UM MODELO DE COMPETIÇÃO BASEADA EM TEMPO NOS MERCADOS FINANCEIROS

Willy Otto Jordan Neto
EPGE/FGV

Resumo: O objetivo deste trabalho é modelar o comportamento estratégico dos indivíduos diante de um choque estocástico que desloca o preço de determinado ativo financeiro do seu equilíbrio inicial. Investiga-se o caminho do preço de mercado em direção ao novo equilíbrio, conduzido pelas sucessivas negociações dos agentes em busca de oportunidades de obter lucros imediatos. Os operadores, que por suposição possuem funções de utilidade avessas ao risco, devem escolher a quantidade ótima transacionada e quanto devem aguardar para executar as suas ordens, tendo em vista a diminuição da volatilidade do preço do ativo à medida que as transações se sucedem após o choque. Procura-se demonstrar que os operadores que aceitam incorrer em riscos mais elevados negociam com maior frequência e em volumes e velocidades maiores, usufruindo lucros esperados mais altos que os demais.

Abstract: This paper studies the strategic behavior of individuals when depared with a random shock that moves the price of a financial asset from its initial equilibrium. The path followed by the asset's price towards its new equilibrium, moved by the agents' successive negotiations of the asset, seeking for immediate profits opportunities, is therefore investigated. The traders, that we suppose have risk-averse utility functions, shall choose the optimum quantity of the asset to trade and how long they should wait to execute their orders, considering the decrease of the asset's price volatility as long as the traders' transactions succeed themselves after the shock. The objective is to demonstrate that more risk-friend traders negotiate more frequently and in larger quantities, receiving higher expected profits.

I. INTRODUÇÃO

A negociação de ativos nos mercados financeiros é uma das atividades econômicas mais intensivas em informação. A chegada de uma nova informação a respeito de um ativo é seguida por aumentos na volatilidade do preço e no volume transacionado deste ativo. Esta negociação tende a eliminar, em um curto espaço de tempo, a diferença entre o preço de mercado do ativo e o seu novo valor de equilíbrio induzido pela informação.

Cumpre notar, no entanto, que esta eliminação não se dá de forma instantânea, e por vezes nem mesmo se dá de forma completa, devido a imperfeições de mercado como custos de transação e atrasos no processamento das informações por parte dos investidores. Entre os custos de transação estão incluídos comissões, taxas, spreads e, especialmente para grandes volumes, os custos de mercado, dados pelo impacto da própria ordem a ser executada sobre o preço de mercado. Atrasos no processamento das informações incluem todo o tempo consumido entre o surgimento da informação e o seu recebimento por parte dos agentes, assim como entre este recebimento e a efetiva tomada de decisão de ajuste de portfólio.

O objetivo deste trabalho é modelar a competição entre os investidores pela oportunidade de usufruir lucros a partir de uma nova informação a respeito de determinado ativo. Considera-se a ocorrência de um único choque de cada vez, não havendo, portanto, a possibilidade de que qualquer novo distúrbio aconteça até que o ajuste tenha se completado. Assim que o operador percebe que existe uma diferença entre o preço de mercado do ativo e o seu novo valor de equilíbrio induzido pela informação, ele procura tirar vantagem desta diferença vendendo o ativo se a diferença é positiva e comprando se esta é negativa.

Partindo do arcabouço desenvolvido por Dewan e Mendelson em seu trabalho "Information Technology and Time-Based Competition in Financial Markets", de 1998, estuda-se como os agentes se comportam quando o novo valor de equilíbrio do ativo induzido pela informação segue um processo estocástico, hipótese que parece bem mais realista do que a de um choque determinista ou estocástico pré-determinado, como no modelo original dos referidos autores. Esta mudança, aliada à hipótese de aversão ao risco

por parte dos agentes, no entanto, faz com que todo o desenvolvimento do modelo se torne novo, levando a resultados bem mais gerais, embora menos simples e diretos.

As conclusões que se pretende alcançar também sofrem sensíveis alterações. Ao invés de focar a discussão no papel que o investimento em tecnologia da informação desempenha na performance das instituições financeiras, como fazem Dewan e Mendelson, procura-se mostrar que os operadores que aceitam incorrer em riscos mais elevados negociam com maior frequência e em volumes e velocidades maiores. Desta maneira, usufruem lucros esperados mais altos que os demais.

As modificações propostas tornam o objeto de estudo deste modelo mais parecido com o de outros modelos de micro-estrutura de mercado, como os de Glosten-Milgrom e Copeland-Galai [1]. A estrutura aqui desenvolvida, no entanto, é sensivelmente diferente, sendo capaz de oferecer aos interessados nesta literatura uma forma alternativa de tratar o processo de negociação de ativos com base na teoria microeconômica.

Para resolver o problema de maximização da utilidade esperada dos investidores, procede-se em duas etapas. Na primeira delas, a ordem na qual os agentes transacionam é tomada como dada e escolhe-se a quantidade ótima negociada por cada investidor. Na segunda, maximiza-se a utilidade esperada dos agentes em relação à sua ordenação, já levando em conta a quantidade ótima encontrada na primeira etapa. Uma estratégia de operação no mercado para um operador especifica, portanto, uma ordenação e uma quantidade transacionada (possivelmente zero) como função da distribuição do novo valor de equilíbrio do ativo.

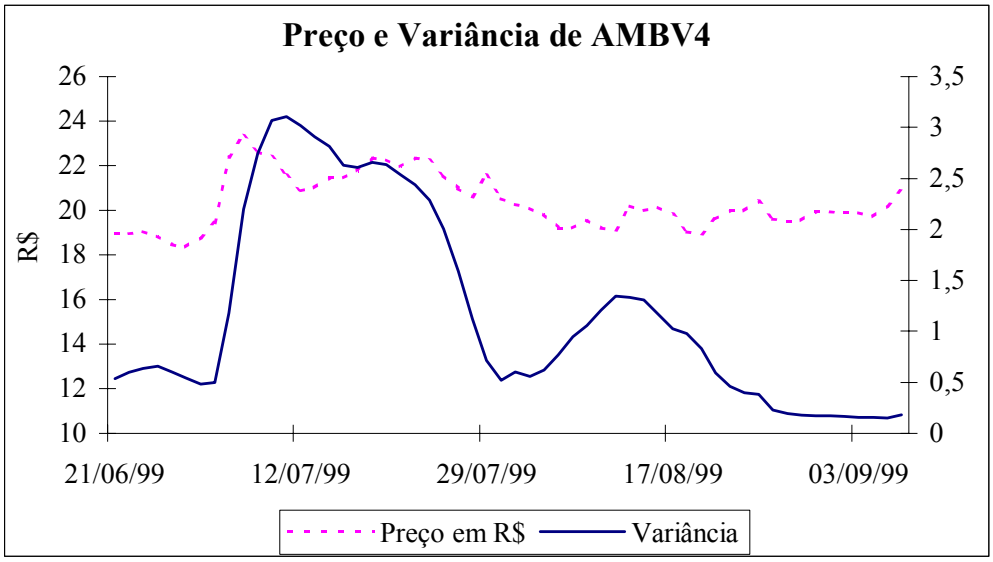
A segunda seção apresenta o modelo a ser desenvolvido e resolve, para o caso geral, a primeira etapa da sua solução, ou seja, obtém as quantidades ótimas que os agentes desejam transacionar tomando como dadas as suas ordenações. São obtidas as condições de equilíbrio desta etapa e mostra-se também a solução para um caso particular trivial, que é o caso determinista tratado por Dewan e Mendelson. Em seguida, a terceira seção resolve a primeira etapa do modelo para duas distribuições do novo valor de equilíbrio do ativo que são de particular interesse. Uma delas é a distribuição uniforme que, por sua simplicidade,

