

Nº 92

TÓPICOS DE CONVEXIDADE E
APLICAÇÕES À TEORIA ECONÔMICA

Renato Fragelli Cardoso

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

TÓPICOS DE CONVEXIDADE E
APLICAÇÕES À TEORIA ECONÔMICA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À CONGREGAÇÃO DA
ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA (EPGE)
DO INSTITUTO BRASILEIRO DE ECONOMIA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE

MESTRE EM ECONOMIA

POR

RENATO FRAGELLI CARDOSO

RIO DE JANEIRO

Dezembro, 1986

AGRADECIMENTOS

Ao elaborar esta dissertação recebi a orientação de Carlos Ivan Simonsen Leal com a qual pude superar as dificuldades que surgiram ao longo do percurso. A Carlos Ivan devo a motivação para escrever sobre o tema escolhido e agradeço a dedicação e paciência com que leu as notas manuscritas que deram origem a esta versão final, apontando erros e fazendo sugestões.

A Sergio Ribeiro da Costa Werlang e Mario Henrique Simonsen agradeço a leitura da versão final do texto e as críticas recebidas.

Finalmente a Maria das Graças Vargas da Silva sou grato pela atenção com que pacientemente datilografou todo o texto, enfrentando tantos símbolos matemáticos trabalhosos.

<u>CAPITULO I: REQUISITOS MATEMÁTICOS</u>	01
I.1 - Introdução	01
I.2 - Espaços Vetoriais	03
I.3 - Convexidade	09
I.4 - Espaços Vetoriais Normados	15
I.5 - Teoremas de Separação	25
I.6 - Espaços de Banach e Teorema de Weierstrass ..	43
<u>CAPITULO II: OTIMIZAÇÃO CONDICIONADA</u>	47
II.1 - Introdução	47
II.2 - O Lema de Farkas	49
II.3 - Programação Linear	63
II.4 - O Teorema da Dualidade de Fenchel	77
II.5 - Programação Côncova	94
<u>CAPITULO III: APLICAÇÕES À TEORIA ECONÔMICA</u>	110
III.1 - Introdução	110
III.2 - O Modelo de Produção e Consumo de Arrow Debreu	110
III.3 - Existência de Equilíbrio na Economia de Pro- dução e Consumo	115
III.4 - Eficiência e Equilíbrio	132
III.5 - Apêndice	142

<u>CAPÍTULO IV: AUSÊNCIA DE CONVEXIDADE</u>	146
IV.1 - Introdução	146
IV.2 - O Teorema de Shapley-Folkman	153
IV.3 - O Modelo de Produção e Consumo sem Convexi- dade	166
IV.4 - O Modelo da Economia de trocas	174

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo discutir as implicações da hipótese de convexidade em modelos matemáticos da Teoria Econômica. A seleção dos pontos a serem abordados e sua distribuição ao longo dos quatro capítulos tenta conciliar a necessária objetividade de uma dissertação de mestrado com a fertilidade do tema escolhido.

O Capítulo I é destinado à exposição de conceitos puramente matemáticos que formam a base para a abordagem de problemas da Teoria Econômica tratados nos demais capítulos. Seu ponto alto são os teoremas de separação, obtidos a partir da hipótese de convexidade.

O Capítulo II utiliza os teoremas de separação para discutir alguns problemas de otimização condicionada que surgem com frequência em Teoria Econômica. Em cada seção apresentamos um desses problemas, provamos um teorema que o soluciona e o utilizamos em uma aplicação à Teoria Econômica.

No Capítulo III apresentamos o modelo de Arrow-Debreu. Este modelo baseia-se na hipótese de convexidade para provar a existência de equilíbrio competitivo em uma economia com produção e consumo.

O Capítulo IV destina-se à análise da existência de equilíbrio competitivo em economias em que não há a hipótese de convexidade. Na introdução do capítulo discutimos as implicações econômicas desta hipótese bem como de sua ausência em economias com um grande número de agentes. Em seguida apresentamos dois modelos de economia competitiva onde não consideramos a hipótese de convexidade.

NOTAÇÃO

Dados os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ utilizaremos as

notações abaixo:

$$x \geq y: \quad x_i \geq y_i \quad \text{para todo } i.$$

$$x > y: \quad x_i \geq y_i \quad \text{para todo } i \text{ e } x_{i'} > y_{i'} \quad \text{para pelo menos um } i'.$$

$$x \gg y: \quad x_i > y_i \quad \text{para todo } i.$$

Denotaremos os vetores $e, e_i \in \mathbb{R}^n$ por

$$e = (1, 1, \dots, 1)$$

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \text{ onde a } i\text{-ésima coordenada é } 1.$$

$$\mathbb{R}_+^n: \quad x \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{se } x \geq \theta.$$

$$\mathbb{R}_{++}^n: \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n \quad \text{se } x \gg \theta.$$

CAPÍTULO I

REQUISITOS MATEMÁTICOS

I.1 - Introdução

Neste capítulo desenvolvemos o instrumental matemático que aplicamos nos demais capítulos. O capítulo está dividido em 6 seções.

Na seção I.1 apresentamos os principais conceitos da álgebra linear com os quais trabalhamos em todo o capítulo.

Na seção I.3 definimos conjunto convexo e provamos os principais teoremas envolvendo esta definição.

A seção I.4 introduz a noção de norma de um vetor com a qual podemos definir propriedades topológicas dos conjuntos no espaço \mathbb{R}^n . Em seguida definimos convergência de seqüências e continuidade de funções.

A seção I.5 apresenta o funcional de Minkowski

e o utiliza para demonstrar o principal teorema deste capítulo: o teorema de separação de Mazur. Os corolários deste Teorema serão muito utilizados nos capítulos II e III.

Finalmente, na seção I.6 damos uma demonstração do Teorema de Weierstrass que garante a existência de pontos de máximo e de mínimo de funções reais definidas em um conjunto compacto.

I.2 - Espaços Vetoriais

Neste ítem são apresentados os principais conceitos da Álgebra Linear e alguns de seus resultados cujas demonstrações são omitidas para que não nos desviemos do tema deste trabalho.

Definição:

Um espaço vetorial E é um conjunto de elementos chamados de vetores com as operações de soma e multiplicação por escalar. Dados dois vetores $x, y \in E$ e um escalar λ , tem-se $x+y \in E$ e $\lambda x \in E$. O conjunto E e as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar devem satisfazer aos axiomas abaixo:

- 1) $x+y = y+x$
- 2) $(x+y) + z = x+(y+z)$
- 3) Existe um vetor nulo $\theta \in E$ tal que $x+\theta = x$ para todo $x \in E$
- 4) Para todo $x \in E$ existe $-x \in E$ tal que $x+(-x) = \theta$
- 5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
- 6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

$$7) (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$8) 0x = \theta \text{ e } 1x = x$$

Exemplos: $E = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$

$E =$ Espaços das funções polinomiais definidas num intervalo real $[a, b]$

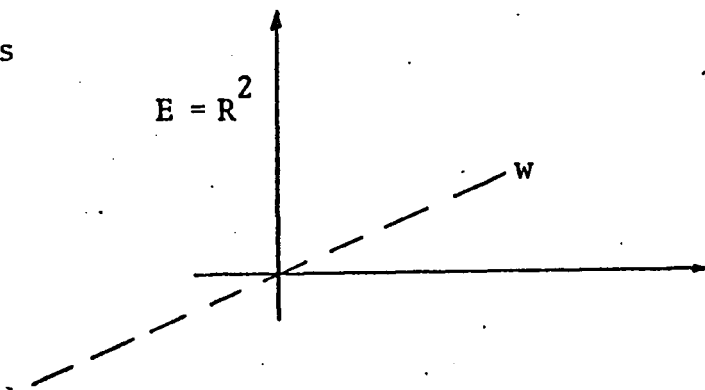
Definição:

Um subespaço W do espaço vetorial E é um subconjunto de E tal que $\alpha x + \beta y \in W$ sempre que $x, y \in W$.

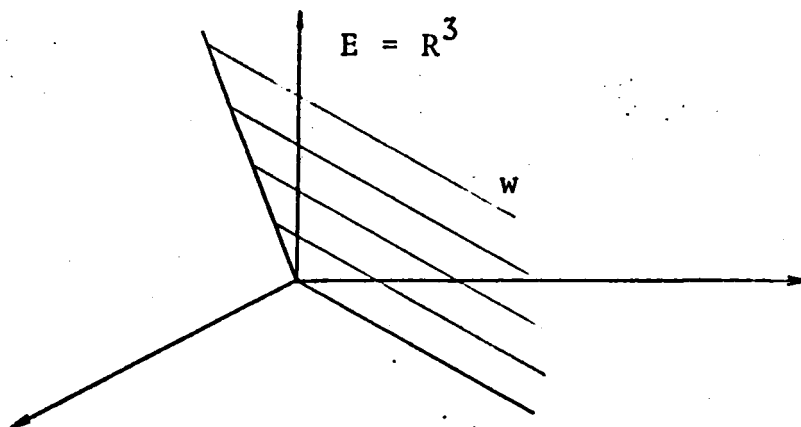
Exemplos:

- Qualquer reta em \mathbb{R}^2 que contém a origem é um subespaço. 0
- \mathbb{R}^2 também é um subespaço.

Exemplos



- Qualquer reta ou plano em \mathbb{R}^3 que contém a origem é um subespaço. O \mathbb{R}^3 é também um subespaço.



E = espaço das funções reais no intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$

E_p = espaço das funções polinomiais no intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$

E_e = espaço das funções exponenciais no intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$

E_p e E_e são subespaços de E

Definição:

Uma combinação linear de vetores x_1, x_2, \dots, x_n

de um espaço vetorial E é o vetor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

onde os $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são escalares.

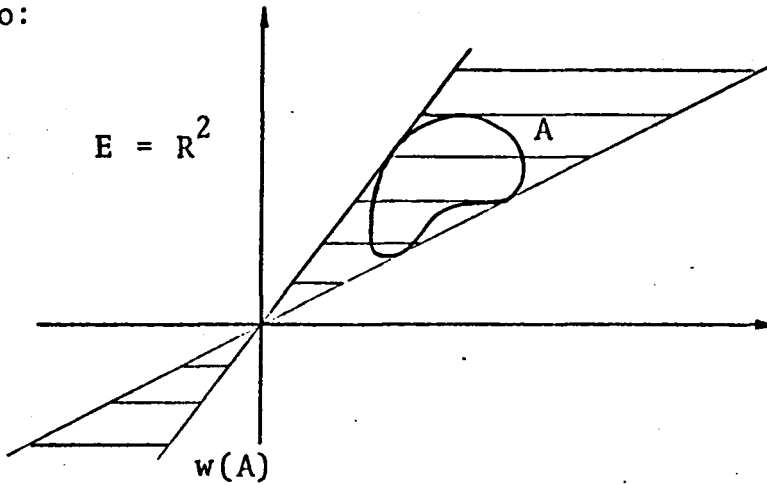
Definição:

Seja A um subconjunto do espaço vetorial E . O

conjunto formado por todas as combinações lineares de ele-

mentos de A é chamado de subespaço gerado por A e será denominado por $W(A)$.

Exemplo:



Definição:

Um conjunto finito A de vetores linearmente independentes é denominado base de um espaço vetorial E se $W(A) = E$, isto é, se o conjunto gera o espaço.

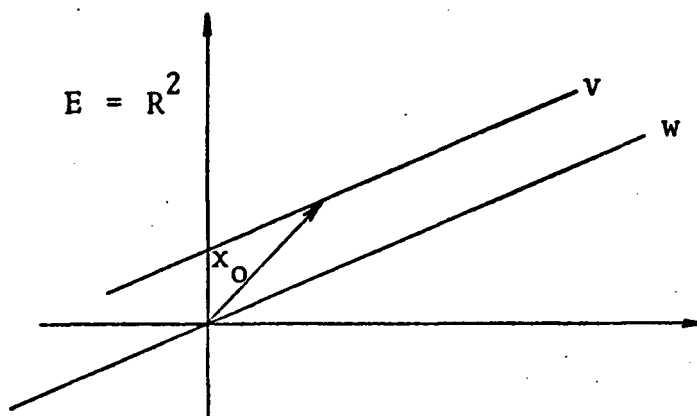
Exemplo: $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ é base do espaço E_p

Definição:

Seja W um subespaço do espaço vetorial E e x_0 um vetor de E . A translação de W por x_0 é chamada de variedade linear de W que passa por x_0 e é representada por $V =$

$$= x_0 + W$$

Exemplo:



Definição:

Um vetor x de um espaço vetorial E é dito linearmente independente de um conjunto A contido nesse espaço se x não puder ser escrito como uma combinação linear de vetores de A . Um conjunto de vetores é dito linearmente independente se cada um dos vetores é linearmente independente em relação aos demais.

Resultado 1:

Um conjunto de vetores x_1, x_2, \dots, x_n são linearmente independentes se, e somente se $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Definição:

Um espaço vetorial é dito de dimensão finita quando admite como base um conjunto finito de vetores.

Resultado 2:

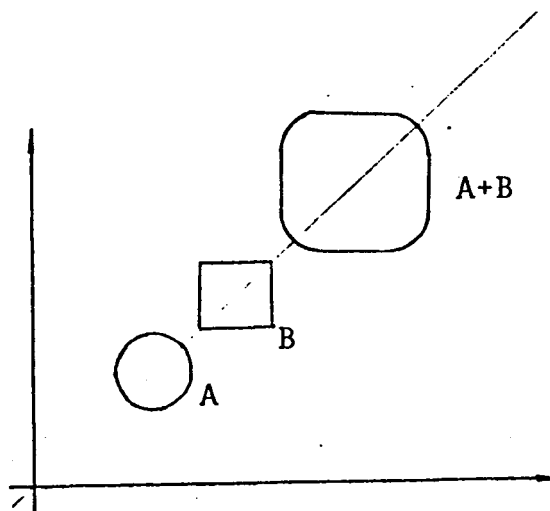
Duas bases de um mesmo espaço vetorial E têm necessariamente o mesmo número de vetores linearmente independentes.

Definição:

Sejam A e B dois conjuntos contidos no espaço vetorial E . A soma de A e B , representada por $A+B$, é o conjunto de todos os vetores $a+b$ onde $a \in A$ e $b \in B$.

Exemplo:

$$E = \mathbb{R}^2$$



Definição:

Sejam E e F dois espaços vetoriais definidos sobre o mesmo corpo de escalares. O produto cartesiano de E por F , representado por $E \times F$ é o conjunto de todos os pares ordenados (e, f) onde $e \in E$ e $f \in F$:

Analogamente o produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$:

Exemplo: $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^2$ $E \times F = \mathbb{R}^3$

I.3.- ConvexidadeDefinição:

Um conjunto C contido num espaço vetorial E é convexo se dados dois pontos $x_1, x_2 \in C$, todos os pontos da forma $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ com $0 \leq \alpha \leq 1$ pertencem a C .



não convexo



convexo

Definição:

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n pontos de um espaço vetorial E . Uma combinação convexa destes pontos é o ponto

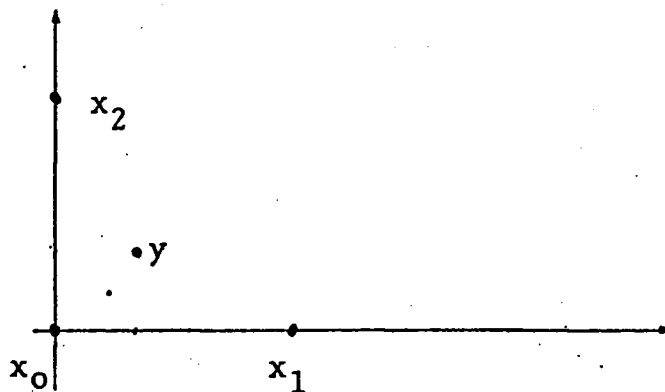
$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

exemplo: $E = \mathbb{R}^2$ $x_1 = (0, 0)$

$$x_2 = (0, 1)$$

$$x_3 = (1, 0)$$

$$y = \frac{1}{3} x_0 + \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Teorema I.1

A interseção de uma família (finita ou infinita) de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

prova: Seja uma família de conjuntos convexos A_λ ($\lambda \in \Lambda$). Se

x e $y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ então x e $y \in A_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Se-

ja $s(x,y)$ o conjunto dos pontos da forma $\alpha x + (1-\alpha)y$,

$0 \leq \alpha \leq 1$. Como cada A_λ é convexo, segue-se que

$$s(x,y) = A_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in \Lambda. \text{ Logo } s(x,y) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

O que prova que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Q.E.D.

Teorema I.2

Sejam C_1 e C_2 conjuntos convexos no espaço vetorial E . Então os conjuntos $C_1 + C_2$ e $C_1 \times C_2$ são convexos.

prova: Tome $x_1, y_1 \in C_1$ e $x_2, y_2 \in C_2$. Temos $x = x_1 + x_2 \in C_1 + C_2$ e $y = y_1 + y_2 \in C_1 + C_2$. Seja $0 \leq \alpha \leq 1$. $\alpha x + (1-\alpha)y = \alpha(x_1 + x_2) + (1-\alpha)(y_1 + y_2) = (\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + (\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2) \in C_1 + C_2$ pois C_1 e C_2 são convexos.

Seja $x = (x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$ e $y = (y_1, y_2) \in C_1 \times C_2$. $\alpha x + (1-\alpha)y = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (1-\alpha)y_1, (1-\alpha)y_2) = (\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)y_2) \in C_1 \times C_2$ pois C_1 e C_2 são convexos.

Q.E.D.

Teorema I.3

Um conjunto C é convexo se, e somente se, toda combinação convexa de um número finito de elementos de C pertence a C .

prova: Se toda combinação convexa de elementos de C pertence a C , uma combinação convexa de dois elementos de C pertence a C , logo C é convexo.

Para provar que toda combinação convexa de um número n finito de elementos de C pertence a C utilizamos o princípio de indução finita. Para $n=2$ é trivial. Suponha que a afirmativa vale para $n > 2$. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in C$ tome $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Se para algum i , $\lambda_i = 0$ então x é uma combinação convexa de n elementos e pertence a C pela hipótese de indução. Se $\lambda_i > 0$ para todo i temos:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

$$\text{onde } \lambda_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{seja } \bar{x} = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} x_n, \text{ e } \beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$\lambda_{n+1} = 1 - \beta$$

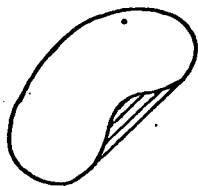
$\bar{x} \in C$ pois é combinação convexa de n elementos. Te-

mos $x = \beta \bar{x} + (1-\beta) x_{n+1} \in C$.

Q.E.D.

Definição:

Seja A um conjunto do espaço vetorial E . Denomina-se fecho convexo de A , representado por $\text{co}(A)$ ao menor conjunto convexo que contém A .



Teorema I.4

Seja A um conjunto do espaço vetorial E . Então $\text{co}(A)$ é o conjunto de todas as combinações convexas de um número finito de elementos de A .

prova: Seja $Y = \{y \in E: y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$,

$n < \infty$ }, o conjunto de todas as combinações convexas de um número finito n arbitrário de elementos de A . Devemos mostrar que $Y = \text{co}(A)$, isto é, $Y \subseteq \text{co}(A)$ e $\text{co}(A) \subseteq Y$.

Seja $y \in Y$, $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, $x_i \in A$ para todo i . Se $x_i \in A$ então $x_i \in \text{co}(A)$. Como $\text{co}(A)$ é convexo, pelo Teorema I.3 temos $y \in \text{co}(A)$, isto prova que $Y \subseteq \text{co}(A)$.

Para provar que $\text{co}(A) \subseteq Y$ basta observar que $A \subseteq Y$ e que Y é convexo. De fato se $x_i \in A$, $y = 0 x_1 + \dots + 1 x_i + \dots + 0 x_n \in Y$, ou seja $x_i \in Y$, isto prova que

$A \subseteq Y$. Para mostrar que Y é convexo tome $y^1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^1 x_i^1$

e $y^2 = \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 x_j^2$, $x_i^1, x_j^2 \in A$. Se $0 \leq \beta \leq 1$. Temos

$$\beta y^1 + (1-\beta)y^2 = \sum_{i=1}^n \beta \alpha_i^1 x_i^1 + \sum_{j=i}^n (1-\beta) \alpha_j^2 x_j^2. \text{ Defina}$$

$$\beta \alpha_i^1 = \lambda_k \text{ e } (1-\beta) \alpha_j^2 = \lambda_{k+n}, x_i^1 = x_k \text{ e } x_j^2 = x_{k+n}.$$

$$\text{Note que } \sum_{i=2}^n \beta \alpha_i^1 + \sum_{i=k}^m (1-\beta) \alpha_j^2 = \beta \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 \right) +$$

$$+ 1 \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 = 1. \text{ Temos } \beta y_1 + (1-\beta)y_2 = \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k x_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad x_k \in A. \text{ Logo } \beta y_1 + (1-\beta)y_2 \in Y$$

isto prova que Y é convexo.

Q.E.D.

1.4 - Espaços Vetoriais Normados

Definição:

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial E no qual se pode definir uma função que transforma todo vetor $x \in E$ num número real $\|x\|$ denominado norma de x .

A norma satisfaz aos seguintes axiomas:

- 1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x=0$.
- 2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo x e $y \in E$.
- 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $x \in E$ e todo escalar α .

O conceito de norma permite definir propriedades topológicas dos conjuntos contidos num espaço vetorial normado.

Vejam os alguns exemplos de espaços vetoriais normados.

Exemplo 1:

- O espaço vetorial \mathbb{R}^n é normado pois podemos definir para todo $x \in \mathbb{R}^n$ um número real $\|x\|$, denominado norma euclidiana de x ,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

o qual satisfaz às propriedades (1), (2) e (3).

