X_1(t) + d_2X_2(t) \\ l(t) &= u_0 + u_1X_1(t) + u_2X_2(t) + u_3X_3(t) \\ \log(w(t)) &= v_0 + v_1X_1(t) + v_2X_2(t) + v_3X_3(t) + v_4X_4(t) \end{aligned} \qquad (9)$$

A dinâmica dos fatores na medida de probabilidade P é dada por:

$$d\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{bmatrix} \right) + I_{4x4} \begin{bmatrix} \sqrt{X_1(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+b_2 X_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+b_3 X_1(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+b_4 X_1(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ dW_3(t) \\ dW_4(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

e os preços de mercado dos riscos são dados por

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{X_1(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+b_2 X_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+b_3 X_1(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+b_4 X_1(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

garantindo que a dinâmica dos fatores também seja afim nos níveis dos fatores na medida de probabilidade neutra ao risco **Q**.

O primeiro fator é associado a um fator de volatilidade, pois a raiz quadrada de X_1 entra no coeficiente de difusão de cada um dos fatores. O processo é estritamente positivo, desde que $K_{11}q_1 > 0$. Modela-se desta forma o comportamento de volatilidade estocástica permitindo que os parâmetros β determinem o grau de influência do fator de volatilidade nos outros fatores, e desta forma a correlação instantânea entre os fatores.

Pela matriz K os fatores também podem ser correlacionados - uma característica observada empiricamente, por exemplo, entre os spreads e taxa de juros livre de risco para títulos corporativos. A estacionaridade dos processos é garantida se os autovalores de K são positivos.

O número máximo de parâmetros possíveis de serem estimados na representação canônica com quatro fatores é 25 para a dinâmica dos fatores mais os quatro parâmetros dos preços de mercado dos riscos

$$\Psi = \begin{Bmatrix} K_{11}, K_{21}, K_{22}, K_{31}, K_{32}, K_{33}, K_{41}, K_{42}, K_{43}, K_{44}, q_1, \\ b_2, b_3, b_4, d_0, d_1, d_2, v_0, v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3, u_4 \end{Bmatrix}$$

A presente especificação não garante que a taxa de juros livre de risco e a intensidade de default sejam estritamente positivas. Optou-se por flexibilizar a correlação entre as variáveis de estado, permitindo a correlação negativa entre fatores, o que não possibilita que estes processos sejam estritamente positivos em um modelo afim. Outras normalizações necessárias para que o modelo seja identificável são apresentadas por DAI e SINGLETON (2001).

ESTIMAÇÃO

O estimador de máxima verossimilhança de Ψ, o conjunto de parâmetros das equações diferenciais estocásticas que estabelecem a dinâmica dos fatores, é dado por:

$$\hat{\Psi}(P) = \arg\max \sum_{t=1}^{n} \log\left(f\left(P_t \middle| P_{t-1}\right)\right)$$

onde $f\left(P_t \middle| P_{t-1}\right)$ é a densidade condicional de P_t dado P_{t-1}, o vetor de preços observados dos ativos.

O vetor de parâmetros Ψ pode ser separado em dois vetores de parâmetros: Ψ_1, da dinâmica dos fatores que determinam os preços dos ativos de referência livres de risco de crédito e Ψ_2, dos parâmetros que governam as propriedades de default dos títulos sujeitos a risco de crédito (intensidade e expectativa de valor recuperado). Adota-se uma estimação LIML (*Limited Information Maximum Likelihood*) na qual o vetor de parâmetros da curva de referência é estimado primeiramente, utilizando-se ativos livres de risco de default. A seguir, estima-se Ψ_2 usando Ψ_1 estimado no lugar de Ψ_1. Pode-se provar que os estimadores de Ψ_1 e Ψ_2 são consistentes, assintoticamente normais, assintoticamente eficientes e invariantes a reparametrizações.[19]

Existem k preços de ativos, os quais são observados sem erro de medida,[20] dados por funções monotônicas $g_i : \Re^k \to \Re$ do vetor de estado. Pelo teorema da

---

[19] Para o vetor de parâmetros Ψ_1 tem-se $\hat{\Psi}_1 \overset{a}{\sim} N\left[\Psi_1, \{I(\Psi_1)\}^{-1}\right]$, para Ψ_2 a matriz de covariância deve ser corrigida, ver GREENE (2000) p. 135, por exemplo.

[20] A inexistência de erro de medida implica que as relações entre as variáveis de estado e os preços observados , dadas pela hipótese de não arbitragem, são exatas.

função implícita, se a matriz jacobiana das transformações g não for singular, cada variável de estado pode ser obtida por uma transformação definida implicitamente $h_i : \Re^k \to \Re$.

A densidade condicional de P_t não é especificada no modelo, mas pode ser expressa pela densidade condicional das variáveis de estado através da relação:

$$f_y\left(P_{t+1}\middle|P_t\right) = f\left(x_{t+1}\middle|x_t\right)\left|\left(\frac{\partial x_i}{\partial P_j}\right)\right|$$

onde $\left|\frac{\partial x_i}{\partial P_i}\right|$ é o jacobiano da transformação implícita h_i.

Curva de Referência

Para a estimação dos parâmetros da curva de referência livre de risco foram utilizados *swaps* de taxa prefixada contra a taxa LIBOR[21] de seis meses para as maturidades de dois e dez anos. *Swaps* não são isentos de risco de crédito, mas este risco é relativamente pequeno. As taxas divulgadas referem-se a contrapartes com *ratings* de crédito acima de AA e não há pagamento do montante principal, portanto o efeito do risco de crédito em *swaps* é significativamente menor do que os *spreads* de títulos de países emergentes. O uso de taxas de *swaps* para curvas de referência é comum na literatura recente de apreçamento de ativos. *Swaps* são instrumentos extremamente líquidos, com *spreads* de compra e venda de menos de 0,05 % e com maturidades pré-estabelecidas e constantes além de não sofrer desvios por ajustes de oferta como os títulos do Tesouro americano.[22]

Para a estimação da curva de referência a dinâmica na medida de probabilidade **P** do vetor de variáveis de estado é dada, conforme estabelecido na especificação apresentada na equação (10), por:

[21] A Taxa LIBOR (London Interbank Offered Rate) é uma taxa média dos depósitos interbancários de curto prazo para várias moedas no mercado londrino e é compilada pela British Bankers Association.
[22] Um exemplo deste ajuste de oferta é a interrupção da emissão de títulos com maturidade de trinta anos por parte do Tesouro americano.

$$d\begin{bmatrix} v_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{vv} & 0 \\ K_{rv} & K_{rr} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} q_v \\ q_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_t \\ r_t \end{bmatrix} \right) dt + \sqrt{v_t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Sigma_{rv} & \Sigma_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_t^v \\ dW_t^r \end{bmatrix} \qquad (12)$$

A transformação das medidas de probabilidade **P** para **Q** é dada por

$$d\begin{bmatrix} W_t^v \\ W_t^r \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \sqrt{v_t} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+b_t v_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_v \\ g_r \end{bmatrix} dt + d\begin{bmatrix} \tilde{W}_t^v \\ \tilde{W}_t^r \end{bmatrix} \qquad (13)$$

DUFFIE e SINGLETON (1997) mostram que as taxas de swap pré x LIBOR de seis meses, com maturidades de dois e dez anos respectivamente, podem ser determinadas por[23]

$$c_t^2 = \frac{1 - P_t^2}{\sum_{i=1}^{4} P_t^{0.5i}} \qquad c_t^{10} = \frac{1 - P_t^{10}}{\sum_{i=1}^{20} P_t^{0.5i}} \qquad (14)$$

onde P_t^T, o preço de um título que paga a taxa LIBOR fixada em t para o prazo T, e é dado pela acumulação de uma taxa livre de risco hipotética r(t), cujo valor é determinado, sob a hipótese dos modelos afins, por:

$$P_t^t = \exp\left(A(t) + \begin{bmatrix} B^v(t) & B^r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ r_t \end{bmatrix} \right) \qquad (15)$$

A função log-verossimilhança a ser maximizada na primeira fase da estimação é expressa através da relação abaixo:

$$\hat{\Psi}_1 = \arg\max_{\Psi} \frac{1}{N} \sum_{N=1}^{n} \left\{ \log\left[f\left(v_n, r_n \middle| v_{n-1}, r_{n-1}\right) \right] - \log\left[\left| \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \right| \right] \right\} \qquad (16)$$

onde $\left| \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \right|$ é o determinante do Jacobiano de c, as taxas observadas de swap, em relação a x, as variáveis de estado.

A densidade condicional $f\left(x_1(n), x_2(n) \middle| x_1(n-1), x_2(n-1)\right)$[24] para a especificação do modelo de referência não apresenta forma fechada conhecida e, desta forma, não é possível estabelecer uma função de verossimilhança exata para o modelo. Utiliza-se neste trabalho o procedimento denominado de *Simulated Maximum Likelihood Estimation* (SMLE) apresentado na seção dois. Pelas regras da probabilidade condicional e por v(t) ser um processo markoviano tem-se que:

$$f\left(x_1(n), x_2(n) \middle| x_1(n-1), x_2(n-1)\right) = f\left(x_1(n) \middle| x_1(n-1)\right) f\left(x_2(n) \middle| [x_1(n-1), x_2(n-1)], x_1(n)\right).$$

A variável x_1 obedece a um processo raiz quadrada, descrito por COX, INGERSOLL e ROSS (1985), cuja densidade de probabilidade condicional é dada por:

$$f\left(x_1(n), s \middle| x_1(n-1), t\right) = ce^{-u-v}\left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q\left(2(uv)^{1/2}\right) \qquad (17)$$

onde $c \equiv \frac{2K_{11}}{\Sigma_{11}\left(1-e^{-K_{11}(s-t)}\right)}$, $u \equiv cx_1(t)e^{-K_{11}(s-t)}$, $v \equiv cx_1(s)$, $q \equiv \frac{2K_{11}q_1}{\Sigma_{11}} - 1$ e $I_q(\bullet)$ é a função Bessel modificada de primeira ordem.

DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003) mostram que a probabilidade condicional $f\left(x_2(n) \middle| [x_1(n-1), x_2(n-1)], x_1(n)\right)$ do processo x_2 pode ser aproximada por:

$$\lim_{J \to \infty} E\left[j\left(x_2(n), m^J(n), V^J(n)\right) \middle| x_1(n-1), x_1(n)\right] \quad (18)$$

onde $\varphi(\bullet, m, V)$ é a densidade da distribuição normal com média m e variância V dados por:

$$m(n) = e^{-K_{22}d}\left[x_2(n-1) + \int_{t_0}^{td} e^{K_{22}s}\left(k_2 - K_{22}x_s^1\right)ds\right] \qquad (19)$$

---

[23] O que é equivalente a calcular a taxa de cupom de um título que é vendido a par.

[24] x_n^1 e x_n^2 são transformações afins das variáveis de estado v e r em um vetor de fatores conforme especificação canônica de DAI e SINGLETON (2000). Os preços de títulos e a taxa de juros de curto prazo são preservados e a estimação é simplificada. O anexoB apresenta as transformações entre as duas especificações

$$V(n) = e^{-2K_{22}\Delta} \left[\int_0^{t\Delta} e^{2K_{22}s} \left(1 + bx_s^1\right) ds \right] \qquad (20)$$

Sabe-se que $x_2(n)$ é um processo gaussiano com média m(n) e variância V(n) que são funções de $x_2(n-1)$ e de toda a trajetória de x_1 entre as observações n-1 e n. Os valores de x_1 não são conhecidos entre duas observações, mas pode-se mostrar que a densidade de $x_2(n)$ condicionada a $x_2(n-1)$ e $x_1(n)$ é igual ao valor esperado da densidade φ real condicionado a $x_2(n-1)$ e toda a trajetória de x_1 entre t_{n-1} e t_n. As trajetórias de x_1 são aproximadas subdividindo o intervalo entre t_{n-1} e t_n em J subintervalos e aplicando uma interpolação linear entre cada um dos subintervalos. O valor esperado de φ é aproximado através de Z simulações independentes das trajetórias aproximadas de x.[1] Em resumo, adota-se o seguinte procedimento:

a) J-1 pontos entre $x_1(n-1)$ e $x_1(n)$ são obtidos de uma distribuição conhecida condicionada aos valores $x_1(n-1)$ e $x_1(n)$ - por exemplo os pontos são amostrados de uma ponte browniana,[25] pela qual os pontos u_j intermediários entre $x_1(n-1)$ e $x_1(n)$ são obtidos através do método recursivo $u_{m+1} = u_m + \tilde{m}(u_m, t_m)\Delta + s(u_m; q)\Delta^{1/2} W_{m+1}$, onde o coeficiente de deriva é dado por $\tilde{m}(u_j, t) = \frac{x_1(n) - u_j}{t_n - t}$, δ é o intervalo entre cada discretização, σ é o coeficiente de difusão de x_1 e W_{m+1} é uma variável com distribuição normal padrão;

b) O processo x_1 é interpolado de forma linear entre cada um dos J-1 pontos, de forma que se obtenha um processo contínuo e calcula-se m(n),V(n) e $j\left(x_n^2, m_n^J, V_n^J\right)$ para cada observação;

c) Z simulações são efetuadas e a média amostral das Z simulações é utilizada para aproximar o valor esperado;

d) Como os pontos amostrados em a) não foram obtidos da distribuição real de x_1, mas sim da ponte browniana a média amostral calculada em c) usa *importance sampling* designando pesos distintos para cada

[25] Neste trabalho utilizou-se a técnica sugerida por Durham e Gallant (2002).

uma das simulações de acordo com a proximidade entre a densidade real e a densidade utilizada em a) da trajetória de x_1.

Neste trabalho cada intervalo foi dividido em J=32 subintervalos e Z=128 simulações independentes foram utilizadas. Para trajetórias simuladas foram utilizadas variáveis antitéticas, ou seja, 64 trajetórias são simuladas e as 64 restantes são simuladas com os números aleatórios utilizados nas primeiras multiplicados por –1.

Títulos da Dívida Soberana (Globals)

Da proposição 1 e assumida a especificação das equações (10) e (11) sabe-se que a função de apreçamento de um título que paga uma série de cupons c_i, tem expectativa de valor recuperado w, uma fração do valor de face do título, e intensidade de default λ_t é dada por:

$$P_t = \sum \exp\left(A_1(t_i) - B_1(t_i)X(t)\right)c_i + \exp\left(A(t) - B(t)X(t)\right) + \int_0^t \exp\left(A_2(u) - B_2(u)X(t)\right)\left(\bar{A}(u) - \bar{B}(u)X(t)\right)du \quad (21)$$

onde X(t) é o vetor 4 x 1 de variáveis de estado. Os coeficientes A_1, B_1, A_2, B_2 são dados pelas equações (7) com as condições iniciais de $A_1(0)=0$, $B_1(0)=0$, $A_2(0)=v_0$ e $B_2(0)=[-v_1, -v_2, -v_3, -v_4]$. DUFFIE, PAN e SINGLETON (1999) mostram que os coeficientes $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são dados por:

$$\frac{d\bar{A}(t)}{dt} = -\tilde{q}' + \tilde{k}'\bar{B}(t) + \sum_{i=1}^{N}\left[\bar{B}(t)\Sigma' B(t)\right]_i a, \quad \bar{A}(0) = u_0$$
$$\frac{d\bar{B}(t)}{dt} = -\tilde{k}' B(t) - \sum_{i=1}^{N}\left[\bar{B}(t)\Sigma' B(t)\right]_i b_i, \qquad \bar{B}(0) = [-u_1, -u_2, -u_3] \quad (22)$$

A integral $\int_0^t \exp\left(A_2(u) - B_2(u)X(t)\right)\left(\bar{A}(u) - \bar{B}(u)X(t)\right)du$ em (21) é aproximada pela integral da interpolação linear dos coeficientes entre pontos calculados numericamente pela resolução das equações diferenciais ordinárias acima. O intervalo

entre dois pontos é de um dia (1/365 anos) e a precisão do cálculo dos pontos é de 1e-6, portanto a interpolação linear gera erros pequenos para coeficientes típicos das difusões.

Os parâmetros da dinâmica dos dois primeiros fatores obtidos na estimação da curva de *swaps* são utilizados para maximizar a função de máxima verossimilhança parcial dada por:

$$\hat{\Psi}_2 = \arg\max_{\Psi} \frac{1}{N}\sum_{N=1}^{n}\left\{\log\left[f\left(l_n, w_n \left| \hat{v}_{n-1}, \hat{r}_{n-1}, l_{n-1}, w_{n-1}, \hat{v}_n, \hat{r}_n, \hat{\Psi}_1, \Psi_2\right.\right)\right] - \log\left[\left|\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right|\right]\right\} \quad (23)$$

Condicionados a $\{r_{n-1}, l_{n-1}, w_{n-1}\}$ e à trajetória de $\{v_u, u \in (n-1, n]\}$, $\{r_n, l_n, w_n\}$ têm distribuição normal multivariada, com momentos condicionais conhecidos. O método de simulação apresentado acima é utilizado para gerar as trajetórias do primeiro fator e calcular a densidade condicional.

Testes de Especificação

As hipóteses de não arbitragem e de ausência de erro de medida impõem fortes restrições à dinâmica dos preços, que facilmente levariam à rejeição empírica de qualquer especificação do modelo, se aplicado a preços de títulos fora da amostra.

As especificações dos modelos são eliminações sucessivas de restrições pelas quais alguns parâmetros são iguais a zero. Pode-se, portanto, utilizar testes clássicos de máxima verossimilhança. A estatística do teste da razão de verossimilhança é igual a $2\left(l\left(\hat{q}_U\right) - l\left(\hat{q}_R\right)\right)$, onde $l\left(\hat{q}_u\right)$ e $l\left(\hat{q}_r\right)$ são, respectivamente, o valor da função verossimilhança sem e com a restrição paramétrica, que sob a hipótese nula de validade da restrição, é distribuída $?^2$(r) onde r é o número de restrições de igualdade.

A segunda abordagem de análise de adequação do modelo à amostra é a análise dos erros de apreçamento dos títulos que não foram utilizados na estimação. Duas ressalvas são importantes. A escolha dos títulos utilizados na estimação é motivada pelo tamanho da amostra disponível, e não se assume que o Global 2008 e

2027 tenham menor erro de apreçamento que os outros. A opção por outros títulos de referência geraria erros de apreçamento provavelmente diferentes. Não se espera também que o mercado de *globals* seja homogêneo e que não existam efeitos de liquidez, clientela e outros. O que se espera é que, em média, os erros de apreçamento diminuam à medida que o modelo apresente melhor especificação.

4 Testes Empíricos

Três classes de modelos de apreçamento de títulos de renda fixa com risco de crédito foram investigadas. Em uma primeira etapa, estimou-se um modelo em que o valor recuperado é constante e igual a zero.[26] Neste modelo devem ser estimados os parâmetros das três primeiras equações diferenciais estocásticas do sistema (10) e o cálculo da integral apresentada na equação (21) é dispensado e apenas um título é utilizado para a inversão do fator de probabilidade de default, o Global 2008. O modelo com valor recuperado igual a zero serve como referência, pois apresenta restrição paramétrica máxima ao impor a restrição que os parâmetros do fator do valor recuperado sejam iguais a zero.

O segundo modelo assume a hipótese de que o valor recuperado é constante ao longo do tempo, mas pode diferir para títulos de maturidades distintas. Foram estimados os valores recuperados com base em dois títulos: o Global 2008 e o Global 2027. A dinâmica dos preços ainda é determinada por três fatores, a volatilidade da taxa de juros, a taxa de juros e a intensidade de default.

A terceira da classe de modelos utiliza dois títulos, o Global 2008 e o Global 2027 para obter os fatores de probabilidade de default e expectativa de valor recuperado em caso de default através da inversão da função de apreçamento dadas as duas séries de preços. A densidade de probabilidade conjunta de λ_t e w_t é calculada através do método de máxima verossimilhança simulada apresentado acima.

Para a segunda e a terceira classe de modelos a função objetivo torna-se extremamente complicada, com vários máximos locais dificultando a otimização. Diversas combinações de parâmetros geram preços de ativos inadmissíveis ou simplesmente fora da capacidade de precisão do computador e a definição do espaço de parâmetros admissíveis não é trivial. Para obter as estimativas para estes modelos, procedeu-se da seguinte forma:[27]

---

[26] Este modelo também é equivalente ao modelo de recuperação de valor de mercado de Duffie e Singleton, pelo qual não é possível identificar separadamente o valor recuperado e a probabilidade de default.

[27] Esta técnica de maximização é sugerida por Duffee (2002) para uma estimação baseada em quase máxima verossimilhança.

a) uma série de conjuntos de parâmetros iniciais foi gerada de distribuições normais com média e variância tidas como típicas;

b) cada um dos conjuntos dos parâmetros foi aplicado à função objetivo e, se admissível, incluído em uma série de cem conjuntos de parâmetros iniciais admissíveis;

c) para cada um dos conjuntos de parâmetros iniciais admissíveis, a função objetivo foi maximizada em um espaço definido por limites superior e inferior em +20% - 20% dos parâmetros iniciais – se o resultado da maximização leva a um ponto de fronteira o conjunto de parâmetros otimizado é descartado;

d) o conjunto de parâmetros que leva ao maior valor da função objetivo em c) é considerado como a estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros.

A dimensão máxima do espaço de parâmetros dos modelos com valor recuperado estocástico, com dezesseis parâmetros a serem estimados no segundo estágio, é muito grande para o tamanho da amostra. Em uma análise inicial percebeu-se que correlações entre os dois primeiros fatores, obtidos da curva de swap, e os fatores da intensidade de default e valor recuperado não são significativamente diferentes de zero, e não geram incrementos significativos na função máxima verossimilhança. Melhores resultados foram obtidos ao fixar os parâmetros de correlação K_{31}, K_{32}, K_{41}, K_{42}, u_1, u_2, v_1, v_2 em zero e manter apenas a correlação entre os fatores 3 e 4, determinantes da intensidade de default e da expectativa de valor recuperado.

DADOS

O estudo utiliza uma amostra de preços observados de títulos emitidos pelo Brasil em moeda estrangeira no mercado internacional. É composta de títulos emitidos recentemente, após a renegociação da dívida, e que são denominados de *Globals Bonds*. Os *Globals Bonds* diferem dos *bradies* por não serem resultado de uma troca da dívida renegociada e não possuírem qualquer espécie de garantia. Podem ser comercializados no mercado interno americano além do mercado internacional de *eurobonds* e apresentam geralmente fluxos de pagamentos simples.

Os dois títulos de emissão mais antiga e ainda não vencidos foram utilizados, o Global 2027 com cupom de 10,125% e vencimento em 15 de maio de 2027 e o Global 2008 com cupom de 9,375% e vencimento em 7 de abril de 2008. A amostra compreende o período de 03 de abril de 1998 a 14 de junho de 2002, com um total de 220 observações.[28]

Os títulos da dívida renegociada, como o C-Bond e o EI, são mais líquidos e apresentam uma série de preços maior que os *globals*, porém têm uma estrutura de fluxo de pagamentos bem mais complexa com amortizações ao longo do tempo e capitalizações de juros que dificultariam a aplicação das hipóteses dos modelos aplicados neste trabalho. A mais sensível é de que o valor pago na maturidade do título é o mais relevante para o cálculo do valor recuperado – admissível para títulos com amortização *bullet*, como os *globals* – mas inadequada para o C-Bond, por exemplo, que tem amortizações do principal em 21 parcelas de 5,86% de abril de 2004 a abril de 2014.