---

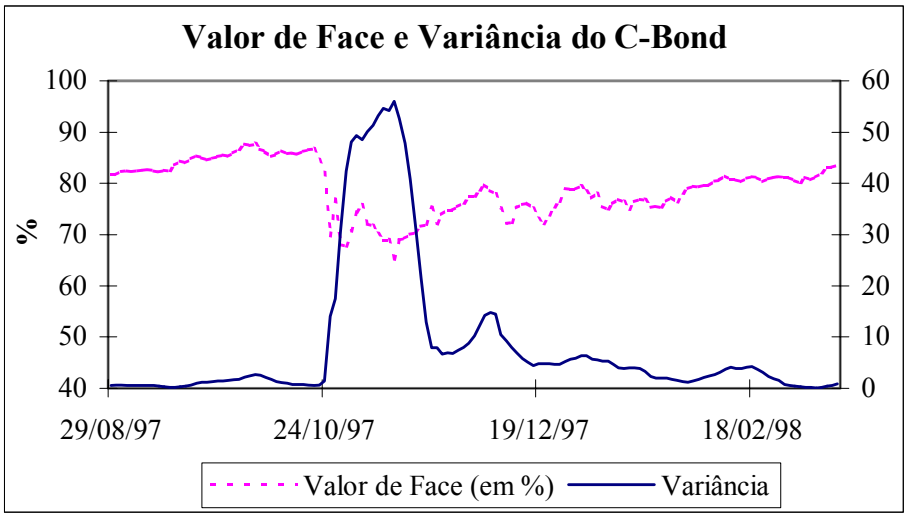
1. Ver O'HARA (1995) *Market Microstructure Theory*, páginas 53-75.

permite resultados mais explícitos. A outra é a distribuição normal, por ser uma das mais usadas em trabalhos empíricos de finanças. Procura-se dar especial atenção às propriedades comuns das soluções dos dois casos.

A quarta seção apresenta a segunda etapa da solução do problema aqui tratado, ou seja, a escolha da ordenação ótima de cada agente, discutindo sob que circunstâncias a existência do equilíbrio deste modelo pode ser garantida. Uma hipótese importante para a obtenção dos resultados desta etapa é a de que as quantidades transacionadas pelos agentes afetam não apenas o preço do ativo, mas também a distribuição do seu novo valor de equilíbrio induzido pela informação, reduzindo a sua variância. Isto quer dizer que, à medida que as transações com o ativo se sucedem após o choque, alguma informação adicional é fornecida sobre a realização da variável aleatória, tentando capturar o fato estilizado segundo o qual, após um choque, a volatilidade do preço do ativo cresce instantaneamente, se mantendo alta por um período breve até decrescer de forma gradual. Este fato estilizado é ilustrado pelas figuras abaixo.



Fonte: Economática



Fonte: Economática

As figuras representam o comportamento dos preços e de suas variâncias nos últimos vinte dias de negociação para dois ativos que sofreram choques inesperados do tipo que procura-se modelar. A primeira figura mostra o que aconteceu com as ações da Ambev quando foi anunciada a fusão da Brahma com a Antarctica, em 01/07/1999. Obviamente, as cotações se referem à combinação das cotações das ações de Brahma e Antarctica na proporção fixada na fusão. A segunda figura retrata o comportamento dos C-Bonds quando a crise do sudeste asiático teve o seu momento mais agudo, com o ataque ao dólar de Hong Kong em 31/10/1997.

O tipo de comportamento do preço do ativo após um choque observado nas figuras será incorporado ao modelo pelas hipóteses que serão feitas sobre a estrutura da função de distribuição do novo preço de equilíbrio. Faz-se a simplificação de que a diminuição da variância ocorre de forma monótona, o que simplifica as estratégias e ajuda na obtenção de unicidade do equilíbrio. A quarta seção resolve ainda o problema de escolha da ordenação ótima por parte dos agentes para as mesmas distribuições específicas do novo preço de equilíbrio que foram utilizadas na terceira seção. Isto permite que se tenha soluções fechadas para o modelo não apenas em seu caso geral, mas também para alguns exemplos particulares. Sobre estas soluções, é possível inferir conclusões gerais, as quais são discutidas, ao final deste trabalho, na quinta seção.

II. O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO

Considera-se a competição entre N operadores indexados por $n = 1, 2, ..., N$, que procuram obter lucros a partir de uma nova informação a respeito de um ativo. Estes investidores se defrontam, como referido anteriormente, com custos de transação e atrasos no processamento da informação, os quais serão detalhados a seguir.

Custos de transação variam de acordo com o ativo e o mercado no qual este é negociado. De maneira geral, pode-se admitir que existem custos de transação diretos e indiretos. Custos diretos de transação incluem comissões de corretagem, taxas, spreads, etc... Todos estes podem ser cobrados como um valor fixo, como um valor proporcional ao volume da transação ou como uma combinação de ambos. Desta forma, pode-se representar os custos diretos de transação por $A + b \,.\, |\, q \,|$, onde A e b são parâmetros dados e q é a quantidade transacionada.

Somam-se a estes os custos indiretos associados à execução de uma ordem, dados pelo movimento do preço de mercado que é provocado pela própria ordem a ser executada. Será suposto que a variação do preço é linear na quantidade, ou seja, uma venda do ativo ($q<0$) diminui seu preço em $m.q$, onde m é o parâmetro exógeno de impacto de mercado, enquanto uma compra provoca um aumento de preço equivalente. Pode-se admitir, para construir este argumento, que existam dois tipos de operadores no mercado, os *arbitrageurs*, cujo problema é aqui estudado, e os demais, ou *liquidity traders*, que possuem outros argumentos em suas funções de utilidade que não simplesmente a obtenção de lucros de arbitragem e, portanto, dão liquidez às transações dos *arbitrageurs*.

Os atrasos no processamento da informação, por sua vez, consistem de atrasos de observação, representando o tempo dispendido entre o surgimento da informação e o seu recebimento pelos agentes, e atrasos de execução, que refletem o intervalo necessário à avaliação da informação, determinação da disparidade média entre o antigo preço de mercado do ativo e seu novo valor esperado de equilíbrio, e execução da ordem de compra ou venda no mercado. Cumpre notar que estes atrasos são, em grande parte, determinados pelos sistemas de informação e processamento de dados disponíveis aos agentes. Denotando por τ_n o atraso total no processamento da informação para o operador n, pode-se

ordenar os operadores de modo que se tenha $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ ... \ \leq \tau_N$. Supõe-se inicialmente, para todos os efeitos, que esta ordenação é de "common knowledge" entre os agentes.

Modela-se aqui a ocorrência de um único evento, no instante de tempo $t = 0$, que altera o valor de mercado de determinado ativo, para cima ou para baixo, de acordo com uma variável aleatória Δ, para a qual tem-se que $E_{t=0}(\Delta) = \delta$. Uma estratégia de operação no mercado para o operador n, $q_n(\Delta)$, especifica uma quantidade transacionada (possivelmente zero) como função da distribuição da variável Δ. Como o operador n incorre no custo de mercado acumulado de todos os operadores que negociaram antes dele, seu lucro depende da quantidade total negociada em todas estas operações, $Q_{<n} = \sum_{i=1}^{n-1} q_i$. Desta forma, tem-se que o problema do agente n é dado por:

$$\max_{q_n} E\left\{ U\left[q_n\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n\right) - A;\ 0 \right] \right\} \tag{2.1}$$

Supondo que os agentes têm preferências estritamente monotônicas em relação ao lucro e são avessos ao risco, pode-se representar suas preferências pela seguinte função de utilidade:

$$u(\pi) = \frac{\pi^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2.2}$$

onde π é o lucro obtido na operação e γ é o coeficiente de aversão relativa ao risco. Por este coeficiente ser constante, a função em (2.2) é conhecida como CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*). Será deixado de lado o caso onde:

$$U\left\{q_n\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n\right) - A\right\} \leq U\{0\} \Rightarrow q_n\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n\right) - A \leq 0$$

pois sua solução é, trivialmente, $q_n = 0$ para todo n. Logo, o problema do agente n passa a ser:

$$\max_{q_n} E\left\{ \frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right\} \tag{2.3}$$

de onde segue a seguinte condição de primeira ordem, necessária para a solução do problema em (2.1) sob a hipótese em (2.2):

$$E\left\{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^{-\gamma}\left(\Delta - b - mQ_{<n} - 2mq_n^*\right)\right\} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$E\left\{\frac{\left(\Delta - b - mQ_{<n}\right)}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^{\gamma}}\right\} - E\left\{\frac{2mq_n^*}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^{\gamma}}\right\} = 0$$

portanto, em equilíbrio tem-se que:

$$E\left\{\frac{\Delta - b - mQ_{<n} - 2mq_n^*}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^{\gamma}}\right\} = 0 \tag{2.4}$$

Para verificar as propriedades deste equilíbrio, enuncia-se os seguintes lemas:

LEMA 2.1: A solução do problema dado pelas equações em (2.3) é sempre única.