No espaço \mathbb{R}^n podemos definir duas outras normas que serão utilizadas no Capítulo IV:

Norma do Máximo: $\|x\|_M = \max |x_i| \quad 1 \leq i \leq n$

Norma da Soma: $\|x\|_S = \sum_{i=1}^n |x_i|$

onde $|x_i| = \sqrt{x_i^2}$

Exemplo 2:

- O espaço vetorial $C[a,b]$ das funções reais contínuas no intervalo $[a,b]$ é normado pois podemos associar a cada função $x \in C[a,b]$ um número real $\|x\|$ que obedece às proprie-

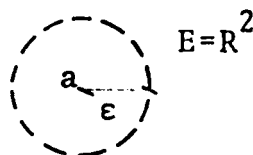
dades (1), (2) e (3), definido por

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

Definição:

Define-se a bola aberta de raio $\epsilon > 0$ e centro $a \in E$ como o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que $\|x-a\| < \epsilon$, isto é:

$$B(a, \epsilon) = \{x : x \in E, \|x-a\| < \epsilon\}$$

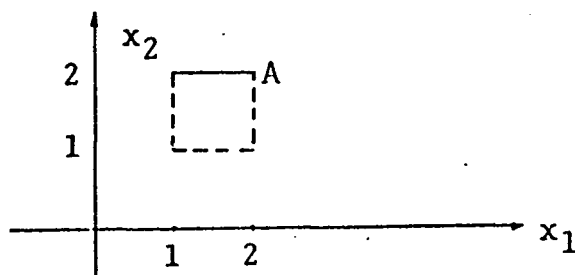


Definição:

Um ponto $x \in A$ é um ponto interior do conjunto A se existe $\epsilon > 0$ para o qual $B(x, \epsilon) \subset A$.

Exemplo: $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1 < x_1 < 2, 1 < x_2 \leq 2\}$

todo ponto $(x_1, x_2) \in A$ tal que $x_2 \neq 2$ é ponto interior de A .



$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 1\}$$

Nenhum ponto de B é ponto interior pois toda bola de raio $\varepsilon > 0$ e o centro $(x_1, 1)$ contém o ponto $(x_1, 1 + \varepsilon/2) \notin B$.

Definição:

Chama-se de conjunto interior de A , denotado A° , ao conjunto de todos os pontos interiores de A .

Definição: Um conjunto A é dito aberto se $A = A^\circ$

Definição:

Um ponto $x \in E$ é um ponto de acumulação do conjunto A se para todo $\varepsilon > 0$ existe um ponto $y \in A$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$

Decorre desta definição que todo ponto $x \in A^\circ$ é um ponto de acumulação de A pois por hipótese existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$, podendo-se obter $y \in A$, $y \in B(x, \varepsilon)$ e isto leva a $\|x - y\| < \varepsilon$, o que caracteriza x como ponto de acumulação de A . Contudo, pode haver um ponto $x \in A$ que não é ponto de acumulação do conjunto A . Por exemplo seja $A = \{x, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{2\}$. \square

ponto $x=2$ não é ponto de acumulação de A .

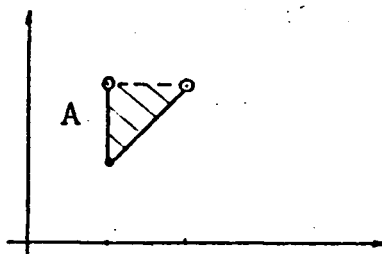
Note-se, finalmente, que a definição de ponto de acumulação não exige que o ponto pertença ao conjunto. Seja $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1 < x_1 < 2, 1 < x_2 < 2\}$. O ponto $x=(1,1) \notin A$ mas para todo $\epsilon > 0$ o ponto $y=(1+\epsilon/2, 1+\epsilon/2)$, $y \in A$ é tal que $\|x-y\| < \epsilon$.

Definição

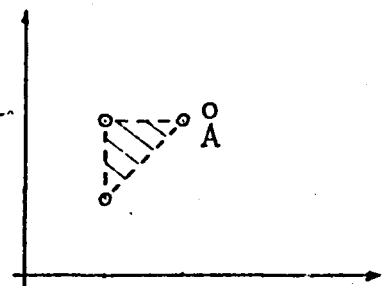
Denomina-se por fecho de A ao conjunto A formado por todos os pontos de acumulação do conjunto A .

Exemplo 1: $E = \mathbb{R}^2$

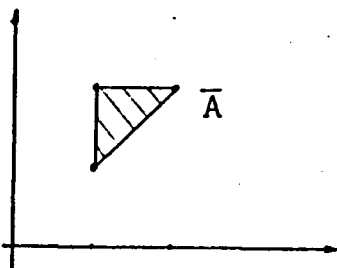
$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x_1 \leq x_2 < 2\}$$



$$\overset{\circ}{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1 < x_1 < x_2 < 2\}$$

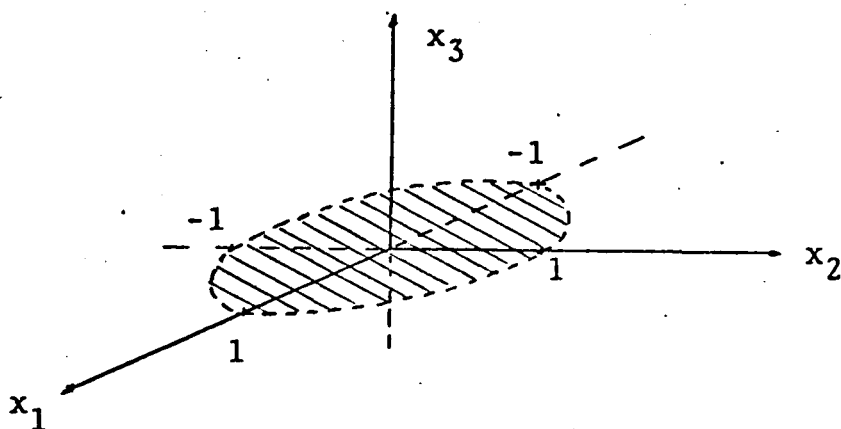


$$\bar{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2\}$$



Exemplo 2: Seja o conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto aberto

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ e } x_3 = 0\}$$



$$\bar{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$$

$\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ pois para qualquer bola aberta $B(x, \epsilon) \subset \bar{A}$,

possui um ponto $(x_1, x_2, \epsilon/2) \notin \bar{A}$

Definição: Um conjunto A é fechado se $A = \bar{A}$

Teorema I.5

Seja C um conjunto convexo num espaço vetorial normado. Então $\overset{\circ}{C}$ e \bar{C} são conjuntos convexos.

prova: Se $\bar{C} = \emptyset$, \bar{C} é convexo. Sejam $x_1, x_2 \in \bar{C}$ e tome $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Devemos mostrar que $x \in \bar{C}$.

Pela definição de \bar{C} , dado $\epsilon > 0$ existem $y_1, y_2 \in C$ tais que $\|x_1 - y_1\| < \epsilon$ e $\|x_2 - y_2\| < \epsilon$. Tome $y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in C$.

Temos $\|x - y\| = \|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\| =$

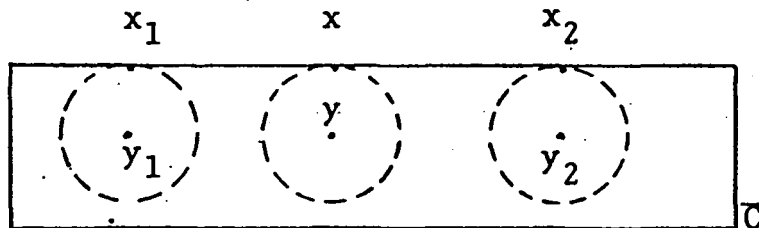
$$= \|\lambda(x_1 - y_1) + (1-\lambda)(x_2 - y_2)\|$$

logo $\|x - y\| \leq \lambda \|x_1 - y_1\| + (1-\lambda)\|x_2 - y_2\| < \lambda \epsilon + (1-\lambda)\epsilon = \epsilon$

logo $x \in \bar{C}$, o que prova que \bar{C} é convexo.

Q.E.D.

Ilustração da prova para \bar{C} :



Se $\overset{\circ}{C} = \emptyset$, $\overset{\circ}{C}$ é convexo. Sejam $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{C}$, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_1, \epsilon) \subset C$ e $B(x_2, \epsilon) \subset C$. Tome $\tilde{x}_1 = x_1 + w$ e $\tilde{x}_2 = x_2 + w$, $\|w\| < \epsilon$ temos $\tilde{x}_1 \in \overset{\circ}{C}$ pois $\|\tilde{x}_1 - x_1\| < \epsilon$ e, analogamente, $\tilde{x}_2 \in \overset{\circ}{C}$. Defina $\tilde{x} = \lambda \tilde{x}_1 + (1-\lambda)\tilde{x}_2$ $0 \leq \lambda \leq 1$, onde \tilde{x}_1 e $\tilde{x}_2 \in C$ pois \tilde{x}_1 e $\tilde{x}_2 \in \overset{\circ}{C}$. Devemos mostrar que $\tilde{x} \in \overset{\circ}{C}$. Temos $\tilde{x} = \lambda(x_1 + w) + (1-\lambda)(x_2 + w) =$

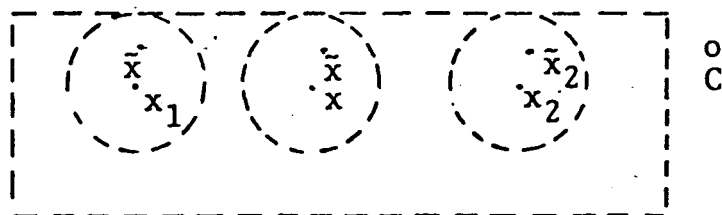
$$= \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + w = x + w, \text{ ou } \tilde{x} - x = w, \text{ isto leva a}$$

$\|\bar{x} - x\| = \|w\| < \epsilon$, o que implica $\bar{x} \in B(x_1, \epsilon)$. Isto pro-

va que $\overset{o}{C}$ é convexo.

Q.E.D

Ilustração da prova para $\overset{o}{C}$



Definição:

Uma seqüência de vetores em E é uma função cujo domínio são os números naturais e o contradomínio é o espaço E .

Exemplo:

$$x_n = \{x_n \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}, x_2 = (1/x, 1/x^2)\}$$

$$x_n = \{(1,1), (1/2, 1/4), (1/3, 1/9), \dots\}$$

$$y_n = \{y_n \in \text{espaço das funções reais}; y_n = t^n, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$y_n = \{t, t^2, t^3, \dots\} \text{ seqüência de funções}$$

Definição

Diz-se que uma seqüência x_n é convergente para

um ponto x se x é o único ponto de acumulação do conjunto $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Representa-se a convergência por $x_n \longrightarrow x$.

Definição

Dados dois subconjuntos A e B de espaços vectoriais normados $f:A \longrightarrow B$ é uma função contínua se para todo ponto $x \in A$ e $f(x) \in B$ e sequência $x_n \in A$ e $f(x_n) \in B$ tal que $x_n \longrightarrow x$, tivermos $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

Definição

Um funcional é uma função cujo domínio é um espaço vetorial E e cujo contra domínio é o conjunto dos números reais.

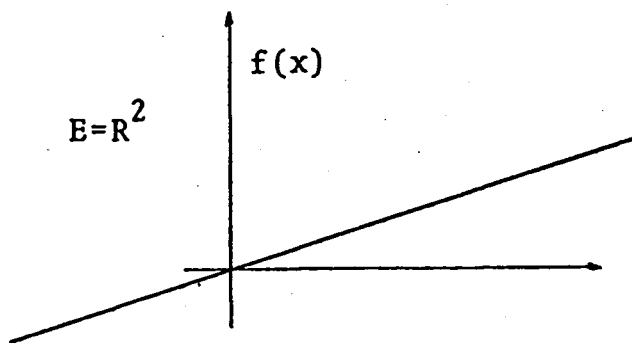
Definição

Um funcional $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito linear se para todos vetores x e $y \in E$ e escalares α, β tem-se $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Note que um funcional linear $f:E \longrightarrow \mathbb{R}$ é con-

tínuo se, e somente se, f é contínuo no ponto θ . De fato tomando-se a seqüência $x_n \longrightarrow x$ tem-se $f(x_n) - f(x) = f(x_n - x) \longrightarrow f(\theta)$.

Exemplo:

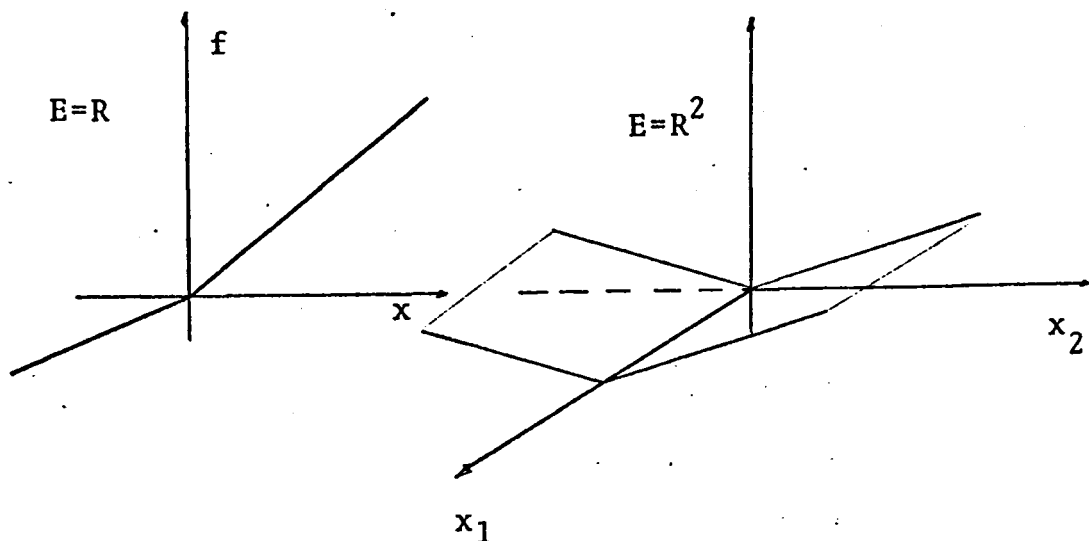


Definição:

Um funcional $f: E \longrightarrow R$ é dito sub-linear se:

- 1) $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in E$
- 2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in E$ e $\alpha \geq 0$

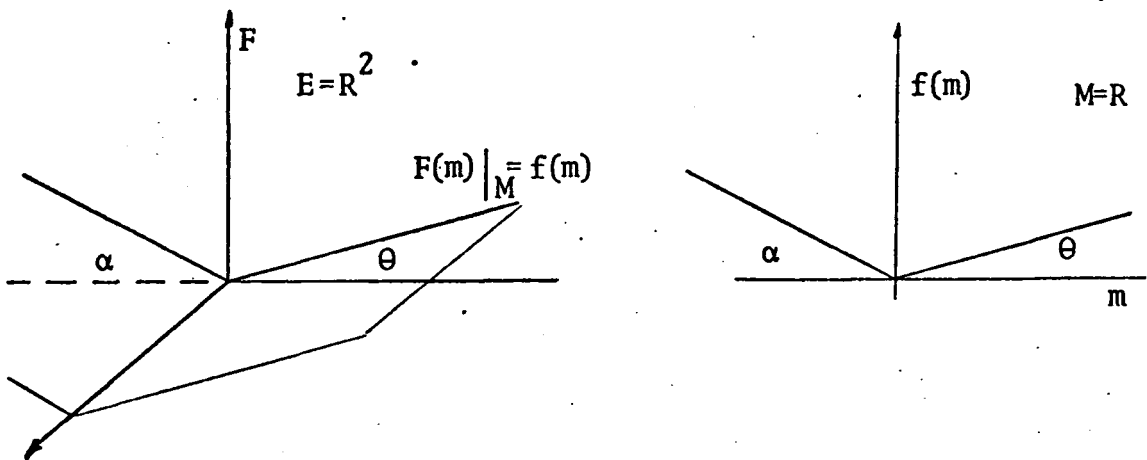
Exemplo:



I.5 - Teoremas de Separação

Em muitas situações da teoria Econômica deseja-se obter pontos de um espaço vetorial que satisfazem a determinadas propriedades. A possibilidade de separar tais pontos dos demais pontos do espaço vetorial é assegurada, sob certas condições, pelos teoremas de separação que são discutidos neste item.

Inicialmente, vejamos o conceito de extensão cuja idéia pode ser visualizada na figura a seguir:



Partindo-se de um funcional linear f definido num subespaço, cria-se um funcional linear F definido num subespaço mais amplo que, quando restrito ao subespaço inicial coincide com f . O teorema de Hahn-Banach na forma ex-

tensiva assegura a extensão de f ao espaço todo.

Definição:

Seja f um funcional linear definido num subespaço M de um espaço vetorial E e N um subespaço de E que contém M . Um funcional linear $F: N \rightarrow R$ é uma extensão do funcional $f: M \rightarrow R$ de M a N se F é idêntico a f em M , isto é $F(m) = f(m)$ para todo $m \in M$.

Lema I.1

Seja E um espaço vetorial, M um subespaço de E e $y \in E$, $y \notin M$. Seja $W(y+M)$ o subespaço gerado pelo conjunto $y+M$. Então todo vetor deste subespaço é da forma $x = m + \beta y$, onde $m \in M$ e α é um escalar.

prova: Seja $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ uma base para M , y não pode ser escrito como combinação linear dos elementos $\{m\}_{i=1}^r$, logo, $\{y, m_1, m_2, \dots, m_r\}$ são linearmente independentes e, portanto, formam uma base para $W(y+M)$.

Desta forma todo $x \in W(y+M)$ é da forma $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i + \beta y$,

isto é, $x = m + \beta y$, $m \in M$

Q.E.D.

Teorema I.6 - Hahn Banach, Forma Analítica

Seja E um espaço vetorial real e M um subespaço de E . Sejam o funcional sub-linear $p: E \rightarrow \mathbb{R}$, e o funcional linear $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, tais que, $f(m) \leq p(m)$ para toda $m \in M$. Então existe uma extensão F de f de M a E tal que $F(x) \leq p(x)$ todo $x \in E$.

prova: Seja $y \in E$, $y \notin M$. Seja o subespaço $W(M+y)$. Pelo lema este subespaço tem dimensão igual a $\dim(M)+1$ e todas seus vetores são da forma $x = m + \alpha y$. Uma extensão da f de M a $W(M+y)$ tem a forma $g(x) = f(m) + \alpha g(y)$ a qual para ser perfeitamente especificada basta definir a constante $g(y)$. Provemos que esta constante pode ser escolhida de forma tal que $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in W(M+y)$.

Para tal sejam $m_1, m_2 \in M$.

$f(m_1) + f(m_2) = f(m_1+m_2)$ pois f é linear.

$$f(m_1+m_2) \leq p(m_1+m_2) \quad \text{pois } m_1+m_2 = m \in M$$

$$p(m_1+m_2) = p((m_1-y)+(m_1+y)) \leq p(m_1-y) + p(m_2+y) \quad \text{pois } p \text{ é sub-} \\ \text{-linear em } W(y+M)$$

Logo $f(m_1) - p(m_1-y) \leq p(m_2+y) - f(m_2)$. Como m_1 e m_2 são arbitrários em M , $\sup_{m \in M} \{f(m) - p(m-y)\} \leq \inf_{m \in M} \{p(m+y) - f(m)\}$. Seja $c \in \mathbb{R}$

$$\text{tal que } \sup_{m \in M} \{f(m) - p(m-y)\} \leq c \leq \inf_{m \in M} \{p(m+y) - f(m)\}$$

Para o vetor $x = m+\alpha y \in W(M+y)$, defina $g(x) =$

$$= f(m) + \alpha c. \text{ Devemos mostrar que } g(m+\alpha y) \leq p(m+\alpha y)$$

Se $\alpha > 0$ temos

$$g(m+\alpha y) = \alpha c + f(m) = \alpha \left[c + f\left(\frac{m}{\alpha}\right) \right] \leq \alpha \left[\left\{ p\left(\frac{m}{\alpha} + y\right) - f\left(\frac{m}{\alpha}\right) \right\} + f\left(\frac{m}{\alpha}\right) \right] = \\ = \alpha p\left(\frac{m}{\alpha} + y\right) = p(m + \alpha y)$$

Se $\alpha < 0$ faça $\alpha = -\beta < 0$

$$g(m+\alpha y) = -\beta c + f(m) = \beta \left[-c + f\left(\frac{m}{\beta}\right) \right] \leq \beta \left[\left\{ p\left(\frac{m}{\beta} - y\right) - f\left(\frac{m}{\beta}\right) \right\} + f\left(\frac{m}{\beta}\right) \right] = \\ = \beta p\left(\frac{m}{\beta} - y\right) = p(m - \beta y) = p(m + \alpha y)$$

Portanto $g(m+\alpha y) \leq p(m+\alpha y)$ para todo α e g é uma extensão de f de M para $w(M+y)$.

O argumento acima pode ser repetido para um

subespaço $W[(M+y) + y]$ de dimensão $\dim(M)+2$. Pode-se aplicar sucessivamente este argumento até se chegar a um subespaço $W[M + y + y_1 + \dots + y_k]$ de dimensão igual a $\dim(E)$. Neste caso o funcional g será a extensão $F:E \longrightarrow R$.

Q.E.D.

Para obtermos o Teorema de Hahn-Banach em espaços de dimensão infinita precisamos de alguns conceitos de teoria dos conjuntos:

Definição:

Seja A um conjunto. Uma ordem parcial em A é uma relação (\preceq) em $A \times A$ tal que dados x, y e z em A tenhamos:

- 1) $x \preceq x$
- 2) $x \preceq y$ e $y \preceq x$ implica $x = y$
- 3) $x \preceq y$ e $y \preceq z$ implica $x \preceq z$

Definição: Uma ordem parcial em A é dita uma ordem completa

Se para $x, y \in A$ tivermos ou $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Exemplo: Sejam A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos de A tal

que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. A relação de inclusão define uma ordem-parcial pois (1) $A_i \subset A_i$, (2) $A_i \subset A_j$ e $A_j \subset A_i$ implica $A_i = A_j$ e (3) $A_1 \subset A_2$ e $A_2 \subset A_3$ implica $A_1 \subset A_3$.

Contudo a relação de inclusão não define uma ordem completa pois podem haver dois subconjuntos A_i e A_j tais que não se tenha $A_i \subset A_j$ ou $A_j \subset A_i$, bastando para tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Definição:

Chama-se cadeia no conjunto A a todo subconjunto C de A tal que C é totalmente ordenado, isto é, a relação (\subseteq) é uma ordem completa em A .

Definição:

Dada uma ordem em um conjunto A , dizemos que $B \subset A$ é limitado superiormente em A se existe $x \in A$ tal que $b \preceq x$ para todo $b \in B$. Neste caso o ponto x é dito um limite superior de B em A .