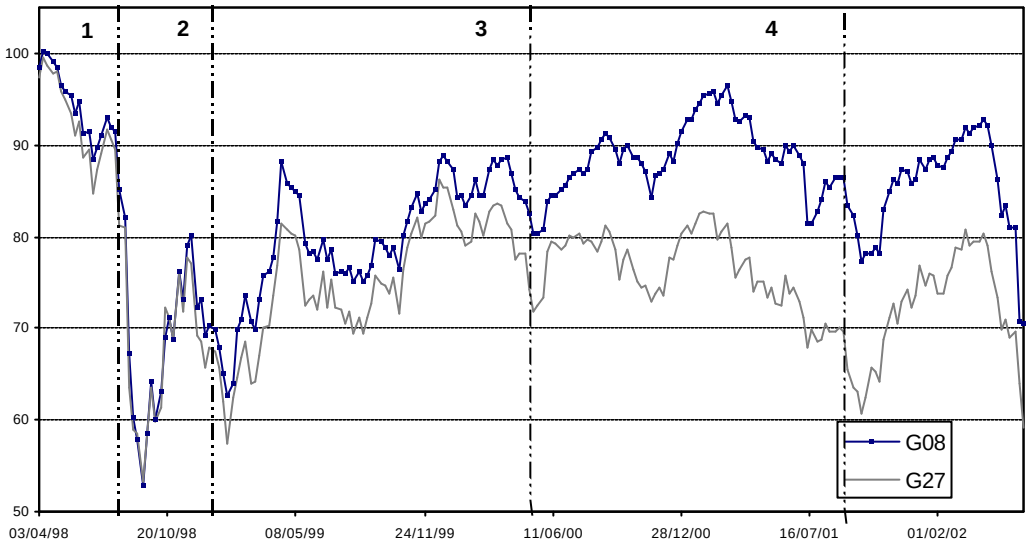
Nos gráficos são delimitados os principais eventos que induziram grandes movimentos nos preços dos títulos de países emergentes e, mais especificamente, nos títulos brasileiros. No início de abril de 1998, ambos os títulos tinham seus preços aproximadamente ao par e rendimentos próximos dos 9,375% e 10,155% das taxas de cupom para as maturidades de 2008 e 2027 respectivamente, enquanto os swaps de 10 e 30 apresentavam taxas de 6% e 6,21 %. Os spreads eram de mais ou menos 340 pontos para o primeiro título e de 390 pontos para o segundo.

A primeira grande variação de preços ocorreu após o default russo de 17/08/98 (1), logo seguido das grandes perdas do fundo LTCM em setembro, com quedas de quase 40% nos preços nas quatro semanas subseqüentes, que viriam a se recuperar lentamente até o anúncio em meados de novembro de 1998 do pacote de ajuda do FMI e de outros organismos internacionais no total de US$ 41 bilhões, sendo US$ 18 bilhões fornecidos pelo FMI para um período de três anos. O abandono da banda cambial em 13/01/99 (2) é o segundo evento no qual há uma queda, ainda que não tão abrupta nos preços dos títulos, mas com um retorno aos níveis pós-acordo com o FMI em menos de dois meses. Em abril de 1999 o Brasil já voltava a emitir novo título

[28] Os últimos preços de cada sexta-feira foram utilizados, se não disponíveis, tomaram-se os preços imediatamente anteriores.

soberano, o Global 2004 com cupom de 11,625%, captando US$ dois bilhões em dinheiro novo. Até maio de 2000 os títulos apresentam uma tendência de melhora em seus preços, que para o Global 2008 segue até o primeiro trimestre de 2001. Em março de 2001 o Global 2008 atinge cotações de cerca de 96% do valor de face, o melhor desempenho dentro da amostra após a crise da Rússia.

Figura 1: Global 2008 e 2027 - Preços de títulos brasileiros no mercado internacional no período de 03/04/98 a 14/06/02



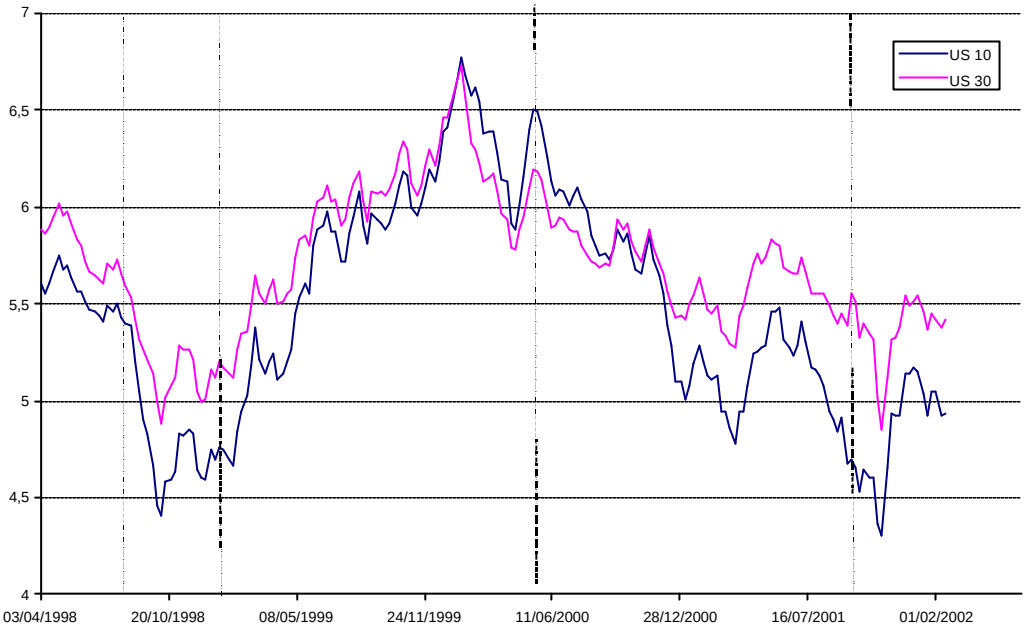
No primeiro semestre de 2000 inicia-se um diferencial atípico entre os preços dos títulos com maturidade em 2008 e 2027 que só será minimizado no segundo trimestre de 2002, que pode ser explicado por uma crescente aversão, não só ao risco dos títulos brasileiros, mas ao mercado de renda fixa em geral, como demonstra o diferencial entre os rendimentos dos títulos de dez e trinta anos do tesouro americano Figura 2.[29]

Em 14 de setembro de 2001, novo acordo com o FMI é aprovado, em um total de US$ 15 bilhões até dezembro de 2002. Os atentados terroristas de 11 de setembro de 2001 e a incerteza dos efeitos de uma guerra no Afeganistão são apontados como principais motivadores para uma recuperação lenta dos preços dos títulos brasileiros. O último grande empréstimo ao Brasil foi aprovado em 6 de setembro de

[29] Os rendimentos para títulos de maturidade constante são obtidos através de interpolação dos rendimentos de títulos mais líquidos e são apresentados em www.federalreserve.gov.

2002 em um total de US$ 30,4 bilhões provenientes do próprio Fundo, o qual não faz parte da amostra.

Figura 2: Comportamento dos Títulos Públicos Americanos – Rendimento dos Títulos Sintéticos do Tesouro Americano de dez e trinta anos no período de 03/04/98 a 14/06/02.



RESULTADOS

As especificações dos modelos apresentadas foram estimadas através dos procedimentos de estimação apresentados na seção 3. Os cálculos foram efetuados em MATLAB, versão 6.0.[30] A maximização da função de verossimilhança foi efetuada através do método programação quadrática seqüencial, com resolução numérica dos gradientes e do Hessiano, implementado internamente em funções de otimização do aplicativo. Para a resolução de equações diferenciais ordinárias (ODE) utilizou-se o método Runge-Kutta também implementado internamente nas funções do MATLAB. As inversões das funções de apreçamento de *swaps* e dos títulos brasileiros também foram efetuadas numericamente.

Conforme descrito no procedimento de estimação, os parâmetros obtidos da curva de referência, resumidos na Tabela 1, e os fatores associados à volatilidade e à

[30] As rotinas utilizadas são apresentadas no Anexo C.

taxa livre de risco extraídos da dinâmica das taxas de *swaps* são utilizados na estimação dos modelos subseqüentes.

Curva de Swaps

Os parâmetros estimados para a curva gerada a partir dos *swaps* são apresentados na Tabela 1. Após um estudo prévio, duas restrições adicionais foram estabelecidas no modelo: fixaram-se o preço de mercado da volatilidade γ_1 em zero e o coeficiente β_2 igual a 1. Com exceção de θ_1 e K_{21}, todos os parâmetros são significativos em níveis usuais de significância, utilizando-se os desvios padrão estimados pelo método BHHH. Os parâmetros dos coeficientes de deriva das equações diferenciais estocásticas apresentam maior variância que os coeficientes de difusão, sendo θ_1 estimado, a média de longo prazo do fator de volatilidade, especialmente dependente do valor inicial utilizado na otimização. O fator de volatilidade apresenta baixa reversão à média, conforme observado por DAI e SINGLETON (2002).

Tabela 1: Curva Swap – Parâmetros estimados para as equações diferenciais estocásticas determinantes da dinâmica do fator de volatilidade e da taxa de juros de curto prazo

Parâmetro	Estim.	Desvio Padrão
K_{11}	0,0084415	0,00176569
θ_1	87,4041	58,7001
K_{21}	-0,0646553	0,0363781
K_{22}	0,0634344	0,0146165
δ_0	0,096288	0,0273536
δ_1	-0,000485597	0,000168792
δ_2	0,00181447	5,57715e-5
β_2	1	-
γ_1	0	-
γ_2	-0,10507	0,0365141

Os desvios padrão foram calculados através do estimador BHHH.Função Verossimilhança: 12,3309

Os parâmetros estimados na representação AY podem ser transformados na seguinte representação Ar:[31]

$$dv = 0{,}0084415(87{,}4041 - v_t)dt + \sqrt{v_t}\,dW_v$$
$$dr = 0{,}0634\left(0{,}0538 - r_t\right)dt - 9{,}06\times10^{-5}\left(87{,}404 - v_t\right)dt - 0{,}000169\sqrt{v_t}\,dW_v + 0{,}00181\sqrt{1+v_t}\,dW_r$$

O modelo estimado apresenta um bom desempenho quando utilizado para determinar as taxas de swap de maturidades fora da amostra. Utilizando os parâmetros estimados e vetor de estados obtidos, calcularam-se as taxas teóricas para os *swaps* abaixo. A média dos erros de apreçamento, quando comparadas as taxas teóricas com as taxas de mercado do período de 04/11/1988 a 14/06/2002, foi inferior a vinte pontos base para os *swaps* com maturidade entre dois e trinta anos com desvios padrão de menos de vinte pontos base. O modelo não apresenta bons resultados para os anos de 2001 e 2002, nos quais houve uma queda acentuada nas taxas de juros de curto prazo e os *spread*s entre os *swaps* de curto e longo prazo aumentaram consideravelmente. Os erros máximos estão fortemente concentrados neste período. Amostras pequenas, como para o swap de um ano, com 221 observações no período iniciando apenas em 1996, apresentam pior desempenho. Observa-se também que os erros de apreçamento são autocorrelacionados, o que pode ser um indicativo de que existem outros fatores relevantes que não foram considerados no modelo.

Tabela 2: Erros de Apreçamento - Curva de Swaps– Valor médio, valor máximo e desvio padrão das diferenças entre preços da amostra e preços gerados com parâmetros da Tabela 1 para swaps com maturidades fora da amostra

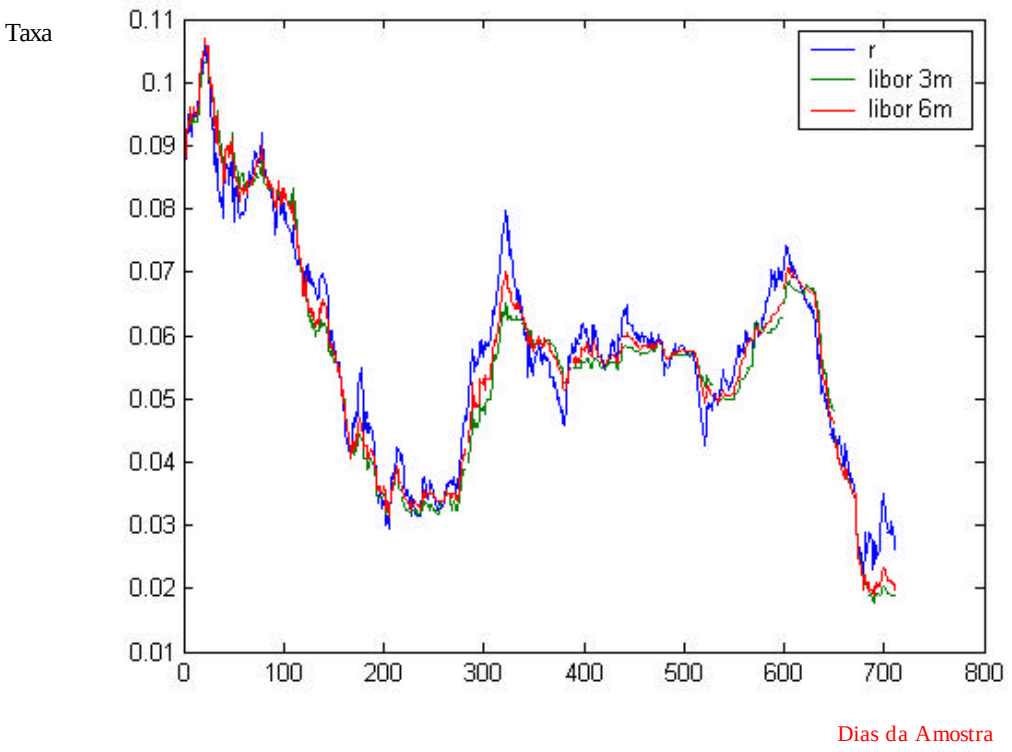
Maturidade (em anos)	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**15**	**20**	**30**
Média	19,23	-10,56	-14,64	-16,23	-10,87	-12,03	10,61	17,35	16,47
Max	89,48	44,72	69,71	57,73	49,93	40,70	53,36	87,81	166,31
Desv Pad.	23,32	9,98	15,07	15,32	13,64	11,14	13,49	21,90	31,42
AR(1)	0,90	0,96	0,94	0,97	0,98	0,94	0,89	0,94	0,96

Valores em bps (0,01%)

[31] A representação Ar é obtida através de uma transformação invariante apresentada no anexo B.

A Figura 3 apresenta graficamente a comparação entre a taxa de juros de curto prazo obtida do modelo com as taxas médias de empréstimos interbancários no mercado londrino para os prazos de três e seis meses. A taxa de juros estimada acompanha a dinâmica destas taxas, as quais não foram utilizadas na amostra para a estimação do modelo, mas é consistentemente mais alta que as taxas praticadas para os prazos acima. A Figura 3 também mostra que a taxa de juros estimada não é capaz de acompanhar a queda das taxas de juros observada no período final da amostra. Tal fato deve-se pela rigidez da especificação do preço de mercado dos riscos, que no modelo é proporcional à volatilidade dos fatores de risco e os parâmetros de proporcionalidade são mantidos constantes para toda a amostra.

Figura 3: Comparação entra taxa de juros estimada e Taxas LIBOR – Taxa de juros livre de risco implícita no modelo em comparação a taxas de curto prazo de mercado



Títulos da Dívida Soberana – Modelo de Referência

Para o modelo de referência assume-se que a expectativa de valor recuperado é constante e igual a zero. Os parâmetros da especificação de melhor desempenho para o fator determinante da intensidade de default são apresentados na

Tabela 3, juntamente com os erros de apreçamento para os títulos fora da amostra. A especificação é extremamente simples, não havendo correlação entre a intensidade de default e os fatores que determinam a taxa de juros de curto prazo e sua volatilidade. A média de longo prazo é 7,22% e a volatilidade do fator é constante, dada pelo coeficiente u_3=0,0984. A velocidade reversão à média, dada por K_{33} de 0,2609 mostra que choques na intensidade de default têm seus efeitos reduzidos pela metade em 2,6 anos.

Tabela 3: Erros de Apreçamento - Valor médio, valor máximo e desvio-padrão das diferenças entre preços observados e preços obtidos do modelo com os parâmetros apresentados abaixo.

Maturidade (em anos)	G06	G07	G09	G12	G20	G24	G27	G30
Média	1,90	1,80	5,40	-0,97	1,94	-0,94	-3,09	1,06
Max	5,45	4,72	11,37	2,07	9,73	6,51	9,51	3,01
Desv Pad.	1,64	1,32	1,22	2,37	0,70	3,64	2,87	3,01
AR(1)	0,93	0,95	0,91	0,92	0,94	0,94	0,96	0,93

Erros do modelo de apreçamento com os parâmetros estimados K_{33}=0,2609 (0,381), u_0=0,0722 (0,6237), u_3=0,0984 (0,0754) e g_3=-0,2128 (0,386) e demais parâmetros fixos em zero. Os desvios padrões, dados pelos estimadores BHHH, estimados não foram corrigidos para a estimação em dois estágios (LIML).

Valor da função verossimilhança= 2,1035

Percebe-se que, com exceção do Global 2009 e o Global 2027, a média de erros está abaixo de 2% do valor de face e independe da maturidade do título. Os erros são maiores para os períodos em que a intensidade de default é mais baixa, nos quais o modelo subestima os preços dos títulos fora da amostra.

Para as semanas após a crise da Rússia, período de maiores *spreads* na amostra, a probabilidade de default na semana imediatamente posterior seria de aproximadamente 0,42%. A hipótese de valor recuperado igual a zero tende a subestimar as probabilidades de default, se houvesse expectativa de recuperação positiva, os mesmos preços indicariam descontos maiores dos fluxos futuros de pagamento e conseqüentemente intensidades de default maiores.

Títulos da Dívida Soberana – Valor Recuperado Constante

A Tabela 4 apresenta os parâmetros estimados para uma especificação com expectativa de valor recuperado constante com base nas observações do Global 2008. O parâmetro K_{33}, que define a velocidade reversão à média do fator X_3, é pouco alterado, enquanto u_0 (que representa a média de longo prazo da intensidade de default) e u_3 (que determina a volatilidade instantânea da intensidade) são maiores, em conformidade com a constatação de que a intensidade de default é subavaliada com a hipótese de valor recuperado igual a zero.

Tabela 4: Parâmetros Estimados Global 2008 - Parâmetros das equações diferencias estocásticas com a expectativa de valor recuperado definida como constante, obtidas dos preços do Global 2008

Parâmetro	Estim.	Desvio Padrão
K_{33}	0,3396	0,7845
u_0	0,1023	0,07741
u_3	0,05499	0,04112
$?_3$	-0,0457	0,6041
w	0,0719	0,4561

Função Verossimilhança: 2,1042

Os resultados da estimação da segunda classe de modelos não apontam para uma melhor especificação ao se definir uma expectativa de valor recuperado constante. O teste da razão de verossimilhança não pode rejeitar a hipótese da restrição de expectativa de valor esperado igual a zero. Os erros de apreçamento mantêm-se basicamente inalterados e continuam correlacionados ao fator determinante da intensidade de default.

Tabela 5: Erros de Apreçamento – Valor médio, máximo e desvio padrão das diferenças de preços observados e preços obtidos através da utilização dos parâmetros da Tabela 4 para títulos fora da amostra.

Maturidade (em anos)	G06	G07	G09	G12	G20	G24	G27	G30
Média	2,05	1,66	3,19	0,60	2,12	-0,48	-3,44	2,33
Max	5,68	4,23	8,33	1,99	9,00	6,77	8,23	3,47
Desv Pad.	1,32	1,87	2,29	2,12	0,44	3,61	2,90	2,77
AR(1)	0,94	0,94	0,94	0,96	0,93	0,92	0,91	0,90

Para a estimação baseada nos preços do Global 2027 obtém-se resultados semelhantes. O parâmetro da expectativa de valor recuperado não é significantemente diferente de zero e para diversos valores produz valores maximizados da função verossimilhança semelhantes. Não é nem mesmo possível afirmar que as estimativas de valor recuperado baseadas no Global 2008 e no Global 2027 são diferentes.

Tabela 6: Parâmetros Estimados Global 2027 Parâmetros para as equações diferenciais estocásticas com a expectativa de valor recuperado definida como constante, obtidas dos preços do Global 2027

Parâmetro	Estim.	Desvio Padrão
K_{33}	0,1244	0,1113
u_0	0,1114	0,6397
u_3	0,0741	0,3311
$?_3$	-0.0231	0,1212
w	0,0442	0,5541

Função Verossimilhança: 2,1102

Títulos da Dívida Soberana – Valor Recuperado Estocástico

A terceira classe de modelos estimados foi a de expectativa de valor recuperado estocástico, com os parâmetros obtidos por máxima verossimilhança simulada apresentados na Tabela 7. Além das restrições apresentadas no item referente à metodologia de estimação, os parâmetros K_{43} e $?_4$ foram fixados em zero pois não se mostraram significativamente diferentes de zero. A média de longo prazo da intensidade de default é de 9,78% e a média de longo prazo da expectativa de valor recuperado é de exp(-0,9880) = 0,3723.

Tabela 7: Parâmetros – valor recuperado estocástico - Parâmetros para as equações diferenciais estocásticas com a expectativa de valor recuperado estocástica, obtidas dos preços do Global 2008 e Global 2027

Parâmetro	Estim.	Desvio Padrão
K_{33}	0,2330	0,5414
u_0	0,0978	0,0211
u_3	0,0460	0,0333
$?_3$	-0,1945	0,5665
K_{43}	0	-
K_{44}	0,0279	0,8745
v_0	-0,9880	0,5554
v_4	0,1023	0,3312
$?_4$	0	-

Demais parâmetros livres fixados em zero. Desvios-Padrão calculados pelo estimador BHHH sem correção para LIML.Função Verossimilhança: 3,4589

Os erros de apreçamento, como pode ser visto na Tabela 8, não são melhores que o modelo de referência. O aumento do erro pode decorrer da hipótese simplificadora que a expectativa de valor recuperado é a mesma para todos os títulos. Se há a expectativa de que uma parcela dos cupons também seja recuperada, o número de cupons a serem pagos passa a influenciar o processo expectativa de valor recuperado. Como o modelo de referência também pode ser interpretado como um modelo de

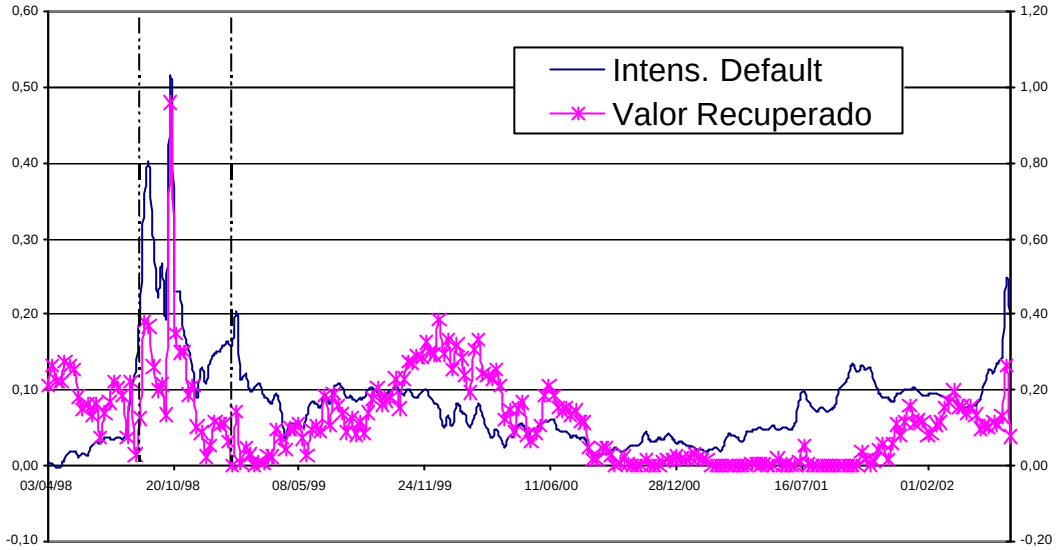
recuperação de valor de mercado, seu melhor resultado em termos de erros de apreçamento pode ser indicativo que a hipótese de recuperação de valor de mercado é mais adequada que a hipótese de recuperação de valor de face.