Demonstração: Considere a seguinte função, que soluciona o problema em (2.3):

$$s_n\left(q_n\right) = \int \frac{c_0 - 2mq_n}{\left[q_n\left(c_0 - mq_n\right) - A\right]^{\gamma}}\, dP \tag{2.5}$$

onde *dP* é uma medida de probabilidade e, portanto, só pode assumir valores positivos, e $c_0 = \Delta - b - mQ_{<n}$. Supondo que $s_n(q_n)$ seja uma função continuamente diferenciável e limitada, o que torna possível inverter a ordem das operações de derivação e integração, tem-se que:

$$s_n^{'}\left(q_n\right) = \int \left[\frac{-2m}{\left[q_n\left(c_0 - mq_n\right) - A\right]^{\gamma}} - \frac{\gamma\left(c_0 - 2mq_n\right)^2}{\left[q_n\left(c_0 - mq_n\right) - A\right]^{1+\gamma}}\right] dP < 0 \tag{2.6}$$

pois a integral em (2.6) é uma soma de valores que só podem ser negativos ou zero. Com isto, verifica-se que $s_n(q_n)$ é estritamente monótona e, portanto, a cada ponto do conjunto-imagem só pode corresponder um ponto do domínio, o que encerra esta demonstração. ■

O resultado do lema 2.1 não surpreende, uma vez que a função de utilidade em (2.2) é estritamente côncava. Esta propriedade, no entanto, é comum à toda a família de funções que descrevem aversão ao risco, não havendo, portanto, perda de generalidade em supor que as preferências dos indivíduos podem ser descritas pela função aqui escolhida. Note também que, sempre que $q_n = q_n^*$, deve-se ter $s_n\left(q_n\right) = 0$. A hipótese inicial de que

$q_n(c_0 - mq_n) - A \geq 0$ foi feita anteriormente para garantir que o problema aqui estudado tivesse uma solução diferente da solução trivial $q_n = 0, \forall\, n$.

O caso particular que torna mais simples a solução do problema em (2.3) surge quando é aplicada em Δ a medida de probabilidade degenerada com $P\{\Delta = \delta\} = 1$. Este é o caso tratado por Dewan e Mendelson, onde a condição de equilíbrio em (2.4) fica reduzida a:

$$q_n^* = \frac{\delta - b - mQ_{<n}}{2m} \tag{2.7}$$

que significa que o intervalo dado pelo lema 2.2 colapsa para a sua média. Isto leva aos seguintes lemas:

LEMA 2.2 (Dewan e Mendelson)**:** Assuma $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N$ e defina $d_n = b + 2^n\sqrt{Am}$. Para $\delta > 0$, as estratégias:

$$q_n^*(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \leq d_n \\ \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\delta - b}{m} & \text{se } \delta > d_n \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \ldots, N$, constituem o ***único*** equilíbrio de Nash. O caso para $\delta < 0$ é simétrico.

LEMA 2.3 (Dewan e Mendelson)**:** Assuma $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_N$ e, para os N operadores, suponha que existam M diferentes tempos de reação, com $M \leq N$. Para $n = 1, 2, \ldots, M$, faça com que S_n denote o conjunto de operadores com o n-ésimo menor tempo de reação e N_n denote a cardinalidade do conjunto S_n. Faça ainda com que n_i indique o i-ésimo operador no conjunto S_n, para $n = 1, 2, \ldots, M$, e onde o índice $i \in \{1, 2, \ldots, N_n\}$ é aleatoriamente distribuído entre os operadores no conjunto. Tem-se, portanto, que $\sum_{n=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_n} n_i = N$. Finalmente, para todo n e k, defina $d_n^k = b + \prod_{j=1}^{n-1}(N_j + 1)(1 + k)\sqrt{Am}$. Então, existem $N_1!$ x $N_2!$ x .... x $N_M!$ equilíbrios de Nash em estratégias puras, um para cada permutação em $\{1, 2, \ldots, N\}$ que preserve a ordem de diferentes tempos de reação. Considere uma destas permutações e assuma $\delta > 0$. Logo, as estratégias:

$$q^{*}_{n_i}(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \le d_n^i \\ \dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n-1}(N_j+1)(1+k)}\dfrac{\delta - b}{m} & \text{se } \delta \le d_n^{k+1}, k = i, \ldots, N_n - 1 \\ \dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}(N_j+1)}\dfrac{\delta - b}{m} & \text{se } \delta > d_n^{N_n} \end{cases}$$

para cada operador n_i, $i \in \{1, 2, \ldots, N_n\}$ e $n \in \{1, 2, \ldots, M\}$, constituem o ***único*** equilíbrio de Nash. O caso para δ<0 é simétrico. Não há equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Demonstração: Chega-se facilmente, por indução a partir da condição em (2.7), aos equilíbrios de Nash nos dois lemas acima. Mas, pelo lema 2.1, sabe-se que estes equilíbrios são únicos, o que completa esta demonstração. ■

Isto encerra esta seção. A solução do problema dado pelas equações em (2.3) para distribuições particulares mais interessantes da variável aleatória Δ é discutida na seção seguinte.

III. SOLUÇÃO PARA ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES PARTICULARES DE Δ

A seção anterior mostrou que o modelo descrito apresenta uma solução que depende da função de distribuição da variável aleatória Δ. Foi mostrada também a solução do modelo de Dewan e Mendelson, no qual Δ é distribuída de forma degenerada com $P\{\Delta = \delta\} = 1$. Nesta seção, procura-se encontrar a solução do modelo para outras distribuições particulares de Δ. Para facilitar a exposição, a condição de equilíbrio em (2.4) é reescrita abaixo:

$$E\left\{\frac{\Delta - b - mQ_{<n} - 2mq_n^*}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^\gamma}\right\} = 0 \tag{3.1}$$

Por ser o caso mais simples, inicia-se com a suposição de que Δ é distribuída uniformemente no intervalo $[\delta - x, \delta + x]$. Substituindo em (3.1) a função densidade de probabilidade da distribuição uniforme, esta condição se torna equivalente a:

$$\int_{\delta-x}^{\delta+x} \frac{\Delta - b - mQ_{<n} - 2mq_n^*}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^\gamma} \frac{1}{2x} d\Delta = 0 \tag{3.2}$$

Defina agora:

$c_1 = -b - mQ_{<n} - 2mq_n^*$

$c_2 = q_n^*\left(-b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A$

A condição em (3.2) pode ser reescrita de maneira mais simples como:

$$\int_{\delta-x}^{\delta+x} \frac{\Delta + c_1}{\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^\gamma} \frac{d\Delta}{2x} = 0$$

Integrando por partes, tem-se que:

$$\frac{1}{2x}\left\{\left(\Delta + c_1\right)\frac{\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\frac{1}{q_n^*}\Bigg|_{\delta-x}^{\delta+x} - \int_{\delta-x}^{\delta+x}\frac{\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^{1-\gamma}}{1-\gamma}\frac{1}{q_n^*}d\Delta\right\} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{(\Delta + c_1)}{(1-\gamma)q_n^*}\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^{1-\gamma}\Bigg|_{\delta-x}^{\delta+x} - \frac{\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^{2-\gamma}}{(2-\gamma)(1-\gamma)q_n^{*2}}\Bigg|_{\delta-x}^{\delta+x} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{(\delta+x)q_n^* + c_2}{(\delta-x)q_n^* + c_2}\right]^{1-\gamma} = \frac{\delta - x + \dfrac{(2-\gamma)c_1 q_n^* - c_2}{(1-\gamma)q_n^*}}{\delta + x + \dfrac{(2-\gamma)c_1 q_n^* - c_2}{(1-\gamma)q_n^*}} \tag{3.3}$$