Definição:

Seja x um limite superior do conjunto A . Um elemento $m \in A$ é chamado de maximal de A se $x \in A$ e $m \lesssim x$ implica $m=x$.

Apresentamos a seguir o axioma de Zorn, o qual é chamado de Lema por motivos históricos.

Lema de Zorn:

Se toda cadeia C em A é limitada superiormente, então A possui um elemento maximal.

De posse desses novos conceitos podemos provar que o teorema de Hahn-Banach se aplica a espaços de dimensão infinita.

Seja $X = \{(W_i, F_i), i=1, \dots, \infty, M \subset W_1 \subset W_2 \dots \subset E; F_i \text{ uma extensão linear de } F_{i-1} \text{ de } W_{i-1} \text{ a } W_i \text{ tal que } F_i(x) \leq p(x) \text{ para } x \in W_i\}$

Temos uma cadeia $(W_1, F_1) \lesssim (W_2, F_2) \lesssim \dots$ em

X e definamos $\bar{W} = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ e $\bar{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$. Devemos provar que (\bar{W}, \bar{F}) é o elemento maximal da cadeia acima.

Mostremos que \bar{W} é um subespaço da E. Para isto sejam $x, y \in \bar{W}$. Isto significa que existe um número natural k tal que x e $y \in \bigcup_{i=1}^k W_i = W_k$. W_k é um subespaço de E pois é a união de subespaços de E, logo $\alpha x + \beta y \in W_k$, isto significa $\alpha x + \beta y \in \bar{W}$, o que prova que \bar{W} é um subespaço de E.

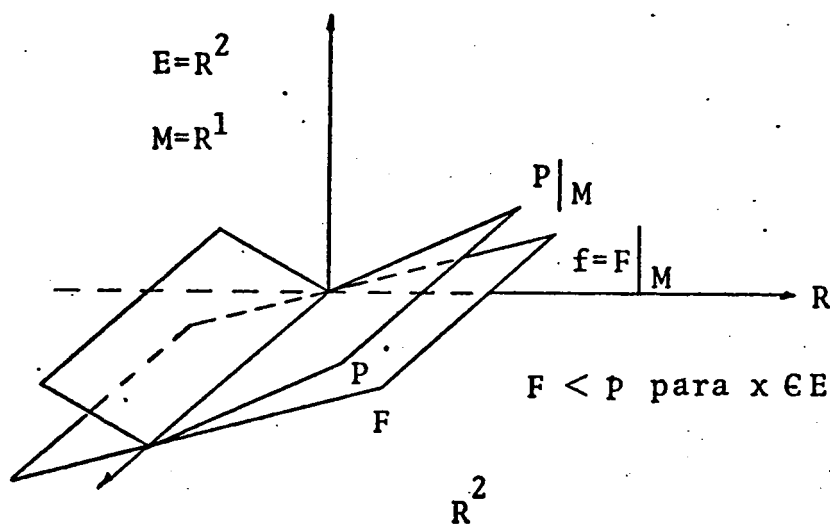
Por um argumento análogo podemos tomar $x \in \bar{W}$ e afirmar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in W_k$ e, pela regra de formação das extensões lineares F_i , temos $F_n(x) = F_k(x)$ para $n \geq k$. Logo, fixando-se um $x \in \bar{W}$ arbitrário, existe $\bar{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$. Para provar que \bar{F} é linear, tome $x, y \in \bar{W}$ e observamos que $\bar{F}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha F_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta F_n(y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \alpha \bar{F}(x) + \beta \bar{F}(y)$.

Como $\bar{F}: \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e estende cada um dos funcionais da cadeia, conclui-se que cada cadeia (W_i, F_i) é

limitada superiormente. Aplicando o Lema de Zorn concluímos que o conjunto X possui um maximal (W^*, F^*) .

Para completar a prova devemos mostrar que $W^* = E$. De fato se $W^* \neq E$ então poderíamos ampliar a dimensão de W^* e chegaríamos a um (W^{**}, F^{**}) o que contradiz a hipótese de (W^*, F^*) é o elemento maximal de cadeia.

Ilustrações do Teorema de Hahn-Banach



Definição:

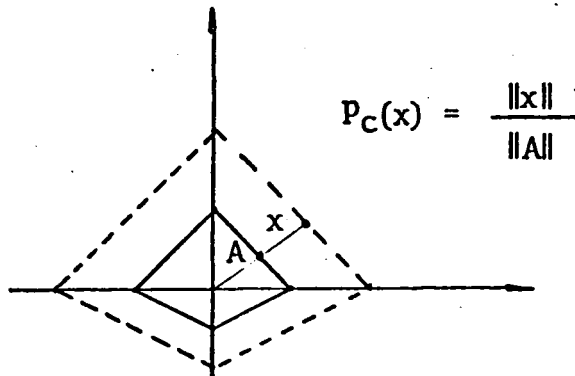
Seja C um conjunto convexo no espaço vetorial E e suponha que o vetor $\theta \in C$. O funcional de Minkowski, $P_C: E \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por:

$$P_C(x) = \inf \left\{ r: r > 0, \frac{x}{r} \in C \right\}$$

$P_C(x)$ é o fator pelo qual C deve ser extendi-

do para que passe a incluir x .

Ilustração



Lema I.2

05

Seja C um conjunto convexo com θ em seu interior. Então o funcional de Minkowski P_C satisfaz a:

- 1) $0 \leq P_C(x) < \infty$ para todo $x \in E$
- 2) $P_C(\alpha x) = \alpha P_C(x)$ para todo $\alpha > 0$.
- 3) Se $P_C(x) < 1$, então $x \in C$
- 4) $P_C(x_1 + x_2) \leq P_C(x_1) + P_C(x_2)$
- 5) $x \in \overset{\circ}{C}$ se, e somente se $P_C(x) < 1$
- 6) P_C é contínuo.

Observe que as propriedades 2 e 4 caracterizam P_C como um funcional sub-linear.

prova: 1) Como $\theta \in \overset{\circ}{C}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\theta, \epsilon) \subset C$, logo

existe $r > 0$, $r < \infty$ tal que $x/r \in C$, portanto $P_C(x) < \infty$ para todo $x \in E$. $P_C(x) \geq 0$ pela definição.

$$\begin{aligned} 2) \alpha P_C(x) &= \alpha \inf \{r > 0 : \frac{x}{r} \in C\} = \inf \{\alpha r > 0 : \frac{x}{r} \in C\} = \\ &= \inf \{\alpha r > 0 : \frac{x\alpha}{\alpha r} \in C\} = P_C(\alpha x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) P_C(x) < 1 \implies \frac{x}{r} \in C \implies (1-r)\theta + r \frac{x}{r} \in C \implies \\ \theta + x = x \in C \end{aligned}$$

4) Dados x_1 e $x_2 \in E$, tome $\varepsilon > 0$ e obtenha $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$

tais que:

$$P_C(x_1) < r_1 < P_C(x_1) + \varepsilon \implies P_C\left(\frac{x_1}{r_1}\right) < 1 \implies \frac{x_1}{r_1} \in C$$

$$P_C(x_2) < r_2 < P_C(x_2) + \varepsilon \implies P_C\left(\frac{x_2}{r_2}\right) < 1 \implies \frac{x_2}{r_2} \in C$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } r = r_1 + r_2. \text{ Como } C \text{ é convexo } \frac{x_1 + x_2}{r} = \frac{r_1}{r} \frac{x_1}{r_1} + \\ + \frac{r_2}{r} \frac{x_2}{r_2} \in C \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } P_C\left(\frac{x_1 + x_2}{r}\right) < 1, \text{ por (2) temos } P_C(x_1 + x_2) < r.$$

$$\text{Desta forma } r = r_1 + r_2 < P_C(x_1) + P_C(x_2) + 2\varepsilon, \text{ ou}$$

$$P_C(x_1 + x_2) < P_C(x_1) + P_C(x_2) + 2\varepsilon. \text{ Tomando } \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$\text{obtemos } P_C(x_1 + x_2) \leq P_C(x_1) + P_C(x_2).$$

5) Seja $x \in \overset{0}{C} \implies x \in C \implies P_C(x) \leq 1$, além disso exis-

te $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset C$. Seja $x' = x + \frac{x}{\|x\|} \frac{\epsilon}{2} =$

$$= x \left(1 + \frac{\epsilon/2}{\|x\|} \right). \text{ Note que } x' \in B(x, \epsilon) \text{ pois } \|x' - x\| =$$

$$= \left\| \frac{x}{\|x\|} \frac{\epsilon}{2} \right\| = \frac{\epsilon}{2}. \text{ Portanto } x' \in C \implies P_C(x') \leq 1.$$

$$\text{temos } x = \frac{x'}{1 + \epsilon/2\|x\|} \implies P_C(x) = \frac{1}{1 + \epsilon/2\|x\|} P_C(x') \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 + \epsilon/2\|x\|} < 1. \text{ Isto prova que se } x \in \overset{\circ}{C}, \text{ então}$$

$$P_C(x) < 1.$$

Seja $P_C(x) = r < 1$. Por (3) $x \in C$. Tome $0 < \epsilon < 1 - r$ e pro-

vemos que $x \in \overset{\circ}{C}$, isto é, $B(x, \epsilon) \subset C$. Seja $H = \{h \in E:$

$\|h\| = 1\}$. Um ponto $y \in B(x, \epsilon)$ é da forma $y = x + \alpha h$ on-

de $h \in H$ e $0 < |\alpha| < \epsilon$, pois $\|x - y\| = |\alpha| \|h\| = |\alpha| < \epsilon$.

Seja $\epsilon = \min\{1 - r, \frac{1 - r}{P_C(h)}\}$. Isto acarreta $P_C(y) =$

$$= P_C(x + \alpha h) \leq P_C(x) + |\alpha| P_C(h) < r + \epsilon P_C(h) < 1, \text{ ou}$$

seja $y \in C$. Como y é um ponto genérico de $B(x, \epsilon)$,

temos $B(x, \epsilon) \subset C$, ou seja $x \in \overset{\circ}{C}$.

Q.E.D.

6) Para provar que P_c é contínuo (em todo $x \in E$) observemos que $P_c(\theta) = P_c\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1/2 P_c(\theta) \implies P_c(\theta) = 0$.

Como $\theta \in \overset{0}{C}$, existe $\epsilon > 0$ e $x_n \in C$ tal que o ponto $y =$

$$= \epsilon \frac{x_n}{|x_n|} \in C. \text{ Logo } 1 \geq P_c\left(\epsilon \frac{x_n}{|x_n|}\right) = \frac{\epsilon}{|x_n|} P_c(x_n), \text{ ou}$$

$$P_c(x_n) \leq \frac{|x_n|}{\epsilon}. \text{ Tome uma seqüência } x_n \longrightarrow \theta, \text{ temos}$$

$P_c(x_n) \longrightarrow P_c(\theta)$, o que prova que P_c é contínuo em θ .

Para provar que P_c é contínuo em qualquer

$x \in E$ tomemos uma seqüência $x_n \longrightarrow x$ e notemos que:

$$P_c(x) = P_c(x - x_n + x_n) \leq P_c(x - x_n) + P_c(x_n) \implies P_c(x) - P_c(x_n) \leq \\ \leq P_c(x - x_n)$$

$$P_c(x_n) = P_c(x_n - x + x) \leq P_c(x_n - x) + P_c(x) \implies -P_c(x_n - x) \leq \\ \leq P_c(x) - P_c(x_n)$$

Logo $-P_c(x_n - x) \leq P_c(x) - P_c(x_n) \leq P_c(x - x_n)$. Passando ao li-

mite $x_n \longrightarrow x \implies (x_n - x) \longrightarrow \theta \implies P_c(x_n - x) \longrightarrow 0$ e $P_c(x - x_n)$

$\longrightarrow 0$ o que implica $P_c(x) \longrightarrow P_c(x_n)$. Isto prova que P_c é

contínuo em todo $x \in E$.

Q.E.D.

No desenvolvimento a seguir será usado o con-

ceito de hiperplano. Para poder classificar um hiperplano como fechado, precisamos do lema abaixo.

Lema I.3

Um conjunto A é fechado se, e somente se, toda seqüência convergente de pontos do conjunto, converge para um ponto de A .

prova: Seja A fechado e tome a seqüência $x_n \rightarrow x$, $x_n \in A$. Tome o conjunto $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Temos $X \subset A$. Como $x_n \rightarrow x$, x é o único ponto de acumulação do conjunto X . Como A é fechado todos os pontos de acumulação de A pertencem a A . Logo $x \in A$.

Suponha que toda seqüência x_n de pontos de A converge para algum ponto $x \in A$. Para todo $x \in A$ tome uma seqüência $x_n \rightarrow x$, $x_n \in A$. Pela definição de seqüência convergente, conclui-se que todo ponto x de A é um ponto de acumulação de A . o que prova que A é fechado.

Q.E.D.

Definição:

Um hiperplano num espaço vetorial E é um conjunto definido por $H = \{x \in E: g(x) = c\}$, onde $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear e c é uma constante.

Observe que se o hiperplano H é fechado se, e somente se, o funcional g é contínuo. De fato se g é contínuo então toda seqüência $x_n \in H$ $x_n \rightarrow x$ nos leva a $g(x_n) \rightarrow g(x)$, o que caracteriza H como fechado. Reciprocamente, se H é fechado uma seqüência $x_n \rightarrow x$ de pontos de H implica $x \in H$ ou seja $g(x) = c$. Isto significa $g(x_n) \rightarrow g(x)$ quando $x_n \rightarrow x$ o que prova que g é contínuo.

Teorema I.7 - Mazur - Forma Geométrica do teorema de Hahn
Banach

Seja C um conjunto convexo com interior não vazio num espaço vetorial real E . Seja V uma variedade linear em E com $V \cap C = \emptyset$. Então existe um hiperplano fechado que contém V e que não contém nenhum ponto do interior de C ;

isto é, existe um funcional linear F definido em E tal que $F(v) = c$ para todo $v \in V$ e $F(x) \leq c$ para todo $x \in C$.

prova: Podemos, caso $\theta \notin C$, fazer uma translação que torne θ um ponto interior de C .

Notemos que dada a variedade linear $V = y+W$, onde $y \in E$ e W é um subespaço de E , pode-se gerar um subespaço Z , cujos pontos são da forma $z = \alpha y + w$, onde $z \in Z$ se, e somente se, $\alpha = 1$.

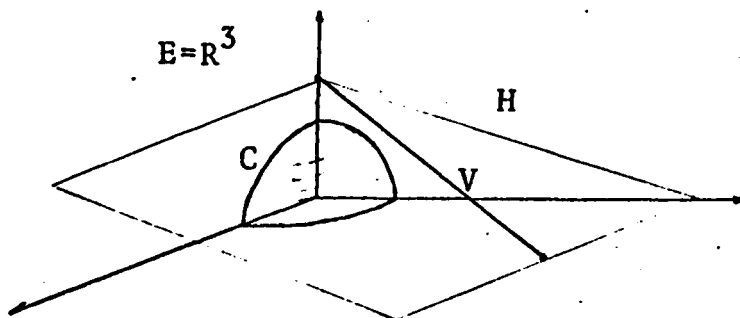
Podemos obter um funcional linear f no espaço Z tal que $V = \{x \in Z; f(x) = 1\}$, para tal basta definir $f(\alpha y + w) = \alpha$.

Seja p_C o funcional de Minkowski de C . Como $V \cap C = \emptyset$, $p_C(x) \leq 1$ para todo $x \in C$. Como Z é o subespaço gerado por V , qualquer ponto de Z é da forma $z = \alpha x$, $x \in V$. Se $\alpha \neq 1$, $z \notin V$. Para $\alpha > 0$ temos $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \leq \alpha p_C(x) = p_C(\alpha x)$, ou seja $f(\alpha x) \leq p_C(\alpha x)$. Para $\alpha < 0$ temos $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha < |\alpha| p_C(x) = p_C(\alpha x)$, ou seja $f(\alpha x) \leq p_C(\alpha x)$. Portanto para $z = \alpha x$ temos $f(z) \leq p_C(z)$ para todo $z \in Z$.

Como p_c é sublinear e f é linear, podemos aplicar a forma analítica do teorema de Hahn-Banach e afirmar que existe uma extensão linear F de f de Z a E tal que $F(x) \leq p_c(x)$ para todo $x \in E$. Notemos que F é contínuo pois ao tomarmos a seqüência $x_n \rightarrow x$, $F(x_n) - F(x) = F(x_n - x) \leq p_c(x_n - x)$. Para $x_n \rightarrow x$ temos $p_c(x_n - x) \rightarrow p_c(0) = 0$, ou seja $F(x_n) - F(x) \rightarrow 0$. De posse do funcional linear contínuo F podemos definir o hiperplano fechado $H = \{x \in E : F(x) = 1\}$ temos $F(x) < p_c(x)$ para todo $x \in \overset{\circ}{C}$ e, portanto, o hiperplano H separa V de $\overset{\circ}{C}$.

Q.E.D.

Ilustração do teorema de Mazur



O teorema de Mazur possui diversos corolários.

Apresentamos a seguir alguns destes corolários.

Corolário 1 - Teorema do Hiperplano Suporte

Seja $C \subseteq E$ um conjunto convexo de interior não-vazio. Seja $x \in E$ tal que $x \notin \overset{\circ}{C}$. Então existe um hiperplano fechado H que contém x e tal que $H \cap \overset{\circ}{C} = \emptyset$.



Teorema I.B - Teorema de separação de Eidelheit

Sejam C_1 e C_2 conjuntos convexo do espaço vetorial E tais que $\overset{\circ}{C}_1 \neq \emptyset$ e $\overset{\circ}{C}_1 \cap \overset{\circ}{C}_2 = \emptyset$. Então existe um hiperplano fechado H separando C_1 e C_2 , isto é, existe um funcional linear f definido em E tal que $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todo $x_1 \in C_1$ e $x_2 \in C_2$.

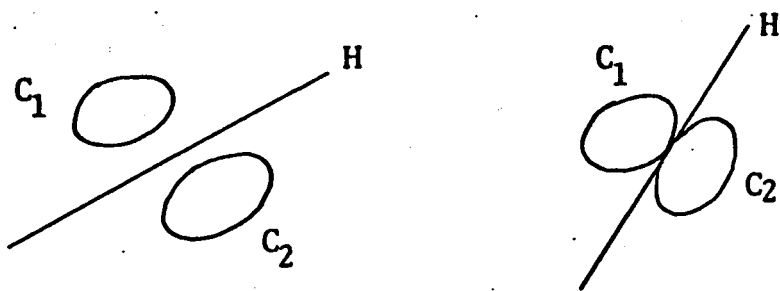
prova: Seja o conjunto $C = C_1 - C_2$. Podemos supor que $\theta \in \overset{\circ}{C}$.

Pelo corolário 1 existe um funcional f em E tal que

$$f(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in C. \text{ Temos } x = x_1 - x_2, f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \leq 0, \text{ ou ainda } f(x_1) \leq f(x_2) \text{ para to-}$$

do $x_1 \in C_1$ e $x_2 \in C_2$. Existe $c \in \mathbb{R}$, $\sup_{x_1 \in C_1} f(x_1) \leq c \leq \inf_{x_2 \in C_2} f(x_2)$

O hiperplano procurado é $H = \{x \in E: f(x) = c\}$.



I.6 - Espaços de Banach e teorema de Weierstrass

O objetivo desta seção é preparar o caminho para os problemas de otimização apresentados no capítulo II. Apresentaremos um teorema que fornece as condições para a existência de um ponto de máximo (ou mínimo) de um funcional em um sub-conjunto de seu domínio.

Definição:

Uma seqüência $\{x_n\}$ em um espaço normado é dita uma seqüência de Cauchy se para $n, m \rightarrow \infty$, tivermos $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$. Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro N tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todo $m, n > N$

Em um espaço vetorial normado toda seqüência

convergente é uma seqüência de Cauchy, pois se $x_n \longrightarrow x$ então, $\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \longrightarrow 0$.

Definição:

Diz-se que um espaço vetorial normado E é completo se toda seqüência de Cauchy em E tem limite em E .

Um espaço vetorial normado completo é chamado de espaço de Banach.

Definição:

Um conjunto A contido num espaço vetorial normado E é limitado se existe $\epsilon > 0$ e $x \in E$ tal que $A \subset B(x, \epsilon) \subset E$.

Apresentamos a seguir a definição de conjunto compacto. Devemos salientar que esta definição se restringe a espaços vetoriais normados.

Definição:

Um conjunto A contido num espaço vetorial nor-

mado é compacto se para toda seqüência em A pudermos extrair uma subseqüência convergente para um elemento de A.

Teorema I.9 - Teorema de Weierstrass

Seja C um conjunto compacto contido num espaço vetorial normado e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional contínuo. Então f possui um ponto de máximo e um ponto de mínimo em C .

prova: Sejam $M = \sup_{x \in C} f(x)$ e $m = \inf_{x \in C} f(x)$.

Devemos provar que existem $x^1, x^2 \in C$ tais que $f(x^1) = m$ e $f(x^2) = M$. Tomemos seqüências $\{x_n^1\}$ e $\{x_n^2\}$ pertencentes a C com subseqüências convergentes $x_{nk}^1 \rightarrow x^1 \in C$ e $x_{nk}^2 \rightarrow x^2 \in C$ tais que $f(x_{nk}^1) \rightarrow m$ e $f(x_{nk}^2) \rightarrow M$. Como $x^1, x^2 \in C$, $f(x^1)$ e $f(x^2)$ são finitos: $f(x^1) > -\infty$, $f(x^2) < \infty$, temos:

$$(i) \quad \epsilon > f(x_{nk}^1) - f(x^1) > -\epsilon \implies f(x_{nk}^1) > f(x^1) - \epsilon.$$

Para $\epsilon \rightarrow 0$, ou seja $x_{nk}^1 \rightarrow x^1$, $m = \lim f(x_{nk}^1) \geq f(x^1) > -\infty$, logo $f(x^1) = m$.

$$(ii) \quad -\epsilon < f(x^2) - f(x_{nk}^2) < \epsilon \implies f(x_{nk}^2) < f(x^2) + \epsilon.$$

$\epsilon \rightarrow 0$, ou seja $x_{nk}^2 \rightarrow x^2$, $M = \lim f(x_{nk}^2) \leq$

$\leq f(x^2) < \infty$.

Logo $f(x^2) = M$

Q.E.D.

CAPÍTULO II

OTIMIZAÇÃO CONDICIONADA

II.1 - Introdução

Neste capítulo fazemos uso dos Teoremas de separação demonstrados no Capítulo I para discutir a otimização condicionada de funcionais.