Tabela 8: Erros de Apreçamento – valor recuperado estocástico - Valor médio, máximo e desvio padrão das diferenças de preços observados e preços obtidos através da utilização dos parâmetros da Tabela 7 para títulos fora da amostra.

Maturidade (em anos)	G06	G07	G09	G12	G20	G24	G30
Média	2,82	1,92	4,19	-0,86	2,24	0,48	2,74
Max	6,34	4,99	8,99	1,73	6,50	2,84	6,02
Desv Pad.	1,98	1,27	2,48	0,47	1,85	0,67	1,78
AR(1)	0,8602	0,7401	0,8613	0,4113	0,8491	0,035	0,8815

A intensidade de default e a expectativa de valor recuperado obtidas pela inversão da função de apreçamento dos globals 2008 e 2027, utilizando-se os parâmetros obtidos por máxima verossimilhança, são apresentadas na Figura 4. O eixo vertical esquerdo apresenta a escala para a intensidade de default e o eixo vertical direito apresenta a escala para a expectativa de valor recuperado. No modelo utilizado a intensidade de default não é limitada em zero, pois condicionada à trajetória da volatilidade é um processo gaussiano. Observa-se que no início da amostra o resultado obtido para a intensidade é negativo para duas observações. A expectativa de valor recuperado é uma exponencial de uma função linear, e por isso é limitada em zero.

Figura 4: Intensidade de Default e Expectativa de Valor Recuperado Implícitos – Intensidade de default (apresentada no eixo vertical esquerdo) e expectativa de valor recuperado (eixo vertical direito) obtidos através do modelo de apreçamento de quatro fatores.



O período mais conturbado da amostra é o das semanas após a crise russa de agosto de 1998. Para a observação de 11/09/98 a intensidade de default é de 0,4007, sinalizando uma probabilidade de default até a data de vencimento para o Global 2008 de 95,95% e para o Global 2027 de virtualmente 100%. Para a observação de 16/10/98 a intensidade de default é ainda maior, 0,5154. A expectativa de valor recuperado apresenta neste período grande volatilidade. Oscila entre 7% a 20% até a chegar a 96,12% do valor de face em 16/10/98. Se considerado que nesta data a ajuda de US$ 41 bilhões, organizada pelo FMI, já era conhecida, portanto um *bail out* era factível, uma elevação tão abrupta na expectativa de recuperação poderia ser explicada pela hipótese de percepção por parte dos investidores de um plano de resgate estabelecido por organismos multilaterais.

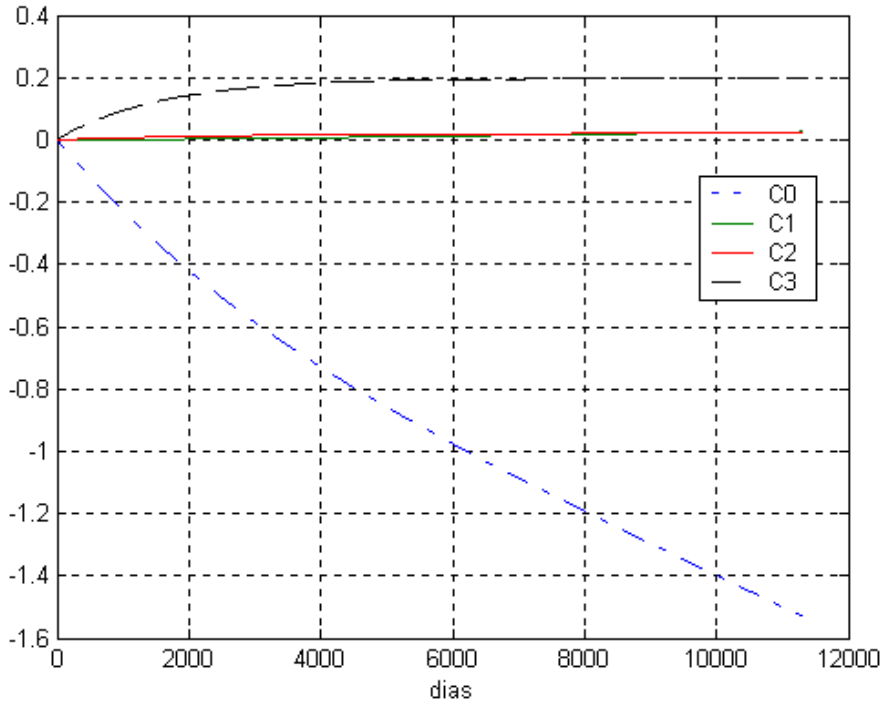
O segundo aumento da intensidade de default é na desvalorização do real em janeiro de 1999, mas em escalas bem menores que nas semanas seguintes à crise russa. O mesmo fenômeno de aumento conjunto da intensidade de default e da expectativa de valor recuperado é observado. Uma possível explicação seria a grande probabilidade de ajuda do FMI em ambas as crises, garantindo assim que, em caso de default, as perdas fossem minimizadas. Como o modelo trata ambos os processos como

exógenos, e dada a parametrização do modelo, esta situação é possível[32], não se pode descartar esta hipótese.

A recuperação relativamente rápida do Brasil após a desvalorização é indicada por um forte aumento na expectativa de valor recuperado e uma queda tímida na intensidade de default. Com exceção da observação de 16/10/98, a expectativa de valor recuperado manteve-se abaixo dos 40% por toda a amostra, o que é um valor baixo se comparado com estimativas baseadas em dados históricos. Como o preço de mercado do risco do valor recuperado foi fixado em zero na estimação, a expectativa de recuperação apresentada é neutra ao risco, sendo agentes aversos ao risco a expectativa real deve ser maior do que a apresentada na Figura 4.

De julho de 2000 ao final de 2001 a expectativa de valor recuperado implícita é extremamente baixa, quase nula. É também o período de menor intensidade de default, o que é contrafactual se considerado que o período coincide com o agravamento da crise argentina. A intensidade de default tem um aumento súbito após o anúncio do segundo pacote de ajuda do FMI ao Brasil, no valor de US$ 15 bilhões.

Figura 5: Carregamento dos Fatores – Coeficientes das variáveis de estado para o cálculo do rendimento de um título no modelo afim.



[32] É possível porque tem probabilidade estritamente positiva.

A Figura 5 apresenta os carregamentos dos fatores de desconto de fluxos futuros de pagamentos, calculados com base nos parâmetros estimados para a dinâmica das variáveis de estado. O preço de um título zero sujeito a risco de default é dado por

$$B = \exp\left(C_0 - C_1 X_1 - C_2 X_2 - C_3 X_3\right)$$

onde C0, C1, C2 e C3 são funções da maturidade conforme gráfico acima. O coeficiente C_0 determina a parcela do desconto relacionada somente com a maturidade do título e independe do valor momentâneo das variáveis de estado. Se todas a variáveis de estado estiverem em suas médias de longo prazo o preço do título é determinado por C_0. Os coeficientes C_1 e C_2 referem-se respectivamente ao fator X_1, que equivale à volatilidade na representação Ar, e ao fator X_2.[33] Para valores acima da média de longo prazo da taxa de juros e volatilidade na média de longo prazo, por exemplo, tem-se X_2 positivo e $-C_2 * X_2$ é negativo Para títulos com um elevado spread de crédito, como os *globals* analisados neste trabalho, o impacto destes fatores é pequeno comparado com o efeito da intensidade da probabilidade de default.

Os coeficientes acima indicam também o impacto de uma pequena variação nas variáveis de estado sobre o preço dos títulos, em termos percentuais. Pela relação $\frac{dB}{B} = -C_3 dX_3$, conclui-se que o efeito de uma variação da intensidade de default em 1% para títulos de maior maturidade, a partir de aproximadamente dez anos, é quase constante e é uma queda dos preços em torno de 0,2%. O coeficiente C_3 na especificação apresentada - de intensidade de default independente da volatilidade e da taxa de juros de curto prazo – é dado por:

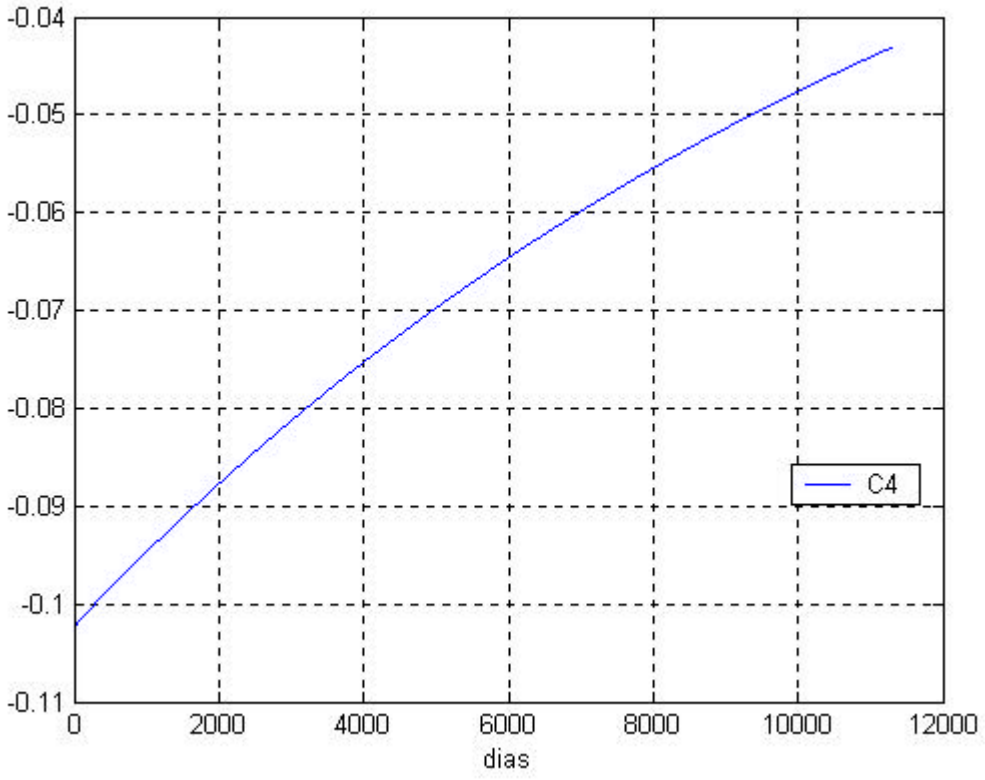
$$C_3 = \frac{u_3}{K_{33}}\left(1 - e^{(-K_{33}t)}\right)$$

[33] A taxa de juros e o fator X_2 estão relacionados por $X_2 = \frac{\left(r - q_r\right) - \Sigma_{rv}\left(v - q_v\right)}{\Sigma_{rr}}$. X2 é uma normalização da taxa de juros de curto prazo retirando sua média e o efeito de choques de volatilidade. A análise para X_3 segue na mesma linha, retirando-se a média de longo prazo e os efeitos de choques de volatilidade e de taxa de juros, normalizando pela volatilidade instantânea.

Se a volatilidade da intensidade de default, dada por u_3, diminui, ou ainda, sua reversão à média aumenta (por um aumento de K_{33}) o fator C_3 diminui e o impacto da intensidade de default presente sob os preços dos títulos é reduzido.

Mantida a hipótese simplificadora de valor recuperado independente da volatilidade, taxa de juros e intensidade de default, o fator X_4 é a expectativa de valor recuperado normalizada[34] $\left(X_4 = \frac{w^* - q_{w^*}}{\Sigma_{ww^*}} \right)$. O fator X_4 não entra nos descontos dos cupons e do valor de face, pois estes só são pagos se o default não ocorrer. O impacto de X_4 está no valor presente da expectativa de valor recuperado em caso de default em datas futuras. O coeficiente C_4, apresentado na Figura 6, é negativo. Se o w* é maior que $?_{w^*}$ então o valor descontado será menor.

Figura 6: Coeficiente do Fator Expectativa de Valor Recuperado – Impacto da expectativa de valor recuperado no preços dos títulos, em função da maturidade.



[34] X_4 é a normalização do logaritmo da expectativa de recuperação, representado por w* por simplificação de notação.

5 Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi aplicar modelos de apreçamento de ativos sujeitos a risco de default a títulos de renda fixa emitidos pelo Brasil no mercado internacional com o intuito de determinar o impacto de fatores não observáveis nos preços destes títulos. Para isto diversas especificações foram testadas, e para a especificação mais genérica, foi determinado o comportamento entre os anos de 1998 e 2002 das variáveis latentes determinantes dos preços dos títulos.

O desenvolvimento destes modelos fornece subsídios à discussão de reformulação dos contratos de dívida soberana ao possibilitar a quantificação dos efeitos de mudanças nos parâmetros do comportamento da probabilidade de default e da expectativa de valor recuperado. Por exemplo, mudanças na volatilidade da recuperação esperada, através de regras mais claras de reestruturação da dívida, aumentariam o valor dos títulos em um percentual determinável através do modelo estimado.

Uma contribuição do modelo estimado foi separar os efeitos da probabilidade de default e da expectativa de valor recuperado no comportamento dos preços dos títulos no período analisado. Conseguiu-se desta forma observar que a expectativa de valor recuperado obtida foi bastante volátil no período da amostra e que seu comportamento nem sempre foi em direção contrária às variações da probabilidade de default. O comportamento observado de elevação abrupta da intensidade de default e de expectativa de valor recuperado implícitas pode ser indicativo de como *bail outs* são esperados pelos investidores. Uma futura extensão deste trabalho é testar esta hipótese, incorporando o comportamento de organismos multilaterais ao modelo.

A obtenção das variáveis latentes permite também estabelecer relações da probabilidade de default e da expectativa de valor recuperado com variáveis macroeconômicas observadas de forma a prever o impacto nos preços dos títulos causado por mudanças nestas variáveis.

A utilização de uma amostra pequena de títulos impõe uma restrição importante, de que as relações entre os preços de vários títulos, dadas pela hipótese de não arbitragem sejam plausíveis. A dependência dos resultados aqui obtidos nesta

hipótese a conseqüência do relaxamento da total inexistência de erros de apreçamento dos títulos utilizados na estimação devem ser considerados em trabalhos futuros.

Ambos os critérios sugeridos para teste de especificação dos modelos não possibilitam uma conclusão quanto à especificação do modelo mais adequada à amostra. Os modelos não apresentam bom desempenho para apreçamento de títulos fora da amostra. Uma explicação possível é o fato de que durante o período final da amostra todos os títulos tiveram sua liquidez reduzida, como se pode observar no Anexo A, e os *spreads* de compra e venda aumentaram de forma significativa. Outra causa possível é uma má especificação da dinâmica dos fatores.

Trabalhos empíricos sobre risco de crédito para títulos soberanos são recentes. Várias opções de aprofundamento da pesquisa são possíveis. Outras especificações da dinâmica dos fatores são passíveis de teste, acrescentando efeitos não lineares. A expectativa de valor recuperado pode ser modelada para representar uma oferta de troca de títulos ou uma redução do principal de forma mais realista. A definição de todos os processo como difusões impossibilita a modelagem de saltos, que poderiam representar melhor a dinâmica dos fatores em momentos de crise.

Referências Bibliográficas

AÏT-SAHALIA, Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate. *Review of Financial Studies*, vol. 9, n. 2, p. 385-426, 1996.

_____. Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions. *Journal of Finance*, vol. 54, no. 4, agosto, 1999.

BAKSHI, G.; MADAN, D.; ZHANG, F. Understanding the role of recovery in default risk models: empirical comparisons and implied recovery rates. *FEDS Working Paper* no.2001-37. Disponível em: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=285940 Acesso em: 04/04/2002

BALDUZZI, P.; DAS, S.; FORESI, S.;SUNDARAM, K. A simple approach to three factor affine term structure models. *Journal of Fixed Income*, vol. 6, p. 43-53.

BOSSONE, B.; SLADREVICH, C. The new approach to sovereign debt restructuring: setting the incentive right. *IMF Policy Discussion Papers*, fevereiro, 2002. Disponível em: http://www.imf.org. Acesso em: 01/10/2002

BRANDT, M.; SANTA-CLARA, P. Simulated likelihood estimation of diffusions with an application to exchange rate dynamics in incomplete markets. *Journal of Financial Economics*, vol. 63, n. 1, p. 161-210, 2002.

BUCHHEIT, L. Sovereign Debtors and Their Bondholders. *UNITAR Training Programs on Foreign Economic Relations*, Documento no.1. Fevereiro, 2000. Disponível em: http://www.unitar.org. Acesso em: 11/02/2002

BULOW, J.; ROGOFF, K. A Constant recontracting model of sovereign debt. *Journal of Political Economy*, vol. 97, no.1. 1989a.

BULOW, J.; ROGOFF, K. Sovereign debt: is to forgive to forget? *American Economic Review*, vol. 79, no. 1. Março, 1989b.

CHACKO, G.; DAS, S. Pricing interest rate derivatives: a general approach. *Review of Financial Studies*, vol. 15, no. 1, Janeiro, 2002.

CHAN, K.; KAROLYI, A.; LONGSTAFF, F.; SANDERS, A. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, vol. 47, n. 3, julho, 1992.

CHEN, R.; SCOTT, L. Pricing interest rate options in a two-factor Cox-Ingersoll-Ross model of the term structure. *Review of Financial Studies*, vol. 5, n. 4 p. 613-636, 1992.

CLAESSENS, S.; PENNACHI, G. Estimating the likelihood of Mexican default from the prices of Mexican brady bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 31, no. 3, 1996.

COHEN, D.; SACHS, J. Growth and external debt under risk of debt repudiation. *European Economic Review*, vol. 30, 1986.

COLE, H.; KEHOE, P. Reputation spillover across relationships with enduring and transient benefits: reviving reputation models of debt. *NBER Working Paper* no. W5486. Março, 1996.

COX, J.; INGERSOLL, J.; ROSS, S. A Theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, vol. 53, no. 2, p. 385-407, março, 1985.

CUMBY, R.; EVANS, M. The term structure of credit risk: estimates and specification tests. *Georgetown University Working Paper*, 1997.

DAI, Q; SINGLETON, K. Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure. *Journal of Financial Economics*, vol. 63, n. 2002.

_____. Specification analysis of affine term structure models. *Journal of Finance*, vol. 55, n. 5, p. 1943-1978. Outubro, 2000.

DUFFEE, G. Estimating the price of default risk. *Review of Financial Studies*, vol. 12, n. 1, p. 197-226, 1999.

_____, G. Term premia and interest rate forecasts in affine models. *Journal of Finance*, vol, 57, no. 1. Fevereiro, 2002.

DUFFIE, D. Dynamic asset pricing theory. 2. ed. Nova York: Princeton. 1996.

_____. Defaultable term structure models with fractional recovery of par. *Working Paper, Graduate Business School, Stanford University*, 1998a. Disponível em: http://www.stanford.edu/~duffie/working.htm. Acesso em: 01/07/2002.

_____. First-to-default valuation. *Working Paper, Graduate Business School, Stanford University*, 1998b. http://www.stanford.edu/~duffie/working.htm. Acesso em: 01/07/2002

DUFFIE, D.; KAN, R.; A yield factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, vol. 6, n. 4, p. 379-406, outubro, 1996.

DUFFIE, D; LANDO, D. Term structure of credit spreads with incomplete accounting information. *Econometrica*, vol. 69, no. 3. Maio, 2001. p. 633-664.

DUFFIE, D; PAN, J.; SINGLETON, K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *NBER Working Paper 7105*. Abril, 1999.

DUFFIE, D.; PEDERSEN, L.; SINGLETON, K. Modeling sovereign spreads: a case study of Russian Debt. *Journal of Finance*, vol. 58, no. 1, fevereiro 2003. p. 119-159.

DUFFIE, D.; SCHRODER, M.; SKIADAS, C. Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty. *Annals of Applied Probability*, vol. 6, n. 4, p. 1075-1090, 1996.

DUFFIE, D.; SINGLETON, K. An econometric model of the term structure of interest rate swaps yields. *Jounal of Finance*, vol. 52, no. 4, p. 1287-1321, setembro 1997.

_____. Modeling term structure of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*. Vol. 12. No. 4. p. 687-720, 1999.

DURHAM, G. Likelihood-based specification analysis of continuous-time models of the short-term interest rate. *Working Paper, University of North Carolina*. Disponível em: http://www.biz.uiowa.edu/faculty/gdurham/. Acesso em: 22/05/2003

DURHAM, G.; GALLANT, A. Numerical techniques for simulated maximum likelihood estimation of stochastic differential equations. *Journal of Business and Statistics*, vol. 20, n.3, p. 297-338, julho, 2002.

EATON, J.; FERNANDEZ, R. Sovereign debt. *NBER Working Paper* no. 5131. 1995

EATON, J.; GERSOVITZ, M. Debt with potential repudiation: theoretical and empirical analysis. *Review of Economic Studies*, vol. 48, no. 1, p. 289-309.

EICHENGREEN, B.; MODY, A. Would collective action clauses raise borrowing costs? *NBER Working Paper* 7458, Janeiro, 2000.

_____. Bail-ins, bail-outs, and borrowing costs. *IMF Staff Papers*, vol. 47, número especial, 2001. Disponível em: http://www.imf.org. Acesso em: 19/04/2003

ELERIAN, O.; CHIB, S.; SHEPARD, N. Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions. *Econometrica*, vol. 69, no. 4. Julho, 2001. p. 959-993

ELLIOT, R. On models of default risk. *Mathematical Finance*, vol. 10, no. 2. Abril, 2000. p 179-195.

FUNDO MONETÁRIO INTERNACIONAL. Sovereign debt restructurings and the domestic economy experience in four recent cases. 2002[a]. Disponível em http://www.imf.org

_____. A new approach to sovereign debt restructuring. Abril, 2002b. Disponível em http://www.imf.org

GALLANT, A.; TAUCHEN, G. Which moments to match? *Econometric Theory*, vol. 12, p. 657-681.

GIESECKE, K. Default compensator, incomplete information, and the term structure of credit spreads. *Trabalho para Discussão, Humboldt-Universotät zu Berlin*. Dezembro, 2001.

GREENE, W. *Econometric Analysis*. 4. ed. Nova York: Prentice-Hall, 2000

HARRISON, J.; PLISKA, S. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 11. 1981. p. 215-260.

HARRISON, J.; KREPS, D. Martingales and arbitrage in multiperiod security markets. *Journal of Economic Theory*, vol. 20, 1979.

IZVORSKI, I. Brady bonds and default probabilities. *IMF Working Paper* WP/98/19. 1998.

JARROW, R.; TURNBULL, S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, vol. 60, no.1, p. 53-85, 1995.

JEANBLANC M.; RUTKOWSKI, M. Modelling of default risk: an overview.1999

_____. Modelling of default risk: mathematical tools. 2000.

LANDO, D. On Cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research* 2, 99-120, 1998.

LONGSTAFF, F.; SCHWARTZ, E. A simple approach to valuating risky fixed and floating rate debt. *Journal of Finance*, vol. 50, p. 789-819, 1995.