A condição em (3.3) define implicitamente q_n^* em função de δ e x, fornecendo o equilíbrio de Nash em estratégias puras do jogo em (2.3) quando Δ é distribuída uniformemente no intervalo $[\delta - x, \delta + x]$. Pelo lema 2.1, sabe-se também que o valor de q_n^* é obtido em (3.3) de forma única de acordo com os parâmetros do modelo. Assim sendo, quando se faz $0 < \gamma < 1$, $(\delta \pm x + c_1) > 0$ e $(\delta \pm x + c_2) > 0$, é possível verificar, utilizando o Teorema da Função Implícita, as seguintes implicações do modelo com relação a q_n^*:

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial \delta} = -\frac{(1-\gamma)\left[\dfrac{(\delta-x)q_n^* + c_2}{(\delta+x)q_n^* + c_2}\right]^{\gamma}\left[-\dfrac{2xq_n^{*2}}{\left[(\delta-x)q_n^* + c_2\right]^2}\right] - 2x}{D_1} > 0$$

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial \gamma} = \frac{\left[\dfrac{(\delta+x)q_n^* + c_2}{(\delta-x)q_n^* + c_2}\right]^{1-\gamma}\ln\left[\dfrac{(\delta+x)q_n^* + c_2}{(\delta-x)q_n^* + c_2}\right] + 2x\left[\dfrac{-mq_n^{*2} - A}{(1-\gamma)^2 q_n^*}\right]}{D_1} < 0$$

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial x} = -\frac{(1-\gamma)\left[\dfrac{(\delta-x)q_n^* + c_2}{(\delta+x)q_n^* + c_2}\right]^{\gamma}\left\{\dfrac{2q_n^*(\delta q_n^* + c_2)}{\left[(\delta-x)q_n^* + c_2\right]^2}\right\} + \dfrac{2\delta + \dfrac{2\left[(2-\gamma)c_1 q_n^* - c_2\right]}{(1-\gamma)q_n^*}}{\left[\delta + x + \dfrac{(2-\gamma)c_1 q_n^* - c_2}{(1-\gamma)q_n^*}\right]^2}}{D_1} < 0$$

onde o valor de D_1 é dado por:

$$2x\left\{(1-\gamma)\left[\frac{(\delta-x)q_n^*+c_2}{(\delta+x)q_n^*+c_2}\right]^{\gamma}\left[(\delta-b+mq_n^*)q_n^*-A\right]-\frac{\frac{m\left[1-2\left(2-\gamma\right)\right]}{\left(1-\gamma\right)}}{\left[\delta+x+\frac{\left(2-\gamma\right)c_1\,q_n^*-c_2}{\left(1-\gamma\right)q_n^*}\right]^2}\right\}>0$$

Estes resultados mostram que a quantidade do ativo transacionada pelos agentes é diretamente proporcional à disparidade esperada entre o preço de mercado do ativo e o seu novo valor de equilíbrio induzido pela informação e inversamente proporcional ao coeficiente de aversão relativa ao risco dos indivíduos e à variância da distribuição de Δ, com a qual o parâmetro x está diretamente relacionado e, portanto, da qual este fornece uma medida. Passa-se agora ao caso de maior interesse, por ser um dos mais encontrados em problemas de finanças. Supondo que Δ segue uma distribuição normal com média δ e variância σ^2, a condição em (3.1) torna-se equivalente a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta-b-mQ_{<n}-2mq_n^*}{\left[q_n^*\left(\Delta-b-mQ_{<n}-mq_n^*\right)-A\right]^{\gamma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta=0 \qquad (3.4)$$

Utilizando as mesmas definições de c_1 e c_2 do caso anterior, pode-se reescrever (3.4) como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta+c_1}{\left[\Delta q_n^*+c_2\right]^{\gamma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta=0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta+c_1}{\left[\Delta q_n^*+c_2\right]^{\gamma}}\exp\left[-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta=0 \qquad (3.5)$$

A condição (3.5) define mais uma vez q_n^* de forma implícita, só que desta vez em função dos parâmetros que caracterizam a distribuição normal, δ e σ^2. A interpretação também é a mesma, fornecendo o equilíbrio de Nash em estratégias puras do jogo em (2.3) quando Δ segue uma distribuição normal com média δ e variância σ^2. Supondo novamente que a função $s_n(q_n)$ é continuamente diferenciável e limitada, pode-se mais uma vez inverter a ordem das operações de derivação e integração e, desta forma, utilizando as

mesmas hipóteses sobre os parâmetros que foram empregadas no caso uniforme, verifica-se que q_n^* é crescente em δ e decrescente em γ e σ^2, uma vez que:

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial \delta} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dfrac{(\Delta-\delta)(\Delta+c_1)}{\sigma^2\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^{\gamma}} \exp\left[-\dfrac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right]}{D_2} d\Delta > 0$$

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial \gamma} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\dfrac{(\Delta+c_1)}{\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^{\gamma}} \ln\left(\Delta q_n^* + c_2\right) \exp\left[-\dfrac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right]}{D_2} d\Delta < 0$$

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial \sigma^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\dfrac{(\Delta+c_1)}{\left[\Delta q_n^* + c_2\right]^{\gamma}} \left[\dfrac{(\Delta-\delta)^2}{\sigma^3}\right] \exp\left[-\dfrac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right]}{D_2} d\Delta < 0$$

onde o valor de D_2 é dado por:

$$D_2 = -\frac{\left\{2m + \dfrac{\gamma\left(\Delta - b - mQ_{<n} - 2mq_n^*\right)^2}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]}\right\}}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^{\gamma}} \exp\left[-\frac{(\Delta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right] < 0$$

As conclusões alcançadas para o exemplo no qual Δ segue uma distribuição normal com média δ e variância σ^2 são análogas às do caso uniforme. Em ambos, pela hipótese de que os indivíduos são avessos ao risco, a quantidade ótima que os agentes desejam transacionar cresce com a diferença esperada entre o preço de mercado do ativo e o seu novo valor de equilíbrio induzido pela informação e cai conforme aumentam o coeficiente de aversão relativa ao risco dos indivíduos e a variância da distribuição de Δ. Com estes resultados, já se sabe como as quantidades negociadas pelos agentes se comportam no modelo. A próxima seção tratará do problema de escolha do instante no qual os indivíduos desejarão transacionar.

IV. A ESCOLHA NO TEMPO

Uma vez resolvida a primeira etapa do problema de escolha dos indivíduos, que é determinar a quantidade ótima a ser transacionada quando se toma como dada a ordenação de cada indivíduo *n*, passa-se nesta seção ao estudo da segunda etapa deste problema, que é determinar em que momento cada operador irá desejar executar a sua ordem. Para resolver este problema, é necessário acrescentar três novas hipóteses àquelas que foram feitas anteriormente. Inicia-se supondo que as funções de utilidade possuem a mesma forma para todos os indivíduos, mas diferem nos coeficientes de aversão relativa ao risco da seguinte forma:

$$u_n(\pi) = \frac{\pi^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} \tag{4.1}$$

onde π é o lucro obtido na operação e γ_n é o coeficiente de aversão relativa ao risco, que varia para cada indivíduo.

Outra suposição que se faz necessária neste ponto é a de que a quantidade transacionada pelos agentes se distribui ao longo do tempo de acordo com alguma função conhecida. Isto significa que, à medida que o tempo decorre, mais transações se sucedem. Sendo assim, é possível representar o somatório das quantidades transacionadas pelos *n-1* agentes da seguinte forma:

$$Q_{<n} = f(t) \tag{4.2}$$

$$\text{onde } f'(t)>0 \text{ e } f''(t)<0$$

sendo t a variável contínua de escolha que representa o tempo. Esta hipótese é uma simplificação, uma vez que, como $Q_{<n} = \sum_{i=1}^{n-1} q_i$, a função f deveria apresentar descontinuidades. Por fim, é necessário supor que, à medida que as transações com o ativo se sucedem após o choque, alguma informação adicional é fornecida sobre a realização de Δ, impactando, no modelo aqui desenvolvido, a variância da sua distribuição. Pode-se encarar esta hipótese de duas formas não excludentes. A primeira delas é a de que, à

medida que os agentes transacionam, a forma como o "mercado" avalia o choque vai se revelando, diminuindo a incerteza. A outra é a de que, conforme o tempo passa, novas informações vão surgindo sobre os efeitos do choque, diminuindo de forma idêntica o conjunto de possíveis cenários. De qualquer modo, tudo se passa como se cada agente, ao transacionar, o faça com um conjunto de informação maior do que o do operador que o precedeu. A hipótese que será aqui adotada é a de que a medida de probabilidade da variável aleatória Δ pode ser escrita da seguinte forma:

$$dP = h(t)\,\overline{dP} \tag{4.3}$$

$$\text{com } h'(t) < 0 \text{ e } h''(t) > 0$$

onde *h(t)* é uma função de *t*. Esta hipótese procura capturar o fato estilizado discutido nas páginas 4 e 5. Logo, o problema dos indivíduos que foi expresso anteriormente pelas equações em (2.3) pode ser reescrito, nesta segunda etapa, como:

$$\max_{q_n,\,t} E\left\{\frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n}\right\} =$$

$$\max_{q_n,\,t} \int \frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} h(t)\,\overline{dP} \tag{4.4}$$

donde seguem, utilizando as mesmas hipóteses que foram feitas anteriormente para a inversão da ordem das operações de derivação e integração, as seguintes condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial q_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\Delta - b - mQ_{<n} - 2mq_n^*}{\left[q_n^*\left(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n^*\right) - A\right]^{\gamma_n}} dP = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{-mq_n f'(t^*)}{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}} h(t^*)\,\overline{dP} +$$

$$\int \frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} h'(t^*)\,\overline{dP} = 0 \tag{4.6}$$

A condição expressa em (4.5) é análoga à que aparece em (2.4) e, portanto, suas propriedades são idênticas às que foram tratadas nas seções II e III. A condição em (4.6), no entanto, passa a ser também necessária para a solução do problema dado pelas equações em (4.4). Pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\int \frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} h'(t^*) - \frac{m\, q_n\, f'(t^*)\, h(t^*)}{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}}\, \overline{dP} = 0 \qquad (4.7)$$

A condição que foi obtida em (4.7) fornece uma correspondência $R_n\{\Delta, A, b, m, q_n\} = \{t^* : t^* \text{ resolve } (4.6)\}$. A solução do problema de equilíbrio dado pelas *N* equações em (4.4) corresponde a um ponto fixo da correspondência produto definida por:

$$R\{\Delta, A, b, m, q_n, t_1^*, t_2^*, ..., t_N^*\} =$$

$$R_1\{\Delta, A, b, m, q_1\} \text{ x } R_2\{\Delta, A, b, m, q_2\} \text{ x } .... \text{ x } R_N\{\Delta, A, b, m, q_N\}$$

O domínio desta correspondência é um subconjunto compacto e convexo de R^n. Desta forma, para verificar em que casos existe uma solução para o problema em (4.4), no qual todos os agentes decidem, simultaneamente, em que momento desejam negociar o ativo, inicia-se demonstrando o lema a seguir. Para simplificar a notação, defina *z* e *Q* como sendo, respectivamente, os vetores (Δ, *A*, *b*, *m*, q_n) e $(t_1, t_2, ..., t_N)$.

LEMA 4.1: Sendo *f* a função que é integrada em (4.7), sempre que $f \leq g$ e $\int g < \infty$, a correspondência *R* é semi-contínua superiormente na variável *Q*.

Demonstração: Obviamente, *R* é s.c.s. se e somente se cada uma das R_i, $i = 1, 2, ..., N$, for s.c.s. Assim, suponha que $\{t_{n,k}^*\}$ seja uma sequência tal que, para cada *k*, $t_{n,k}^*$ solucione (4.7). Suponha também que tenhamos o vetor $t_{n,k} = t_{1,k}, t_{2,k}, ..., t_{n-1,k}$ tal que $t_{n,k} \to t_{n,\infty}$ quando $k \to \infty$ e que $t_{n,k}^* \to t_{n,\infty}^*$. Então, afirmo que $t_{n,\infty}^* \in R\{z, t_{n,\infty}\}$. Com efeito, isto é trivial, uma vez que, por um lado tem-se:

$$\frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,k}) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n} h'\left(t^*_{n,k}\right)}{1-\gamma_n} - \frac{m\, q_n\ f'(t^*_{n,k})\, h\,(t^*_{n,k})}{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,k}) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}} \xrightarrow{q.c.}$$

$$\frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,\infty}) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n} h'\left(t^*_{n,\infty}\right)}{1-\gamma_n} - \frac{m\, q_n\ f'(t^*_{n,\infty})\, h\,(t^*_{n,\infty})}{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,\infty}) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}} \quad (4.8)$$

mas também, sabe-se que, por (4.7):

$$\int \frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,k}) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n} h'\left(t^*_{n,k}\right)}{1-\gamma_n} - \frac{m\, q_n\ f'(t^*_{n,k})\, h\,(t^*_{n,k})}{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,k}) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}} \overline{dP} = (\quad (4.9)$$

onde $\overline{dP}$ é uma medida de probabilidade e, portanto, só pode assumir valores positivos. Mas, se valem (4.7) e (4.8), então tem-se ainda que:

$$\int \frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,\infty}) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n} h'\left(t^*_{n,\infty}\right)}{1-\gamma_n} - \frac{m\, q_n\ f'(t^*_{n,\infty})\, h\,(t^*_{n,\infty})}{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*_{n,\infty}) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}} \overline{dP} \ \to 0$$

o que completa esta demonstração. ■

A última passagem é válida pela seguinte proposição, que estende o Teorema da Convergência Monótona:

PROPOSIÇÃO 4.2: $0 \le f_k \to f$ em quase todo ponto, então $0 \le \int f_k \to \int f$.

Demonstração: Ver Fernandez, página 75. ■

Para verificar em que casos a existência da solução do problema em (4.4) pode ser garantida só resta, portanto, investigar em que casos a função-objetivo é quase-côncava nas variáveis de escolha. Para isto, cumpre investigar em que casos a matriz Hessiana $D^2f(x)$ é negativa semi-definida, onde:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t_n^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial t_n\, \partial q_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_n\, \partial t_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial q_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_n^2} = \int \frac{-mq_n\, f'(t_n)\, h'(t_n)}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{\gamma_n}} + \frac{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{1-\gamma_n} h''(t_n)}{1-\gamma_n}\,\overline{dP} +$$

$$\int -\frac{mq_n\left[f'(t_n)h'(t_n) + f''(t_n)h(t_n)\right]}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{\gamma_n}} + \frac{\gamma_n m^2 q_n^2 \left[f'(t_n)\right]^2 h(t_n)}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{1+\gamma_n}}\,\overline{dP}$$

Para que o sinal desta derivada seja menor ou igual a zero, é preciso que:

$$\int \frac{mq_n\left\{f'(t_n)\, h'(t_n) + \left[f'(t_n)h'(t_n) + f''(t_n)h(t_n)\right]\right\}}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{\gamma_n}}\,\overline{dP} \geq$$

$$\int \frac{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{1-\gamma_n} h''(t_n)}{1-\gamma_n} + \frac{\gamma_n m^2 q_n^2 \left[f'(t_n)\right]^2 h(t_n)}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{1+\gamma_n}}\,\overline{dP} \quad (4.10)$$

Além disto, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_n\, \partial q_n} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_n\, \partial t_n} = \int \frac{\left(\Delta - b - mf(t_n) - 2mq_n\right) h'(t_n) - mf'(t_n)\, h(t_n)}{\left[q_n(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n) - A\right]^{\gamma_n}}\,\overline{dP} +$$

$$\int \frac{\gamma_n mq_n f'(t_n)\, h(t_n)\left(\Delta - b - mf(t_n) - 2mq_n\right)}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{1+\gamma_n}}\,\overline{dP}$$

Para que esta derivada tenha sinal não-positivo, a condição necessária é:

$$\int \frac{\left(\Delta - b - mf(t_n) - 2mq_n\right) h'(t_n) - mf'(t_n)\, h(t_n)}{\left[q_n(\Delta - b - mQ_{<n} - mq_n) - A\right]^{\gamma_n}}\,\overline{dP} +$$

$$\int \frac{\gamma_n mq_n f'(t_n)\, h(t_n)\left(\Delta - b - mf(t_n) - 2mq_n\right)}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{1+\gamma_n}}\,\overline{dP} \leq 0 \quad (4.11)$$