As seções II.2 e II.3 são dedicadas à programação linear, isto é, à otimização de um funcional linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. Por questão didática apresentamos separadamente o lema de Farkas nas seções II.2. A seção II.3 descreve o objetivo da programação linear e utiliza o lema de Farkas para provar o Teorema da dualidade da programação linear. Como exemplo de aplicação da programação linear à Teoria econômica, descrevemos um modelo multi-setorial de economia fechada.

A seção II.4 define espaço dual e o utiliza

para provar o teorema da dualidade de Fenchell. Este Teorema é usado em seguida para provar o Teorema do mini-max da teoria dos jogos.

Finalmente a seção II.5 é dedicada à programação côncava, isto é, à otimização de um funcional côncavo sujeito a um conjunto de restrições côncavas. Como aplicação à teoria econômica provamos a existência de equilíbrio competitivo no modelo neoclássico de produção com economia aberta.

II.2 - O Lema de Farkas

Definição:

Dados dois vetores $x, y \in E$, o produto interno de x e y é um escalar $\langle x, y \rangle$ o qual satisfaz as propriedades:

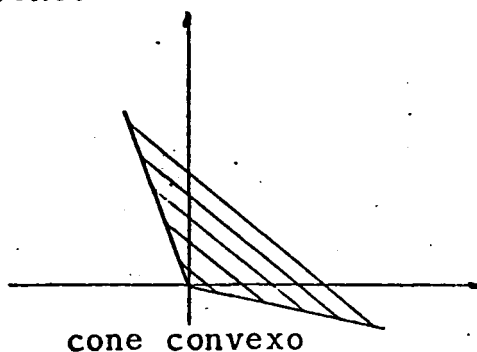
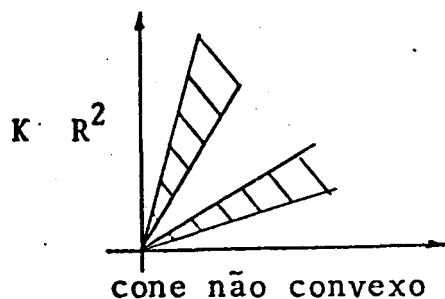
- 1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 2) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- 3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- 4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se $x = \theta$

No caso em que $E = \mathbb{R}^n$, denominaremos produto interno euclidiano dos vetores $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ ao escalar $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Utilizaremos neste capítulo a notação matricial $x^t y = y^t x$ para representar o produto interno euclidiano $\langle x, y \rangle$.

Definição:

Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cone se dados $x \in K$ e $\lambda \geq 0$ o vetor $\lambda x \in K$. Se para todo x e $y \in K$ o vetor $x+y \in K$

então diz-se que K é um cone convexo.



Teorema II.1

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo e definamos o cone dual K^* por $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n; x^t y \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}$. Então:

- 1) K^* é um cone convexo.
- 2) K^* é fechado.

Prova: 1) K^* é cone pois se $y \in K^*$ e $\lambda \geq 0$, $x^t(\lambda y) = \lambda x^t y \geq 0$

para todo $x \in K$. K^* é convexo pois se $y_1, y_2 \in K^*$

$x \in K$, $x^t(y_1 + y_2) = x^t y_1 + x^t y_2 \geq 0$, logo $(y_1 + y_2) \in K^*$.

2) Seja $\{y_n\} \in K^*$ uma seqüência tal que $\lim y_n = y$.

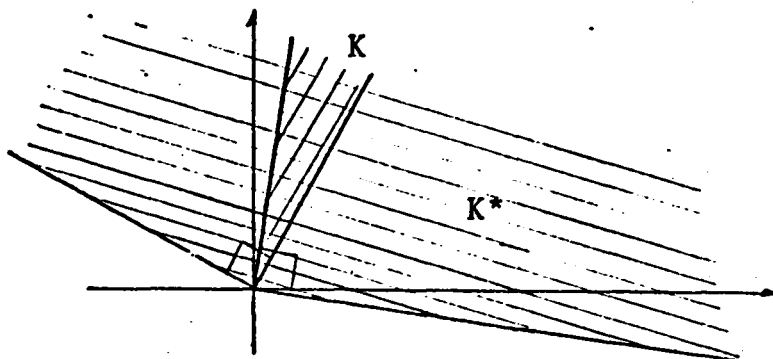
Para todo n e N temos $x^t y_n \geq 0$ para todo $x \in K$.

Passando-se ao limite temos $x^t y \geq 0$. Pelo lema

I.3 conclui-se que K^* é fechado.

Q.E.D.

Ilustração: \mathbb{R}^2



Teorema II.2

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo e definamos $K^{**} = (K^*)^*$, isto é: $K^{**} = \{z \in \mathbb{R}^n : y^t z \geq 0 \text{ para todo } y \in K^*\}$. Então:

- 1) $K \subset K^{**}$.
- 2) K é fechado se, e somente se $K = K^{**}$.

Prova: 1) Suponha, por absurdo, que existe $x \in K$ tal que $x \notin K^{**}$. Neste caso existe $y \in K^*$ tal que $y^t x < 0$. Mas se $y \in K^*$ então $x^t y \geq 0$ para todo $x \in K$, contradizendo a hipótese de absurdo.

- 2) Se $K = K^{**}$, então K é fechado pois $K^{**} = (K^*)^*$ que é fechado pelo teorema II.1.

Para provar a recíproca devemos mostrar que se K

é fechado então $K \supset K^{**}$. Para tal tomemos $x \in R^n$, $x \notin K$ e $a \in R^n$, $a \neq \theta$. Pelo corolário 1 do teorema de Mazur existe um funcional linear $f: R^n \rightarrow R$ dado por $f(y) = a^t y$ o qual define um hiperplano que separa x estritamente de K . Desta forma existe $\epsilon > 0$ tal que $a^t y \geq a^t x + \epsilon$ para todo $y \in K$. Como K é um cone, para $\lambda > 0$ tem-se $\lambda y \in K$. Logo $a^t y \geq 1/\lambda (a^t x + \epsilon)$. Fazendo-se $\lambda \rightarrow +\infty$, obtém-se $a^t y \geq 0$ para todo $y \in K$, ou seja $a \in K^*$. Como $\theta \in K$, $a^t \theta = 0 \geq a^t x + \epsilon$, logo $a^t x < 0$. Como $a \in K^*$ segue-se que $x \notin K^{**}$.

Concluimos que $x \notin K$ implica $x \notin K^{**}$; ou seja $K \supset K^{**}$.

Por (1), $K \subset K^{**}$ logo $K = K^{**}$

Q.E.D.

Definição:

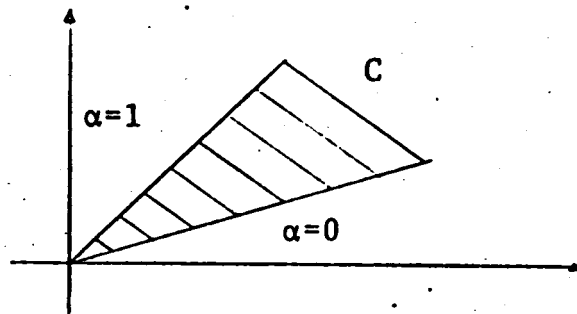
Seja A uma matriz real (m, n) com colunas dadas pelo vetores a^1, a^2, \dots, a^n . O conjunto de todas as combinações lineares com coeficientes $x_i \geq 0$ destes vetores é chamado de cone gerado por A .

$$C = \{Ax \in R^m, x \in R_+^n\} = \{x \in R^m: x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n, x_i \geq 0\}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad Z = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Az = \lambda \begin{bmatrix} \alpha + 2(1-\alpha) \\ 2\alpha + 1-\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2 - \alpha \\ 1 + \alpha \end{bmatrix} \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \lambda \geq 0$$



Observe que o vetor z descreve todos os vetores do espaço \mathbb{R}_+^2 quando se variam α e λ

Lema II.1: Todo cone gerado por uma matriz finita é convexo e fechado.

Prova: $A = (m, n)$ e $C = \{Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}_+^n, x \geq 0\}$

Para provar a convexidade, tome $Ax^1 \in C$ e $Ax^2 \in C$.

Então para $0 \leq \lambda \leq 1$ temos:

$(1-\lambda)Ax^1 + \lambda Ax^2 = A((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \in C$ pois \mathbb{R}_+^n é convexo.

Para provarmos que C é fechado, seja:

Prova: $C = \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^n\}$ o cone gerado por A definamos, para

cada $x \in \mathbb{R}_+^n$, o conjunto $L(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^n; A(y-x) = 0\}$.

Verifica-se que $L(x)$ é convexo, fechado e não vazio

(pois $x \in L(x)$). Seja $f(x)$ o vetor de norma mínima em

$L(x)$. Observamos, inicialmente, que as definições

acima implicam nas seguintes propriedades:

- (i) $\|f(x)\| \leq \|x\|$;
- (ii) $A f(x) = Ax$;
- (iii) $f(x) = \theta$ se, e somente se $Ax = \theta$;
- (iv) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \geq 0$;
- (v) $f(f(x)) = f(x)$;
- (vi) $G = \{f(x); x \in \mathbb{R}_+^n\}$ é um conjunto fechado;
- (vii) existe um número real positivo γ tal que

$$\|f(x)\| \leq \gamma \|Ax\|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_+^n.$$

As propriedades (i) e (ii) decorrem imediatamente da definição de $f(x)$ e do fato de x e $f(x)$ pertencerem a $L(x)$. Para demonstrar (iii) notemos que se $f(x) = \theta$,

então $Ax = Af(x) = \theta$ e, reciprocamente, se $Ax = \theta$, então $\theta \in L(x)$, o que implica $f(x) = \theta$. Para provar (iv) notemos que $f(\theta) = \theta$ e que, para $\alpha > 0$, $L(\alpha x) = \alpha L(x)$. A propriedade (v) decorre da definição de $f(x)$ como sendo o vetor de norma mínima em $L(x)$.

Para provar a propriedade (vi), tomemos uma seqüência convergente $\{f(x_k)\} \rightarrow u$ de pontos de G . Devemos mostrar que $u = f(u) \in G$.

Notemos que se $\{f(x_k)\} \rightarrow u$, então todos os termos da seqüência $\{f(x_k)\}$ a partir de certa ordem possuem coordenadas positivas onde u as tiver. Existe, pois, um número real $\beta_k \geq 1$ tal que $\beta_k f(x_k) - u \geq \theta$. Tomemos cada β_k como sendo o menor número real maior ou igual a 1 com essa propriedade. Verifica-se que β_k é o maior dos coeficientes das coordenadas de u pelas correspondentes de $f(x_k)$. Daí se conclui que a seqüência $\{\beta_k\} \rightarrow 1$.

Observemos que pela propriedade (ii)

$$Au = Af(u), \text{ logo } A[f(u) - u + \beta_k f(x_k)] = A[f(u) - u] + \\ + A\beta_k f(x_k) = A\beta_k f(x_k), \text{ o que implica } (f(u) + \beta_k f(x_k) - u) \in$$

$L(\beta_k f(x_k))$. Temos $\|\beta_k f(x_k)\| \leq \|f(u) + \beta_k f(x_k) - u\|$, passando-se ao limite obtemos $\|u\| \leq \|f(u)\|$. Como u e $f(u)$ pertencem a $L(u)$ e $f(u)$ é o único vetor de norma mínima em $L(u)$, a desigualdade anterior implica $u = f(u)$, o que prova (vi).

Para provar a propriedade (vii) definamos o conjunto $H = \{f(x); x \in \mathbb{R}_+^n; \|f(x)\| = 1\}$. H é compacto pois é a interseção do conjunto fechado G com a esfera de raio 1 do \mathbb{R}^n . Se $H = \emptyset$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$ e a propriedade (vii) se verifica trivialmente. Se $H \neq \emptyset$, seja γ^{-1} o mínimo da função contínua $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(z) = \|Az\|$. Tem-se $\gamma^{-1} > 0$ pois $z = f(x) \neq 0$ implica $Af(x) \neq 0$ de acordo com as propriedades (ii) e (iii). Para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$ com $f(x) \neq 0$ tem-se $f(x) = \beta f(u)$ para algum u tal que $\|f(u)\| = 1$. Logo $\gamma^{-1} \|f(x)\| = \gamma^{-1} \cdot \beta \cdot 1 \leq \beta \|Af(u)\| = \|Af(x)\|$, ou $\|f(x)\| \leq \gamma \|Af(x)\|$, o que prova (vii).

Podemos, finalmente, provar que $C = \{Ax; x \in \mathbb{R}_+^n\}$ é fechado. Para tal tomemos uma sequência convergente de elementos de C , $\{Ax_k\} \rightarrow w$. Então a sequên-

cia $Ax_k = A f(x_k)$ é limitada. Logo, pela propriedade (vii) a seqüência $\{f(x_k)\}$ é uma seqüência limitada de pontos de R_+^n , admitindo, pois, uma subseqüência convergente para $u \in R_+^n$. Como toda transformação linear do R^n no R^m é contínua, $Au = w$, o que prova que $w \in C$, caracterizando C como fechado.

Q.E.D.

Teorema II.3 - Lema de Farkas (1a. versão)

Seja A uma matriz real (m,n) , $b \in R^m$.

Então existe um vetor $x \in R^n$, $x \geq \theta$ tal que $Ax = b$ se, e somente se, $b^t y \geq 0$ para todo $y \in R^m$ tal que $A^t y \geq \theta$.

Prova: Seja $x \geq \theta$ tal que $Ax = b$. Então $b^t y = x^t A^t y \geq 0$ para todo y tal que $A^t y \geq \theta$.

Reciprocamente seja $a^j \in R^m$ o j -ésimo vetor coluna de

A . Definamos o cone gerado por A por:

$$K = \{k \in R^m: k = \sum_{j=1}^n x_j a_j \text{ para } x_j \geq 0, j=1,2,\dots,n\}$$

tome y tal que $A^t y \geq \theta$, ou seja $y^t A \geq \theta$. Então

$y^t a^j \geq 0$ para $j=1, \dots, n$. Isto implica $y^t k \geq 0$ para todo $k \in K$, ou seja $y \in K^*$. Portanto a afirmativa " $b^t y \geq 0$ para todo y tal que $A^t y \geq 0$ " implica $b \in K^{**}$. Como k é convexo e fechado (lema 1), temos $K = K^{**}$ (teorema II.2). Portanto existe um vetor $x \in R^n$ tal que $Ax = b$.

Q.E.D.

Lema II.2

Seja C o cone gerado pela matriz A (m, n) e $b \in R^m$ tal que $b \notin C$. Então existe um vetor $a \in R^m$ tal que para todo $x \in C$, $a^t b < a^t x$.

prova: A prova deste lema é uma aplicação imediata do teorema de separação entre um ponto e um conjunto convexo fechado onde o funcional linear que define o hiperplano é $f: R^m \rightarrow R$ dado por $f(x) = a^t x$, temos, pois, $f(b) < f(x)$ para todo $x \in C$.

Q.E.D.

Teorema II.4 - Lema de Farkas (2a. versão)

Seja A uma matriz real (m,n) , $b, y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$

Então exatamente uma das alternativas abaixo se verifica.

(i) $Ax = b$ possui uma solução $x \geq \theta$.

(ii) $y^t A \geq \theta$, $y^t b < 0$ possui uma solução y .

Prova: Para verificar que (i) e (ii) não ocorrem simultaneamente veja que se $y^t A \geq \theta$ e $x \geq \theta$, então $y^t Ax \geq 0$, ou $y^t b \geq 0$ e portanto (ii) é falso.

Para mostrar que uma das alternativas se verifica necessariamente mostremos que se (i) é falso então (ii) é verdadeiro. Para tal admitamos que b é tal que $b \notin C$, onde C é o cone gerado por A . Pelo lema 2 temos:

$$a^t b < \beta < a^t (A \lambda x), \quad \lambda \geq 0$$

Como $\theta \in C$ temos $\beta < a^t \theta = 0$. Logo $a^t b < 0$. Pela segunda desigualdade (com $\lambda > 0$) $\beta/\lambda < a^t Ax$. Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ temos $a^t Ax \geq 0$. Tomando $x = e_1, e_2, \dots, e_n$, obtem-se $a^t A \geq 0$.

Fazendo $y = a$ temos $y^t b < 0$ e $y^t A \geq \theta$ que formam

a alternativa (ii).

Q.E.D.

Verifiquemos que as duas versões do Lema de Farkas são equivalentes:

1.^a versão \implies 2.^a versão:

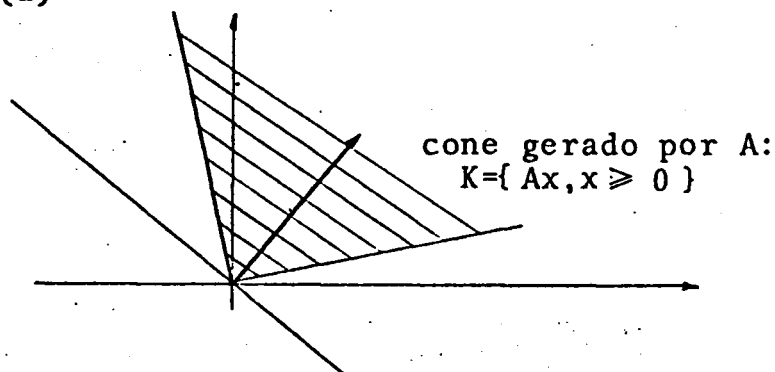
Existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$ se, e somente, se para todo y tal que $A^t y \geq 0$ tivermos $b^t y \geq 0$, o que prova que (i) e (ii) são exclusivos.

2.^a versão \implies 1.^a versão

(i) e (ii) serem exclusivos implica $Ax = b$ se, somente se, para todo y tal que $A^t y \geq 0$ tivermos $y^t b \geq 0$.

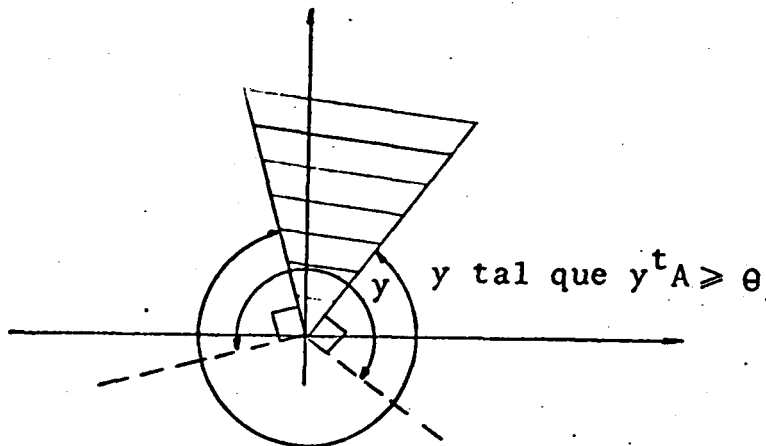
Ilustração do Lema de Farkas para $m=n=2$.

alternativa (i)



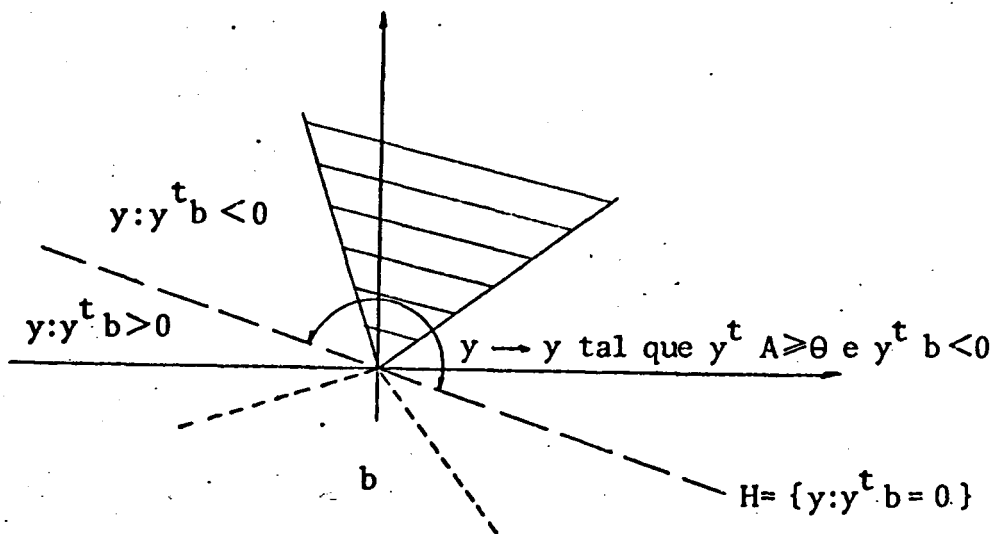
A alternativa (i) corresponde ao caso em que b pertence ao cone gerado pela matriz A .

alternativa (ii)



b — b tal que $Ax \neq b$ para $x \geq 0$

Fixando-se um vetor b , este define um hiperplano formado dos vetores perpendiculares a b . Tal hiperplano divide o espaço em vetores y tal que $y^t b > 0$ e y tal que $y^t b < 0$.



Lema II.4 - Corolário do Teorema II.4

Seja A uma matriz real (m,n) , $b, y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Então: (i) $Ax \leq b$ possui solução $x \geq \theta$ ou (exclusive),

(ii) $y^t A \geq \theta$, $y^t b < 0$ possui solução $y \geq \theta$.

Prova: Seja $z \geq \theta$, $z \in \mathbb{R}^m$ tal que a alternativa (i) possa ser escrita sob forma de igualdade, isto é, $Ax \leq b$ equivale a $Ax + z = b$. Desta forma a alternativa (i) pode ser escrita matricialmente por:

$$(i^*) \quad [A, I] \begin{bmatrix} x \\ \cdot \\ z \end{bmatrix} = b \text{ tem solução } \begin{bmatrix} x \\ \cdot \\ z \end{bmatrix} \geq \theta$$

Aplicando-se o teorema II.4 conclui-se que

(i*) é verdadeiro ou (exclusive):

(ii*) $y^t [A, I] \geq \theta$, $y^t b < 0$ possui solução y .

temos $y^t [A, I] = [y^t A, y^t] \geq \theta$, o que implica

$y^t A \geq \theta$ e $y^t \geq \theta$.

Q.E.D.