KESWANI, A. Estimating a risky term structure of brady bonds. *Lancaster University Management School Working Paper* 2000-018. Dezembro, 2000.

MERRICK, J. Crisis dynamics of implied default recovery ratio: evidence from Russia and Argentina. *Journal of Banking and Finance* 25 (2001) 1921-1939.

MERTON, R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, vol. 29, p. 449-470, 1974.

MOODY'S INVESTORS SERVICE. Sovereign debt: what happens if a sovereign defaults? Julho, 2000.Disponível em: http://www.moodys.com

_____. Sovereign restructurings: putting too much faith in exit consents. Março 2001. Disponível em: http://www.moodys.com

OKSENDAL, B. *Stochastic differential equations*: an introduction with applications. Springer, Nova York: 3a. edição. 1992.

PAGÈS, H. Can liquidity risk be subsumed in credit risk? A case study from bond prices. *BIS Working Papers* n. 101. Julho, 2001.

PEARSON, N.; SUN, T. Exploiting the conditional density in estimating the term structure: an application to the Cox, Ingersoll, and Ross model. *Journal of Finance*, vol. 49, n.4, p. 1279-1304, setembro, 1994.

PEDERSEN, A. A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 22, p. 55-71, 1995.

PROTTER, P. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, Nova York, 1990.

SCHÖNBUCHER, P. Term structure modeling of defaultable bonds. *Review of Derivatives Research*, vol. 2, 1998.

SINGLETON, K. Estimation of affine asset pricing models using the empirical characteristic function. *Journal of Econometrics*, no. 102, 2001.

VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, vol. 5. 1977

WESTPHALEN, M. Valuation of sovereign debt with strategic defaulting and rescheduling. *Trabalho para Discussão, HEC –Lausanne*. Disponível em: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=301983. Acesso em: 12 jul. 2002

Anexo A

Os Global Bonds são títulos emitidos pela República Federativa do Brasil, denominados em dólares americanos. Pagam cupons pré-fixados semestralmente com contagem 30/360. A amortização é tipo *bullet*, ou seja, pagamento total do principal na maturidade. Com exceção do Global 2040 não apresentam cláusulas especiais como opções de resgate antecipado ou fundos de amortização.

Tabela 9: Liquidez de Globals emitidos pelo Brasil – Ratings de liquidez dados pelo banco J.P. Morgan para vários títulos externos do Brasil.

	Data Emissão		Julho 2000		Julho 2002	
		Cupom	bid/ask 1 mês	rating	bid/ask 1 mês	bid/ask 1 mês
Global 2004	19/04/99	11 5/8	0,337	L1-	0,961	L4+
Global 2005	17/05/01	9 5/8	-	-	1,207	L4+
Global 2007	26/07/00	11 1/4	0,511	-	1,33	L4+
Global 2006	11/01/01	10 1/4	-	-	1,202	L4+
Global 2007	26/07/00	11 1/4	-	-	1,33	L4+
Global 2008	07/04/98	9 3/8	0,872	L3+	1,818	L4+
Global 2008	12/03/02	11 1/2	-	-	1,125	-
Global 2009	25/10/99	14 1/2	0,372	L1-	1,314	L4+
Global 2010	17/04/02	12	-	-	1,33	-
Global 2012	11/01/02	11	-	-	1,409	L4+
Global 2020	26/01/00	12 3/4	0,511	L2	1,616	L4+
Global 2024	22/03/01	8 7/8	-	-	1,098	L4+
Global 2027	09/06/97	10 1/8	0,48	L2-	0,845	L4+
Global 2030	06/03/00	12 1/4	0,478	L2-	1,455	L4+
Global 2040	17/08/00	11	0,25	L1-	0,88	L4+

Fonte: Emerging Markets Bond Index Monitor Julho/2000 e Julho/2002

O rating L1 é o de melhor liquidez e referência, sendo o título cotado por todos os corretores designados pelo J.P.Morgan, o rating L4 refere-se a títulos geralmente ilíquidos, com spreads de menos de 3 %

Os Globals seguem os procedimentos necessários para o registro no mercado interno dos Estados Unidos, definidos pela *Securities and Exchange Comission* (SEC) além de serem disponíveis nos mercados internacionais de *eurobonds*. Os Globals são governados pela lei do estado de Nova York e o Brasil explicitamente não reconhece jurisdição de quaisquer outras cortes fora do país. Alterações nas datas de pagamento do principal ou de juros, redução do valor principal ou dos cupons e alterações de

denominação de moeda na qual os pagamentos são executados só podem ser efetuadas com a aprovação escrita de cada detentor dos títulos de uma série.[35]

Os globals não têm garantias e apresentam a cláusula de negative pledge, pela qual o Brasil compromete-se a não emitir novos títulos com senioridade maior às séries já emitidas. Em certos eventos considerados como eventos de default os detentores de títulos podem exigir aceleração, com o pagamento adiantado do principal.

[35] Globals Bonds emitidos pelo Brasil em 2003 apresentam, apesar de regidos pela legislação do estado de Nova York, cláusulas de ação coletiva.

Anexo B

Seja a representação canônica conforme definição de DAI e SINGLETON:

$$d\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \right) + I_{4x4} \begin{bmatrix} \sqrt{X_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+b_2 X_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+b_3 X_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+b_4 X_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \\ dW_3 \\ dW_3 \end{bmatrix}$$

Com a taxa de juros, intensidade de default e valor recuperado esperado definidos por:

$$r = d_0 + d_1 X^1 + d_2 X^2$$
$$l = u_0 + u_1 X^1 + u_2 X^2 + u_3 X^3$$
$$w = v_0 + v_1 X^1 + v_2 X^2 + v_3 X^3 + v_4 X^4$$

A representação canônica é admissível e exatamente identificada, contém o número máximo de parâmetros livres identificáveis econometricamente:

$$\Psi = \begin{Bmatrix} K^{11}, K^{21}, K^{22}, K^{31}, K^{32}, K^{33}, K^{41}, K^{42}, K^{43}, K^{44}, q^1, b_2, b_3, b_4, d_0, d_1, d_2, v_0, v_1, v_2, v_3, \\ u_1, u_2, u_3, u_4 \end{Bmatrix}$$

A representação acima pode transformada para a representação $\{v_t, r_t, l_t, w_t\}$ aplicando-se a transformação afim dada por $TY(t) = LY(t) + u$ onde L é uma matriz 4 x 4 e υ é vetor 4 x 1 dados por :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 0 \\ d_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros que determinam a dinâmica das variáveis de estado passam a ser:

$$(K_{vv}, K_{rr}, K_{ll}, K_{ww}) = (K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{44})$$

$$K_{rv} = d_1(K_{11} - K_{22}) + d_2 K_{21}$$

$$K_{lv} = \frac{u_3(d_2 K_{31} - d_1 K_{32}) + u_2(d_2 K_{21} + d_1(K_{33} - K_{22})) + u_1(d_2(K_{11} - K_{33}))}{d_2}$$

$$K_{lr} = \frac{u_3 K_{32} + u_2(K_{22} - K_{33})}{d_2}$$

$$K_{wv} = \frac{v_4(u_3(d_2 K_{41} - d_1 K_{42}) + u_2 d_1 K_{43} - u_1 d_2 K_{43}) + v_3(u_3(d_2 K_{31} - d_1 K_{32}) + u_2 d_1(K_{33} - K_{44}) + u_1 d_2(K_{44} - K_{33}))}{d_2 u_3} +$$

$$+ \frac{v_2(d_2 K_{21} - d_1(K_{44} - K_{22}))}{d_2} + v_1(K_{11} - K_{44})$$

$$K_{wr} = \frac{v_4(u_3 K_{42} - u_2 K_{43}) + v_3(u_3 K_{32} + u_2(K_{44} - K_{33}))}{d_2 u_3} + \frac{v_2(K_{22} - K_{44})}{d_2}$$

$$K_{wl} = \frac{v_4 K_{43} + v_3(K_{33} - K_{44})}{u_3}$$

$$(q_v, q_r, q_l, q_w) = (q_1, d_0 + d_1 q_1, u_0 + u_1 q_1, v_0 + v_1 q_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{rv} & \Sigma_{rr} & 0 & 0 \\ \Sigma_{lv} & \Sigma_{lr} & \Sigma_{ll} & 0 \\ \Sigma_{wv} & \Sigma_{wr} & \Sigma_{wl} & \Sigma_{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

$$(b_v, b_r, b_l, b_w) = (1, b_2, b_3, b_4)$$

A transformação preserva o posto da matriz β que define o número de fatores que determinam a variância condicional dos fatores e os autovalores da matriz K, mantendo a estacionaridade dos processos.

$$\hat{\Psi} = \left\{ \begin{matrix} K^{vv}, K^{rv}, K^{rr}, K^{lv}, K^{lr}, K^{ll}, K^{wv}, K^{wr}, K^{wl}, K^{ww}, q^{v}, q^{r}, q^{l}, q^{w}, b_r, b_l, b_w, \Sigma^{rv}, \Sigma^{rr}, \Sigma^{lv}, \Sigma^{lr}, \\ \Sigma^{ll}, \Sigma^{wv}, \Sigma^{wr}, \Sigma^{wl}, \Sigma^{ww} \end{matrix} \right\}$$

Anexo C

Estimação da Curva de Swap

1) Rotina Principal

```
clear
clc;

delete result.txt
delete detail.txt
delete detail_1.txt

fid=fopen('result.txt','at+','n');
title=['  n',' ex',...
      ' K11              ',' TETA1             ',...
      ' K21              ',' K22               ',...
      ' D0               ',' D1                ',...
      ' D2               ',' BETA1             ',...
      ' L1               ',' L2                ',' OBJ              '];
fprintf(fid,'%20s',title);
fprintf(fid,'* \n',[]);
fclose(fid);

% taxas de swaps
% 12 colunas:
% Date    1y          2y          3y          4y          5y          6y          7y          10y         15y         20y
          30y
load rates
c=[rates(:,3)/200 rates(:,9)/200];


%Parametros Iniciais da Difusao

TETA1=87.4044;
K11=0.00835788;
K21=-.0821643;
K22=0.115583;
D0=0.0873981;
D1=1.42616e-8;
D2=0.00180673;
BETA2=1;
L1=-0.00;
L2=-0.0873335;

ParDif=[K11;TETA1;K21;K22;D0;D1;D2;L2];
%ParDif=[K11;TETA1;K21;K22;D0;D1;D2;L1;L2];

fid=fopen('detail.txt','at+','n');
fprintf(fid,'*************************************************\n');
fprintf(fid,'*                                               *\n');
fprintf(fid,'*     Otimizacao no. %2.0f                       *\n',1);
fprintf(fid,'*                                               *\n');
fprintf(fid,'*************************************************\n');
fprintf(fid,'***      Valores Iniciais          **************\n');
fprintf(fid,' K11      %-9.2g\n TETA1      %-9.2g\n K21      %-9.2g\n K22      %-9.2g\nD0    %-9.2g\n D1    %-9.2g\n
D2      %-9.2g\n L2      %-9.2g\n',ParDif);
fclose(fid);

% Estimacao
% Restricoes:
% Desigualdades Lineares A*x<=b
A=[];
b=[];
% Igualdade Linear Aq*x=bq
% Limites dos parametros
% !!! Deve ser definidos para todos os parametros
%   K11   ;TETA1 ; K21   ;  K22  ;  DO  ;   D1  ;  D2   ; L2
lb=[0.5e-4;0.6e+2;-2.0e-1;+1.0e-3;-8.0e-2;-1.0e-1;+0.5e-3;-1.2e-1];
ub=[5.0e-2;1.6e+2;-0.5e-3;+4.0e-1;+1.0e-1;+8.0e-4;+3.0e-3;-7.5e-2];
```

```
% restricoes nao lineares
% Default: 'TolX',1e-6,'TolFun',1e-8,'TolCon',1e-6
%          'MaxFunEvals',no. de variaveis * 100
options = optimset('Diagnostics','on','LargeScale','off','Display','iter',...
   'MaxIter',500,'MaxFunEvals',1000,'TolX',1e-6,'TolFun',1e-6,'TolCon',1e-6,...
   'DiffMaxChange',1e-2,'DiffMinChange',1e-6);
[ParDif,fval,exitflag,output,lambda,grad,H]                                                                    =
fmincon(@ml_objSWAP,ParDif,A,b,[],[],lb,ub,@ml_conSWAP,options,c);
Likel=fval;

result=[1,exitflag,(ParDif)',Likel];

fid=fopen('detail.txt','at+','n');
fprintf(fid,'**************************************************\n');
fprintf(fid,'*                                                *\n');
fprintf(fid,'*     Otimizacao no. %2.0f                       *\n',1);
fprintf(fid,'*                                                *\n');
fprintf(fid,'**************************************************\n');
fprintf(fid,'***       Valores Finais          ***************\n');
fprintf(fid,' K11=      %-9.2g\n TETA1=       %-9.2g\n K21=      %-9.2g\n K22=       %-9.2g\n D0=     %-9.2g\n D1=
%-9.2g\n D2=      %-9.2g\n L2=      %-9.2g\n',ParDif);
fclose(fid);

fid=fopen('result.txt','at+','n');
fprintf(fid,'%3u %2d %-20.4g %-20.4g %-20.4g %-20.4g %-20.4g %-20.4g %-20.4g %-20.10g ',result);
fprintf(fid,'* \n',[]);
fclose(fid);

fid=fopen('detail_1.txt','at+','n');
fprintf(fid,'**************************************************\n');
fprintf(fid,'*                                                *\n');
fprintf(fid,'*     Otimizacao no. %2.0f                       *\n',1);
fprintf(fid,'*                                                *\n');
fprintf(fid,'**************************************************\n');
fclose(fid);
names=fieldnames(lambda);
for i=1:length(names)
   if sum(eval(char(strcat('lambda.',names(i),'~=0'))))
      fid=fopen('detail_1.txt','at+','n');
      fprintf(fid,'***       Restricao ativa          ***************\n');
      fprintf(fid,char(names(i)));
      fprintf(fid,' \n',[]);
      fprintf(fid,'%9.2g',eval(char(strcat('lambda.',names(i)))));
      fprintf(fid,' \n',[]);
      fclose(fid);
   end
end

ParDif=[ParDif(1:7);1;0;ParDif(8)];

tau=0:0.5:10; % de 1 a 10 anos com .5 de step
options=odeset('RelTol',1e-4);
[tau,ParRic]=ode45(@CalcParSWAP,tau',[0;0],options,ParDif);
if size(ParRic,1)<21
   [tau1,ParRic1]=CalcParSWAP1(tau(end),ParRic(end,:),ParDif,0.5,tau(end):0.5:10);
   tau=[tau;tau1'];
   ParRic=[ParRic;ParRic1];
end
ParRic(:,3)=ParDif(7)/ParDif(4)*(1-exp(-ParDif(4)*tau));
ParRic=ParRic(2:end,:);

% yield=-(1/t)*(A-Bx)  => y+A/t=(B/t)*x
Bc=[ParRic(4,2)/2 ParRic(4,3)/2;ParRic(20,2)/10 ParRic(20,3)/10];
Ac=[ParRic(4,1)/2*ones(711,1)+2*c(:,1) ParRic(20,1)/10*ones(711,1)+2*c(:,2)];
AY_b=(inv(Bc)*Ac')';


options1=optimset('Display','off','Jacobian','on','TolFun',1e-10);   % Option to display output
[AY,erro,exitflag,output,J]=fsolve(@CalcStateSWAP,AY_b,options1,ParRic,c);

tau=0:0.5:30; % de 1 a 10 anos com .5 de step
options=odeset('RelTol',1e-4);
[tau,ParRic]=ode45(@CalcParSWAP,tau',[0;0],options,ParDif);
if size(ParRic,1)<61
   [tau1,ParRic1]=CalcParSWAP1(tau(end),ParRic(end,:),ParDif,0.5,tau(end):0.5:10);
   tau=[tau;tau1']
```

```
   ParRic=[ParRic;ParRic1];
end
ParRic(:,3)=ParDif(7)/ParDif(4)*(1-exp(-ParDif(4)*tau));
ParRic=ParRic(2:end,:);

% Calculo de Erro e Estatisticas
tau=[1 2 3 4 5 6 7 10 15 20 30];
Erro=CalcErro(rates,AY,ParRic,tau);

K11=ParDif(1);
TETA1=ParDif(2);
K21=ParDif(3);
K22=ParDif(4);
D0=ParDif(5);
D1=ParDif(6);
D2=ParDif(7);
BETA2=ParDif(8);
L1=ParDif(9);
L2=ParDif(10);

r=D0+D1*AY(:,1)+D2*AY(:,2);

%************************************************************************
%************************************************************************
%*****   CALCULO DESVIO PADRAO DOS ESTIMADORES        **************
%************************************************************************
%************************************************************************

Par1=[ParDif(1:7);ParDif(10)];

for i=6:6
   for j=1:8
      e=zeros(8,1);
      e(j)=ParDif(j)*10^-i;
      e(j)=min(max(e(j),10^-10),1e-3);
      Par=Par1+e;
      d1=feval(@ml_obj_VAR,Par,c);
      Par=Par1-e;
      d2=feval(@ml_obj_VAR,Par,c);
      G(:,j)=(d1-d2)./(2*e(j));
   end
   Var=inv(G'*G);
   StdDev(i-2,:)=(sqrt(diag(Var)))'
end

StdDev=StdDev(end,:)
tt=Par1./StdDev';



%************************************************************************
%************************************************************************
%*****   Erros Taxas Libor                    **************
%************************************************************************
%************************************************************************

load libor
n=size(libor,1);

d=1/12;
tau=0:d:1; % de 1 a 10 anos com .5 de step
options=odeset('RelTol',1e-4);
[tau,ParRic]=ode45(@CalcParSWAP,tau',[0;0],options,ParDif);
if tau<1
   [tau1,ParRic1]=CalcParSWAP1(tau(end),ParRic(end,:),ParDif,0.5,tau(end):0.5:10);
   tau=[tau;tau1'];
   ParRic=[ParRic;ParRic1];
end
ParRic(:,3)=ParDif(7)/ParDif(4)*(1-exp(-ParDif(4)*tau));
ParRic=ParRic(2:end,:);

y=[ones(n,1) -AY]*ParRic'; % n x 20

t1=diag(1./tau(2:end));
y=y*-t1;
```

```
Erro1.series=y*100-libor(:,2:end); % em percentagem
Erro1.stats(1,:)=nanmean(Erro1.series);
Erro1.stats(2,:)=nanmax(abs(Erro1.series));
Erro1.stats(3,:)=nanstd(Erro1.series);
Erro1.SSR=sum(nansum(Erro1.series.^2));

lab2a=cellstr(['mean';'max ';'std ']);
lab1a=cellstr(['---';'1m ';'2m ';'3m ';'4m ';'5m ';'6m   ';'7m ';'8m ';'9m ';'10m';'11m';'12m']);
table7=cat(2,lab2a,num2cell(Erro1.stats));
tab7=cat(1,lab1a',table7);

%************************************************************************
%************************************************************************
%*****   TABELAS PARA REPORT                          **************
%************************************************************************
%************************************************************************

tab1={'-----','Mean','Std','Teste_t';
    'K11   ',K11,StdDev(1),tt(1);
    'TETA1 ',TETA1,StdDev(2),tt(2);
    'K21   ',K21,StdDev(3),tt(3);
    'K22   ',K22,StdDev(4),tt(4);
    'D0    ',D0,StdDev(5),tt(5);
    'D1    ',D1,StdDev(6),tt(6);
    'D2    ',D2,StdDev(7),tt(7);
    'BETA2 ',BETA2,0,0;
    'L1    ',L1,0,0;
    'L2    ',L2,StdDev(8),tt(8)};

lab2=cellstr(['mean';'max ';'std ']);
lab1=cellstr(['---';'1y ';'2y ';'3y ';'4y ';'5y ';'6y';'7y ';'10y';'15y';'20y';'30y']);
table=cat(2,lab2,num2cell(Erro.stats));
tab2=cat(1,lab1',table);

tab3={'SSE',[Erro.SSR]};

tab4={'Funcao Objetivo',[Likel]};

names=fieldnames(lambda);
j=1;
for i=1:length(names)
   if sum(eval(char(strcat('lambda.',names(i),'~=0'))))
      values=(eval(char(strcat('lambda.',names(i)))))'
      for n=1:length(values)
         disp(n)
         if values(n)~=0
            tab5{j,1}=char(names(i))
            tab5{j,2}=values(n)
            tab5{j,3}=n
            j=j+1
         end
      end
      j=j+1;
   end
end

names=fieldnames(output);
for j=1:length(names)-1
   tab6{j,1}=char(names(j));
   values=(eval(char(strcat('output.',names(j)))));
   tab6{j,2}=values;
end

H1=inv(H);

fh = figure('Color','w');
h=plot(Erro.series);
legend('1y ','2y ','3y ','4y ','5y ','6y          ','7y ','10y','15y','20y','30y')

fh1 = figure('Color','w');
h1=plot([r libor(:,4)/100 libor(:,7)/100]);
legend('r','libor 3m','libor 6m')

fh2 = figure('Color','w');
h1=plot(AY);
```

```
legend('AY1','AY2')
```

2) Função a ser Maximizada

```
function o=ml_objSWAP(ParDif1,c)
% funcao objetivo estimacao ML
% Argumentos x: vetor de parametros da difusao
% 1. Dado parametros difusao, resolver parametros Ricatti
% 2. Dado parametros Riccati extrair vetor de estados X
% 3. Transformacao Jacobi
% c=h(r) ==> g(c)=f(r)*(1/(dh(r)/dr))
% arr determina coeficiente autoregressivo exp(-arr*d)


ParDif=[ParDif1(1:7);1;0;ParDif1(8)];

K11=ParDif(1);
TETA1=ParDif(2);
K21=ParDif(3);
K22=ParDif(4);
D0=ParDif(5);
D1=ParDif(6);
D2=ParDif(7);
BETA2=ParDif(8);
L1=ParDif(9);
L2=ParDif(10);

n=size(c,1);

tau=0:0.5:10; % de 1 a 10 anos com .5 de step
options=odeset('RelTol',1e-4);
[tau,ParRic]=ode45(@CalcParSWAP,tau',[0;0],options,ParDif);
if size(ParRic,1)<21
   [tau1,ParRic1]=CalcParSWAP1(tau(end),ParRic(end,:),ParDif,0.5,tau(end):0.5:10);
   tau=[tau;tau1'];
   ParRic=[ParRic;ParRic1];
end
ParRic(:,3)=D2/K22*(1-exp(-K22*tau));

ParRic=ParRic(2:end,:);

% Calcula Variaveis de Estado
% yield=-(1/t)*(A-Bx)  => y+A/t=(B/t)*x
Bc=[ParRic(4,2)/2 ParRic(4,3)/2;ParRic(20,2)/10 ParRic(20,3)/10];
Ac=[ParRic(4,1)/2*ones(711,1)+2*c(:,1) ParRic(20,1)/10*ones(711,1)+2*c(:,2)];
AY_b=(inv(Bc)*Ac)';

options1=optimset('Display','off','Jacobian','on','TolFun',1e-6);   % Option to display output
[AY,erro,exitflag,output,J]=fsolve(@CalcStateSWAP,AY_b,options1,ParRic,c);

% Calcula o Jacobiano da transformacao
B=exp([ones(n,1) -AY]*ParRic'); % n x 20
B1=cumsum(B,2); %sum(B(0.5i) n x 20
B2=cumsum(B*-diag(ParRic(:,2)),2); % n x 20
B3=cumsum(B*-diag(ParRic(:,3)),2); % n x 20
j1=(ParRic(4,2)*B(:,4).*B1(:,4)-(1-B(:,4)).*B2(:,4))./(B1(:,4).^2+1e-300); % n x 1     j1=(ParRic(4,2)*B(:,4).*B1(:,4)-(1-
B(:,4)).*B2(:,4))./(B1(:,4).^2+1e-300); % n x 1
j2=(ParRic(4,3)*B(:,4).*B1(:,4)-(1-B(:,4)).*B3(:,4))./(B1(:,4).^2+1e-300);
j3=(ParRic(20,2)*B(:,20).*B1(:,20)-(1-B(:,20)).*B2(:,20))./(B1(:,20).^2+1e-300); % n x 1
j4=(ParRic(20,3)*B(:,20).*B1(:,20)-(1-B(:,20)).*B3(:,20))./(B1(:,20).^2+1e-300);
dJ=j1.*j4-j2.*j3;

sum3=sum(log(abs(dJ)+realmin));

   % ********************************************************************
   % *                                                  *
   % *                  Dinamica 1. Fator                       *
   % *                                                  *
   % ********************************************************************
d(1:n-1,1)=1/52;
AY(:,1)=max(1e-6,AY(:,1));
log_p1=P_CIR(AY(:,1),[K11 TETA1 1],d);
sum1=sum(log_p1);
%sum1=sum(log_p1-erro_AY(:,1));
   % ********************************************************************
```

```
   % *                                          *
   % *                  Dinamica 2. Fator                *
   % *                                          *
   % ***************************************************************
PAR=[K11;TETA1;K21;K22;BETA2];
log_p2=log(P_YD([abs(AY(:,1)) AY(:,2)],16,32,PAR)+realmin);
log_p2(isnan(log_p2))=-1e+6;
sum2=sum(log_p2);
o=-(1/n)*(sum1+sum2-sum3);
```