Por fim, deve-se observar que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_n^2} = \int \frac{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{\gamma_n}\left[-2m - \dfrac{\gamma_n\left(\Delta - b - mf(t_n) - 2mq_n\right)^2}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]}\right]}{\left[q_n(\Delta - b - mf(t_n) - mq_n) - A\right]^{2\gamma_n}} dP < 0$$

Sempre que as condições em (4.10) e (4.11) forem verificadas, portanto, a função-objetivo $U_i : A \to R^1$ será quase-côncava nas variáveis de escolha. É preciso, neste ponto, introduzir algumas definições:

Seja $A_i \subseteq R^m$ o conjunto de possíveis ações (estratégias) entre as quais o *i*-ésimo agente pode escolher. Um elemento típico de A_i é denotado por a_i. Defina $a_{-i} \equiv (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ como sendo o vetor de ações dos outros agentes que não *i*. Desta forma, $A = \prod_{j=1}^{N} A_j$ e $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$. Seja ainda $U_i : \prod_{j=1}^{N} A_j \to R^1$ a função-payoff (de utilidade) do agente *i*. $U_i : A \to R^1$ é dita *graficamente contínua* se, para todo $\bar{a} \in A$, existe uma função $F_i : A_{-i} \to A_i$ com $F_i(\overline{a_{-i}}) = \overline{a_i}$ tal que $U_i(F_i(a_{-i}), a_{-i})$ é contínua em $a_{-i} = \overline{a_{-i}}$. Um *jogo* pode ser resumido como $[(A_i, U_i); i = 1, ..., N]$. Finalmente, defina $\psi_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \,|\, U_i(a_i, a_{-i}) = \max_{a_i' \in A_i} U_i(a_i', a_{-i})\}$, onde $\psi_i(a_{-i})$ é chamada correspondência de reação do agente *i*.

Usando as definições introduzidas acima, é possível aplicar, considerando a validade das condições em (4.10) e (4.11) e o resultado do lema 4.1, o seguinte teorema, que estende o teorema de Debreu, Glicksberg e Fan (1952), permitindo uma forma fraca de descontinuidade da função-objetivo:

TEOREMA 4.3 (Dasgupta e Maskin)**:** Seja $A_i \subseteq R^m$ (i = 1, ... , N) não-vazio, convexo e compacto. Se, $\forall$ i, $U_i : A \to R^1$ é semi-contínua superiormente em a, graficamente contínua e quase-côncava em a_i, então o jogo $[(A_i, U_i); i = 1, ..., N]$ possui um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

<u>Demonstração:</u> O teorema será demonstrado para o caso em que N = 2. A extensão desta demonstração para o caso em que $N > 2$ é imediata. Sejam ψ_1 e ψ_2 as correspondências de reação dos dois agentes. Elas existem e assumem valores em um conjunto compacto porque U_1 e U_2 são semi-contínuas superiormente. Além disto, elas assumem valores em um conjunto convexo, uma vez que U_1 e U_2 são quase-côncavas em a_1 e a_2, respectivamente. Portanto, é necessário apenas mostrar que as correspondências ψ_i são semi-contínuas superiormente.

Considere as sequências $\{a_1^n\} \subseteq A_1$ e $\{a_2^n\} \subseteq A_2$, tais que $a_1^n \to \overline{a_1}$, $a_2^n \to \overline{a_2}$ e, $\forall$ *n*, $a_1^n \in \psi_1(a_2^n)$. Se $\overline{a_1} \notin \psi_1(\overline{a_2})$, existe $a_1^* \in A_1$ tal que $U_1(a_1^*, \overline{a_2}) > U_1(\overline{a_1}, \overline{a_2})$. Faça $\varepsilon = [U_1(a_1^*, \overline{a_2}) - U_1(\overline{a_1}, \overline{a_2})]/2$. Então, existem F com $F(\overline{a_2}) = a_1^*$ e $\delta > 0$ tais que $\| a_2 - \overline{a_2} \| < \delta$ implica em $| U_1(F_1(a_2^n), a_2^n) - U_1(a_1^*, \overline{a_2}) | < \varepsilon$. Logo, para *n* suficientemente grande, $| U_1(F_1(a_2^n), a_2^n) - U_1(a_1^*, \overline{a_2}) | < \varepsilon$. Mas $U_1(F_1(a_2^n), a_2^n) \leq U_1(a_1^n, a_2^n)$. Portanto, tem-se que, para *n* suficientemente grande, $U_1(a_1^n, a_2^n) \geq U_1(F_1(a_2^n), a_2^n) \geq U_1(\overline{a_1}, \overline{a_2}) + \varepsilon$. Por outro lado, $U_1(\overline{a_1}, \overline{a_2}) \geq \limsup_{n \to \infty} U_1(a_1^n, a_2^n)$, o que representa uma contradição. Logo, $\overline{a_1} \in \psi_1(\overline{a_2})$ e, portanto, ψ_1 é hemi-contínua superiormente. Demonstração análoga pode ser feita para ψ_2. Assim sendo, é possível aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani à correspondência ψ_1 x ψ_2 para concluir que existe um equilíbrio de Nash. ■

Quando as condições em (4.10) e (4.11) não são satisfeitas, a função-objetivo $U_i : A \to R^1$ não é quase-côncava e, portanto, o teorema 4.3 não pode ser aplicado. Desta forma, não é possível garantir a existência de um equilíbrio de Nash em estratégias puras para o problema dado pelas *n* equações em (4.4). Neste caso, equilíbrios de Nash em estratégias mistas podem ser a solução para o problema de não-existência de equilíbrio.

Conforme observado por Dasgupta e Maskin em seu trabalho *The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games*, a descontinuidade da função-objetivo não costuma ser responsável pela não-existência de equilíbrio em problemas como o aqui tratado, uma vez esta descontinuidade geralmente se dá em um conjunto de medida zero de Lebesgue, sendo isto particularmente verdadeiro para os problemas nos quais as descontinuidades da função-*payoff* surgem apenas nos pontos nos quais dois ou mais agentes usam a mesma estratégia. O teorema a seguir, que dispensa a condição de quase-concavidade da função-objetivo, demonstra a existência de equilíbrio de Nash em estratégias mistas para o caso mais geral possível, onde apenas uma forma muito fraca de continuidade é exigida da função-objetivo em (4.4).

TEOREMA 4.4 (Dasgupta e Maskin)**:** Seja $[(A_i, U_i); i = 1, \ldots, N]$ um jogo onde $A_i \subseteq R^1$ é um intervalo fechado. Suponha que, para cada *i*, as descontinuidades de U_i estão restritas a

um subconjunto de uma variedade contínua de dimensão menor do que *N*. Para ser preciso, para cada par de agentes $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, seja *D*(*i*) um inteiro positivo e, para cada inteiro *d*, com $1 \le d \le D(i)$, faça com que $f_{ij}^{d} : R^1 \to R^1$ seja uma bijeção contínua. Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, defina $A^*(i) = \{(a_1, \ldots, a_N) \in A \mid \exists\, j \neq i, \exists\, d, 1 \le d \le D(i) \text{ tal que } a_j = f_{ij}^{d}(a_i)\}$. Seja $U_i : A \to R^1$ (*i* = 1, ... , *N*) contínua, exceto em um subconjunto $A^{**}(i)$ de $A^*(i)$. Pelo resultado do lema 4.1, $\sum_{i=1}^{N} U_i(a)$ é semi-contínua superiormente. Suponha que U_i (a_i, a_{-i}) é limitada e fracamente semi-contínua inferiormente em a_i. Então o jogo $[(A_i, U_i); i = 1, \ldots, N]$ possui um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Demonstração: Serão apresentados os passos mais importantes desta demonstração, sendo alguns detalhes deixados para as referências. Suponha que as hipóteses no teorema são satisfeitas. Para todo *i* e *n* > 0, seja A_i^n um subconjunto finito de A_i para o qual $\sup_{a_i \in A_i} \inf_{a_i^n \in A_i^n} |a_i - a_i^n| < 1/n$. Para cada *n* > 0, faça com que $(\mu_1^n, \ldots, \mu_N^n)$ seja um equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo $[(A_i, U_i); i = 1, \ldots, N]$. Sabe-se que $\{\mu^n\}$ possui uma subsequência que converge. Suponha que o seu limite seja tal que $\lim_{n\to\infty}(\mu_1^n, \ldots, \mu_N^n) = (\mu_1^*, \ldots, \mu_N^*)$. Se μ^* não é um equilíbrio do jogo $[(A_i, U_i); i = 1, \ldots, N]$, então $\exists\, i$ e $\exists\, \overline{a_i} \in A_i$ tais que:

$$\int_{A_{-i}} U_i(\overline{a_i}, a_{-i})\, d\mu_{-i}^* > \int_A U_i(a)\, d\mu^* \tag{4.12}$$

Tem-se também que [2]:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A U_i(a)\, d\mu^n = \int_A U_i(a)\, d\mu^* \tag{4.13}$$

---

2. Ver o lema 4, nas páginas 13 e 14 de DASGUPTA, P. & MASKIN, E. (1986) *The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory*.