II.3 - Programação Linear

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, os

vetores $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$. Deseja-se resolver os

problemas m: Minimizar o funcional $c^t x$

$$\text{sujeito a : } \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq \theta \end{cases}$$

problema M: Maximizar o funcional $b^t y$

$$\text{sujeito a : } \begin{cases} A^t y \leq c \\ y \geq \theta \end{cases}$$

Diz-se que um problema m ou M possui solução factível quando o conjunto definido pelas restrições é não-vazio. Um vetor $x(y)$ que resolve um problema factível é chamado de solução ótima.

A solução de um problema de programação linear dependerá de (i) o problema ser factível e (ii) existir uma solução ótima, ou seja, o problema ter uma solução limitada.

O Teorema II.4 apresentado abaixo mostra que existe uma relação entre a existência de soluções para os problemas m e M .

Teorema II.4 - Teorema da Dualidade da Programação Linear

Dada a matriz A e os vetores b e c descritos acima, a solução dos problemas M e m enquadra-se à priori em um, e somente um, dos 4 casos abaixo:

Caso I: Os problemas m e M têm (ambos) soluções ótimas x e y e estas satisfazem a $c^t x = b^t y$

Caso II: O problema m não possui solução factível mas o M tem solução factível com $b^t y \rightarrow \infty$

Caso III: O problema M não possui solução factível e o m tem

solução factível com $c^t x \rightarrow -\infty$

Caso IV: Nenhum dos dois problemas possui solução factível.

Prova: Usaremos o lema II.4. Para tal escrevemos o caso I na alternativa (i) do lema e, em seguida verificamos o que a alternativa (ii) implica.

Primeiramente observamos que $c^t x \geq b^t y$ para x e y que satisfazem às restrições, pois:

$$\begin{aligned} b^t y &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j = c^t x \quad (*) \end{aligned}$$

De posse deste resultado podemos escrever o caso I sob forma de desigualdades para então aplicar o Lema II.4.

$$\underline{m} : Ax \geq b \implies (-A)x \leq -b, \quad x \geq \theta$$

$$\underline{M} : A^t y \leq c, \quad y \geq \theta$$

A igualdade $c^t x = b^t y$ pode ser escrita na for-

$c^t x \leq b^t y$ em vista da observação (*). Portanto $c^t x - b^t y \leq 0$.

Seja a matriz \tilde{A} dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & A^t \\ c^t & -b^t \end{bmatrix}, \quad (m+n+1, m+n)$$

os vetores $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $(m+n, 1)$ e $\tilde{b} = \begin{bmatrix} -b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$, $(m+n+1, 1)$.

caso I pode ser representado por $\tilde{A} \tilde{x} \leq \tilde{b}$ para uma solução $\tilde{x} \geq \theta$.

O Lema II.3 afirma que (i) $\tilde{A} \tilde{x} \leq \tilde{b}$ possui solução $\tilde{x} \geq \theta$ ou (exclusivamente) (ii) $\tilde{y}^t A \geq \theta$ e $\tilde{y}^t b < 0$ possui solução $\tilde{y} \geq \theta$.

Com $\tilde{y}^t = [v^t, u^t, \lambda]$, onde $v = (n, 1)$ e $u = (m, 1)$,

a alternativa (ii) pode ser expressa por:

$$[v^t, u^t, \lambda] \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & A^t \\ c^t & -b^t \end{bmatrix} \geq \theta$$

$$[v^t, u^t, \lambda] \begin{bmatrix} -b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \text{ admite } [v^t, u^t, \lambda] \geq \theta^t$$

$$\text{temos: } \begin{cases} v^t(-A) + \lambda c^t \geq \theta \\ u^t A^t - \lambda b^t \geq \theta \\ v^t(-b) + u^t c < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v^t A \leq \lambda c^t \\ A u \geq \lambda b \\ c^t u < v^t b \end{cases}$$

$$\text{possui solu\c{c}\~{a}o } \begin{cases} U \geq \theta \\ v \geq \theta \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Suponha, por absurdo que $\lambda > 0$. Neste caso a terceira desigualdade acima pode ser escrita por $c^t(U/\lambda) < (v/\lambda)^t b$. Mas por (*) teríamos que ter $c^t(u/\lambda) \geq (v/\lambda)^t b$, logo $\lambda = 0$. Com este resultado as inequações da alternativa (ii)

passam a ser:

$$\begin{cases} v^t A \leq \theta^t \\ Au \geq \theta \\ c^t u < v^t b \end{cases} \quad \text{possuem solu\c{c}\~{a}o} \quad \begin{cases} u \geq \theta \\ v \geq \theta \end{cases}$$

A desigualdade estrita $c^t u < v^t b$ pode ocorrer de três maneiras:

$$1^\circ) c^t u < 0$$

$$2^\circ) v^t b > 0$$

$$3^\circ) c^t u < 0 \quad e \quad v^t b > 0$$

A esta altura convém fazermos um resumo do que foi aprovado até aqui. O lema II:4 diz, que ou temos uma solução para m e M que satisfaz a $c^t x^* = b^t y^*$ (caso I) ou caímos nos casos II, III e IV de acordo com as desigualdades (1º), (2º) e (3º) acima.

Análise de (1º), isto é, $c^t u < 0$: Admita por absurdo que \underline{M} tem solução y . Neste caso $A^t y \leq c$ para $y \geq \theta$. De acordo com a alternativa (ii), $Au \geq \theta$ e $u \geq \theta$ temos então $0 \leq y^t (Au) \leq c^t u$ o que contradiz $c^t u < 0$. Portanto nesta situação \underline{M} não tem solução.

Quanto ao problema \underline{m} se este não tiver solução estamos no caso IV. Se m tiver solução x teremos $Ax \geq b$, $x \geq \theta$. Com $\alpha > 0$, $u \geq \theta$ e como $Au \geq \theta$ temos $A(\alpha u) \geq \theta$. Portanto $A(x + \alpha u) \geq b$, $x + \alpha u \geq \theta$, ou seja o vetor $x + \alpha u$ satisfaz à restrição de m . Como $c^t(\alpha u) < 0$ temos $c^t(x + \alpha u) = c^t x + \alpha c^t u \rightarrow -\infty$ quando $\alpha \rightarrow \infty$, isto é, caímos no caso III.

Análise de (2º), isto é, $v^t b > 0$: Admita por absurdo que \underline{m} possui solução x . Neste caso $Ax \geq b$, $x \geq \theta$. De acordo com a alternativa (ii) $v^t A \leq \theta$, $v \geq \theta$. Temos então $0 \geq (v^t A) x \geq v^t b$, o que contradiz $v^t b \leq 0$. Portanto, nesta situação, \underline{m} não possui solução.

Quanto ao problema \underline{M} , se este não tiver solução estamos no caso IV. Se M tiver solução y , teremos $A^t y \leq c$, $y \geq \theta$. Com $\alpha > 0$, $v \geq \theta$ e como $v^t A \leq \theta$ temos $\alpha A^t v \leq \theta$. Portanto $A^t (y + \alpha v) \leq c$, ou seja, o vetor $y + \alpha v$ satisfaz à restrição de M . Como $v^t b > 0$, temos $(y^t + \alpha v^t) b = y^t b + \alpha v^t b \rightarrow +\infty$ quando $\alpha \rightarrow \infty$, isto é, caímos no caso II.

Análise de (3º), isto é, $c^t u < 0$ e $v^t b > 0$. Esta análise é trivial a partir do que foi mostrado acima. Com estas situações nem \underline{M} nem \underline{m} têm soluções, isto é, estamos no caso IV.

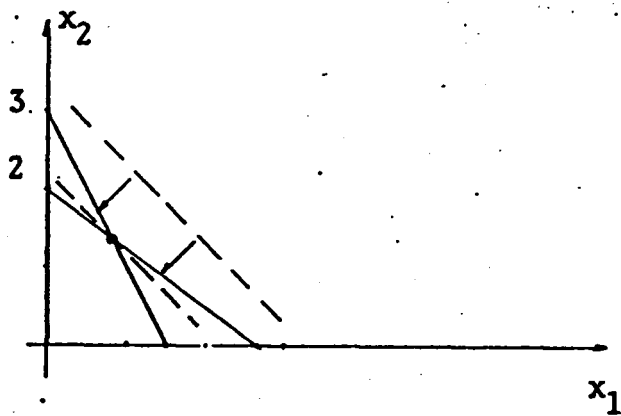
Exemplo 1. - (Caso I)

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, e os vetores $b^t = (3, 8)$,

$$c^t = (5, 4).$$

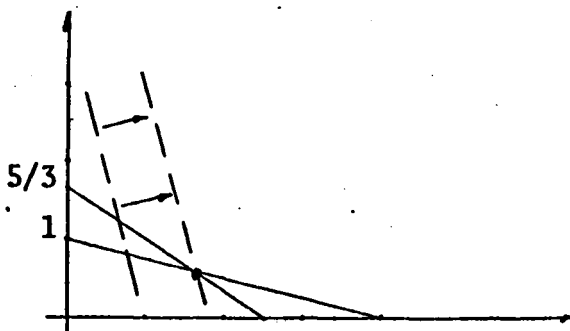
$$\underline{m} \quad \min \quad 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$



$$\underline{M} \quad \max \quad 3y_1 + 8y_2$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ y_1 + 4y_2 \leq 4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases} \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$



Veja que $c^t \hat{x} = [5 \ 4] \begin{bmatrix} 4/5 \\ 7/5 \end{bmatrix} = \frac{48}{5}$ e $b^t \hat{y} = [3 \ 8] \begin{bmatrix} 8/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{48}{5}$

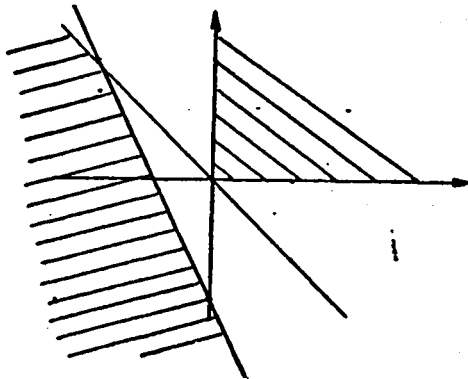
Exemplo 2 - (Caso II)

Seja a matrisa $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e os vetores $b^t = (3, 0)$,

$c^t = (5, 4)$

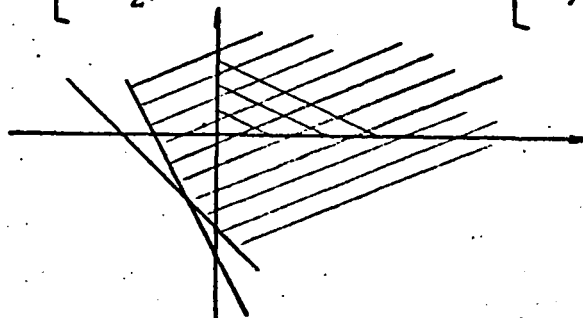
m $\min 5x_1 + 4x_2$

sujeito a $\begin{cases} -2x_1 - x_2 \geq 3 \\ -x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq -3 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$



M $\max 3y_1$

sujeito a $\begin{cases} -2y_1 - y_2 \leq 5 \\ -y_1 - y_2 \leq 4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq -5 \\ y_1 + y_2 \geq -4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$



O problema m acima não possui solução pois não há como se obter um par (x_1, x_2) que satisfaz a todas as restrições. O problema M tem solução $b^t y \rightarrow +\infty$.

Exemplo 3 (Caso III)

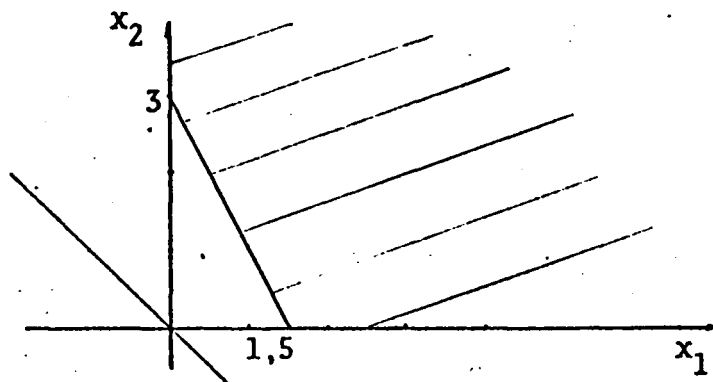
Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e os vetores

$$c^t = (-5, -4), \quad b^t = (3, 0)$$

$$m \quad \min \quad -5x_1 - 4x_2$$

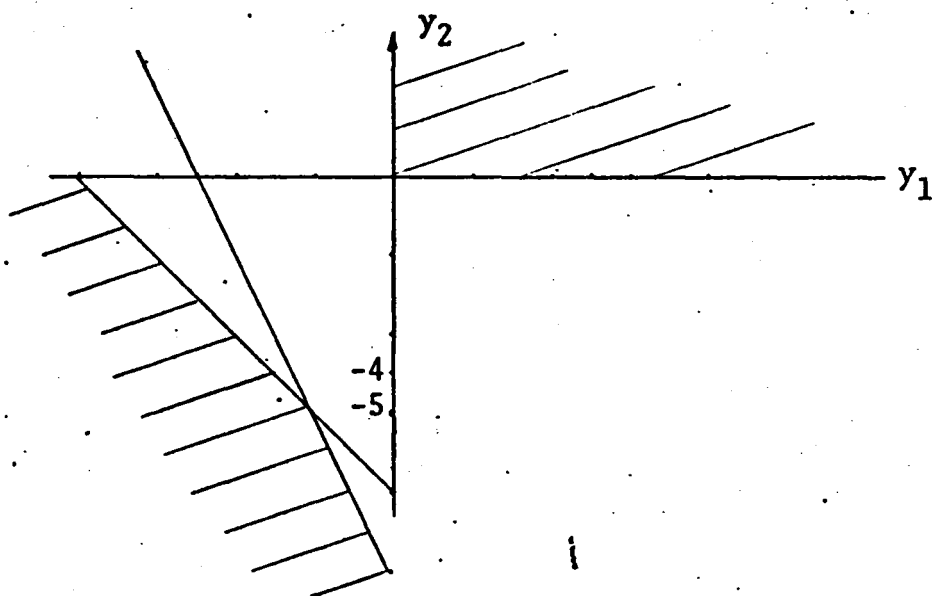
sujeito a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$M \quad \max \quad 3y_1$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq -5 \\ y_1 + y_2 \leq -4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$



O problema m tem solução com $c^t x \rightarrow -\infty$. O

problema M não possui solução pois não existe par (y_1, y_2) que satisfaz a todas as restrições.

Exemplo 4 - (Caso IV)

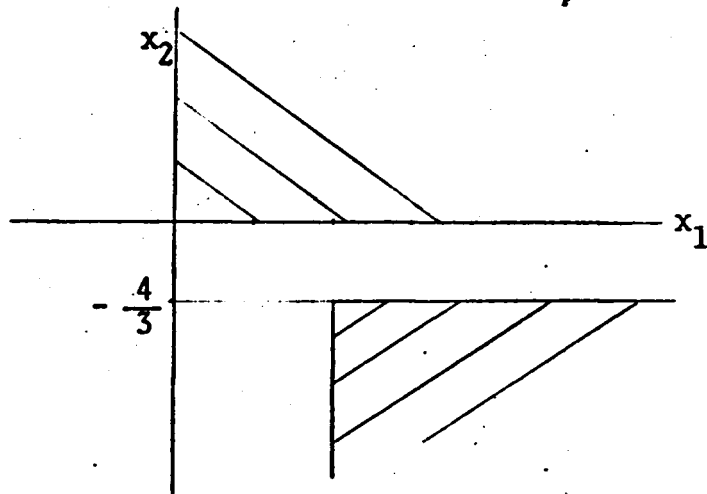
Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e os vetores $b^t = (2, 4)$

$$c^t = (-5, -6)$$

$$m \quad \min \quad -5x_1 - 6x_2$$

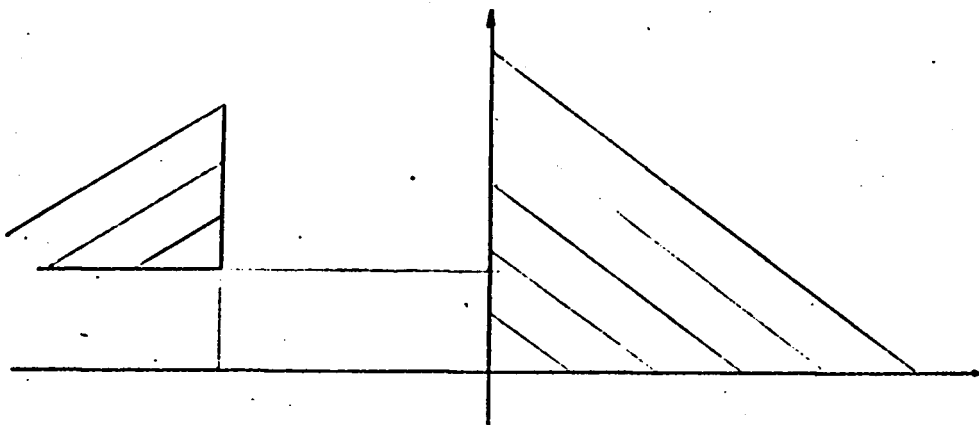
sujeito a

$$\begin{cases} -x_1 \geq 2 \\ -3x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$M \quad \max \quad 2y_1 + 4y_2$$

$$\begin{cases} y_1 \leq -5 \\ -3y_2 \leq -6 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$



Os problemas m e M não possuem soluções pois não existem pares (x_1, x_2) e (y_1, y_2) que satisfazem a todas as restrições.

II.3.2 - Uma aplicação à Teoria Econômica

Utilizaremos a programação linear para provar a igualdade entre produto e renda em um modelo linear multi-setorial.

Suponha uma economia com n processos de produção em proporções fixas com rendimentos constantes de escala. O valor adicionado por unidade de produto do j -ésimo processo é c_j . Existem m fatores de produção com dotações b_1, b_2, \dots, b_m . O termo a_{ij} mede quantas unidades do fator i são usadas na produção de uma unidade do produto no processo j . A economia irá maximizar o valor adicionado da produção de acordo com a disponibilidade de dotações:

$$\max \quad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor $\bar{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$ determina a intensidade com que cada processo é utilizado. O produto interno $\bar{y}^t c$ representa o produto nacional sob a ótica do produto (valores adicionados).

O problema acima poderia receber outro enfoque. Os fatores de produção contribuem para a formação do produto, mas por outro lado são remunerados ao preço x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, cuja determinação se faz ao sabor das forças de mercado: se houver excesso de oferta de um fator seu preço cai a zero. Com estas hipóteses a renda recebida pelos m fatores de produção será

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m$$

A economia irá minimizar o valor da renda distribuída aos fatores de produção sujeito à restrição de que o valor adicionado (unitário) em cada processo não ultrapas-

sa a remuneração (por unidade do produto) dos fatores usados:

$$\min b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_m]$ determina os preços de equilíbrio dos m mercados de fatores. O produto interno $\bar{x}^t b$ representa o produto nacional sob a ótica da renda.

O teorema da dualidade da programação linear mostra que sendo ambos os problemas factíveis ter-se-á

$$\bar{y}^t c = \bar{x}^t b$$

que constitui a igualdade entre produto e renda.

II.4 - O Teorema da Dualidade de Fenchel

Definição:

Seja E um espaço vetorial e $f_1, f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$ fun-

cionais lineares. Denomina-se dual de E o espaço dos funcionais lineares contínuos definidos em E. Neste espaço as operações de soma de funcionais, multiplicação de funcional por escalar e o funcional nulo são definidos por:

$$1^\circ) (f_1+f_2): E \longrightarrow R \text{ definido por: } (f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ para todo } x \in E$$

$$2^\circ) (\alpha f): E \longrightarrow R \text{ definido por: } (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \text{ para todo } x \in E \text{ e todo escalar } \alpha.$$

3º) O elemento nulo do dual de E é o funcional $f: E \longrightarrow R$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in E$.

As operações acima satisfazem aos 8 axiomas listados na definição de espaço vetorial (item I.2). O espaço dual de E é representado por E^* . Desta forma um ponto $x^* \in E^*$ é um funcional $x^*: E \longrightarrow R$ que assume valor $x^*(x)$ no ponto $x \in E$.

Exemplo: $E = R^n$

Sejam os vetores e_1, e_2, \dots, e_n , onde e_i tem a i -ésima coordenada igual a 1 e as demais iguais a zero, uma

base para E . Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, isto é, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Tomemos os funcionais y_1, y_2, \dots, y_n onde $y_i = x^*(e_i)$ como base para o espaço dual E^* temos:

$$\begin{aligned} x^*(x) &= x^*(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 x^*(e_1) + \dots + x_n x^*(e_n) = \\ &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \end{aligned}$$

Conclui-se que assim como um ponto de E é representado pelo produto de escalares indexados pelos vetores básicos de E de mesmo índice, um ponto de E^* (um funcional linear) também possui representação dada pelo produto de escalares indexados pelos vetores básicos de E^* de mesmo índice. Desta forma o dual de \mathbb{R}^n é o próprio \mathbb{R}^n .

O exemplo acima fica ainda mais completo se definirmos a norma de um funcional $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

Teríamos $\|y_i\| = 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

A expressão $x^*(x) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ pode ser encarada sob dois pontos de vista:

1º) $x^* = (y_1, \dots, y_n)$ é fixo e $x = (x_1, \dots, x_n)$ é variável. Neste caso $x^*(x)$ é o valor do funcional $x^* = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em cada ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$; isto é, cada ponto do espaço E é avaliado no ponto $x^* \in E^*$.

2º) $x^* = (y_1, \dots, y_n)$ é variável e $x = (x_1, \dots, x_n)$ é fixo. Neste caso $x^*(x)$ representa o valor que cada funcional $y^* = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ assume no ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$; isto é, cada ponto (funcional) de E^* é avaliado no ponto $x \in E$.