3) Solução das Equações Diferenciais Ordinárias

```
function dy=CalcParSWAP(t,y,ParDif)
% Calcula Parametros para Affine Term Structures
% P(t,T)=exp(A(T)-B(T)'*x(t))
% argumentos: t:  maturidades
%             y: valores iniciais de A e B k+1 x 1 (k fatores)
%             ParIn: parametros da difusao
%

K11=ParDif(1);
TETA1=ParDif(2);
K21=ParDif(3);
K22=ParDif(4);
D0=ParDif(5);
D1=ParDif(6);
D2=ParDif(7);
BETA2=ParDif(8);
L1=ParDif(9);
L2=ParDif(10);

dy = zeros(2,1);    % a column vector
%dy(1)=-K11*TETA1*y(2)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+...
%    ((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*K21*TETA1)*K22)*(D2/...
%    K22-exp(-K22*t)*D2/K22)-D0;
dy(1)=-K11*TETA1*y(2)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+...
    ((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*...
    (D2/K22-exp(-K22*t)*D2/K22)+1/2*(D2/K22-exp(-K22*t)*D2/K22)^2-D0;
% rever porque tinha soma aqui!!!!
%dy(2:3)=-kq'*y(2:3)-0.5*(y(2)^2)*beta(:,1)+(y(3)^2)*beta(:,2)+delta(2:3)
dy(2)=(-K11-L1)*y(2)+(-K21-L2*BETA2)*(D2/K22-exp(-K22*t)*D2/K22)-1/2*y(2)^2-...
    1/2*(D2/K22-exp(-K22*t)*D2/K22)^2*BETA2+D1;
%dy(3)=-K22*y(3)+D2

%k=[K11 0;
%   K21 K22];
%a=[TETA1;
%    0];
%b=[1 0;
%   0 1];
%alfa=[0;
%      1];
%beta=[1 BETA2;
%      0 0];
%l=[L1;
%   L2];
%delta=[D0;D1;D2];
%kq=k+b*[L1*beta(:,1)';L2*beta(:,2)'];
%aq=kq\(k*a-b*(l.*alfa));
%dy(4)=-aq'*kq'*y(5:6)+0.5*sum(((b'*y(5:6)).^2).*alfa)-delta(1)
%dy(5:6)=-kq'*y(5:6)-0.5*((y(5)^2)*beta(:,1)+(y(6)^2)*beta(:,2))+delta(2:3)
```

4) Inversão da Função de Apreçamento

```
function [F,J]=CalcStateSWAP(AY,ParRic,c)
% LIBOR 6 meses
% Extrai o vetor de k fatores dadas k taxas de swap
% Argumentos: x: vetor variaveis de estado n x k
%             ParRic: parametros Riccati     20 x k+1
%             c: vetor taxas swaps (cupom!!!)  n x k
%             d1: constante
%          1-B(t,T)
% c(t,T)= -----------
%       sum(B(t,0.5i)) *de 1 a 2T
```

```
% Jacobiano
%  dc(T)      sum(B(t,0.5i))*ParRic(T,2)*B(t,T)-(1-B(t,T))*sum(ParRic(0.5*i,2)*B(t,T))
% -------- = ------------------------------------------------------------------------
%   dx(t)                              sum(B(0.5i))^2
%
%
n=size(AY,1); % numero de obs
% calcula zeros de maturidades 0.5 a 10 anos
B=exp([ones(n,1) -AY]*ParRic'); % n x 20
B1=cumsum(B,2); %sum(B(0.5i) n x 20
B2=cumsum(B*-diag(ParRic(:,2)),2); % n x 20
B3=cumsum(B*-diag(ParRic(:,3)),2); % n x 20
F=[(1-B(:,4))./(B1(:,4)+1e-300) (1-B(:,20))./(B1(:,20)+1e-300)]-c;
if nargout > 1
   % (1 => n)     x (1 => n)     Jacobiano Equacao 1 em relacao ao fator 1
   % (1 => n)     x (n+1 => 2*n) Jacobiano Equacao 1 em relacao ao fator 2
   % (n+1 => 2*n) x (1 => n)     Jacobiano Equacao 2 em relacao ao fator 1
   % (n+1 => 2*n) x (n+1 => 2*n) Jacobiano Equacao 2 em relacao ao fator 2
   % derivada equacao 1 em relacao a fator 1
   j1=(ParRic(4,2)*B(:,4).*B1(:,4)-(1-B(:,4)).*B2(:,4))./(B1(:,4).^2+1e-300); % n x 1
   J1=sparse((1:n),(1:n),j1,2*n,2*n);
   % derivada equacao 1 em relacao fator 2
   j2=(ParRic(4,3)*B(:,4).*B1(:,4)-(1-B(:,4)).*B3(:,4))./(B1(:,4).^2+1e-300);
   J2=sparse((1:n),((n+1):(2*n)),j2,2*n,2*n);
   % derivada equacao 2 em relacao fator 1
   j3=(ParRic(20,2)*B(:,20).*B1(:,20)-(1-B(:,20)).*B2(:,20))./(B1(:,20).^2+1e-300); % n x 1
   J3=sparse(((n+1):(2*n)),(1:n),j3,2*n,2*n);
   % derivada equacao 2 em relacao fator 2
   j4=(ParRic(20,3)*B(:,20).*B1(:,20)-(1-B(:,20)).*B3(:,20))./(B1(:,20).^2+1e-300); % n x 1
   J4=sparse(((n+1):(2*n)),((n+1):(2*n)),j4,2*n,2*n);
   J=J1+J2+J3+J4;
End
```

5) Cálculo Probabilidade CIR

```
function log_p=P_CIR(X,ParDif,d)
% Calcula log probabilidade de transicao SDE
% dr=arr(ar-r)dt+brr*(r)^.5*dW
% argumentos:
%     X: serie de observacoes n x 1
%     ParDif: parametros da difusao
%     d: vetor de intervalos de tempos

avv=ParDif(1);
av=ParDif(2);
bvv=ParDif(3);

n=size(X,1);

% Probabilidade incondicional da 1a. obs.
% Distribuicao Gamma f(X|a,b) onde
% a=2*arr*ar/brr^2 => q+1
% b=2*arr/brr^2    => c
% calcula o valor de L2 tal que P(X>L2)=1e-10 e P(X<L1)=1e-10
a_g=(2*avv*av)/(bvv^2);
b_g=(bvv^2)/(2*avv);
L1=gaminv(1e-8,a_g,b_g);
L2=gaminv(1-1e-8,a_g,b_g);
if and(X(1,1)>=L1,X(1,1)<=L2)
   log_p(1,1)=(a_g-1)*log(X(1,1))-(X(1,1)/b_g)-a_g*log(b_g)-gammaln(a_g);
elseif X(1,1)<=L1
   log_p(1,1)=log(1e-10)-(1/1e-10)*(L1-X(1,1));
elseif X(1,1)>=L2
   log_p(1,1)=log(1e-10)-(1/1e-10)*(X(1,1)-L2);
end
% Densidade de Transicao para CIR
%                              v  ^q/2
% p(d,r(t+1),r(t))=c*exp(-u-v)*(---)    *Iq(2*(u*v)^0.5)
%                              u
% onde:
%           2arr
% c=----------------------  u=c*r(t)*exp(-arr*d) v=c*r(t+1)
%   brr^2*(1-exp(-arr*d))
%   2*arr*ar
% q=--------- -1
```

```
%    brr^2
c=(2*avv)./((bvv^2).*(1-exp(-avv*d))+1e-300); % n x 1
q=(2*avv*av)/(bvv^2)-1;
u=c.*abs(X(1:end-1,1)).*exp(-avv.*d); % n x 1
v=c.*abs(X(2:end,1));
if isreal(q)% n x 1
   [p1_1,ierr]=besseli(q,2*(u.^0.5).*(v.^0.5),1);
   p2_1=-u-v+2*(u.^0.5).*(v.^0.5);
   log_p(2:n,1)=+log(c+realmin)+p2_1+(q/2)*log(v./u+realmin)+log(p1_1+realmin);
else
   lop_p(2:n,1)=-1e6;
end

%p2=c.*exp(-u-v).*((v./u).^(q/2)).*p1_1.*exp(2*(u.^0.5).*(v.^0.5));
```

6) Cálculo Probabilidade 2. Fator

```
function pJ=P_YD(AY,J,Z,PAR)
% Probabilidade P(Y2(i)|Y1(i),[Y1(i-1),Y2(i-1)])
% AY vetor com obs das variaveis de estado
% J: numero de sobibtervalos
% Z: numero de simulacoes independentes



randn('state',123456);

K11=PAR(1);
TETA1=PAR(2);
K21=PAR(3);
K22=PAR(4);
BETA2=PAR(5);


N=size(AY,1)-1; % numero de subintervalos
Y1=AY(1:N+1,1);
Y2=repmat(AY(1:N+1,2),1,Z);
Y1_END=repmat(Y1(2:N+1),1,Z); % NxZ
Y1_OLD=repmat(Y1(1:N),1,Z); % inicializa Y simulado com obs. NxZ

d=1/52; % intervalo em anos entre duas observacoes
dj=d/J; % subintervalo (em anos) entre das discretizacoes

% Inicia variaveios auxiliares
f_J=ones(N,Z); % Probabilidade Real de Y1 simulado J
f1_J=ones(N,Z); % Probabilidade Estimada de Y1 simulado J
S_I1=0;
S_I2=0;

for j=1:J
   tj=dj*(j-1);
   % Simulacao de Y1 atraves de ponte browniana
   % Y1(j+1)=Y1(j)+mu(Y1(j),tj)*tj+sigma(Y1(j))*tj^.5*dW
   dW=randn(N,Z/2);
 %   dW=trnd(2,N,Z/2);
   dW=sqrt(dj)*[dW -dW]; % numero de observacoes x numero de simulacoes % N x Z
   mu=dj*(Y1_END-Y1_OLD)./(d-tj);
   if j<J
    % testar se alteracao correta!!!!
    %  mu=dj*(Y1_END-Y1_OLD)./(d-tj);
      Y1_NEW=Y1_OLD+mu+sqrt(Y1_OLD).*dW; % N x Z
   else
      Y1_NEW=Y1_END; % N x Z
   end
   % Interpolacao Linear entre dois pontos de simulacao
   alfa=(Y1_NEW-Y1_OLD)/dj; % N x Z
   I1=alfa.*(exp(K22*(tj+dj)).*(-1/K22+dj)-exp(K22*tj).*(-1/K22))...
      +Y1_OLD.*(exp(K22*(tj+dj))-exp(K22*tj));
   S_I1=S_I1+I1; % N x Z
   I2=alfa.*(dj*exp(2*K22*(tj+dj))-exp(2*K22*(tj+dj))/(2*K22)+exp(2*K22*tj)/(2*K22))...
      +Y1_OLD.*(exp(2*K22*(tj+dj))-exp(2*K22*tj)); % N x Z
   S_I2=S_I2+I2; % N x Z
   % calcula a probabilidade de transicao real
   c=(2*K11)./((1^2).*(1-exp(-K11*dj))+1e-300); % 1 x 1
   q=(2*K11*TETA1)/(1^2)-1; %1x1
   u=c.*abs(Y1_OLD.*exp(-K11.*dj)); % N x Z
```

```
    v=c.*abs(Y1_NEW); % N x Z
    Zb=2*sqrt(u).*sqrt(v);
    [p1_1,ierr]=besseli(q,Zb,1);
    p2_1=-u-v+Zb;
    log_p=log(c+1e-300)+p2_1+q/2*log(v./(u+1e-300)+1e-300)+log(p1_1+1e-300);
    f=exp(log_p);
    f_J=f_J.*(f+realmin);
    % calcula a probabilidade de transicao da ponte browniana
    Y1_NEWn=(Y1_NEW-Y1_OLD-mu)./(sqrt(Y1_OLD).*sqrt(dj)); % normaliza Y_NEW
    f1=exp(-0.5*Y1_NEWn.^2)./(sqrt(2*pi).*sqrt(Y1_OLD).*sqrt(dj));
    f1_J=f1_J.*(f1+realmin);
    Y1_OLD=Y1_NEW;
 end

m=exp(-K22*d)*(TETA1*K21/K22*(exp(K22*d)-1)-K21/K22*S_I1+Y2(1:N,:));
V=exp(-2*K22*d)/(2*K22)*(exp(2*K22*d)-1+BETA2*S_I2);

if min(V)<=0
    error('Variancia Negativa')
end

% Importance Sampling
w1=f_J./f1_J;
w2=repmat(sum(w1,2),1,Z);
w=w1./(w2+1e-300);

%Y2n=(Y2(2:N+1,:)-m)./(sqrt(Y1_OLD).*sqrt(dj)); % normaliza Y2
Y2n=(Y2(2:N+1,:)-m)./(sqrt(V)); % normaliza Y2
p_Z=exp(-0.5*Y2n.^2)./(sqrt(2*pi).*sqrt(V));
p=p_Z.*w;

pJ(1,1)=normpdf(AY(1,2),0,1/(2*K22));
pJ(2:N+1,1)=sum(p,2);
```

Table 0. Parametros Otimizados

-----	Mean	Std	Teste_t
K11	0.00705111	0.0482194	0.14623
TETA1	87.4039	70.0079	1.24849
K21	-0.0722609	0.0790533	-0.914079
K22	0.117919	0.00578131	20.3966
D0	0.0696636	0.00949839	7.33425
D1	6.72552e-005	6.74303e-005	0.997404
D2	0.00176985	2.8703e-005	61.6609
BETA2	1	0	0
L1	0	0	0
L2	-0.0933507	0.046681	-1.99976

Table 0. Inverso do Hessiano

2.68357e-013	5.06606e-014	4.37429e-013	8.49176e-013	7.04804e-019	2.33606e-014	-2.37325e-014	-6.60704e-013
5.06606e-014	5.84249e-012	4.40396e-012	1.60545e-013	-1.42697e-012	3.84026e-013	-3.83935e-013	-4.44622e-012
4.37429e-013	4.40396e-012	4.48868e-012	1.38618e-012	-1.11401e-	3.37821e-013	-3.37741e-	-4.85317e-

				012		013	012
8.49176e-013	1.60545e-013	1.38618e-012	2.69093e-012	1.4639e-018	7.40271e-014	-7.40096e-014	-2.09369e-012
7.04704e-019	-1.42697e-012	-1.11401e-012	1.46358e-018	4.07486e-012	-9.47091e-014	9.46867e-014	1.11402e-012
2.33606e-014	3.84026e-013	3.37821e-013	7.40271e-014	-9.47091e-014	2.73385e-014	-2.7332e-014	-3.57288e-013
-2.37325e-014	-3.83935e-013	-3.37741e-013	-7.40096e-014	9.46867e-014	-2.7332e-014	2.77027e-014	3.57203e-013
-6.60704e-013	-4.44622e-012	-4.85317e-012	-2.09369e-012	1.11402e-012	-3.57288e-013	3.57203e-013	5.4037e-012

Table 0. Erros de Aprecamento

---	**mean**	**max**	**std**
1y	0.167385	0.836706	0.220498
2y	1.15717e-006	1.08473e-005	2.31342e-006
3y	-0.0842724	0.406974	0.0895413
4y	-0.111804	0.628922	0.135886
5y	-0.121425	0.501107	0.133262
6y	-0.0760468	0.423196	0.118453
7y	-0.0839762	0.338041	0.0948665
10y	1.51994e-007	1.14234e-005	2.00735e-006
15y	0.0269173	0.368711	0.107435
20y	0.0180032	0.574806	0.169373
30y	-0.0766836	0.7304	0.242604

Table 0. Soma dos Quadrados dos Erros

SSE	134.157

Table 0. Funcao Objetivo

Funcao Objetivo	-12.3213

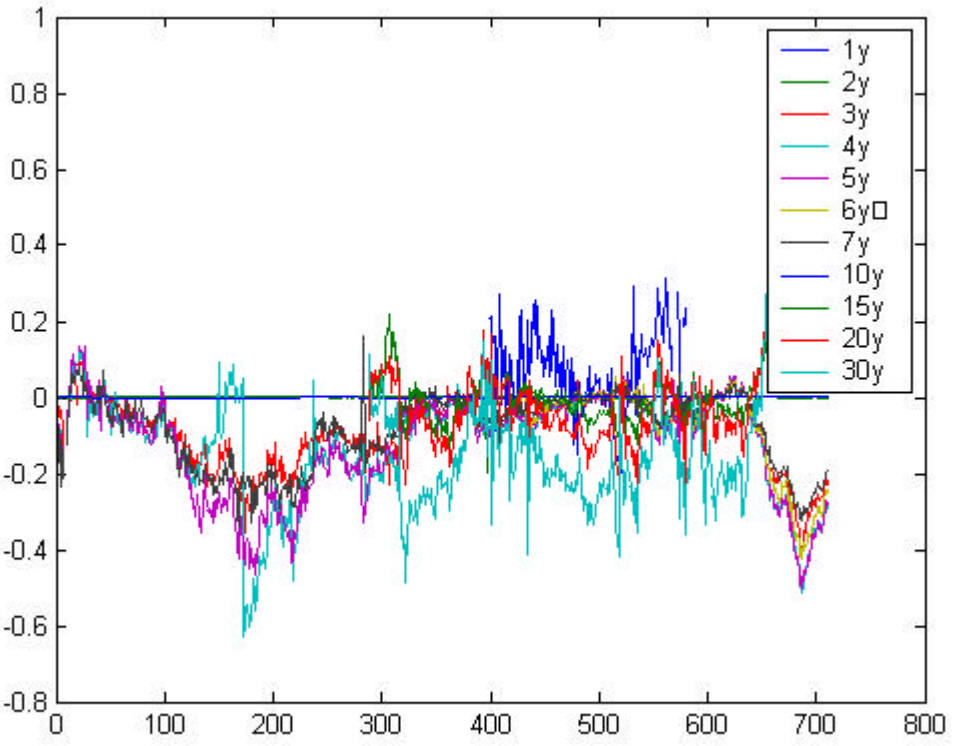
Table 0. Resumo da Otimizacao

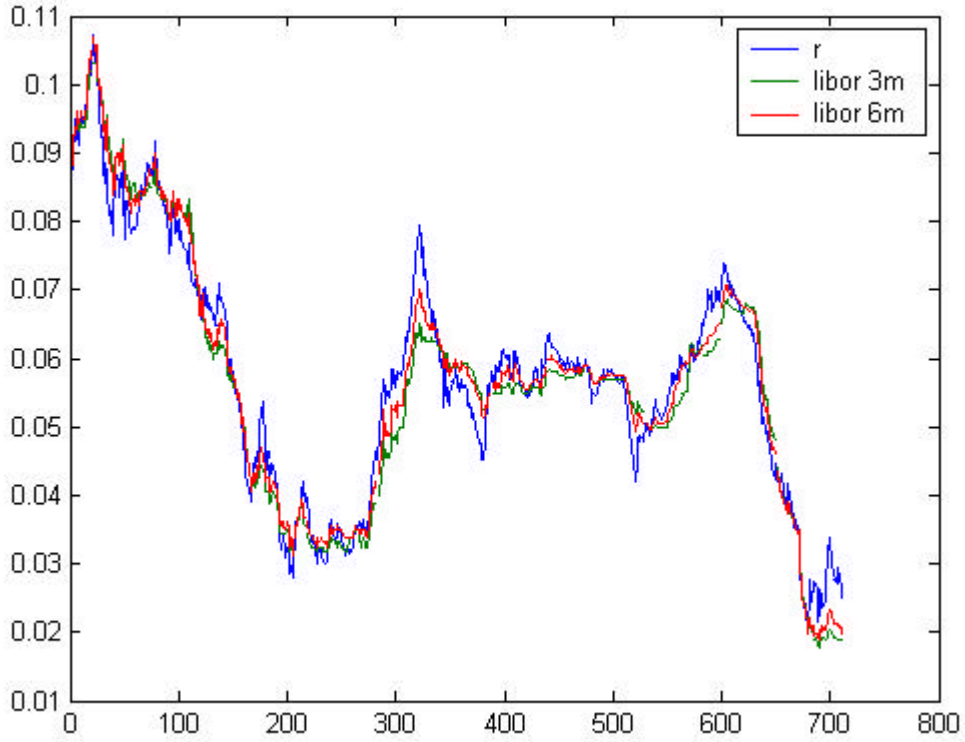
firstorderopt	2.09342e-011
iterations	6
funcCount	7