Logo, substituindo (4.12) em (4.11), tem-se que:

$$\int_{A_{-i}} U_i\left(\overline{a_i}, a_{-i}\right) d\mu^*_{-i} > \lim_{n\to\infty} \int_A U_i(a)\, d\mu^n \tag{4.14}$$

Pela desigualdade em (4.14), existe um conjunto não-enumerável de $\tilde{a}_i$'s com $\tilde{a}_i \in A_i$ tais que:

$$\int_{A_{-i}} U_i\left(\tilde{a}_i, a_{-i}\right) d\mu^*_{-i} > \lim_{n\to\infty} \int_A U_i(a)\, d\mu^n \tag{4.15}$$

o que não é possível [3].

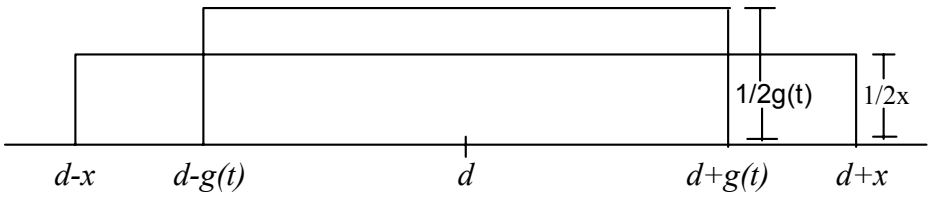
Portanto, μ^* é um equilíbrio em estratégias mistas do jogo $\left[(A_i, U_i); i = 1, \ldots., N\right]$, o que encerra esta demonstração. ■

Uma vez demonstrada, nas condições mais gerais possíveis, a existência de equilíbrio do problema dado pelas equações em (4.4), é possível verificar, como foi feito na seção III para a condição em (2.4), que forma assumiria a condição em (4.7) para algumas distribuições específicas da variável aleatória *Δ*. Isto será feito a seguir, para as mesmas distribuições consideradas na seção III. Iniciando mais uma vez pelo caso em que *Δ* é distribuída uniformemente no intervalo $\left[\delta - x, \delta + x\right]$, verifica-se que a condição em (4.6) pode ser reescrita como:

$$\int_{\delta-x}^{\delta+x} \left[\frac{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n\right) - A\right]^{1-\gamma_n}}{1-\gamma_n} h'\left(t^*\right) - \frac{m\, q_n\, f'(t^*)\, h(t^*)}{\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}} \right] \frac{1}{2x}\, d\Delta = 0$$

3. Ver o lema 3, nas páginas 12 e 13 de DASGUPTA, P. & MASKIN, E. (1986) *The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory*.

Neste ponto, é preciso notar que a função *h(t)*, no caso da distribuição uniforme, está intimamente relacionada ao intervalo de integração. Como a variância da distribuição diminui ao longo do tempo, à medida que as transações se sucedem, o mesmo ocorre com o intervalo no qual a uniforme está distribuída. À medida que o intervalo da distribuição uniforme diminui com o tempo, portanto, a área da função de densidade de probabilidade em parte do intervalo de integração se torna igual a zero, concentrando-se a área da distribuição no trecho de densidade positiva de forma que o somatório permaneça igual a um, como mostra a figura abaixo:



Desta forma, não há qualquer problema em calcular a integral acima para qualquer instante do tempo. A figura acima mostra, no entanto, que no caso particular em que a variável aleatória Δ é distribuída de forma uniforme, tem-se $h'(t) = 0$, uma vez que:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial t}$$

e *g(t)*, conforme mostra a figura, é sempre constante. Sendo assim, no caso uniforme, a condição de primeira ordem em (4.6), necessária para a solução do problema dado pelas equações em (4.4), reduz-se a:

$$-\int_{\delta-x}^{\delta+x} \frac{m\, q_n\, f'(t^*)\, h(t^*)}{2x\left[q_n\left(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n\right) - A\right]^{\gamma_n}} d\Delta = 0$$

Como o valor de dentro da integral será sempre positivo, o lado esquerdo da equação acima não poderá deixar de ser negativo, impedindo que a condição de primeira ordem possa ser satisfeita. **Sendo assim, o problema em (4.6) terá, neste caso, uma solução de canto, na qual todos os agentes escolherão $t^* = 0$**. Isto fará com que a ordenação dos agentes tenha que ser decidida por algum critério de sorteio, após o qual os operadores

escolherão as quantidades ótimas transacionadas de acordo com a condição em (3.3). No caso em que Δ segue uma distribuição normal com média δ e variância σ^2, a condição (4.6) torna-se equivalente a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\left[q_n\left(\Delta-b-mf(t^*)-mq_n\right)-A\right]h'\left(t^*\right)-\left(1-\gamma_n\right)mq_nh\left(t^*\right)}{\left(1-\gamma_n\right)\left[q_n\left(\Delta-b-mf(t^*)-mq_n\right)-A\right]^{\gamma_n}}\right]\exp\left[-\frac{\left(\Delta-\delta\right)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta=0$$

Neste caso, obtém-se os seguintes resultados a respeito de t^*:

$$\frac{\partial t^*}{\partial \delta}=-\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\left[q_n\left(\Delta-b-mf(t^*)-mq_n\right)-A\right]^{1-\gamma_n}h'\left(t^*\right)}{\left(1-\gamma_n\right)}\right]\frac{\delta\left(2\Delta-\delta\right)}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(\Delta-\delta\right)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta+}{D_3}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{mq_nf'(t^*)h(t^*)}{\left[q_n\left(\Delta-b-mQ_{<n}^*-mq_n\right)-A\right]^{\gamma_n}}\right]\frac{\delta(2\Delta-\delta)}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(\Delta-\delta\right)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta<0}{D_3}$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial \gamma_n}=-\frac{-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\left[\Delta q_n+c_2\right]h'\left(t^*\right)-\left(1-\gamma_n\right)mq_nf'(t^*)h(t^*)}{\left(1-\gamma_n\right)\left[\Delta q_n+c_2\right]^{\gamma_n}}\right]\ln\left[\Delta q_n^*+c_2\right]\exp\left[-\frac{\left(\Delta-\delta\right)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta>0}{D_3}$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial \sigma^2}=-\frac{-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\left[\Delta q_n+c_2\right]h'\left(t^*\right)-\left(1-\gamma_n\right)mq_nf'(t^*)h(t^*)}{\left(1-\gamma_n\right)\left[\Delta q_n+c_2\right]^{\gamma_n}}\right]\left[\frac{\left(\Delta-\delta\right)^2}{\sigma^3}\right]\exp\left[-\frac{\left(\Delta-\delta\right)^2}{2\sigma^2}\right]d\Delta>0}{D_3}$$

onde o valor de D_3 é dado por:

$$\left\{\frac{\left[q_n\left(\Delta-b-mf(t^*)-mq_n\right)-A\right]^{\gamma_n}h''\left(t^*\right)-mq_nf'(t^*)h'\left(t^*\right)}{\left(1-\gamma_n\right)\left[q_n\left(\Delta-b-mQ_{<n}^*-mq_n\right)-A\right]^{\gamma_n}}-\frac{mq_n\left[f''(t^*)h\left(t^*\right)+f'(t^*)h'\left(t^*\right)\right]}{\left[q_n\left(\Delta-b-mf\left(t^*\right)-mq_n\right)-A\right]^{\gamma_n}}-\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_nmq_nf'(t^*)\left\{\left[q_n\left(\Delta-b-mf\left(t^*\right)-mq_n\right)-A\right]h'\left(t^*\right)-\left(1-\gamma_n\right)mq_nf'(t^*)h\left(t^*\right)\right\}}{\left(1-\gamma_n\right)\left[q_n\left(\Delta-b-mf\left(t^*\right)-mq_n\right)-A\right]^{1+\gamma_n}}\right\}\exp\left[-\frac{\left(\Delta-\delta\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