Seja $C \subseteq E$ um conjunto convexo. Definamos:

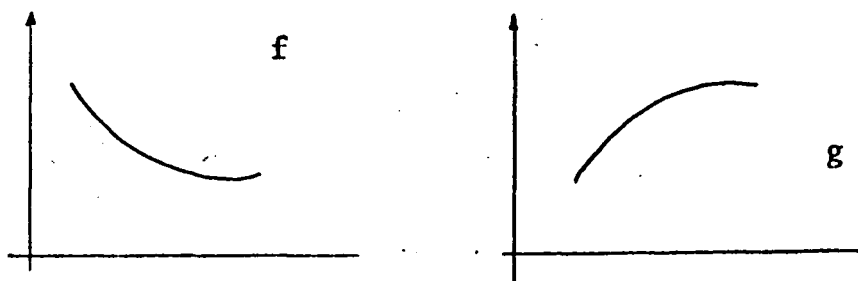
Definição:

Um funcional $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexo se para todos $x_1, x_2 \in C$ e $0 \leq \alpha \leq 1$ tivermos:

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Definição: Um funcional $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ é côncavo se $-g$ é convexo.

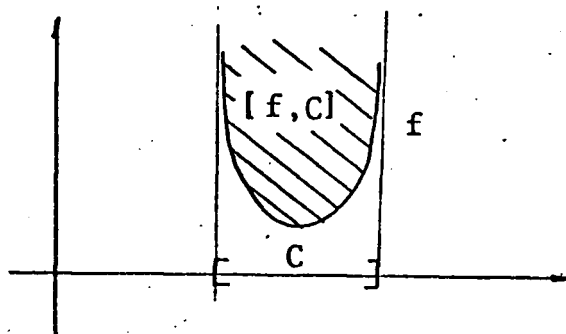
Ilustração:



Definição:

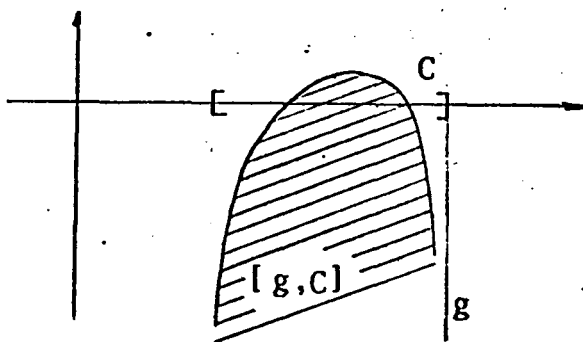
Seja $C \subseteq E$ um conjunto convexo e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional convexo. Definimos o conjunto $[f, C] \subseteq \mathbb{R} \times E$ por:

$$[f, C] = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times E : x \in C, f(x) \leq r\}$$



Seja $C \subseteq E$ um conjunto convexo e $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional côncavo. Definimos o conjunto $[g, C] \subseteq \mathbb{R} \times E$ por:

$$[g, C] = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times E : x \in C \text{ e } g(x) \geq r\}$$



Lema 5: $[f, C]$ é convexo se, e somente se, f é convexo. $[g, C]$ é convexo se, e somente se g é côncavo.

prova: para $[f, C]$

Admita f convexo e sejam $(r_1, x_1), (r_2, x_2) \in [f, C]$. Provemos que o ponto $\alpha(r_1, x_1) + (1-\alpha)(r_2, x_2)$ per-

tence a C . Pela convexidade do funcional f temos:

$$\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2 \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geq f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2].$$

Portanto o ponto $(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2, \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in C$.

Reciprocamente seja C convexo e $(r_1, x_1), (r_2, x_2) \in C$.

Provemos que f é convexa. A convexidade de C impli-

ca $(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2, \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in C$ ou $\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2 \geq f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]$. Mas $r_1 \geq f(x_1)$ e $r_2 \geq f(x_2)$ ou seja $\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geq f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]$, o que prova f é convexa.

Definição:

Seja $C \subseteq E$ um conjunto convexo e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$

um funcional convexo. Define-se o conjunto conjugado $C^* \subseteq E^*$

por $C^* = \{x^* \in E^*: \sup_{x \in C} [x^*(x) - f(x)] < \infty\}$

e o funcional conjugado $f^*: C^* \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in C} [x^*(x) - f(x)]$$

Para uma visualização geométrica do funcional

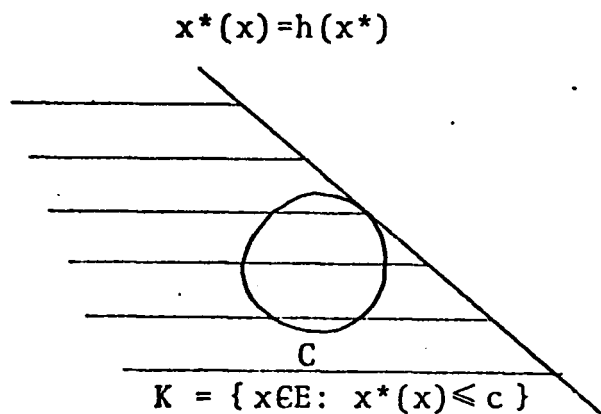
conjugado notemos que um hiperplano H contido no espaço $R \times E$ é representado por $H = \{(r, x) \in R \times E: r \cdot s + \bar{x}^*(x) = \bar{\alpha}\}$. Os parâmetros s , \bar{x}^* e $\bar{\alpha}$ descrevem a equação do funcional linear que define o hiperplano. Pode-se tomar $s = -1$ e fazer a necessária alteração no funcional linear \bar{x}^* e no escalar $\bar{\alpha}$, de modo que o hiperplano H passa a ser representado por:

$H = \{(r, x) \in R \times E: -r + x^*(x) = \alpha\}$, bastando definir $x = \bar{x}^*/(-s)$ e $\alpha = \bar{\alpha}/(-s)$. Tal alteração será possível sempre que H não for um hiperplano vertical, isto é, $s \neq 0$.

Definição:

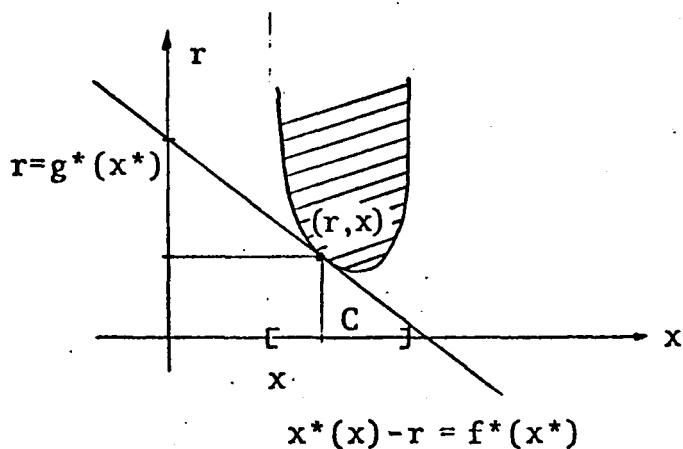
Seja E um espaço vetorial normado e $C \subseteq E$ um conjunto convexo. O funcional $h: E^* \rightarrow R$ definido por $h(x^*) = \sup_{x \in C} x^*(x)$ é chamado de funcional suporte de C .

A visualização de h pode ser feita na figura abaixo. Tome o conjunto $K = \{x \in E: x^*(x) \leq c\}$ e faça c variar. À medida que se toma c cada vez maior o número de pontos do conjunto K aumenta. $h(x^*)$ é o ínfimo das constantes c tal que $C \subseteq K$.



De posse do conceito de funcional suporte podemos compreender o conteúdo geométrico do funcional conjugado dado por $x^*(x) - r = \alpha$. À medida que α varia, tal funcional descreve hiperplanos paralelos em $\mathbb{R} \times E$. Quando $\alpha = h((-1, x^*))$ o hiperplano $H = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times E : x^*(x) - r = \alpha\}$ é um hiperplano suporte do conjunto $[f, C]$ ou seja, o funcional $f^*(x^*) = x^*(x) - r$ é um funcional suporte de $[f, C]$.

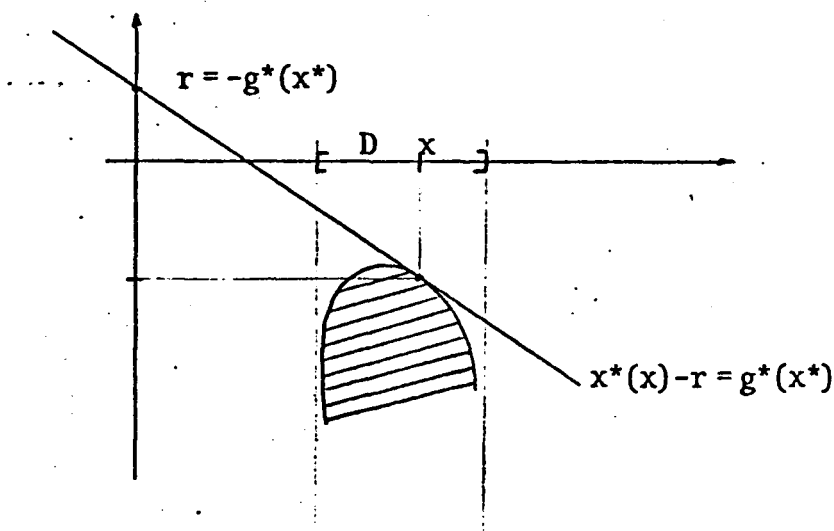
Ilustrando para $E = \mathbb{R}$, o hiperplano dado pelo funcional $x^*(x) - r = f^*(x^*)$ tangencia o conjunto $[f, C]$ em (r, x) e intercepta o eixo dos r à altura $f^*(x^*)$



Definição:

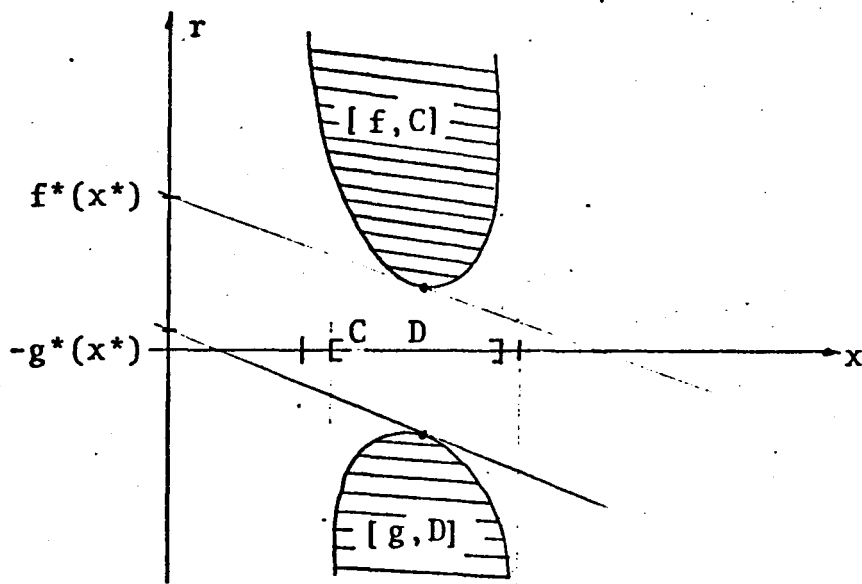
$D \subseteq E$ um conjunto convexo e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional côncavo. Define-se o conjunto conjugado $D^* \subseteq E^*$ por $D^* = \{x^* \in E^*: \inf_{x \in D} [x^*(x) - g(x)] > -\infty\}$ e o funcional conjugado $g^*: D^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $g^*(x^*) = \inf_{x \in D} [x^*(x) - g(x)]$

A visualização geométrica do funcional conjugado g^* é análoga ao f^* . O hiperplano definido por $x^*(x) - r = g^*(x^*)$ suporta o conjunto $[g, D]$. O escalar $-g^*(x^*)$ mede a distância vertical do intersepto do hiperplano suporte com o eixo \mathbb{R}



Uma vez apresentados os conceitos de funcionais conjugados, passemos à sua utilização na resolução de problemas de otimização. Sejam C e D conjuntos convexos e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais convexo e côncavo respectivamente. Desejamos obter o $\inf_{x \in (C \cap D)} [f(x) - g(x)]$

Este problema pode ser resolvido usando-se os funcionais conjugados de modo a se obter a menor distância que separa os conjuntos $[f, C]$ e $[g, D]$. De acordo com a figura abaixo pode-se perceber que este valor é igual à maior distância que separa dois hiperplanos paralelos que separam os conjuntos $[f, C]$ e $[g, D]$. Tal distância é dada por $g^*(x^*) - f^*(x^*)$. O problema, portanto, pode ser substituído por achar o funcional x^* que maximiza $g^*(x^*) - f(x^*)$ em $C^* \cap D^*$.



Teorema II.5 Teorema da Dualidade de Fenchel

Seja E um espaço vetorial normado, C e D subconjuntos convexos de E , $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais convexo e côncavo respectivamente. Admita que $C^0 \cap D^0 \neq \emptyset$ e

que $[f, C]$ ou $[g, D]$ tem interior não vazio. Suponha, final-

mente, que $u = \inf_{x \in C \cap D} [f(x) - g(x)]$ é finito. Então:

$$x \in C \cap D$$

$$(i) \quad u = \inf_{x \in C \cap D} [f(x) - g(x)] = \max_{x^* \in C^* \cap D^*} [g^*(x^*) - f^*(x^*)]$$

(ii) se o ínfimo do lado esquerdo é alcançado para algum

$x_0 \in C \cap D$ então:

$$\max_{x \in C} [x_0^*(x) - f(x)] = x_0^*(x_0) - f(x_0) \quad e$$

$$\min_{x \in D} [x_0^*(x) - g(x)] = x_0^*(x_0) - g(x_0)$$

Prova: Para todo $x^* \in C^* \cap D^*$, $x \in C \cap D$ temos:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in C} [x^*(x) - f(x)] \implies f^*(x^*) \geq x^*(x) - f(x)$$

$$g^*(x^*) = \inf_{x \in D} [x^*(x) - g(x)] \implies g^*(x^*) \leq x^*(x) - g(x)$$

logo, $f(x) - g(x) \geq g^*(x^*) - f^*(x^*)$ o que implica:

$$\inf_{x \in C \cap D} [f(x) - g(x)] \geq \sup_{x^* \in C^* \cap D^*} [g^*(x^*) - f^*(x^*)]$$

Se existir $x_0^* \in C^* \cap D^*$ tal que $\inf_{x \in C \cap D} [f(x) - g(x)] =$

$= \sup_{x^* \in C^* \cap D^*} [g^*(x^*) - f^*(x^*)]$ então a igualdade em (i) estará

provada.

Seja o funcional convexo $f-u$ e o conjunto convexo $[f-u, C]$. Este conjunto é um deslocamento vertical do $[f, C]$. Pela definição de u , conclui-se que $[f-u, C]$ e $[g, D]$ estão arbitrariamente próximos mas não possuem ponto interior na sua interseção. Como por hipótese um destes dois conjuntos possui interior não vazio, podemos separá-los por um hiperplano contido no espaço $R \times E$. Este hiperplano não pode ser vertical pois do contrário separaria C e D mas por hipótese $C \cap D \neq \emptyset$. Portanto o hiperplano pode ser definido por um funcional linear $x_0^*(x) - r = \alpha$ para algum $x_0^* \in E^*$. Como $[g, D]$ está abaixo deste hiperplano mas arbitrariamente próximo dele, temos:

$$\alpha = \inf_{x \in D} [x_0^*(x) - g(x)] = g^*(x_0^*)$$

Analogamente $[f-u, C]$ está acima do hiperplano mas arbitrariamente próximo dele, logo:

$$\alpha = \sup_{x \in C} [x_0^*(x) - f(x) + u] = f^*(x_0^*) + u$$

Portanto $u = g^*(x_0^*) - f^*(x_0^*)$

Para completar a prova observemos que se o

ínfimo u for alcançado por algum $x_0 \in C \cap D$, os conjuntos $[g, D]$ e $[f-u, C]$ são tais que $(g(x_0), x_0) = (f(x_0), x_0) \in ([g, D] \cap [f-u, C])$ e este ponto $(g(x_0), x_0)$ pertence ao hiperplano de separação dado por $H = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times E : x_0^*(x) - r = \alpha\}$. Isto completa a prova de (ii).

Q.E.D.

Como aplicação do teorema da dualidade de Fenchel à Teoria Econômica apresentamos uma prova de importante Teorema da Teoria dos Jogos: o Teorema do min-max. Antes de provarmos este Teorema faremos uma breve exposição da Teoria dos Jogos na forma matricial com o objetivo de motivar o conhecimento do min-max.

Jogos Matriciais de Duas Pessoas e Soma Zero

Sejam dois jogadores I e II que disputam um jogo com matrix $Q(n \times m)$, denominada matriz de lucro, descrito por:

1º) A matrix Q é conhecida por ambos os jogadores e seu termo q_{ij} representa o valor que o jogador I paga ao jogador

II quando o resultado do jogo é q_{ij} .

2º) Para se determinar o resultado q_{ij} os jogadores se comportam como maximizadores de lucro (ou minimizadores de prejuízo). O jogador I escolhe uma das \underline{n} linhas de Q e o jogador II escolhe uma das \underline{m} colunas. Estas linhas e colunas são denominadas estratégias de I e II respectivamente. O jogador I escolhe uma estratégia que minimiza o valor a ser pago a II sabendo que II escolherá uma estratégia que maximiza o valor a ser recebido de I. Da mesma forma o jogador II escolhe a estratégia que maximiza o valor a ser recebido de I sabendo que I escolherá a estratégia que minimizar o valor a ser pago a II.

3º) Como um jogador não sabe qual será a estratégia escolhida pelo outro, ele terá que fazer sua opção baseado naquilo que espera que o outro jogador faça. Desta forma a atitude tomada por cada jogador será caracterizada por um vetor de probabilidade de escolha. O jogador I escolhe o ve-

tor $x^t = (x_1, \dots, x_n)$ com $x_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. O jogador

II escolhe o vetor $y^t = (y_1, \dots, y_m)$ com $y_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^m y_j = 1$.

Desta forma o lucro esperado por I será $x^t Q y$.

4º) Denominando A o conjunto de estratégias possíveis para I e B o conjunto análogo para II, concluímos que o objetivo de I é

$$\min_{x \in A} \max_{y \in B} x^t Q y$$

e o objetivo de II é

$$\max_{y \in B} \min_{x \in A} x^t Q y$$

O Teorema do min-max prova que os dois valores acima são iguais.

Para utilizarmos o teorema da dualidade de Fenchel na prova do min-max definamos:

$$A = \{x: x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\} \subset E$$

$$B = \{x^*: x^* = Q y, y_i \geq 0, \sum_{i=j}^m y_j = 1\} \subset E^*$$

onde $E=E^*=R^n$. Observe que A e B são convexos e compactos.

$x^*(x) = x^t Q y$ = valor que o jogador I paga ao jogador II quando I escolhe a estratégia x e II escolhe a estratégia x^* .

Podemos, finalmente, passar ao:

Teorema II.6 - Min-Max

Sejam os espaços $E=E^*=R^n$ e os conjuntos $A \subset E$ e $B \subset E^*$ definidos acima. Então

$$\min_{x \in A} \max_{x^* \in B} x^*(x) = \max_{x^* \in B} \min_{x \in A} x^*(x)$$

Prova: Definamos o funcional $f: E \rightarrow R$ por

$$f(x) = \max_{x^* \in B} x^*(x)$$

Este funcional está bem definido pois a compactidade de B garante a existência do máximo. f é contínuo pois tomando-se uma seqüência $\{x_n\} \in E$, $x_n \rightarrow x_0$ podemos associar a cada elemento desta seqüência um funcional $x_n^* \in B$ tal que $x_n^*(x_n) = \max_{x^* \in B} x^*(x_n)$ e formar a seqüência $\{x_n^*\} \in B$.

Como B é compacto, para $x_n \rightarrow x_0$ temos $x_n^* \rightarrow x_0^* \in B$. Pe-

$$\text{la definição } x_n^*, \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x^* \in B} x^*(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} x_n^*(x_n) = x_0^*(x_0) =$$

$$= \max_{x^* \in B} x^*(x_0) = f(x_0). \text{ Portanto } \lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = f(x_0), \text{ o que}$$

prova a continuidade de f . f é também convexo pois para

$$0 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } x_1, x_2 \in E \max_{x^* \in B} x^*[(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2] \geq (1-\alpha) \max_{x^* \in B} x^*(x_1) +$$

$$+ \alpha \max_{x^* \in B} x^*(x_2).$$

A compacidade de A e a continuidade de f garantem que existe

$$\min_{x \in A} f(x)$$

Podemos agora aplicar o teorema da dualidade

de Fenchel substituindo f por f , C por E , g por 0 e D por A .

Notemos que as hipóteses daquele teorema são satisfeitas pois

f e g são convexo e côncavo respectivamente; $A \subseteq E$, portanto

$C \cap D \neq \emptyset$; finalmente $[f, D]$ tem interior não vazio. Temos:

$$D^* = \{x^* \in E^* : \inf_{x \in D=A} [x^*(x) - 0] > -\infty\} \implies D^* = E^*$$

$$g^*(x^*) = \inf_{x \in D=A} [x^*(x) - 0] \implies g^*(x^*) = \min_{x \in A} x^*(x) = 0.$$

Verifica-se ainda que $C^* = B$ e $f^*(x^*) = 0$.

Para provar isto suponha $x_1^* \notin B$ e utilizemos o teorema de separação tomando $x_1 \in E$ tal que para todo $x^* \in B$ tenhamos $x_1^*(x_1) - x^*(x_1) > \alpha > 0$. Então tomando-se $x = \beta x_1$, $\beta > 0$, $x_1^*(x) - \max_{x^* \in B} x^*(x)$ pode tornar-se arbitrariamente grande.

de. Como $\max_{x^* \in B} x^*(x) = f(x)$, temos $\sup_{x \in E} [x_1^*(x) - f(x)] = +\infty$,

ou seja $x_1^* \notin C^*$, portanto $C^* \cap B$

Reciprocamente, se $x_1^* \in B$, então $x_1^*(x) - \max_{x \in B} x^*(x)$ atinge um máximo de 0 em $x = \theta$, ou seja $0 = \sup_{x \in C} [x^*(x) - f(x)] = f^*(x^*) < \infty$. Portanto $x^* \in C^*$, ou $B \subset C^*$

Finalmente por (i) do teorema II.5,

$$\min_{x \in A} [f(x) - 0] = \max_{x^* \in B \cap E^*} [g^*(x^*) - 0] = \max_{x^* \in B} \min_{x \in A} x^*(x)$$

Q.E.D.