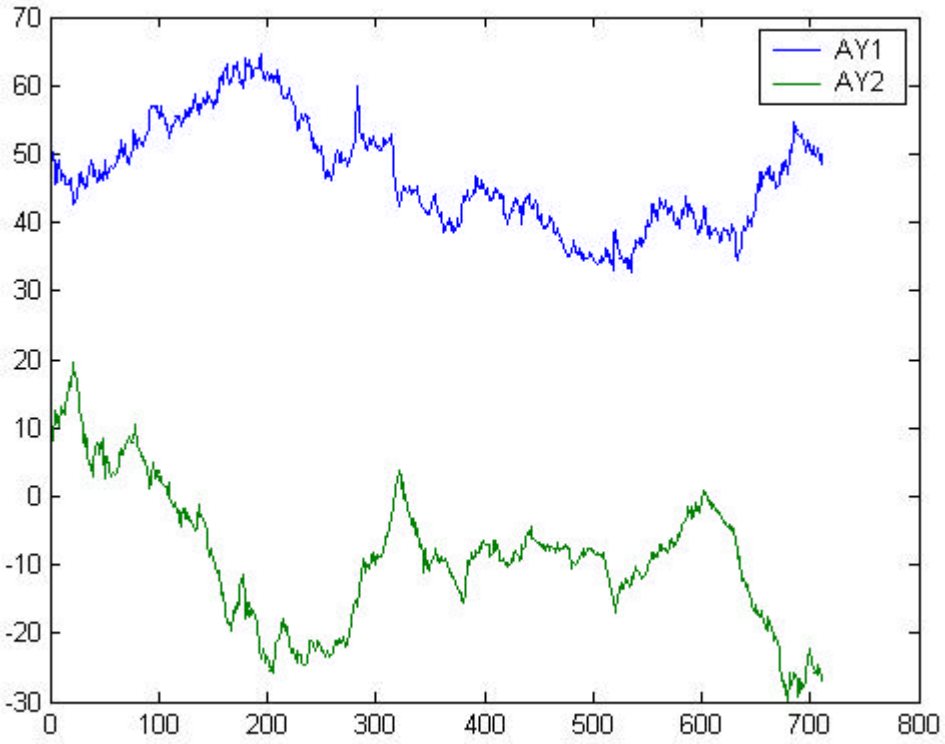
cgiterations	10

Table 0. Erros de Aprecamento Taxas Libor

---	mean	max	std
1m	0.201553	1.93881	0.557334
2m	0.177291	1.71886	0.509108
3m	0.163665	1.53384	0.468145
4m	0.153578	1.38516	0.429338
5m	0.14169	1.31109	0.394403
6m	0.132849	1.24178	0.364804
7m	0.116349	1.16349	0.337482
8m	0.103422	1.08372	0.312823
9m	0.0872026	0.998721	0.291854
10m	0.0663658	0.912248	0.270666
11m	0.0458785	0.838901	0.253301
12m	0.0262701	0.807446	0.240051




r
libor 3m
libor 6m
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
100
200
300
400
500
600
700
800


AY1
AY2
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
100
200
300
400
500
600
700
800

Estimação Modelos de Três Fatores

1) Rotina Principal

```
Estimacao 3 fatores
% prob de default independente dos outros fatores
% Vasicek

clc
clear

load P4
% usar precos dirty
load globals_d
load tc_08


ParDif2(1)=0; % K31
ParDif2(2)=0; % K32
ParDif2(3) =   0.1002; % K33
ParDif2(4) =   1.5188; % U0
ParDif2(5)=0; % U1
ParDif2(6)=0; % U2
ParDif2(7) =   0.4761;
ParDif2(8)=0; % BETA3
ParDif2(9) =  -0.0004; %l3
ParDif2(10)=   0.1; %w

% Esimacao 1: 5 parametros
%        K33       U0          U3        L3
Par_e=[ParDif2(3);ParDif2(4);ParDif2(7);ParDif2(9);ParDif2(10)];

%*****************************************************************
%*****************************************************************
%*********                                  **********
%*********    ESTIMACAO                             **********
%*********                                  **********
%*****************************************************************
%*****************************************************************

% Restricoes:
% Desigualdades Lineares A*x<=b
A=[];
b=[];
% Igualdade Linear Aq*x=bq
Aeq=[0 0 0 0 1];
beq=[ParDif2(10)];
% Limites dos parametros
% !!! Deve ser definidos para todos os parametros
%     K33    U0      U3         L3     w
lb=[+0.5e-1;+0.4e-0;+0.1e-0;-3.5e-0;+0.1e+0];
ub=[+3.0e-1;+2.0e-0;+0.6e-0;-0.0e-0;+0.2e+0];
% restricoes nao lineares
% Default: 'TolX',1e-6,'TolFun',1e-8,'TolCon',1e-6
%          'MaxFunEvals',no. de variaveis * 100
options = optimset('Diagnostics','on','LargeScale','off','Display','iter',...
    'MaxIter',500,'MaxFunEvals',1000,'TolX',1e-5,'TolFun',1e-5,'TolCon',1e-5,...
    'DiffMaxChange',1e-1,'DiffMinChange',1e-6);
[Par_e,fval,exitflag,output,lambda,grad,H] = fmincon(@ml_obj_B,Par_e,A,b,[],[],lb,ub,[],...
    options,ParDif1,globals_d,AY,tc_08);

Likel=fval;

%Likel=feval(@ml_obj_B,Par_e,ParDif1,globals_d,AY,tc_08)
%*****************************************************************
%*****************************************************************
%*********                                  **********
%*********    CALCULO DO ERRO DE APRECAMENTO        **********
%*********                                  **********
%*****************************************************************
%*****************************************************************

K31=0;
K32=0;
K33=Par_e(1);
```

```
u0=Par_e(2);
u1=0;
u2=0;
u3=Par_e(3);
BETA3=0;
L3=Par_e(4);
w=Par_e(5);


K11=ParDif1(1);
TETA1=ParDif1(2);
K21=ParDif1(3);
K22=ParDif1(4);
d0=ParDif1(5);
d1=ParDif1(6);
d2=ParDif1(7);
BETA2=ParDif1(8);
L1=ParDif1(9);
L2=ParDif1(10);

ParDif2=[K31,K32,K33,u0,u1,u2,u3,BETA3,L3,w];

% Calculos dos Coeficientes para os cupons e o valor de face
ti=0;
%tf=(740482-729848)/365; % ate o vcto. do G2027
tf=31; % maturidade do maior titulo
step=1/365;
t_span=ti:step:tf;
% C0 e C1 calculados numericamente
options=odeset('RelTol',1e-4);
[tau,ParRic1]=ode45(@CalcParBOND1,t_span,[0;0;u0;-u1],options,ParDif1,ParDif2);
% C2 e C3 calculados analiticamente
ParRic2=CalcParBOND2(t_span,ParDif1,ParDif2);
ParRic=[ParRic1(:,1:2) ParRic2(:,1:2)  ParRic1(:,3:4) ParRic2(:,3:4)];
clear ParRic1 ParRic2

t=repmat(globals_d(:,1),1,size(tc_08,1));
t1=repmat(tc_08',size(globals_d,1),1);
ind08=(max(t1-t,0)+1);

% Gera matriz com coeficientes C0, C1, C2 e C3
C0=ParRic(ind08); % n de obs x n de cupons
C1=ParRic(ind08+size(ParRic,1));
C2=ParRic(ind08+2*size(ParRic,1));
C3=ParRic(ind08+3*size(ParRic,1));

C0(ind08==1)=nan;
C1(ind08==1)=nan;
C2(ind08==1)=nan;
C3(ind08==1)=nan;

% calculo das interpolacoes das derivadas de C0,C1,C2,C3,Ca0,Ca1,Ca2,Ca3
tau=ind08(:,end);
C(:,1:8)=ParRic(1:tau(1),1:8);

% dC=[dC0 dC1 dC2 dC3 dCa0 dCa1 dCa2 dCa3]
dC(:,1)=-K11*TETA1*C(:,2)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,3)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/...
   (K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,4)+1/2*C...
   (:,3).^2+1/2*C(:,4).^2-d0-u0;
dC(:,2)=(-K11-L1)*C(:,2)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,3)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,4)-1/2*C(:,2).^2-1/2*C(:,3).^2*...
   BETA2-1/2*C(:,4).^2*BETA3+d1+u1;
dC(:,3)=-K22*C(:,3)-K32*C(:,4)+d2+u2;
dC(:,4)=-K33*C(:,4)+u3;
dC(:,5)=-K11*TETA1*C(:,6)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,7)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/...
   (K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,8)+C(:,3).*...
   C(:,7)+C(:,8).*C(:,4);
dC(:,6)=(-K11-L1)*C(:,6)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,7)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,8)-C(:,2).*C(:,6)-C(:,3).*C(:,7)*...
   BETA2-C(:,8).*C(:,4)*BETA3;
dC(:,7)=-K22*C(:,7)-K32*C(:,8);
dC(:,8)=-K33*C(:,8);

AY3=(-0.13*8-C0(:,end)-C1(:,end).*AY(:,2)-C2(:,end).*AY(:,3))./C3(:,end);
```

```
options1=optimset('Display','iter','Jacobian','on','TolFun',1e-8,'MaxIter',2000);   % Option to display output
[AY3,erro,exitflag,output,J]=fsolve(@CalcStateBOND,AY3,options1,...
   globals_d(:,2)/100,AY,C0,C1,C2,C3,dC,C,tau,w);

clear C dC

C(:,1:8)=ParRic(1:end,1:8);

   % dC=[dC0 dC1 dC2 dC3 dCa0 dCa1 dCa2 dCa3]
   dC(:,1)=-K11*TETA1*C(:,2)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,3)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/...
   (K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,4)+1/2*C...
   (:,3).^2+1/2*C(:,4).^2-d0-u0;
   dC(:,2)=(-K11-L1)*C(:,2)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,3)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,4)-1/2*C(:,2).^2-1/2*C(:,3).^2*...
   BETA2-1/2*C(:,4).^2*BETA3+d1+u1;
   dC(:,3)=-K22*C(:,3)-K32*C(:,4)+d2+u2;
   dC(:,4)=-K33*C(:,4)+u3;
   dC(:,5)=-K11*TETA1*C(:,6)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,7)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/...
   (K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,8)+C(:,3).*...
   C(:,7)+C(:,8).*C(:,4);
   dC(:,6)=(-K11-L1)*C(:,6)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,7)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,8)-C(:,2).*C(:,6)-C(:,3).*C(:,7)*...
   BETA2-C(:,8).*C(:,4)*BETA3;
   dC(:,7)=-K22*C(:,7)-K32*C(:,8);
   dC(:,8)=-K33*C(:,8);

Erro=CalcErroBOND(AY,AY3,ParRic,w,C,dC);

%**************************************************************************
%**************************************************************************
%*****   CALCULO DESVIO PADRAO DOS ESTIMADORES        **************
%**************************************************************************
%**************************************************************************

for i=6:6
   for j=1:size(Par_e,1)
      e=zeros(size(Par_e,1),1);
      e(j)=Par_e(j)*10^-i;
      e(j)=min(max(e(j),10^-8),1e-3);
      Par=Par_e+e;
      d_1=feval(@ml_obj_V,Par,ParDif1,globals_d,AY,tc_08);
      Par=Par_e;
      d_2=feval(@ml_obj_V,Par,ParDif1,globals_d,AY,tc_08);
      G(1:220,j)=(d_1-d_2)./(2*e(j));
   end
   Var=inv(G'*G);
   StdDev(i-5,1:j)=(sqrt(diag(Var)))'
end

StdDev=StdDev(end,:)
tt=Par_e./StdDev';


%**************************************************************************
%**************************************************************************
%*****   TABELAS PARA REPORT                        **************
%**************************************************************************
%**************************************************************************
%        K33       U0          U3        L3
tab1={'-----','Mean','Std','Teste_t';
     'K31*   ',K31,0,0;
     'K32*   ',K32,0,0;
     'K33   ',K33,StdDev(1),tt(1);
     'U0    ',u0,StdDev(2),tt(2);
     'U1*    ',u1,0,0;
     'U2*    ',u2,0,0;
     'U3    ',u3,StdDev(3),tt(3);
     'BETA3 ',BETA3,0,0;
     'L3*    ',L3,StdDev(4),tt(4);
     'w      ',w,StdDev(5),tt(5)};

% 'Date' 'G05' 'G06' 'G07' 'G08' 'G09' 'G12' 'G20' 'G24' 'G27' 'G30'
lab2=cellstr(['mean';'max ';'std ']);
lab1=cellstr(['---';'G05';'G06';'G07';'G08';'G09';'G12';'G20';'G24';'G27';'G30']);
```

```
table=cat(2,lab2,num2cell(Erro.stats));
tab2=cat(1,lab1',table);

tab3={'SSE',[Erro.SSR]};

tab4={'Funcao Objetivo',[Likel]};

names=fieldnames(lambda);
j=1;
for i=1:length(names)
   if sum(eval(char(strcat('lambda.',names(i),'~=0'))))
      values=(eval(char(strcat('lambda.',names(i)))))'
      for n=1:length(values)
         disp(n)
         if values(n)~=0
            tab5{j,1}=char(names(i))
            tab5{j,2}=values(n)
            tab5{j,3}=n
            j=j+1
         end
      end
      j=j+1;
   end
end

names=fieldnames(output);
for j=1:length(names)-1
   tab6{j,1}=char(names(j));
   values=(eval(char(strcat('output.',names(j)))));
   tab6{j,2}=values;
end

H1=inv(H);

%****************************************************************
%****************************************************************
%*********                                  **********
%*********    GRAFICOS DOS FATORES              **********
%*********                                  **********
%****************************************************************
%****************************************************************

r=d0+d1*AY(:,2)+d2*AY(:,3);
l=u0+u1*AY(:,2)+u2*AY(:,3)+u3*AY3;



fh = figure('Color','w');
h=plot(Erro.series);
title('Erro de Aprecamento fora da Amostra')
legend('G05','G06','G07','G08','G09','G12','G20','G24','G27','G30')

fh1 = figure('Color','w');
hl1 = line(globals_d(:,1),globals_d(:,2),'Color','r');
ax1 = gca;
set(ax1,'XColor','k','YColor','k')
ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
          'XAxisLocation','bottom',...
          'YAxisLocation','right',...
          'Color','none',...
          'XColor','k','YColor','k');
hl2 = line(globals_d(:,1),r,'Color','b','Parent',ax2);
hl3 = line(globals_d(:,1),l,'Color','g','Parent',ax2);
legend('G08','r','l')

fh2 = figure('Color','w');
hl1 = line(AY(:,1),AY(:,2),'Color','r');
ax1 = gca;
set(ax1,'XColor','k','YColor','k')
ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
          'XAxisLocation','bottom',...
          'YAxisLocation','right',...
          'Color','none',...
          'XColor','k','YColor','k');
hl2 =line(AY(:,1),AY(:,3),'Color','g','Parent',ax2);
h13=line(AY(:,1),AY3,'Color','b','Parent',ax2);
```

```
legend('AY1','AY2','AY3',0)

fh3 = figure('Color','w');
h=plot(ParRic)
legend('CO','C1','C2','C3','Ca0','Ca1','Ca2','Ca3')
```

2) Função a ser Maximizada

```
function o=ml_obj_B(Par_e,ParDif1,globals_d,AY,tc_08)

persistent AY3

disp(Par_e)

K31=0;
K32=0;
K33=Par_e(1);
u0=Par_e(2);
u1=0;
u2=0;
u3=Par_e(3);
BETA3=0;
L3=Par_e(4);
w=Par_e(5);

ParDif2=[K31,K32,K33,u0,u1,u2,u3,BETA3,L3,w];

K11=ParDif1(1);
TETA1=ParDif1(2);
K21=ParDif1(3);
K22=ParDif1(4);
d0=ParDif1(5);
d1=ParDif1(6);
d2=ParDif1(7);
BETA2=ParDif1(8);
L1=ParDif1(9);
L2=ParDif1(10);

n=size(AY,1);

%*************************************************************************
%*************************************************************************
%*********              RESOLUCAO ODE RICCATI              ***********
%*************************************************************************
%*************************************************************************

% Calculos dos Coeficientes para os cupons e o valor de face
ti=0;
%tf=(740482-729848)/365; % ate o vcto. do G2027
tf=31; % maturidade do maior titulo
step=1/365;
t_span=ti:step:tf;

% C0 e C1 calculados numericamente
% Ca0 e Ca1 calculados numericamente
% ParRic1=[C0 C1 Ca0 Ca1]
options=odeset('RelTol',1e-8);
[tau,ParRic1]=ode45(@CalcParBOND1,t_span,[0;0;u0;-u1],options,ParDif1,ParDif2);

% C2 e C3 calculados analiticamente
% ParRic2=[C2 C3 Ca2 Ca3]
ParRic2=CalcParBOND2(t_span,ParDif1,ParDif2);
clear t_span

ParRic=[ParRic1(:,1:2) ParRic2(:,1:2)  ParRic1(:,3:4) ParRic2(:,3:4)];
clear ParRic1 ParRic2

%[x,A]=my_coef([],[],'done');

%*************************************************************************
%*************************************************************************
%*********      EXTRACAO VARIAVEIS DE ESTADO          ***********
%*************************************************************************
%*************************************************************************
```

```
t=repmat(globals_d(:,1),1,size(tc_08,1));
t1=repmat(tc_08',size(globals_d,1),1);
ind08=(max(t1-t,0)+1);
clear t t1

% Gera matriz com coeficientes C0, C1, C2 e C3
C0=ParRic(ind08); % n de obs x n de cupons
C1=ParRic(ind08+size(ParRic,1));
C2=ParRic(ind08+2*size(ParRic,1));
C3=ParRic(ind08+3*size(ParRic,1));

C0(ind08==1)=nan;
C1(ind08==1)=nan;
C2(ind08==1)=nan;
C3(ind08==1)=nan;

% calculo das interpolacoes das derivadas de C0,C1,C2,C3,Ca0,Ca1,Ca2,Ca3
tau=ind08(:,end);
C(:,1:8)=ParRic(1:tau(1),1:8);

% dC=[dC0 dC1 dC2 dC3 dCa0 dCa1 dCa2 dCa3]
dC(:,1)=-K11*TETA1*C(:,2)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,3)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/...
   (K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,4)+1/2*C...
   (:,3).^2+1/2*C(:,4).^2-d0-u0;
dC(:,2)=(-K11-L1)*C(:,2)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,3)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,4)-1/2*C(:,2).^2-1/2*C(:,3).^2*...
   BETA2-1/2*C(:,4).^2*BETA3+d1+u1;
dC(:,3)=-K22*C(:,3)-K32*C(:,4)+d2+u2;
dC(:,4)=-K33*C(:,4)+u3;
dC(:,5)=-K11*TETA1*C(:,6)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,7)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/...
   (K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,8)+C(:,3).*...
   C(:,7)+C(:,8).*C(:,4);
dC(:,6)=(-K11-L1)*C(:,6)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,7)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,8)-C(:,2).*C(:,6)-C(:,3).*C(:,7)*...
   BETA2-C(:,8).*C(:,4)*BETA3;
dC(:,7)=-K22*C(:,7)-K32*C(:,8);
dC(:,8)=-K33*C(:,8);

%Chute inicial da media dos yields do periodo
if isempty(AY3)
   AY3=(-0.2*8-C0(:,end)+C1(:,end).*AY(:,2)+C2(:,end).*AY(:,3))./C3(:,end);
end

options1=optimset('Display','iter','Jacobian','on','TolFun',1e-8,'MaxIter',2000);   % Option to display output
[AY3,erro,exitflag,output,J]=fsolve(@CalcStateBOND,AY3,options1,...
   globals_d(:,2)/100,AY,C0,C1,C2,C3,dC,C,tau,w);

%*************************************************************************
%*************************************************************************
%*********      CALCULO DAS PROBABILIDADES DE TRANSICAO       ***********
%*************************************************************************
%*************************************************************************

PAR=[K11,TETA1,K21,K22,BETA2,K31,K32,K33,BETA3];
AYr=[AY(:,2:end) AY3];
pJ=P_YD(AYr,32,64,PAR);

%*************************************************************************
%*************************************************************************
%*********      CALCULO DA FUNCAO OBJETIVO                ***********
%*************************************************************************
%*************************************************************************
j=full(diag(J));
o=-(1/(n-1))*(sum(log(pJ+realmin))-sum(log(abs(j)+realmin)));
```

3) Resolução ODE

```
function dy=CalcParBOND1(t,y,ParDif,ParDif_1)
% Calcula Parametros para Affine Term Structures
% P(t,T)=exp(A(T)+B(T)'*x(t))
% argumentos: t:  maturidades
%             y: valores iniciais de A e B k+1 x 1 (k fatores)
%             ParIn: parametros da difusao
```

```
%

K11=ParDif(1);
TETA1=ParDif(2);
K21=ParDif(3);
K22=ParDif(4);
d0=ParDif(5);
d1=ParDif(6);
d2=ParDif(7);
BETA2=ParDif(8);
L1=ParDif(9);
L2=ParDif(10);

K31=ParDif_1(1);
K32=ParDif_1(2);
K33=ParDif_1(3);
u0=ParDif_1(4);
u1=ParDif_1(5);
u2=ParDif_1(6);
u3=ParDif_1(7);
BETA3=ParDif_1(8);
L3=ParDif_1(9);

C2=-1/K33*K32*u3/K22+1/K33*K32*u3/(K22-K33)*exp(-K22*t+t*(K22-K33))+d2/K22+u2/K22-exp(-K22*t)*(...
   K32*u3+d2*K22-d2*K33+u2*K22-u2*K33)/K22/(K22-K33);
C3=u3/K33-exp(-K33*t)*u3/K33;

Ca2=K32*u3/(K22-K33)*exp(-K22*t+t*(K22-K33))-exp(-K22*t)*(K32*u3+u2*K22-u2*K33)/(K22-K33);
Ca3=-u3*exp(-K33*t);

dy = zeros(4,1);    % a column vector
dy(1)=-K11*TETA1*y(2)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/...
   K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C2+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*...
   K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/(K11+L1)/K22/...
   K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C3+1/2*C2^2+1/2*C3^2-d0-u0;
dy(2)=(-K11-L1)*y(2)+(-K21-L2*BETA2)*C2+(-K31-L3*BETA3)*C3-1/2*y(2)^2-1/2*C2^2*BETA2-1/2*C3^2*BETA3+d1+u1;
%%% Os parametros dAa e dCa
dy(3)=-K11*TETA1*y(4)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/...
   K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*Ca2+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*...
   K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/(K11+L1)/K22/...
   K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*Ca3+C2*Ca2+Ca3*C3;
dy(4)=(-K11-L1)*y(4)+(-K21-L2*BETA2)*Ca2+(-K31-L3*BETA3)*Ca3-y(2)*y(4)-C2*Ca2*BETA2-Ca3*C3*BETA3;
```

4) Inversão da Função de Apreçamento

```
function [F,J]=CalcStateBOND(AY3,c,AY,C0,C1,C2,C3,dC,C,tau,w)
% Extrai os fatores de um titulo que paga cupons
% P=sum(c*exp(A+B'*AY)

AYn=[AY(:,2:3) AY3];
n=size(AY,1); % numero de obs
%t_span=repmat(((1:tau(1)-1)/365)',1,n);

% gera matrize cm as variaveis de estado AY1 AY2 e AY3
AY1ex=repmat(AYn(:,1),1,size(C1,2)); % volatilidade
AY2ex=repmat(AYn(:,2),1,size(C2,2)); % taxa de juros curto prazo
AY3ex=repmat(AYn(:,3),1,size(C3,2)); % probabilidade de default

[I,I1]=CalcInt(C,dC,AYn,tau);

B1=exp(C0-C1.*AY1ex-C2.*AY2ex-C3.*AY3ex);
B1(isnan(B1))=0;
B2=-C3.*B1;
B2(isnan(B2))=0;
P1=sum(0.09375/2*B1,2)+exp(C0(:,end)-C1(:,end).*AYn(:,1)-C2(:,end).*AYn(:,2)-C3(:,end).*AYn(:,3))+w*I;

F=P1-c;

if nargout > 1
   % (1 => n)     x (1 => n)     Jacobiano Equacao 1 em relacao ao fator 1
   % derivada equacao 1 em relacao a fator 1
   j1=sum(0.09375/2.*B2,2)-C3(:,end).*exp(C0(:,end)-C1(:,end).*AYn(:,1)-C2(:,end).*AYn(:,2)-C3(:,end).*AYn(:,3))+w*I1;
   J=sparse((1:n),(1:n),j1,n,n);
End
```