que será menor do que zero sempre que:

$$\frac{\gamma_n m q_n f'(t^*)\{[q_n(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n) - A]h'(t^*) - (1-\gamma_n)mq_n f'(t^*)h(t^*)\}}{(1-\gamma_n)[q_n(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n) - A]^{1+\gamma_n}} +$$

$$\frac{mq_n[f''(t^*)h(t^*) + f'(t^*)h'(t^*)]}{[q_n(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n) - A]^{\gamma_n}} > \frac{[q_n(\Delta - b - mf(t^*) - mq_n) - A]^{\gamma_n} h''(t^*) - mq_n f'(t^*)h'(t^*)}{(1-\gamma_n)[q_n(\Delta - b - mQ^*_{<n} - mq_n) - A]^{\gamma_n}}$$

o que foi suposto como válido para a obtenção dos sinais das derivadas acima. Logo, verifica-se que, sob determinadas condições sobre a função *h(t)*, é possível mostrar que, no caso normal, agentes mais avessos ao risco, quando defrontados com choques, demoram mais para realizar seus negócios. Da mesma forma, os agentes em geral tendem a ser mais lentos quanto maior for a variância do preço do ativo provocada pelo choque e menor for o valor esperado da diferença entre o preço de mercado do ativo e o seu novo valor de equilíbrio induzido pelo choque.

V. CONCLUSÕES

Em um mundo habitado por indivíduos avessos ao risco, o *trade-off* entre risco e retorno é o ponto de partida de qualquer modelo de precificação de ativos. Desta forma, em situações de equilíbrio, o problema de comportamento estratégico dos investidores limita-se à escolha de um portfólio que maximize o retorno esperado, dada a variância que se tolera. Obviamente, indivíduos que aceitam incorrer em riscos mais altos recebem como recompensa retornos esperados igualmente mais elevados, e esta situação é capturada por modelos bastante conhecidos, como o CAPM e os modelos de fatores.

Quando os mercados ainda não estão em equilíbrio, no entanto, o problema de comportamento estratégico se torna muito mais interessante, uma vez que esta situação permite o surgimento de lucros extraordinários. Tipicamente, este é o caso de mercados cujo ativo subjacente sofre um choque inesperado. Como foi visto, choques deste tipo provocam rápidas alterações dos preços que oferecem oportunidades de lucros imediatos aos agentes que se dispuserem a transacionar em períodos de elevada volatilidade. Para descrever o problema de comportamento estratégico a ser resolvido pelos indivíduos nestas circunstâncias, foi desenvolvido nas últimas seções um modelo bastante geral e com hipóteses o mais realistas possível, conforme procurou-se demonstrar ao longo do texto.

Os resultados apresentados pelo modelo indicam que o *trade-off* entre risco e retorno também é a chave para a solução do tipo de problema descrito por este trabalho. Quando há incerteza sobre o novo valor de equilíbrio de um ativo após o choque e esta incerteza vai-se tornando menor à medida que mais informação é acrescentada ao conjunto disponível aos agentes, particularmente pela sinalização de preços fornecida pelos indivíduos que negociam após o choque, então aqueles que transacionam antes defrontam oportunidades de ganhos maiores, mas trabalham com um conjunto de informação menor. Este se reflete, no modelo, em uma maior variância da distribuição do novo valor de equilíbrio induzido pelo choque percebida pelos agentes. É natural que esta seja a escolha dos operadores menos avessos ao risco.

À medida que as transações se sucedem, o preço de mercado do ativo se move contra os agentes, diminuindo o retorno esperado da operação. Ao mesmo tempo, contudo, estas

transações (ou o tempo que decorre enquanto elas se dão) ampliam o conjunto de informação disponível, impactando negativamente a variância da distribuição do novo valor de equilíbrio induzido pelo choque e, portanto, reduzindo o risco percebido pelos indivíduos. Isto faz com que operadores cada vez mais avessos ao risco queiram negociar, até que o ganho esperado se torne suficientemente pequeno para que não hajam mais oportunidades de ganhos excepcionais e o preço encontre seu novo equilíbrio de não-arbitragem.

Isto é o que o modelo desenvolvido prediz. Como se depreende de um dos casos particulares estudados, o da distribuição normal, os agentes menos avessos ao risco negociam com conjuntos de informação menores, pois esperam que menos transações se sucedam para executar as suas ordens, e em quantidades maiores. Para agentes muito avessos ao risco, é possível que a diferença entre o preço de mercado vigente no momento (tardio) em que se deseja efetuar a operação e o novo valor de equilíbrio esperado seja tão pequena que não compense custos de transação e de mercado. Neste caso, todos os indivíduos que desejariam negociar daquele momento em diante se absterão de fazê-lo, o que significa que um novo equilíbrio foi alcançado.

Outra conclusão do modelo para o caso da distribuição normal é a de que, quanto melhor for a oportunidade de ganho extraordinário apresentada aos agentes, quaisquer que sejam estes, maiores serão as quantidades transacionadas desejadas e menores serão os intervalos de tempo que os operadores irão esperar para executar as suas ordens. Desta forma, verifica-se que, quanto maior for a média e menor for variância da distribuição do novo valor de equilíbrio induzido pelo choque, maiores serão as quantidades ótimas escolhidas e menores serão os montantes transacionados anteriormente que os agentes desejarão aguardar. Isto fará também com que um número maior de agentes deseje negociar o ativo.

O caso da distribuição uniforme, por sua vez, apresenta peculiaridades que impedem que, da sua solução, possam ser tiradas conclusões interessantes sobre o problema de escolha dos indivíduos no tempo, tratado na Seção IV. Assim sendo, apenas as conclusões alcançadas na Seção III, sobre o problema de escolha das quantidades ótimas negociadas pelos agentes, merecem ser examinadas. Nesta parte, verificou-se que os resultados obtidos foram idênticos aos do caso normal, onde a quantidade ótima que os agentes desejam

transacionar cresce com a diferença esperada entre o preço de mercado do ativo e o seu novo valor de equilíbrio induzido pela informação e cai conforme aumentam o coeficiente de aversão relativa ao risco dos indivíduos e a medida de variância da distribuição de Δ.

Um último ponto que merece ser considerado diz respeito à questão de existência de equilíbrio no modelo proposto. Esta só pode ser garantida impondo-se algumas restrições sobre a função de distribuição da variável aleatória tratada. Os teoremas de existência apresentados na quarta seção são desenvolvidos para as condições mais gerais possíveis. Particularmente, são válidos para qualquer função de distribuição continuamente diferenciável que se possa empregar. Uma demonstração irrestrita, no entanto, infelizmente não é possível, e só o que se pode fazer é verificar caso a caso se a existência de equilíbrio pode ser demonstrada.

VI. BIBLIOGRAFIA

DASGUPTA, P. & MASKIN, E. (1986) *The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory,* The Review of Economic Studies, LIII(1), n° 172, 1-26;

DASGUPTA, P. & MASKIN, E. (1986) *The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, II: Aplications,* The Review of Economic Studies, LIII(1), n° 172, 27-42;

DEWAN, S. & MENDELSON, H. (1998) *Information Technology and Time-Based Competition in Financial Markets*, Management Science, 44, n° 5, 595-609.

FERNANDEZ, P. J. (1996) *Medida e Integração*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 69-75.

LEAL, C. I. (1982) *Ensaio em Competição Monopolística*, Revista de Econometria, II, n° 2, 49-76.

LEAL, C. I. (1986) *Notas de Aulas de Teoria Econômica Avançada I*, Ensaios Econômicos da EPGE, n° 83, 1-19.

O'HARA, M. (1995) *Market Microstructure Theory*, Blackwell Publishers Inc. Cambridge, MA, 53-178.

TAKAYAMA, A. (1985) *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, New York, NY, 239-241, 259-263.