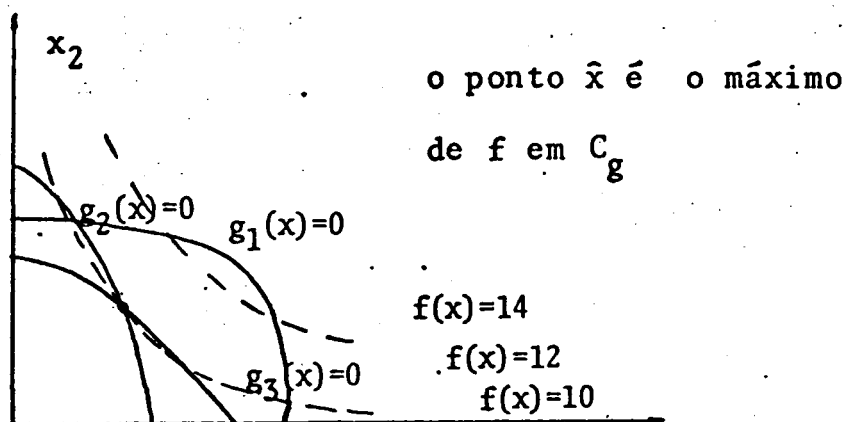
II.5 - Programação Côncava

O problema básico da programação côncava é maximizar um funcional côncavo $f: C \rightarrow \mathbb{R}$, onde C é um con-

junto convexo, em um subconjunto de C cujos pontos satisfazem a restrições definidas por funcionais côncavos.

Para exemplificar, seja $C \subseteq \mathbb{R}^2$ e os funcionais côncavos $f, g_1, \dots, g_m : C \rightarrow \mathbb{R}$. Deseja-se maximizar f no conjunto $C_g \subseteq C$ dado por $C_g = \{x \in C; g_i(x) \geq 0, i=1,2,\dots,m\}$.

A figura abaixo ilustra o problema:



As condições para a existência de um máximo em C_g serão fornecidas pelo Teorema de Kuhn-Tucher. Antes de apresentarmos este teorema precisamos de alguns resultados intermediários:

Lema II.5 Seja $C \subseteq E$ um conjunto e $g_1, g_2, \dots, g_m : C \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais côncavos. Então, $C_g = \{x \in C; g_i(x) \geq 0, i=1,2,\dots,m\}$ é um conjunto convexo.

prova: Seja $C_g^i = \{x \in C: g_i(x) \geq 0\}$. Como $C_g = \bigcap_{i=1}^m C_g^i$, basta provar que C_g^i é convexo que a convexidade de C_g decorre do teorema I.1. Para tal, sejam $x_1, x_2 \in C_g^i \subset C$, isto é $g_i(x_1) \geq 0, g_i(x_2) \geq 0$. Como C é convexo, para $0 \leq \alpha \leq 1$, $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in C$. Temos pela concavidade de g_i : $[g_i((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2)] \geq (1-\alpha)g_i(x_1) + \alpha g_i(x_2) \geq (1-\alpha)0 + \alpha 0 = 0$. Logo $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in C_g^i$, o que prova que C_g^i é convexo. Segue-se que $C_g = \bigcap_{i=1}^m C_g^i$ é convexo.

Teorema II.7

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $g_1, g_2, \dots, g_m: C \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais côncavos. Se o sistema de equações.

$$g_i(x) > 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

não admita solução em C , então existem coeficientes p_1, p_2, \dots, p_m , com $p_i \geq 0$ para todo i e $p_1 + p_2 + \dots + p_m > 0$, tais que

$$\sum_{i=1}^m p_i g_i(x) \leq 0 \quad \text{para todo } x \in C.$$

Prova: Dado um ponto $x \in C$ defina o conjunto Z_x por $Z_x \equiv \{(z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m: z_i < g_i(x), i=1, 2, \dots, m\}$ e considere o conjunto Z definido por $Z \equiv \bigcup_{x \in C} Z_x$

Observemos que $\theta \notin Z$ pois isto implicaria $\theta \in Z_{\bar{x}}$ para algum \bar{x} , ou seja $0 < g_i(\bar{x})$ para todo i , o que contraria a hipótese de o sistema $g_i(x) > 0, i = 1, 2, \dots, m$ não admitir solução em C . Verifiquemos ainda que Z é convexo pois dados $z \in Z_x$ e $\bar{z} \in Z_{\bar{x}}$ e $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$(1-\alpha)z_i + \alpha \bar{z}_i < (1-\alpha)g_i(x) + \alpha g_i(\bar{x}) \leq g_i[(1-\alpha)x + \alpha \bar{x}],$$

$i = 1, 2, \dots, m$. Logo $(1-\alpha)x + \alpha \bar{x} \in Z_{[(1-\alpha)x + \alpha \bar{x}]} \subset Z$.

Aplicando o teorema de separação de conjunto convexo e ponto não pertencente a seu interior, concluimos que o funcional linear $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(x) = \bar{p}^t x$ separa Z de θ , ou seja $\bar{p}^t z \geq \bar{p}^t \theta = 0$ para todo $z \in Z$. Como z_i , pode tomar valores muito grandes negativamente, a desigualdade acima exige $\bar{p} \leq \theta$. Substituindo \bar{p} por $p = -\bar{p}$, $p \geq \theta$, temos $p^t z \leq 0$ para todo $z \in Z$.

Qualquer ponto $z \in Z$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ obedece à desigualdade $z_i < g_i(x)$. Definindo $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m)$ podemos escrever $z_i = g_i(x) - \epsilon_i$ para algum $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto necessário. Temos, $p^t z \leq 0 \implies \sum_{i=1}^m p_i [g_i(x) - \epsilon] \leq 0$ para todo $x \in C$ e $\epsilon > 0$. Tomando-se ϵ_i cada vez menores te-

mos, $\sum_{i=1}^m p_i g_i(x) \leq \theta$. Como $\theta \geq 0$, $p_i \geq 0$ para $i=1,2,\dots,m$,

e $p_1 + p_2 + \dots + p_m > 0$.

Q.E.D.

Nos teoremas a seguir utilizaremos, para simplificar a notação, as convenções abaixo:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$$

$$\langle p, g(x) \rangle = \sum_{i=1}^m p_i g_i(x)$$

$$C_g = \{x \in C : g_i(x) \geq 0, i=1,2,\dots,m\}$$

Teorema II.8 (Corolário do Teorema II.7)

Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f, g_1, g_2, \dots, g_m: C \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais côncavos. Se o máximo do funcional f em C_g ocorre em $\hat{x} \in C_g$, então existem $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m$ não negativos com $\tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \dots + \tilde{p}_m > 0$, tais que $\tilde{p}_0 f(x) + \langle \tilde{p}, g(x) \rangle \leq \tilde{p}_0 f(\hat{x})$ para todo $x \in C$ e $\langle \tilde{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$.

Prova: Por hipótese o sistema

$$g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$f(x) - f(\hat{x}) > 0$$

Não tem solução em C . Portanto o sistema

$$g_i(x) > 0$$

$$f(x) - f(\hat{x}) > 0$$

Também não possui solução em C . Podemos, pois, aplicar o teorema II.7 para obter $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m$, $\bar{p}_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, m$ com $\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_m > 0$, tais que $\bar{p}_0[f(x) - f(\hat{x})] + \langle \bar{p}, g(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in C$.

Logo, $\bar{p}_0 f(x) + \langle \bar{p}, g(x) \rangle \leq \bar{p}_0 f(\hat{x})$

Para mostrar que $\langle \bar{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$ faça $x = \hat{x}$ na expressão acima, obtendo-se $\langle \bar{p}, g(\hat{x}) \rangle \leq 0$.

Como $\bar{p} \geq \theta$ e $g(\hat{x}) \geq \theta$, obtemos $\langle \bar{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$

Q.E.D.

O Teorema II.8 é uma primeira versão do Teorema de Kuhn-Tucker que não estabelece uma condição que garanta que o coeficiente \bar{p}_0 seja estritamente positivo. O Teorema II.9, apresentado a seguir, mostra que se o conjunto

C_g tiver pelo menos um ponto interior isto é, um ponto \bar{x} tal que $g_i(\bar{x}) > 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$, então o coeficiente \bar{p}_0 é estritamente positivo. Tal condição sobre \bar{x} é conhecida como condição de Slater.

Teorema II.9 (Corolário do Teorema II.8 com a condição de Slater)

Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f, g_1, g_2, \dots, g_m: C \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais côncavos. Suponha ainda que existe $\bar{x} \in C_g$ tal que $g_i(\bar{x}) > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (condição de Slater). Se o máximo de f em C_g ocorre em $\hat{x} \in C_g$, então existem $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_m$ não negativas com $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \dots + \hat{p}_m > 0$ tais que $f(x) + \langle \hat{p}, g(x) \rangle \leq f(\hat{x}) + \langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle \leq f(\hat{x}) + \langle p, g(\hat{x}) \rangle$.

Prova: Pelo teorema II.8 existem $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m$, $\bar{p}_i \geq 0$ $i = 0, 1, 2, \dots, m$ com $\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_m > 0$ tais que $\bar{p}_0 f(x) + \langle \bar{p}, g(x) \rangle \leq \bar{p}_0 f(\hat{x})$.

A condição de Slater implica $\bar{p}_0 > 0$ pois se $\bar{p}_0 = 0$ teríamos $\langle \bar{p}, g(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in C_g$, em particu-

lar para $x=\bar{x}$, ou seja $\langle \bar{p}, g(\bar{x}) \rangle \leq 0$ o que contradiz

a hipótese de $g_i(\bar{x}) > 0$ para $i=1,2,\dots,m$. Como

$\bar{p}_0 > 0$ podemos definir $\hat{p}_i \equiv \bar{p}_i/\bar{p}_0$ obtendo:

$f(x) + \langle \bar{p}, g(x) \rangle \leq f(\hat{x})$ para todo $x \in C_g$. O teo-

rema II.8 afirma ainda que $\langle \bar{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$. Logo

$\frac{1}{\bar{p}_0} \langle \bar{p}, g(\hat{x}) \rangle = \langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$. Este resultado

nos fornece a primeira desigualdade.

$$f(x) + \langle \hat{p}, g(x) \rangle \leq f(\hat{x}) + \langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle$$

Para obtermos a segunda desigualdade basta lembrar

que $p \geq 0$, $g(x) \geq 0$ e $\langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$ temos

$0 = \langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle \leq \langle p, g(\hat{x}) \rangle$, para todo $x \in C_g$, lo-

go, $f(\hat{x}) + \langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle \leq f(\hat{x}) + \langle p, g(\hat{x}) \rangle$.

Q.E.D.

Definição de Ponto de Sela:

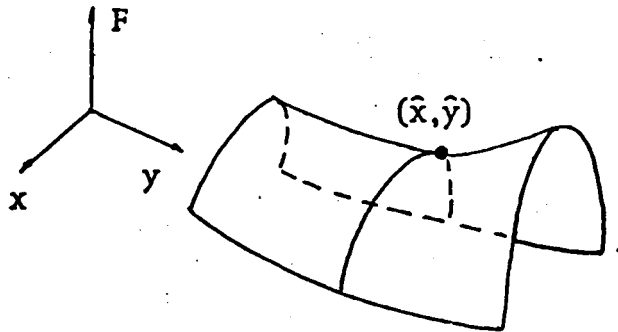
Seja o funcional $F: X \times Y \rightarrow R$ e os pontos

$x \in X$, $y \in Y$. Um ponto $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ é um ponto de sela

se para todo $(x,y) \in X \times Y$, $F(x, \hat{y}) \leq F(\hat{x}, \hat{y}) \leq F(\hat{x}, y)$

O ponto (\hat{x}, \hat{y}) é um ponto de mínimo quando ca-

minhamos na direção y e um ponto de máximo quando caminhamos na direção x .



De acordo com esta definição, a expressão do Teorema II.9 pode ser interpretada como uma função $L: C \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $L(x, p) = f(x) + \langle p, g(x) \rangle$

A desigualdade daquele Teorema torna-se

$L(x, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, p)$ onde se verifica que o ponto de máximo de f em C_g corresponde ao ponto de sela (\hat{x}, \hat{p}) da função L .

Apresentaremos a versão final do Teorema de Kuhn-Tucker como um corolário do Teorema II.9 e do Teorema II.10 dado abaixo. Esta forma de proceder permite salientarmos um detalhe que poderia passar despercebido em uma demonstração muito extensa, qual seja, o fato de a condição de suficiência do Teorema de Kuhn-Tucker depender da con-

cavidade dos funcionais f, g_1, g_2, \dots, g_n , bem como da condição de Slater.

Teorema II.10

Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e os funcionais $f, g_1, g_2, \dots, g_n: C \rightarrow \mathbb{R}$. Se existir um ponto $(\hat{x}, \hat{p}) \in C \times \mathbb{R}_+^m$ tal que $L(x, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, p)$; então

- (i) o ponto \hat{x} maximiza f em C_g ;
- (ii) $\langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$.

Prova: A desigualdade $L(\hat{x}, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, p)$ para todo $p \in \mathbb{R}_+^m$ implica $\langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle \leq \langle p, g(\hat{x}) \rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_+^m$ tomando ao invés de p , αp , onde $\alpha > 0$ temos:

$$\langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle \leq \frac{1}{\alpha} \langle p, g(\hat{x}) \rangle.$$

Fazendo-se $\alpha \rightarrow \infty$ temos $0 \leq \langle p, g(\hat{x}) \rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_+^m$. Por outro lado, tomando-se $P=0$ na desigualdade anterior obtemos $\langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle \leq 0$. Conclui-se que $\langle \hat{p}, g(\hat{x}) \rangle = 0$. Para provar que $\hat{x} \in C_g$ tomamos $p=e_i$ para $i=1, 2, \dots, m$ em $\langle p, g(\hat{x}) \rangle$, obtendo

$$g_i(\hat{x}) \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Para mostrar que \hat{x} maximiza f em C_g , tomemos a desigualdade $L(x, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, \hat{p})$ para todo $x \in C$ implica

$$f(x) + \langle \hat{p}, g(x) \rangle \leq f(\hat{x}) + \langle \hat{p}, \hat{x} \rangle = f(\hat{x}).$$

Portanto $f(\hat{x}) - f(x) \geq \langle \hat{p}, g(x) \rangle$ para todo $x \in C$.

Se $x \in C_g$, temos $g_i(x) \geq 0$ para todo i , o que implica

$$\langle \hat{p}, g(x) \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in C_g.$$

Conclui-se que $f(\hat{x}) \geq f(x)$ para todo $x \in C_g$.

Q.E.D.

Conforme se pode verificar na demonstração acima, não precisamos das hipóteses de concavidade dos funcionais f, g_1, g_2, \dots, g_m e tão pouco da condição de Slater para provar que se (\hat{x}, \hat{p}) é um ponto de sela de L então \hat{x} é o máximo de f em C_g .

Teorema II.11 - Kunh-Tucker (corolário dos teoremas II.9 e

II.10).

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f_1, g_1, g_2, \dots, g_m:$

$C \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais côncavos. Suponha que existe um pon-

to $\bar{x} \in C$ tal que $g_i(\bar{x}) > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (condição de Slater). Então o funcional f atinge um máximo em C restrito a $C_g = \{x \in C: g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m\}$ no ponto $\hat{x} \in C_g$ se, e somente se, $L(x, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, \hat{p}) \leq L(\hat{x}, p)$ onde $L(x, p) = f(x) + \langle p, g(x) \rangle$.

Prova: (i) A condição é necessária: Veja Teorema II.9

(ii) A condição é suficiente: Veja Teorema II.10.

Q.E.D.

II.5.2 - Uma aplicação à Teoria Econômica

Utilizaremos a programação côncava para provar a existência de equilíbrio competitivo no modelo neo-clássico de equilíbrio geral da produção.

O modelo neo-clássico de equilíbrio geral da produção parte das seguintes hipóteses:

- 1) Economia competitiva com n bens e m fatores de produção,

2) Existem e empresas com conjuntos de possibilidades de produção x_f , $f=1, \dots, e$, convexos fechados e contendo a origem.

3) O conjunto de possibilidades de produção agregado $X = \sum_f X_f$ é formado de pontos da forma $(x, -y)$ onde $x \in R_+^n$ e $y \in R_+^m$, respectivamente vetores de bens e fatores de produção. Se $(x, \theta) \in Y$ então $x=\theta$, isto é, não é possível produzir sem usar fatores de produção.

4) Os n bens são comercializáveis com o exterior ao vetor de preços $P \in R_+^n$.

5) Os m fatores de produção têm oferta totalmente inelástica para o total de empresas, sendo representados pelo vetor $\bar{y} \in R_{++}^m$ correspondendo às dotações pertencentes aos indivíduos.

Definição:

O conjunto de possibilidades de produção da economia \bar{X} é definido por $\bar{X} = \{x \in R_+^n : (x, -y) \in Y, y \leq \bar{y}\}$.

As hipóteses do item (1) permitem provar que X é convexo, compacto e contém a origem.

Cada empresa maximiza seu lucro $\langle p, x \rangle - \langle w, y \rangle$ tomando o vetor de preços dos fatores de produção $w \in \mathbb{R}_+^m$ como dado. A determinação de w é feita pelo mercado de modo a que a economia chegue a um ponto de produção $(x, -y) \in \bar{X}$. Neste ponto os preços w_i dos fatores que não são plenamente utilizados caem a zero, o que nos permite escrever $\langle w, \bar{y} - y \rangle = 0$

Definição

Um equilíbrio competitivo no modelo neoclássico de equilíbrio da produção é um ponto $(x^*, -y^*) \in X$ e um vetor $w \in \mathbb{R}_+^m$ de preços dos fatores tais que:

$$(1) \quad y^* \leq \bar{y}$$

$$(2) \quad \langle p, x^* \rangle - \langle w, y^* \rangle \geq \langle p, x \rangle - \langle w, y \rangle \quad \text{para todo} \\ (x, -y) \in X$$

$$(3) \quad \langle w, \bar{y} - y^* \rangle = 0$$

Existência do Equilíbrio no Modelo Neoclássico

Primeiro provemos que se $x_1^*, x_2^*, \dots, x_e^*$ são pontos de equilíbrio das diversas empresas ao sistema de preços p , então $x^* = \sum_{f=1}^e x_f^*$ é o ponto de lucro (agregado) em \bar{X} . Para tal lembremos que $\langle p, x_f^* \rangle - \langle w, y_f^* \rangle \geq \langle p, x_f \rangle - \langle w, y_f \rangle$ para todo f . Somando para $f=1, 2, \dots, e$, obtemos $\langle p, x^* \rangle - \langle w, y^* \rangle \geq \langle p, x \rangle - \langle w, y \rangle$, o que mostra que podemos considerar a economia como sendo uma única empresa.

Isto posto, apliquemos o Teorema II.11.

1º) X é convexo;

2º) $\bar{y}_i - y_i \geq 0$ são n restrições côncavas;

3º) $\langle p, x \rangle$ é um funcional côncavo definido em todo

$$(x, -y) \in X$$

4º) $(\theta, \theta) \in X$ é um ponto de X sujeito a $\bar{y}_i - y_i > 0$ para $i=1, \dots, n$ (cond. Slater).

Então, pelo Teorema II.11, existe $(x^*, -y^*) \in X$

com $y^* \leq \bar{y}$ e $w \in R_t^m$ tal que $\langle p, x^* \rangle = \langle p, x^* \rangle +$

$\langle w, \bar{y}-y^* \rangle \geq \langle p, x \rangle + \langle w, \bar{y}-y \rangle$ para todo $(x, -y) \in X$.

Logo: $\langle w, \bar{y}-y \rangle = 0$ e $\langle p, x^* \rangle - \langle w, y^* \rangle \geq \langle p, x \rangle -$

$-\langle w, y \rangle$. 0 que prova a existência do equilíbrio

$(x^*, -y^*, w)$.

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES À TEORIA ECONÔMICA

III.1 - Introdução

Neste Capítulo faremos uso do instrumental matemático desenvolvido no Capítulo I para estudarmos o modelo de economia competitiva de produção e consumo de Arrow-Debreu.

O Capítulo está dividido em três partes: na primeira descrevemos o modelo e suas hipóteses; na segunda provamos a existência de equilíbrio do modelo, finalmente discutimos as implicações deste equilíbrio.

III.2 - O Modelo de Produção e Consumo de Arrow-Debreu

Em uma economia existem n bens que são produzidos por m firmas. Cada firma f é caracterizada por um con-

junto de possibilidades de produção Y_f o qual satisfaz aos axiomas: A.1 - Y_f é um subconjunto convexo e fechado do R^n contendo θ ($f= 1, \dots, m$).

Este axioma significa que a produção é divisível ($y_f \in Y_f$ implica $\lambda y_f \in Y_f$), aditível ($y_f^1, y_f^2 \in Y_f$ implica $y_f^1 + y_f^2 \in Y_f$) e não admite retornos crescentes de escala ($y_f \in Y_f, 0 \leq \lambda \leq 1$ então $\lambda y_f = \lambda y_f + (1-\lambda) \theta \in Y_f$). O fato de Y_f ser fechado significa pontos arbitrariamente próximos de y_f pertencem a Y_f . $\theta \in Y_f$ significa que a empresa pode decidir nada produzir.

Definindo o conjunto de possibilidades de produção da economia por $Y = \sum_f Y_f$ temos os axiomas:

A.2 - Se $y \in Y$ e $y \geq \theta$, então $y = \theta$

A.3 - $Y \cap (-Y) = \emptyset$

O axioma A.2 significa que não se pode ter um vetor de produção agregada com uma componente positiva a menos que pelo menos uma componente seja negativa, isto é, para haver alguma produção é necessário algum fator de produção. O axioma A.3 significa que não podem haver dois veto-

res de produção em que os insumos de um são exatamente os produtos do outro. Isto decorre do fato de que algum fator de produção é usado em qualquer atividade produtiva mas os fatores da produção, por hipótese, não podem ser produzidos pelas firmas.

O consumo de economia é representado por indivíduos. Cada indivíduo h é caracterizado por um conjunto de possibilidades de consumo X_h o qual satisfaz axiomas: X_h é um subconjunto convexo e fechado do R_+^n o qual é limitado inferiormente, isto é, existe um vetor \bar{x}_h tal que $\bar{x}_h \leq x_h$ para todo $x_h \in X_h$.

Este último axioma exclui de X_h as cestas de bens insuficientes para manter a vida do indivíduo h .

A.5 - Cada consumidor possui uma dotação inicial \bar{x}_n tal que $\bar{x}_n \geq x_h$ para algum $x_h \in X_h$ e uma participação de d_{hf} nos lucros da empresa f , $d_{hf} \geq 0$, $\sum_h d_{hf} = 1$ para todo f .