5) Calculo Probabilidade

```
function pJ=P_YD(AYr,J,Z,PAR)
% Probabilidade P(Y2(i)|Y1(i),[Y1(i-1),Y2(i-1)])
% AY vetor com obs das variaveis de estado
% J: numero de subibtervalos
% Z: numero de simulacoes independentes


rand('state',123456)

K11=PAR(1);
TETA1=PAR(2);
K21=PAR(3);
K22=PAR(4);
BETA2=PAR(5);
K31=PAR(6);
K32=PAR(7);
K33=PAR(8);
BETA3=PAR(9);

Kdd=[K22,0;
    K32,K33];
Kdi=[K21;K31];
Kd=[K21*TETA1;K31*TETA1];

% variaveis auxiliares
%aux1=1/K33*(-K31*K22+K32*K21+K31*K33)/(-K33+K22);
%aux2=K32*K21/K22/(-K33+K22);


N=size(AYr,1)-1; % numero de subintervalos
Y1=AYr(1:N+1,1);
Y2=repmat(AYr(1:N+1,2),1,Z);
Y3=repmat(AYr(1:N+1,3),1,Z);

Y1_END=repmat(Y1(2:N+1),1,Z); % NxZ
Y1_OLD=repmat(Y1(1:N),1,Z); % inicializa Y simulado com obs. NxZ

d=1/52; % intervalo em anos entre duas observacoes
dj=d/J; % subintervalo (em anos) entre das discretizacoes

% Inicia variaveios auxiliares
%f_J=ones(N,Z); % Probabilidade Real de Y1 simulado J
%f1_J=ones(N,Z); % Probabilidade Estimada de Y1 simulado J
m3=zeros(N,Z,2); % para 2 fatores em YD
v1=zeros(N,Z,4); % para 2 fatores em YD


for j=1:J
   % no primeiro subintervalo tj=t_inicial
   % tj E [0,d]
   tj=dj*(j-1);
   % Simulacao de Y1 atraves de ponte browniana
   % Y1(j+1)=Y1(j)+mu(Y1(j),tj)*tj+sigma(Y1(j))*tj^.5*dW
   dW=randn(N,Z/2);
   dW=sqrt(dj)*[dW -dW]; %
   % drift da ponte browniana
   mu=dj*(Y1_END-Y1_OLD)./(d-tj); % N x Z
   if j<J
    % testar se alteracao correta!!!!
    %  mu=dj*(Y1_END-Y1_OLD)./(d-tj);
     Y1_NEW=Y1_OLD+mu+sqrt(Y1_OLD).*dW;  % N x Z
   else
     Y1_NEW=Y1_END;
   end
   % Interpolacao Linear entre dois pontos de simulacao
   alfa=(Y1_NEW-Y1_OLD)/dj; % N x Z
  % I1=alfa.*(exp(K22*(tj+dj)).*(-1/K22+dj)-exp(K22*tj).*(-1/K22))...
  %     +Y1_OLD.*(exp(K22*(tj+dj))-exp(K22*tj));
   I1(:,:,1)=K21*(-exp(tj*K22)*K22+exp((tj+dj)*K22)*K22)/K22^2*Y1_OLD+K21*(-exp((tj+dj)*K22)+...
       exp(tj*K22)+exp((tj+dj)*K22)*K22*dj)/K22^2*alfa;
   I1(:,:,2)=-(K32*K21*exp((tj+dj)*K33)*K33*K22^2-K32*K21*exp((tj+dj)*K22)*K33^2*K22+K31*exp((tj+dj)*...
       K33)*K33^2*K22^2-K31*exp((tj+dj)*K33)*K33*K22^3-K32*K21*exp(tj*K33)*K33*K22^2+K32*K21*...
       exp(tj*K22)*K33^2*K22-K31*exp(tj*K33)*K33^2*K22^2+K31*exp(tj*K33)*K33*K22^3)/(-K33+K22)/...
```

```
      K33^2/K22^2.*Y1_OLD-(K32*K21*exp((tj+dj)*K33)*K22^2*K33*dj-K32*K21*exp((tj+dj)*K33)*K22^2-...
      K32*K21*exp((tj+dj)*K22)*K33^2*K22*dj+K32*K21*exp((tj+dj)*K22)*K33^2+K31*exp((tj+dj)*K33)*...
      K22^2*K33^2*dj-K31*exp((tj+dj)*K33)*K22^3*K33*dj-K31*exp((tj+dj)*K33)*K22^2*K33+K31*exp(...
      (tj+dj)*K33)*K22^3+K32*K21*exp(tj*K33)*K22^2-K32*K21*exp(tj*K22)*K33^2+K31*exp(tj*K33)*...
      K22^2*K33-K31*exp(tj*K33)*K22^3)/(-K33+K22)/K33^2/K22^2.*alfa;
%   I2=alfa.*(dj*exp(2*K22*(tj+dj))-exp(2*K22*(tj+dj))/(2*K22)+exp(2*K22*tj)/(2*K22))...
%       +Y1_OLD.*(exp(2*K22*(tj+dj))-exp(2*K22*tj));
   I2(:,:,1)=1/4*(-2*exp(tj*K22)^2*BETA2*K22+2*exp((tj+dj)*K22)^2*BETA2*K22)/K22^2*Y1_OLD+1/4*(2*...
      exp((tj+dj)*K22)^2*BETA2*K22*dj+exp(tj*K22)^2*BETA2-exp((tj+dj)*K22)^2*BETA2)/K22^2*alfa...
      +1/4*(2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22-2*exp(tj*K22)^2*K22)/K22^2;
   I2(:,:,3)=-1/4*K32*(-4*exp((tj+dj)*K22)*exp((tj+dj)*K33)*K22^3*BETA2+4*exp(tj*K22)*exp(tj*K33)*...
      K22^3*BETA2-4*K33*exp(tj*K22)^2*K22^2*BETA2-2*exp(tj*K22)^2*K22^3*BETA2+4*K33*exp((tj+dj)*K22...
      )^2*K22^2*BETA2+2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22^3*BETA2-4*exp((tj+dj)*K22)*K33*exp((tj+dj)*K33)*...
      K22^2*BETA2-2*K33^2*exp(tj*K22)^2*K22*BETA2+4*exp(tj*K22)*K33*exp(tj*K33)*K22^2*BETA2+2*...
      K33^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22*BETA2)/(K33^3+K22*K33^2-K33*K22^2-K22^3)/K22^2*Y1_OLD-1/4*K32*(...
      2*K33*exp(tj*K22)^2*BETA2*K22+2*K33^2*BETA2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22*dj+4*exp((tj+dj)*K22)*exp(...
      (tj+dj)*K33)*K22^2*BETA2+2*BETA2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22^3*dj+exp(tj*K22)^2*BETA2*K22^2-2*K33*...
      exp((tj+dj)*K22)^2*BETA2*K22+4*K33*BETA2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22^2*dj-exp((tj+dj)*K22)^2*BETA2*...
      K22^2-4*exp((tj+dj)*K22)*K33*BETA2*exp((tj+dj)*K33)*K22^2*dj-4*exp((tj+dj)*K22)*BETA2*exp((tj+...
      dj)*K33)*K22^3*dj+K33^2*exp(tj*K22)^2*BETA2-K33^2*exp((tj+dj)*K22)^2*BETA2-4*exp(tj*K22)*exp(...
      tj*K33)*K22^2*BETA2)/(K33^3+K22*K33^2-K33*K22^2-K22^3)/K22^2*alfa-1/4*K32*(4*K33*exp((tj+dj)*...
      K22)^2*K22^2+2*K33^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22+4*exp(tj*K22)*exp(tj*K33)*K22^3-2*K33^2*exp(tj*K22...
      )^2*K22-4*exp((tj+dj)*K22)*exp((tj+dj)*K33)*K22^3+2*exp((tj+dj)*K22)^2*K22^3+4*exp(tj*K22)*...
      K33*exp(tj*K33)*K22^2-2*exp(tj*K22)^2*K22^3-4*exp((tj+dj)*K22)*K33*exp((tj+dj)*K33)*K22^2-4*...
      K33*exp(tj*K22)^2*K22^2)/(K33^3+K22*K33^2-K33*K22^2-K22^3)/K22^2;
   I2(:,:,2)=I2(:,:,3);
   I2(:,:,4)=1/4*(2*K22^2*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^3*K32^2*BETA2-2*K22^6*exp(tj*K33)^2*BETA3*K33-
4*K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*BETA3*K33^3+2*K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*K33*K32^2*BETA2-
2*K22*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^4*BETA2+4*K22^3*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^2*K32^2*BETA2-
2*K22^2*exp(tj*K33)^2*K33^3*K32^2*BETA2-
4*K22^2*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^3*BETA2+2*K22^2*exp((tj+dj)*K33)^2*BETA3*K33^5+2*K22^3*K32^2*exp((tj+dj)*K
22)^2*K33^2*BETA2+2*K22^6*exp((tj+dj)*K33)^2*BETA3*K33+2*K22*K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^4*BETA2-
4*K22^3*exp(tj*K33)^2*K33^2*K32^2*BETA2+4*K22^2*K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^3*BETA2-
2*K22^4*exp(tj*K33)^2*K33*K32^2*BETA2-2*K22^2*exp(tj*K33)^2*BETA3*K33^5-
2*K22^3*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^2*BETA2+4*K22^4*exp(tj*K33)^2*BETA3*K33^3+8*K22^3*K32^2*exp(tj*K33)*exp(tj
*K22)*K33^2*BETA2+8*K22^2*K32^2*exp(tj*K33)*exp(tj*K22)*K33^3*BETA2-
8*K22^3*K32^2*exp((tj+dj)*K33)*exp((tj+dj)*K22)*K33^2*BETA2-
8*K22^2*K32^2*exp((tj+dj)*K33)*exp((tj+dj)*K22)*K33^3*BETA2)/(K22^3+K33*K22^2-K22*K33^2-K33^3)/K22^2/K33^2/(-
K33+K22)*Y1_OLD+1/4*(K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^4*BETA2-
2*K22^4*exp(tj*K33)^2*BETA3*K33^2+K22^2*exp(tj*K33)^2*BETA3*K33^4+K22^4*exp(tj*K33)^2*K32^2*BETA2-
K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^4*BETA2+2*K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*BETA3*K33^2-
K22^2*exp((tj+dj)*K33)^2*BETA3*K33^4-K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*K32^2*BETA2+K22^6*exp(tj*K33)^2*BETA3-
K22^6*exp((tj+dj)*K33)^2*BETA3+2*K22*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^3*BETA2+2*K22^3*exp(tj*K33)^2*K32^2*BETA2*K
33-
8*K22^2*K32^2*exp(tj*K33)*exp(tj*K22)*K33^2*BETA2+K22^2*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^2*BETA2+K22^2*exp(tj*K33)
^2*K32^2*BETA2*K33^2+2*K22^6*exp((tj+dj)*K33)^2*K33*BETA3*dj+4*K22^2*K32^2*BETA2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^
3*dj-
8*K22^2*K32^2*BETA2*exp((tj+dj)*K33)*exp((tj+dj)*K22)*K33^3*dj+2*K22*K32^2*BETA2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^4*dj
+2*K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*K33*K32^2*BETA2*dj+8*K22^2*K32^2*exp((tj+dj)*K33)*exp((tj+dj)*K22)*K33^2*BETA2+2
*K22^3*K32^2*BETA2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^2*dj+4*K22^3*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^2*K32^2*BETA2*dj-
4*K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^3*BETA3*dj-
2*K22^3*exp((tj+dj)*K33)^2*K32^2*BETA2*K33+2*K22^2*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^3*K32^2*BETA2*dj+2*K22^2*exp((tj+
dj)*K33)^2*K33^5*BETA3*dj-8*K22^3*K32^2*BETA2*exp((tj+dj)*K33)*exp((tj+dj)*K22)*K33^2*dj-
K22^2*K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^2*BETA2-K22^2*exp((tj+dj)*K33)^2*K32^2*BETA2*K33^2-
2*K22*K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^3*BETA2)/(K22^3+K33*K22^2-K22*K33^2-K33^3)/K22^2/K33^2/(-
K33+K22)*alfa+1/4*(2*K22^2*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^5-
4*K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^3+4*K22^4*exp(tj*K33)^2*K33^3-
2*K22^2*exp(tj*K33)^2*K33^5+2*K22^6*exp((tj+dj)*K33)^2*K33-
2*K22^6*exp(tj*K33)^2*K33+4*K22^3*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^2*K32^2-
4*K22^3*exp(tj*K33)^2*K33^2*K32^2+8*K22^2*K32^2*exp(tj*K33)*exp(tj*K22)*K33^3+2*K22*K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2
*K33^4+2*K22^3*K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^2+2*K22^4*exp((tj+dj)*K33)^2*K33*K32^2-
2*K22^2*exp(tj*K33)^2*K33^3*K32^2+4*K22^2*K32^2*exp((tj+dj)*K22)^2*K33^3+8*K22^3*K32^2*exp(tj*K33)*exp(tj*K2
2)*K33^2-8*K22^3*K32^2*exp((tj+dj)*K33)*exp((tj+dj)*K22)*K33^2-2*K22^3*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^2-
2*K22^4*exp(tj*K33)^2*K33*K32^2-4*K22^2*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^3+2*K22^2*exp((tj+dj)*K33)^2*K33^3*K32^2-
8*K22^2*K32^2*exp((tj+dj)*K33)*exp((tj+dj)*K22)*K33^3-2*K22*K32^2*exp(tj*K22)^2*K33^4)/(K22^3+K33*K22^2-
K22*K33^2-K33^3)/K22^2/K33^2/(-K33+K22);
   m3=m3+I1;
   v1=v1+I2;

   % calcula a probabilidade de transicao real do fator 1
%   c=(2*K11)./(1-exp(-K11*dj)); % 1 x 1
%   q=(2*K11*TETA1)-1; %1x1
%   u=c.*abs(Y1_OLD.*exp(-K11.*dj)); % N x Z
%   v=c.*abs(Y1_NEW); % N x Z
%   Zb=2*sqrt(u).*sqrt(v);
 %  [p1_1,ierr]=besseli(q,Zb,1);
```

```
 %  p2_1=-u-v+Zb;
 %  log_p=log(c)+p2_1+q/2*log(v./(u+1e-300)+1e-300)+log(p1_1+realmin);
 %  f=exp(log_p);
  % f_J=f_J.*(f+realmin);

   % calcula a probabilidade de transicao da ponte browniana para fator 1
 %  Y1_NEWn=(Y1_NEW-Y1_OLD+mu)./(sqrt(Y1_OLD).*sqrt(dj)); % normaliza Y_NEW
 %  f1=exp(-0.5*Y1_NEWn.^2)./(sqrt(2*pi).*sqrt(Y1_OLD).*sqrt(dj));
 %  f1_J=f1_J.*(f1+realmin);

   Y1_OLD=Y1_NEW;
end

% Calcula a probabilidade doa 2. e 3. fatores
% Normal multivariada
% m: vetor 2 x 1
% V:  matriz 2 x 2
%                1           -0.5*0((x-m)'*inv(V)*(x-m))
% f(x)=-----------------------*e
%       sqrt((2*pi)^N*(det(V))

%m=exp(-K22*d)*(TETA1*K21/K22*(exp(K22*d)-1)-K21/K22*S_I1+Y2(1:N,:));
m2(1)=K21*TETA1*(exp(d*K22)-1)/K22;
m2(2)=TETA1*(-K32*K21*exp(d*K33)*K22+K32*K21*exp(d*K22)*K33-K31*exp(d*K33)*K22*K33+K31*exp(d*K33...
   )*K22^2+K32*K21*K22-K32*K21*K33+K31*K22*K33-K31*K22^2)/(-K33+K22)/K33/K22;

m(:,:,1)=exp(-d*K22)*(Y2(1:N,:)+m2(1)-m3(:,:,1));
m(:,:,2)=K32*(-exp(-d*K33)+exp(-d*K22))/(-K33+K22)*(Y2(1:N,:)+m2(1)-m3(:,:,1))+...
   exp(-d*K33)*(Y3(1:N,:)+m2(2)-m3(:,:,2));

%V=exp(-2*K22*d)/(2*K22)*(exp(2*K22*d)-1+BETA2*S_I2);
V(:,:,1)=exp(-d*K22)^2*v1(:,:,1);
V(:,:,2)=(K32*(-exp(-d*K33)+exp(-d*K22))/(-K33+K22)*v1(:,:,1)+exp(-d*K33)*v1(:,:,2))*exp(-d*K22);
V(:,:,3)=V(:,:,2);
V(:,:,4)=(K32*(-exp(-d*K33)+exp(-d*K22))/(-K33+K22)*v1(:,:,1)+exp(-d*K33)*v1(:,:,2))*K32*...
   (-exp(-d*K33)+exp(-d*K22))/(-K33+K22)+(K32*(-exp(-d*K33)+exp(-d*K22))/(-K33+K22)*v1(:,:,3)...
   +exp(-d*K33)*v1(:,:,4))*exp(-d*K33);

% Y2: N x Z
% V: 2 x 2
%Y2n=([Y2(2:N+1,:);Y3(2:N+1,:)]-m)'*inv(V)*([Y2(2:N+1,:);Y3(2:N+1,:)]-m); % normaliza Y2

%Y2n=((Y2(2:N+1,:)-m(:,:,1)).*V(:,:,4)./(V(:,:,1).*V(:,:,4)-V(:,:,3).*V(:,:,2))-(Y3(2:N+1,:)-m(:,:,2)).*...
%    V(:,:,2)./(V(:,:,1).*V(:,:,4)-V(:,:,3).*V(:,:,2))).*(Y2(2:N+1,:)-m(:,:,1))+(-(Y2(2:N+1,:)-m(:,:,1)).*...
%    V(:,:,3)./(V(:,:,1).*V(:,:,4)-V(:,:,3).*V(:,:,2))+(Y3(2:N+1,:)-m(:,:,2)).*V(:,:,1)./(V(:,:,1).*V(:,:,4)...
%    -V(:,:,3).*V(:,:,2))).*(Y3(2:N+1,:)-m(:,:,2));
%dV=V(:,:,1).*V(:,:,4)-V(:,:,3).*V(:,:,2);
%p_Z=exp(-0.5*Y2n)./(sqrt(((2*pi)^2)*dV));

% alterando para prob condicional Y3 dado Y2
% Y3|Y2 ~ N(mu32,sigma332)
% onde
%           V32
% mu3,2=m_Y3+----(Y2-m_Y2)
%           V22
%               V32
%sigma33,2=V_33 - ----*V23
%               V22

mu32=m(:,:,2)+V(:,:,2)./V(:,:,1).*(Y2(1:N,:)-m(:,:,1));
S32=V(:,:,4)-V(:,:,2)./V(:,:,1).*V(:,:,3);
Y3n=(Y3(2:N+1,:)-mu32)./(sqrt(S32)); % normaliza Y_NEW
p_Z=exp(-0.5*Y3n.^2)./(sqrt(2*pi).*sqrt(S32));



if min(V)<=0
   error('Variancia Negativa')
end

% Importance Sampling
%w1=f_J./(f1_J+realmin);
%w2=repmat(sum(w1,2),1,Z);
%w=w1./(w2+realmin);
```

```
%p=p_Z.*w;
%pJ=sum(p,2);

Y3_1n=(AYr(1,3)-0)./sqrt((1+TETA1*BETA3)/(2*K33)); % normaliza Y_NEW
pJ(1,1)=exp(-0.5*Y3_1n.^2)./(sqrt(2*pi).*sqrt((1+TETA1*BETA3)/(2*K33)));
pJ(2:N+1,1)=sum(p_Z/Z,2);
```

6) Cálcuco do Erro de Apreçamento

```
function Erro=CalcErroBOND(AY,AY3,ParRic,w,C,dC)

% 'Date' 'G05' 'G06' 'G07' 'G08' 'G09' 'G12' 'G20' 'G24' 'G27' 'G30'
%         1    2    3    4    5    6    7    8    9    10

c=[0   10.2500   11.2500    9.3750   14.5000   11.0000   12.7500    8.8750   10.1250   12.2500];
n_c=[0 10 14 20 20 20 40 46 60 60];

% Calculo de Erro de Aprecamento
load G_ALLd
load tc
load d_e

% Primeira linha e data de emissao
%tc=tc(2;end,:);
% Para Global 2006

AY=[AY AY3];

% incia na data de eimssao do titulo ou inicio dos dados
for n=2:10
   t_i=min(G_ALLd(~isnan(G_ALLd(:,n+1))));
   ix1=find(AY(:,1)>=t_i&AY(:,1)<=G_ALLd(end,1));
   ix2=find(G_ALLd(:,1)>=t_i&G_ALLd(:,1)>=AY(1,1));
   AYn=AY(ix1,:);
   t=repmat(AYn(:,1),1,n_c(n));
   t1=repmat(tc(2:n_c(n)+1,n)',size(AYn,1),1);
   ind=(max(t1-t,0)+1);

   % Gera matriz com coeficientes C0, C1, C2 e C3
   C0=ParRic(ind); % n de obs x n de cupons
   C1=ParRic(ind+size(ParRic,1));
   C2=ParRic(ind+2*size(ParRic,1));
   C3=ParRic(ind+3*size(ParRic,1));


   [I,I1]=CalcInt(C,dC,AYn(:,2:end),ind(:,end)');

   C0(ind==1)=nan;
   C1(ind==1)=nan;
   C2(ind==1)=nan;
   C3(ind==1)=nan;


   % gera matrize cm as variaveis de estado AY1 AY2 e AY3
   AY1ex=repmat(AYn(:,2),1,size(ind,2)); % volatilidade
   AY2ex=repmat(AYn(:,3),1,size(ind,2)); % taxa de juros curto prazo
   AY3ex=repmat(AYn(:,4),1,size(ind,2)); % probabilidade de default
   B1=exp(C0-C1.*AY1ex-C2.*AY2ex-C3.*AY3ex);
   B1(isnan(B1))=0;
   P1(ix1,n)=sum(c(n)/200*B1,2)+exp(C0(:,end)-C1(:,end).*AYn(:,2)-C2(:,end).*AYn(:,3)-C3(:,end).*AYn(:,4))+w*I;
   P_real(ix1,n)=G_ALLd(ix2,n+1);
   clear C0 C1 C2 C3
end
   P_real(P_real==0)=nan;
   Erro.series=zeros(220,10);
   Erro.series=P1*100-P_real; % em percentagem
   Erro.stats(1,:)=nanmean(Erro.series);
   Erro.stats(2,:)=nanmax(abs(Erro.series));
   Erro.stats(3,:)=nanstd(Erro.series);
   Erro.SSR=nansum(nansum(Erro.series.^2));
```

7) Cálculo da Integral

```
function [S,S1]=CalcInt(C,dC,AYn,tau)
```

```
tau=tau-1;

dj=1/365;

Ia=0;
I1a=0;
S=[];
S1=[];


for d=1:size(C,1)-1
   alfa=C(d,1)-C(d,2:4)*AYn'; % matriz 1 x N
   beta=dC(d,1)-dC(d,2:4)*AYn'; % matriz 1 xN
   alfa1=C(d,5)-C(d,6:8)*AYn';% matriz 1 x N
   beta1=dC(d,5)-dC(d,6:8)*AYn'; %matriz 1x N
   I=1./beta.*(exp(alfa+beta.*1/365).*(alfa1+beta1.*1/365-beta1./beta)+exp(alfa).*(-alfa1+beta1./beta));
   I1=(C(d,4).*beta.*(-alfa1.*beta+beta1)+dC(d,4).*(alfa1.*beta-2*beta1))./beta.^3.*exp(alfa)+...
   exp(alfa+beta.*dj).*(C(d,4).*beta.*(beta.*(alfa1+beta1.*dj)-beta1)+dC(d,4).*(beta.*(beta.*...
   (alfa1.*dj+beta1*(dj^2))-alfa1-2*beta1*dj)+2*beta1))./beta.^3;
   I2=exp(alfa+beta*dj).*(C(d,8)+dC(d,8).*(dj-1./beta))./beta+(exp(alfa).*(dC(d,8)-C(d,8).*beta))./beta.^2;
   Ia=Ia+I;
   I1a=I1a-I1-I2;
   ind=find(tau==d);
   if ~isempty(ind)
      S(ind)=Ia(ind);
      S1(ind)=I1a(ind);
   end
end

S=S';
S1=S1';
```

Estimação Modelo de 4 Fatores

Função Verossimilhança

```
function o=ml_obj_B(Par_e,ParDif1,globals_d,AY,tc_08)

clc
clear
AY2=[];
load ParDif1
% usar precos dirty
load globals_d
load tc_08
load tc_27
load AY

Par_e(1) =   0.233; % K33
Par_e(2) =   0.0978; % U0
Par_e(3) =   0.046; % u3
Par_e(4) =  -0.1945; %l3
Par_e(5) = -0.988; % v0
Par_e(6) =  0.1023; % v4
Par_e(7) =  0.0279; %v7
Par_e(8) =  -0.0;

K31=0;
K32=0;
K33=Par_e(1);
u0=Par_e(2);
u1=0;
u2=0;
u3=Par_e(3);
BETA3=0;
L3=Par_e(4);

ParDif2=[K31,K32,K33,u0,u1,u2,u3,BETA3,L3];

v0=Par_e(5);
v1=0;
v2=0;
v3=-0.1;
v4=Par_e(6);
K41=0;
K42=0;
K43=0;
K44=Par_e(7);
BETA4=0;
L4=Par_e(8);

ParDif3=[K41,K42,K43,K44,v0,v1,v2,v3,v4,BETA4,L4];

K11=ParDif1(1);
TETA1=ParDif1(2);
K21=ParDif1(3);
K22=ParDif1(4);
d0=ParDif1(5);
d1=ParDif1(6);
d2=ParDif1(7);
BETA2=ParDif1(8);
L1=ParDif1(9);
L2=ParDif1(10);

n=size(AY,1);

%************************************************************************
%************************************************************************
%*********            RESOLUCAO ODE RICCATI            ***********
%************************************************************************
%************************************************************************

% Calculos dos Coeficientes para os cupons e o valor de face
```

```
ti=0;
%tf=(740482-729848)/365; % ate o vcto. do G2027
tf=31; % maturidade do maior titulo
step=1/365;
t_span=ti:step:tf;

% C0 e C1 calculados numericamente
% Ca0 e Ca1 calculados numericamente
% ParRic1=[C0 C1 Ca0 Ca1 Cb0 Cb1 Cb2]
options=odeset('RelTol',1e-8);
[tau,ParRic1]=ode45(@CalcParBOND1,t_span,[0;0;u0;-u1;v0;-v1;-v2],options,ParDif1,ParDif2,ParDif3);

% C2 e C3 calculados analiticamente
% ParRic2=[C2 C3 Ca2 Ca3 Cb3 Cb4]
ParRic2=CalcParBOND2(t_span,ParDif1,ParDif2,ParDif3);
clear t_span

% C0 C1 C2 C3 Ca0 Ca1 Ca2 Ca3 Cb0 Cb1 Cb2 Cb3 Cb4
ParRic=[ParRic1(:,1:2) ParRic2(:,1:2)  ParRic1(:,3:4) ParRic2(:,3:4) ParRic1(:,5:7) ParRic2(:,5:6)];
clear ParRic1 ParRic2

%[x,A]=my_coef([],[],'done');

%*************************************************************************
%*************************************************************************
%*********      EXTRACAO VARIAVEIS DE ESTADO              ***********
%*************************************************************************
%*************************************************************************

% cria indices para Global 2008
t=repmat(globals_d(:,1),1,size(tc_08,1));
t1=repmat(tc_08',size(globals_d,1),1);
ind08=(max(t1-t,0)+1);
clear t t1

% cria indices para Global 2027
t=repmat(globals_d(:,1),1,size(tc_27,1));
t1=repmat(tc_27',size(globals_d,1),1);
ind27=(max(t1-t,0)+1);
clear t t1

% Gera matriz com coeficientes C0, C1, C2 e C3 para G08
C0_1=ParRic(ind08); % n de obs x n de cupons
C1_1=ParRic(ind08+size(ParRic,1));
C2_1=ParRic(ind08+2*size(ParRic,1));
C3_1=ParRic(ind08+3*size(ParRic,1));

C0_1(ind08==1)=nan;
C1_1(ind08==1)=nan;
C2_1(ind08==1)=nan;
C3_1(ind08==1)=nan;

C1=[C0_1 C1_1 C2_1 C3_1];
clear C0_1 C1_1 C2_1 C3_1

% Gera matriz com coeficientes C0, C1, C2 e C3 para G27
C0_2=ParRic(ind27); % n de obs x n de cupons
C1_2=ParRic(ind27+size(ParRic,1));
C2_2=ParRic(ind27+2*size(ParRic,1));
C3_2=ParRic(ind27+3*size(ParRic,1));

C0_2(ind27==1)=nan;
C1_2(ind27==1)=nan;
C2_2(ind27==1)=nan;
C3_2(ind27==1)=nan;

C2=[C0_2 C1_2 C2_2 C3_2];
clear C0_2 C1_2 C2_2 C3_2

% calculo das interpolacoes das derivadas de C0,C1,C2,C3,Ca0,Ca1,Ca2,Ca3
tau08=ind08(:,end);
tau27=ind27(:,end);
C=ParRic(1:tau27(1),:);

% dC=[dCb0 dCb1 dCb2 dCb3 dCb4 dCa0 dCa1 dCa2 dCa3]
% C0 C1 C2 C3 Ca0 Ca1 Ca2 Ca3 Cb0 Cb1 Cb2 Cb3 Cb4
```

```
% 1  2  3  4  5   6   7   8   9   10  11  12  13

dC(:,1)=-K11*TETA1*C(:,10)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,11)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2...
   )/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,12)+(-1/(K11+...
   L1)*K11*TETA1*(K41+L4*BETA4)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K42+(-...
   (K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/(K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-
L2)...
   -1/K33*(K31*TETA1-L3))*K43+(-(-K21*K32*K43+K21*K33*K42-
L2*BETA2*K32*K43+L2*BETA2*K33*K42+K22*K43*...
   K31+K22*K43*L3*BETA3-K22*K33*K41-K22*K33*L4*BETA4)/(K11+L1)/K22/K33/K44*K11*TETA1+(-
K32*K43+K33*...
   K42)/K22/K33/K44*(K21*TETA1-L2)+K43/K33/K44*(K31*TETA1-L3)-1/K44*(K41*TETA1-L4))*K44)*C(:,13)+...
   1/2*C(:,11).^2+1/2*C(:,12).^2+1/2*C(:,13).^2-d0-u0;
dC(:,2)=(-K11-L1)*C(:,10)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,11)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,12)+(-K41-L4*BETA4)*C(:,13)-...
   1/2*C(:,10).^2-1/2*C(:,11).^2*BETA2-1/2*C(:,12).^2*BETA3-1/2*C(:,13).^2*BETA4+d1+u1;
dC(:,3)= -K22*C(:,11)-K32*C(:,12)-K42*C(:,13)+d2+u2;
dC(:,4)=-K33*C(:,12)-K43*C(:,13)+u3;
dC(:,5)=-K44*C(:,13);
% nao se alteram
dC(:,6)=-K11*TETA1*C(:,6)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*...
   TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C(:,7)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/...
   (K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/...
   (K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C(:,8)+C(:,3).*...
   C(:,7)+C(:,8).*C(:,4);
dC(:,7)=(-K11-L1)*C(:,6)+(-K21-L2*BETA2)*C(:,7)+(-K31-L3*BETA3)*C(:,8)-C(:,2).*C(:,6)-C(:,3).*C(:,7)*...
   BETA2-C(:,8).*C(:,4)*BETA3;
dC(:,8)=-K22*C(:,7)-K32*C(:,8);
dC(:,9)=-K33*C(:,8);

%Chute inicial da media dos yields do periodo
if isempty(AY2)
   AY2=[0.2*ones(n,1) log(0.4)*ones(n,1)];
end

options1=optimset('Display','iter','DerivativeCheck','off','Jacobian','on','TolFun',1e-8,'MaxIter',2000);  % Option to display output
[AY2,erro,exitflag,output,J]=fsolve(@CalcStateBOND,AY2,options1,...
   [globals_d(:,2)/100 globals_d(:,3)/100],C,C1,C2,dC,AY,tau08,tau27);

if isempty(AY2in)
   AY2in=[0.2 log(0.4)];
end

for i=1:n
   c=[globals_d(i,2)/100 globals_d(i,3)/100];
   [AY2in,erro,exitflag,output,J]=fsolve(@CalcStateBOND2,AY2in,options1,...
   c,C(1:tau27(i),:),C1(i,:),C2(i,:),dC(1:tau27(i),:),AY(i,:),tau08(i),tau27(i));
   AY2(i,:)=AY2in;

end


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%*********      CALCULO DA FUNCAO OBJETIVO                    ***********
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
j=full(diag(J));
o=-(1/(n-1))*(sum(log(pJ+realmin))-sum(log(abs(j)+realmin)));
```

Solução ODE

```
function dy=CalcParBOND1(t,y,ParDif,ParDif2,ParDif3)
% Calcula Parametros para Affine Term Structures
% P(t,T)=exp(A(T)+B(T)'*x(t))
% argumentos: t:  maturidades
%             y: valores iniciais de A e B k+1 x 1 (k fatores)
%             ParIn: parametros da difusao
%

K11=ParDif(1);
```

```
TETA1=ParDif(2);
K21=ParDif(3);
K22=ParDif(4);
d0=ParDif(5);
d1=ParDif(6);
d2=ParDif(7);
BETA2=ParDif(8);
L1=ParDif(9);
L2=ParDif(10);

K31=ParDif2(1);
K32=ParDif2(2);
K33=ParDif2(3);
u0=ParDif2(4);
u1=ParDif2(5);
u2=ParDif2(6);
u3=ParDif2(7);
BETA3=ParDif2(8);
L3=ParDif2(9);

%ParDif3=[K41,K42,K43,K44,v0,v1,v2,v3,v4,BETA4,L4];
K41=ParDif3(1);
K42=ParDif3(2);
K43=ParDif3(3);
K44=ParDif3(4);
v0=ParDif3(5);
v1=ParDif3(6);
v2=ParDif3(7);
v3=ParDif3(8);
v4=ParDif3(9);
BETA4=ParDif3(10);
L4=ParDif3(11);

% Parametros dos descontos dos cupons e do valor de face
C2=-1/K33*K32*u3/K22+1/K33*K32*u3/(K22-K33)*exp(-K22*t+t*(K22-K33))+d2/K22+u2/K22-exp(-K22*t)*(...
   K32*u3+d2*K22-d2*K33+u2*K22-u2*K33)/K22/(K22-K33);
C3=u3/K33-exp(-K33*t)*u3/K33;

% Parametros da intensidade de default
Ca2=K32*u3/(K22-K33)*exp(-K22*t+t*(K22-K33))-exp(-K22*t)*(K32*u3+u2*K22-u2*K33)/(K22-K33);
Ca3=-u3*exp(-K33*t);

% parametros de desconto da integral
Cb4=-v4*exp(-K44*t);
Cb3=K43*v4/(K33-K44)*exp(-K33*t+t*(K33-K44))+u3/K33-exp(-K33*t)*(K43*v4*K33+u3*K33-u3*K44+...
   v3*K33^2-v3*K33*K44)/(K33-K44)/K33;

dy = zeros(7,1);    % a column vector
dy(1)=-K11*TETA1*y(2)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/...
   K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*C2+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*...
   K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/(K11+L1)/K22/...
   K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*C3+1/2*C2^2+1/2*C3^2-d0-u0;
dy(2)=(-K11-L1)*y(2)+(-K21-L2*BETA2)*C2+(-K31-L3*BETA3)*C3-1/2*y(2)^2-1/2*C2^2*BETA2-1/2*C3^2*BETA3+d1+u1;
%%% Os parametros dAa e dCa
dy(3)=-K11*TETA1*y(4)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/...
   K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*Ca2+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*...
   K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/(K11+L1)/K22/...
   K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*Ca3+C2*Ca2+Ca3*C3;
dy(4)=(-K11-L1)*y(4)+(-K21-L2*BETA2)*Ca2+(-K31-L3*BETA3)*Ca3-y(2)*y(4)-C2*Ca2*BETA2-Ca3*C3*BETA3;
%%% Os parametros Ab e Cb(1) Cb(2)
dy(5)=-K11*TETA1*y(6)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K21+L2*BETA2)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-...
   1/K22*(K21*TETA1-L2))*K22)*y(7)+(-1/(K11+L1)*K11*TETA1*(K31+L3*BETA3)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/...
   K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K32+(-(K32*K21+K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/(K11+L1)/...
   K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*(K31*TETA1-L3))*K33)*Cb3+(-1/(K11+L1)*K11*...
   TETA1*(K41+L4*BETA4)+((K21+L2*BETA2)/(K11+L1)/K22*K11*TETA1-1/K22*(K21*TETA1-L2))*K42+(-(K32*K21+...
   K32*L2*BETA2-K22*K31-K22*L3*BETA3)/(K11+L1)/K22/K33*K11*TETA1+K32/K22/K33*(K21*TETA1-L2)-1/K33*...
   (K31*TETA1-L3))*K43+((K21*K32*K43-K21*K33*K42+L2*BETA2*K32*K43-L2*BETA2*K33*K42-K22*K43*K31-
K22*...
   K43*L3*BETA3+K22*K33*K41+K22*K33*L4*BETA4)/(K11+L1)/K22/K33/K44*K11*TETA1-(K32*K43-K33*K42)/K22/...
   K33/K44*(K21*TETA1-L2)+K43/K33/K44*(K31*TETA1-L3)-1/K44*(K41*TETA1-L4))*K44)*Cb4+1/2*y(7)^2+1/2*...
   Cb3^2+1/2*Cb4^2-d0-u0;
dy(6)=(-K11-L1)*y(6)+(-K21-L2*BETA2)*y(7)+(-K31-L3*BETA3)*Cb3+(-K41-L4*BETA4)*Cb4-1/2*y(6)^2-1/2*y(7)^2*...
   BETA2-1/2*Cb3^2*BETA3-1/2*Cb4^2*BETA4+d1+u1;
dy(7)=-K22*y(7)-K32*Cb3-K42*Cb4+d2+u2;
```

Inversão da Função de Apreçamento

```
function [F,J]=CalcStateBOND2(AY2,c,C,C1,C2,dC,AY,tau08,tau27)
% Extrai os fatores de um titulo que paga cupons
% P=sum(c*exp(A+B'*AY)
% C coeficientes riccati para a integracao
% C1 coeficintes G08 para cupons e valor de face
% C2 coeficientes G27 para cupons e valor de face
% dC derivadas para a integracao
% C1=[C0_1 C1_1 C2_1 C3_1];

%C=C(1:tau27(i),:);C1=C1(i,:);C2=C2(i,:);dC=dC(i:tau27(i),:);AY=AY(i,:);tau08=tau08(i);tau27=tau27(i);
%AY2=[1.5 log(.4)];

nc_1=size(C1,2)/4;
nc_2=size(C2,2)/4;

AYn=[AY(:,2:3) AY2];
dj=1/365;

%
alfa=C(:,9)-C(:,10:13)*AYn'; % matriz 1 x N
beta=dC(:,9)-dC(:,2:5)*AYn'; % matriz 1 xN
alfa1=C(:,5)-[C(:,6:8) zeros(size(C,1),1)]*AYn';% matriz 1 x N
beta1=dC(:,6)-[dC(:,7:9) zeros(size(dC,1),1)]*AYn'; %matriz 1x N
I=1./beta.*(exp(alfa+beta.*1/365).*(alfa1+beta1.*1/365-beta1./beta)+exp(alfa).*(-alfa1+beta1./beta));
I=cumsum(I);
I1=(C(:,12).*beta.*(-alfa1.*beta+beta1)+dC(:,4).*(alfa1.*beta-2*beta1))./beta.^3.*exp(alfa)+...
exp(alfa+beta.*dj).*(C(:,12).*beta.*(beta.*(alfa1+beta1.*dj)-beta1)+dC(:,4).*(beta.*(beta.*...
(alfa1.*dj+beta1*(dj^2))-alfa1-2*beta1*dj)+2*beta1))./beta.^3;
I2=exp(alfa+beta*dj).*(C(:,8)+dC(:,9).*(dj-1./beta))./beta+(exp(alfa).*(dC(:,9)-C(:,8).*beta))./beta.^2;
I1=cumsum(-I1-I2);
I3=(C(:,13).*beta.*(-alfa1.*beta+beta1)+dC(:,5).*(alfa1.*beta-2*beta1))./beta.^3.*exp(alfa)+...
exp(alfa+beta.*dj).*(C(:,13).*beta.*(beta.*(alfa1+beta1.*dj)-beta1)+dC(:,5).*(beta.*(beta.*...
(alfa1.*dj+beta1*(dj^2))-alfa1-2*beta1*dj)+2*beta1))./beta.^3;
I3=cumsum(I3);

%t_span=repmat(((1:tau(1)-1)/365)',1,n);
%[I,I1,I2]=CalcInt(C,dC,AYn,tau08,tau27);

%*****************************************************
%***                                ****
%***    CALCULO GLOBAL 2008                ****
%***                                ****
%*****************************************************

% gera matrize cm as variaveis de estado AY1 AY2 e AY3
AY1ex=repmat(AYn(:,1),1,nc_1); % volatilidade
AY2ex=repmat(AYn(:,2),1,nc_1); % taxa de juros curto prazo
AY3ex=repmat(AYn(:,3),1,nc_1); % probabilidade de default

B1=exp(C1(:,1:nc_1)-C1(:,nc_1+(1:nc_1)).*AY1ex-C1(:,2*nc_1+(1:nc_1)).*AY2ex-C1(:,3*nc_1+(1:nc_1)).*AY3ex);
B1(isnan(B1))=0;
B2=-C1(:,3*nc_1+(1:nc_1)).*B1;
B2(isnan(B2))=0;
P1=sum(0.09375/2*B1,2)+B1(:,end)+I(tau08,1);

% derivada equacao 1 em relacao a fator 1
j1=sum(0.09375/2.*B2,2)-C1(:,4*nc_1).*B1(:,end)+I1(tau08,1);
% derivada equacao 1 em relacao a fator 2
j2=I2(tau08,1);
clear B1 B2 AY1ex AY2ex AY3ex

%*****************************************************
%***                                ****
%***    CALCULO GLOBAL 2027                ****
%***                                ****
%*****************************************************

AY1ex=repmat(AYn(:,1),1,nc_2); % volatilidade
AY2ex=repmat(AYn(:,2),1,nc_2); % taxa de juros curto prazo
AY3ex=repmat(AYn(:,3),1,nc_2); % probabilidade de default
```

```
B1=exp(C2(:,1:nc_2)-C2(:,nc_2+(1:nc_2)).*AY1ex-C2(:,2*nc_2+(1:nc_2)).*AY2ex-C2(:,3*nc_2+(1:nc_2)).*AY3ex);
B1(isnan(B1))=0;
B2=-C2(:,3*nc_2+(1:nc_2)).*B1;
B2(isnan(B2))=0;
P2=sum(0.10125/2*B1,2)+B1(:,end)+I(tau27,1);
% derivada equacao 2 em relacao a fator 1
j3=sum(0.10125/2*B2,2)-C2(:,4*nc_2).*B1(:,end)+I1(tau27,1);
% derivada equacao 2 em relacao a fator 2
j4=I2(tau27,1);
clear AY1ex AY2ex AY3ex B1 B2

F=[P1 P2]-c;

if nargout > 1
   % (1 => n)     x (1 => n)     Jacobiano Equacao 1 em relacao ao fator 1
   % (1 => n)     x (n+1 => 2*n) Jacobiano Equacao 1 em relacao ao fator 2
   % (n+1 => 2*n) x (1 => n)     Jacobiano Equacao 2 em relacao ao fator 1
   % (n+1 => 2*n) x (n+1 => 2*n) Jacobiano Equacao 2 em relacao ao fator 2
   % derivada equacao 1 em relacao a fator 1
%    J1=sparse((1:n),(1:n),j1,2*n,2*n);
   % derivada equacao 1 em relacao fator 2
%    J2=sparse((1:n),((n+1):(2*n)),j2,2*n,2*n);
   % derivada equacao 2 em relacao fator 1
%    J3=sparse(((n+1):(2*n)),(1:n),j3,2*n,2*n);
   % derivada equacao 2 em relacao fator 2
%    J4=sparse(((n+1):(2*n)),((n+1):(2*n)),j4,2*n,2*n);
   J=[j1 j2;
      j3 j4];
end
```

Cálculo da Integral

```
function [S,S1,S2]=CalcInt(C,dC,AYn,tau08,tau27)
% C0 C1 C2 C3 Ca0 Ca1 Ca2 Ca3 Cb0 Cb1 Cb2 Cb3 Cb4
% 1  2  3  4  5   6   7   8   9   10  11  12  13
% dC=[dCb0 dCb1 dCb2 dCb3 dCb4 dCa0 dCa1 dCa2 dCa3]
tau=tau27-1;

dj=1/365;

Ia=0;
I1a=0;
I2a=0;
S=[];
S1=[];
S2=[];


for d=1:size(C,1)-1
   alfa=C(d,9)-C(d,10:13)*AYn'; % matriz 1 x N
   beta=dC(d,9)-dC(d,2:5)*AYn'; % matriz 1 xN
   alfa1=C(d,5)-[C(d,6:8) 0]*AYn';% matriz 1 x N
   beta1=dC(d,6)-[dC(d,7:9) 0]*AYn'; %matriz 1x N
   I=1./beta.*(exp(alfa+beta.*1/365).*(alfa1+beta1.*1/365-beta1./beta)+exp(alfa).*(-alfa1+beta1./beta));
   I1=(C(d,12).*beta.*(-alfa1.*beta+beta1)+dC(d,4).*(alfa1.*beta-2*beta1))./beta.^3.*exp(alfa)+...
   exp(alfa+beta.*dj).*(C(d,12).*beta.*(beta.*(alfa1+beta1.*dj)-beta1)+dC(d,4).*(beta.*(beta.*...
   (alfa1.*dj+beta1*(dj^2))-alfa1-2*beta1*dj)+2*beta1))./beta.^3;
   I2=exp(alfa+beta*dj).*(C(d,8)+dC(d,9).*(dj-1./beta))./beta+(exp(alfa).*(dC(d,9)-C(d,8).*beta))./beta.^2;
   Ia=Ia+I;
   I1a=I1a-I1-I2;
   I3=(C(d,13).*beta.*(-alfa1.*beta+beta1)+dC(d,5).*(alfa1.*beta-2*beta1))./beta.^3.*exp(alfa)+...
   exp(alfa+beta.*dj).*(C(d,13).*beta.*(beta.*(alfa1+beta1.*dj)-beta1)+dC(d,5).*(beta.*(beta.*...
   (alfa1.*dj+beta1*(dj^2))-alfa1-2*beta1*dj)+2*beta1))./beta.^3;
   I2a=I2a-I3;
   ind1=find((tau08-1)==d);
   ind2=find((tau27-1)==d);
   if ~isempty(ind1)
      S(ind1,1)=(Ia(ind1))';
      S1(ind1,1)=(I1a(ind1))';
      S2(ind1,1)=(I2a(ind1))';
   end
   if ~isempty(ind2)
      S(ind2,2)=(Ia(ind2))';
```

```
        S1(ind2,2)=(I1a(ind2))';
        S2(ind2,2)=(I2a(ind2))';
    end
end
```