O axioma acima afirma que cada consumidor h possui uma dotação positiva de cada bem. Trata-se de uma hipótese forte que facilita muito a prova da existência de

equilíbrio. A existência de equilíbrio, contudo, pode ser provada com uma hipótese mais fraca, mas envolvendo maior complicação matemática (veja Arrow-Debreu (1954)).

Definição :

Seja $P > \theta$ um vetor de R^n que representa o sistema de preços. Denomina-se $M_h(P)$ a renda do indivíduo h ao sistema de preços P.

$$M_h(P) = \langle P, \bar{x}_h \rangle + \sum d_{hj} \pi_f(P)$$

onde $\pi_f(P)$ é o lucro da empresa f ao sistema de preços P.

Note-se que os axiomas A.1, A.4 e A.5 garantem que $M_h(P) > 0$ para todo P pois por A.1 nenhuma empresa opera com lucro $\langle P, y_f \rangle$ negativo pois pode fazer $y_f = \theta$ e por A.4 e A.5, $\bar{x}_h \geq \theta$ logo $\langle P, \bar{x}_h \rangle > 0$.

As preferências dos consumidores são descritas pelo axioma abaixo.

- A.6 - Para cada consumidor h existe uma relação de ordem em X_h representada por $(\overset{\cdot}{\geq})_h$, significando "preferido ou indiferente", entre pares de elementos

de X_h satisfazendo às propriedades abaixo.

(a) Transitividade

$$x_h^1 \succsim_h x_h^2 \text{ e } x_h^2 \succsim_h x_h^3 \text{ implica } x_h^1 \succsim_h x_h^3$$

(b) Ordenação

$$\text{Para todo } x_h^1, x_h^2, \text{ temos } x_h^1 \succsim_h x_h^2 \text{ ou } x_h^2 \succsim_h x_h^1$$

(c) Continuidade

Para todo x_h^0 , os conjuntos $\{x_h: x_h \succsim_h x_h^0\}$ e $\{x_h:$

$x_h^0 \succsim_h x_h\}$ são fechados.

(d) Convexidade Semi-Estrita

$$\text{Se } x_h^1 \succsim_h x_h^2 \text{ e } 0 \leq \alpha < 1, \text{ então } (1-\alpha)x_h^1 + \alpha x_h^2 \succsim_h x_h^2$$

(e) Não-saciedade

Se $x_h^0 \in X_h$, então existe $x_h \in X_h$ tal que $x_h \succ_h x_h^0$

O simbolo (\succsim_h) significa "preferido" e é definido por: $x_h^1 \succsim_h x_h^2$ significa $x_h^1 \succsim_h x_h^2$ mas não ocorre $x_h^2 \succ_h x_h^1$.

O axioma A6.a afirma que duas cestas podem sempre ser comparadas. A6.b é a hipótese que permitirá ao indivíduo maximizar sua satisfação. A6.c significa que se

uma cesta x_h^1 é preferida a x_h^2 , então existem conjuntos de cestas S^1 e $S^2 \subset X_h$ próximos a x_h^1 e x_h^2 respectivamente, tais que se $x^1 \in S^1$ e $x^2 \in S^2$, então $x^1 \succ_h x^2$. A6.d indica que o consumidor prefere a diversificação à especialização. Finalmente A6.e assegura que sempre se pode encontrar uma cesta que agrade mais o consumidor, isto é, o consumidor é insaciável.

Estes axiomas implicam o:

Lema III.1 - (Não-Saciedade Local)

Para todo $x_h^1 \in X_h$ existe $x_h^2 \in X_h$ arbitrariamente próximo de x_h^1 tal que $x_h^2 \succ_h x_h^1$.

Prova: Por A6.e existe $x_h^2 \succ_h x_h^1$. Por A6.d temos $(1-\alpha)x_h^1 + \alpha x_h^2 \succ_h x_h^1$. Com α próximo de 1 o lema está provado.

Q.E.D.

III.3 - A Existência de Equilíbrio na Economia de Produção e

Consumo

Para provarmos o teorema da existência de

equilíbrio em mercado competitivo necessitamos mostrar que a economia tem uma capacidade produtiva limitada assim como o espaço de consumo restrito à capacidade de produção da economia também é limitado. Para isto definamos os subconjuntos abaixo:

$$\hat{X}_h = \{x_h : x_h \in X_h, \text{ existe } x_{h'} \in X_{h'} \text{ para todo } h' \neq h \text{ e } y_f \in Y_f \text{ para todo } f \text{ tal que } Z \leq \theta\};$$

$$\hat{Y}_f = \{y_f : y_f \in Y_f, \text{ existe } x_h \in X_h \text{ para todo } h \text{ e } y_{f'} \in Y_{f'} \text{ para todo } f' \neq f \text{ tal que } Z \leq \theta\};$$

$$\text{onde } Z = \sum_h (x_h - \bar{x}_h) - \sum_f y_f.$$

\hat{X}_h é o conjunto de possibilidades de consumo do indivíduo h dadas as limitações de recursos da economia. \hat{Y}_f é o conjunto análogo da empresa f .

Lema III.2

(a) \hat{Y}_f é limitado para todo f .

(b) \hat{X}_h é limitado para todo h .

Prova: (a) Suponha, por absurdo, que Y_1 seja ilimitado. En-

tão existem seqüências $\{y_f^n\}, \{x_h^n\}$ tais que

$$\lim \|y_1^n\| = \infty, \quad \sum_f y_f^n \geq \sum_h (x_h^n - \bar{x}_h), \quad y_f^n \in Y_f \quad e \\ x_h^n \in X_h.$$

Seja $\bar{x} = \sum_h \bar{x}_h$ e pelo axioma A4 temos $\bar{\bar{x}} = \sum_h \bar{\bar{x}}_h$.

$$\bar{\bar{x}} \leq \sum_h x_h^n. \quad \text{Portanto,} \quad \sum_f y_f^n \geq \bar{\bar{x}} - \bar{x}.$$

Seja $u^n = \max_f \|y_f^n\|$. Para n suficientemente grande $u^n \geq 1$.

Como Y_f é convexo e $\theta \in Y_f$, $(1/u^n)y_f^n + (1-1/u^n)\theta \in Y_f$.

$$\sum_f (y_f^n/u^n) \geq (\bar{\bar{x}} - \bar{x})/u^n, \quad y_f^n/u^n \in Y_f;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = \infty, \quad \left\| y_f^n/u^n \right\| \leq 1$$

tomando-se uma subseqüência $\{n_k\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_f^{n_k}/u^{n_k} = y_f^0 \quad \text{temos} \quad \sum_f y_f^0 \geq \theta, \quad y_f^0 \in Y_f$$

pois Y_f é fechado.

Pelo axioma A2 temos $\sum_f y_f^0 = \theta$. Para algum f' ,

$$y_{f'}^0 = \theta + \dots + \theta + y_{f'}^0 \in Y_{f'}.$$

Mas $\sum_f y_f^0 = \theta$ implica $-y_{f'}^0 = \theta + \sum_{f \neq f'} y_f^0 \in Y$

Portanto $Y_{f'}^0 \in Y_{f'} \cap (-Y_{f'})$. Pelo axioma A3, $y_{f'}^0 = \theta$. Como f' é arbitrário, temos $y_f^0 = \theta$ para todo f . Logo temos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_f \|y_f^n / u^n\| = 0$

Este resultado é uma contradição pois pela definição de u^n , $u^n = \max_f \|y_f^n\|$ implica $1 = \max_f \|y_f^n / u^n\|$

e passando-se ao limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_f \|y_f^n / u^n\| = 1$.

(b) Seja $x_h \in \hat{X}_h$. Pela definição de \hat{X}_h

$$\bar{x}_h \leq x_h \leq \sum_f y_f - \sum_{h' \neq h} x_{h'} + \bar{x}$$

Pela definição de \hat{Y}_f , temos $y_f \in \hat{Y}_f$ para todo f na expressão acima. Como $x_{h'} \geq \bar{x}_{h'}$, para todo h' ,

$$\bar{x}_h \leq x_h \leq \sum_f y_f - \sum_{h' \neq h} \bar{x}_{h'} + \bar{x} \quad (y_f \in \hat{Y}_f)$$

Como \hat{Y}_f é limitado, conclui-se que \hat{X}_h é limitado

Q.E.D.

Corolário III.1

\hat{X}_h e \hat{Y}_f são conjuntos convexos e compactos para todo h e f .

Sendo X_h e Y_f conjuntos compactos, qualquer função contínua com domínio em algum dos dois conjuntos possui um máximo e um mínimo. Podemos definir a cada vetor de preços P a oferta de cada empresa e a demanda de cada indivíduo usando este fato.

Definição:

Uma correspondência $\varphi: A \rightarrow 2^B$, onde 2^B é o conjunto das partes de B , é uma função que associa a cada elemento de A um sub-conjunto de B .

Definamos a função lucro da empresa f ao sistema de preços P por:
$$\pi_f(p) = \max_{y_f \in Y_f} \langle p, y_f \rangle$$

Como Y_f é compacto, o máximo existe, estando, pois, a função lucro bem definida.

Definamos as correspondências $Y_f(P)$ e $X_h(P)$, respectivamente demanda do consumidor h ao sistema de preços P e oferta da firma f ao sistema de preços P por:

$$X_h(p) = \{x_h^t : x_h^t \in X_h, x_h^t \geq x_h \text{ para todo } x_h \in X_h \text{ tal que} \\ \langle p, x_h^t \rangle \leq \langle p, \bar{x}_h \rangle + \sum_f d_{hf} \pi_f(p)\}$$

$$Y_f(p) = \{y_f : y_f \in Y_f, \langle p, y_f \rangle = \pi_f(p)\}$$

Definição:

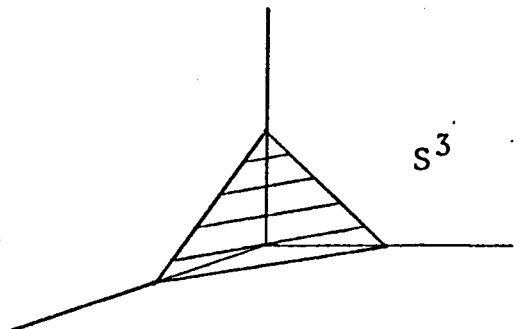
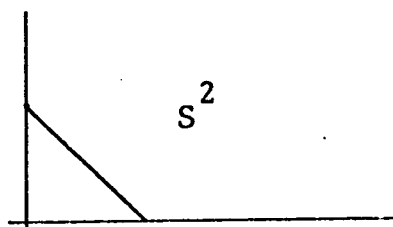
Dados os conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, sendo B compacto, uma correspondência $\varphi: A \rightarrow 2^B$ é semi-contínua superiormente se para todas as seqüências $\{x_n\} \in A, \{y_n\} \in B$, as propriedades $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, y_n \in \varphi(x_n)$ implicarem $y \in \varphi(x)$.

Definição:

Denomina-se simplexo n-1 dimensional S^{n-1} ao sub-conjunto do espaço \mathbb{R}^n dado por:

$$S^n = \{p \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

Ilustração



Observemos que os conjuntos $X_h(p)$ e $Y_f(p)$ não se alteram quando se multiplica o vetor P por um escalar positivo α , isto é:

$$X_h(p) = x_h(\alpha p) \quad \text{e} \quad Y_f(p) = y_f(\alpha p), \quad \text{para } \alpha > 0.$$

Tomando-se $\alpha = \frac{1}{p^t e}$ as correspondências $X_h(P)$ e $Y_f(P)$ passam a ter domínio no simplexo S^{n-1} .

Lema III.3

(a) A função lucro $\pi_f: S^{n-1} \rightarrow R$ é contínua

(b) A correspondência $Y_f: S^{n-1} \rightarrow \hat{Y}_f$ é semi-contínua superiormente e o conjunto $Y_f(p)$ é convexo para todo P .

Prova: (a) Seja a seqüência $\{p_n\} \in S^{n-1}$ tal que $p_n \rightarrow p^0$

e a seqüência $\{y_n\} \in \hat{Y}_f$ tal que $y_n \in Y_f(p_n)$. Pela definição de π_f temos:

$$\pi_f(p_n) = \langle p_n, y_n \rangle \geq \langle p_n, y_f \rangle \quad \text{para todo } y_f \in \hat{Y}_f.$$

Como \hat{Y}_f é um conjunto compacto, $y_n \rightarrow y^0 \in \hat{Y}_f$.

Passando-se ao limite temos:

$$\pi_f(p^0) = \langle p^0, y^0 \rangle \geq \langle p^0, y_f \rangle \text{ para todo } y_f \in Y_f.$$

Portanto $p^n \rightarrow p^0$ implica $\pi_f(p^n) \rightarrow \pi_f(p^0)$, o que prova que π_f é contínua.

(b) Para mostrar que $Y_f(p)$ é semi-contínua superiormente

basta observar que pela continuidade de π_f , ao tomar-

-se seqüências $\{p_n\} \in S^{n-1}$, $\{y_n\} \in Y_f(p_n)$, $p_n \rightarrow p^0$

$\Rightarrow y_n \rightarrow y^0$ tal que $\pi_f(p^0) = \langle p^0, y^0 \rangle$ temos

$y^0 \in Y_f(p^0)$.

A convexidade de $Y_f(p)$ é imediata pois dado $0 \leq \alpha \leq 1$,

$y'_f, y''_f \in Y_f(p)$,

$$\langle p, (1-\alpha)y' + \alpha y'' \rangle = (1-\alpha) \langle p, y' \rangle + \alpha \langle p, y'' \rangle =$$

$$= (1-\alpha)\pi_f(p) + \alpha\pi_f(p) = \pi_f(p) \text{ portanto } (1-\alpha)y' + \alpha y''$$

$\in Y_f(p)$.

Q.E.D.

O lema que provaremos em seguida faz uso do axioma A5 que admite que todo indivíduo tem dotações positivas de cada um dos bens. Na realidade este lema permanece válido se ao invés do A5 tivermos a hipótese de que a qual-

quer sistema de preços P o consumidor h possui em sua dotação \bar{x}_h um bem que tem preço não nulo. Desta forma teríamos $\bar{x}_h > x_h$ para todo $x_h \in X_h$ e $\langle p, \bar{x}_h - \bar{\bar{x}}_h \rangle > 0$.

Lema III.4

A correspondência $X_h: S^{n-1} \rightarrow X_h$ é semi-continua superiormente e o conjunto $X_h(p)$ é convexo para todo P .

Prova: Tomemos as seqüências $\{P^n\} \in S^{n-1}$, $\{x_h^n\} \in X_h$ tais que $x_h^n \in X(P^n)$ e $P^n \rightarrow P \in S^{n-1}$, $x_h^n \rightarrow x_h \in X_h$ temos que mostrar que $x_h \in X_h(P)$.

O fato de $x_h^n \in X_h(P^n)$ implica

$$\langle p^n, x_h^n \rangle \leq \langle p^n, \bar{x}_h \rangle + \sum_f d_{hf} \pi_f(p^n)$$

Como o produto interno e a função lucro são funções contínuas passando-se ao limite obtemos:

$$\langle p, x_h \rangle \leq \langle p, \bar{x}_h \rangle + \sum_f d_{hf} \pi_f(p)$$

Para completar a prova, falta mostrar que para todo

$x_h^0 \in X_h$ tal que $\langle p, x_h^0 \rangle \leq M_h(p)$ tem-se $x_h \dot{\geq} x_h^0$

Pelos axiomas A4 e A5 temos $\bar{x}_h - \bar{\bar{x}}_h \geq \theta$

Como $p > \theta$ temos $\langle p, \bar{x}_h - \bar{\bar{x}}_h \rangle > 0$. Como $\pi_f(p) \geq 0$ temos

$$A_h(p) \equiv \langle p, \bar{x}_h - \bar{\bar{x}}_h \rangle + \sum_f d_{hf} \pi_f(p) > 0$$

Definamos a seqüência $\{\lambda^n\} \in \mathbb{R}$ por:

$$\lambda^n = \frac{A_h(p^n)}{\max [A_h(p^n), \langle p^n, x_h^0 - \bar{\bar{x}} \rangle]}$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \frac{A_h(p)}{\max [A_h(p), \langle p, x_h^0 - \bar{\bar{x}} \rangle]} = 1, \quad 0 < \lambda^n \leq 1.$$

Definamos a seqüência $\{x^n\} \in X_h$ por :

$$x^n = (1 - \lambda^n) \bar{\bar{x}}_h + \lambda^n x_h^0$$

Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x_h^0$ pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 1$

A hipótese $x_h^n \in X_h(p^n)$ implica em x_h^n ser um elemento de X_h preferido a todos os que satisfazem à restrição orçamentária ao vetor de preços p^n . Logo $x_h^n \succeq_h x^n$. Passando

ao limite

$$x_h = \lim_{n \rightarrow \infty} x_h^n \succeq_h \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$$

Para provar que $X(p)$ é convexo observemos

que x_h^1 e $x_h^2 \in X_h(p)$ então $\langle p, x_h^1 \rangle = M_h(p) = \langle p, x_h^2 \rangle$.

Para $0 \leq \alpha \leq 1$, $x_h = \alpha x_h^1 + (1-\alpha) x_h^2$, temos $\langle p, x_h \rangle = M_h(p)$.

Pela definição de $X(p)$ segue-se que $x_h \sim x_h^1 \sim x_h^2$

Definição:

Define-se a demanda agregada da economia $X(p)$, a oferta agregada $Y(p)$ e o excesso de oferta agregada $Z(p)$ por:

$$X: S^{n-1} \rightarrow \sum_h X_h, \quad X(p) = \sum_h X_h(p)$$

$$Y: S^{n-1} \rightarrow \sum_f Y_f + \sum_h X_h, \quad Y(p) = \sum_f Y_f(p) + \sum_h x_h(p)$$

$$Z: S^{n-1} \rightarrow \sum_f Y_f - \sum_h X_h, \quad Z(p) = Y(p) - X(p)$$

Pelos lemas III 3 e III 4 conclui-se que Z é uma correspondência semi-contínua superiormente e que para todo P , $Z(p)$ é um conjunto convexo.

Apresentamos a seguir o lema que mostra que a qualquer vetor de preços P , o valor do excesso de oferta é não negativo, isto é, $\langle p, z \rangle \geq 0$ para todo $z \in Z(p)$.

Lema III 5

Seja $p \geq \theta$ e $z \in Z(p)$ o excesso de oferta agregada. Então, $\langle p, z \rangle \geq 0$ para todo $p \in S^n$.

Prova: $\langle p, x_h \rangle \leq \langle p, \bar{x}_h \rangle + \sum_f d_{hf} \pi_f(p)$, logo,

$$\sum_h \langle p, x_h \rangle \leq \sum_h \langle p, \bar{x}_h \rangle + \sum_h \sum_f d_{hf} \pi_f(p),$$

$$\langle p, \sum_h (x_h - \bar{x}_h) \rangle \leq \sum_f \pi_f(p) = \langle p, \sum_f y_f(p) \rangle$$

$$\langle p, \sum_h (x_h - \bar{x}_h) - \sum_f y_f \rangle \leq \theta$$

$$\langle p, z \rangle \geq \theta \text{ para todo } z \in Z(p)$$

Q.E.D.

Os lemas apresentados até este ponto compõem as condições necessárias à existência de equilíbrio numa economia em que todos os agentes têm renda positiva a qualquer sistema de preços. P. Antes de provarmos a existência de equilíbrio na economia de produção e consumo, precisamos definir precisamente o que vem a ser um equilíbrio. Este conceito se apresenta em dois estágios. Primeiramente definimos "equilíbrio compensado" e "equilíbrio competitivo". Em seguida provamos a existência de equilíbrio compensado e a-

presentamos um teorema que prova a existência de equilíbrio competitivo sob condições a serem discutidas.

Definição: Equilíbrio Compensado

Um sistema de preços P^* , de pontos de produção y_f^* de cada empresa, de pontos de consumo x_h^* de cada indivíduo formam um equilíbrio compensado quando:

- 1) $P^* > \theta$;
- 2) $\sum_h x_h^* \leq \sum_f y_f^* + \sum_h \bar{x}_h$; (ou $z^* \geq \theta$)
- 3) $\langle p^*, y_f^* \rangle = \pi_f(p^*)$, para todo f
- 4) $\langle p^*, x_h^* \rangle = M_h(p^*)$, para todo h .
- 5) $\langle p^*, \hat{x}_h \rangle \geq \langle p^*, x_h^* \rangle$ para todo $\hat{x}_h \in X_h$ tal que $\hat{x}_h \geq_h x_h^*$.

Definição: Equilíbrio Competitivo

Um sistema de preços p^* , de pontos de produção y_f^* de cada empresa, de pontos de consumo x_h^* de cada indivíduo formam um equilíbrio competitivo quando:

- 1) $p^* > \theta$

$$2) \sum_h x_h^* \leq \sum_f y_f^* + \sum_f \bar{x}_h; \quad (\text{ou } z^* \geq \theta)$$

$$3) \langle p^*, y_f^* \rangle = \pi_f(p^*), \quad \text{para todo } f.$$

$$4) x_h^* \underset{h}{\geq} x_h \quad \text{para todo } x_h \in X_h \text{ tal que } \langle p^*, x_h \rangle \leq \\ \leq M_h(p^*)$$

Teorema III.1 Existência do Equilíbrio Compensado

O modelo de economia de produção e consumo apresentado admite um equilíbrio compensado.

Prova: Utilizaremos o teorema de Gale - Nikaido - Debreu (veja apêndice a este capítulo) e a correspondência excesso de oferta agregada.

Verifiquemos as hipóteses do teorema de Gale - Nikaido - Debreu:

$$(i) Z: S^{n-1} \rightarrow \sum_f Y_f - \sum_f X_h, \quad \text{definida por}$$

$$Z(p) = \sum_f Y_f(p) - \sum_h (X_h(p) - \bar{x}_h)$$

é semi-contínua superiormente e $Z(p)$ é convexo de acordo com os lemas III.3 e III.4.

- (ii) $\sum_f Y_f - \sum_h X_h$ é compacto e convexo pois pelo corolário III.2, X_h e Y_f são compactos e convexos para todo h e f .
- (iii) Para todo $p \in S^{n-1}$, $z \in Z(P)$ satisfaz a $\langle p, z \rangle \geq 0$ de acordo com o lema III.5.

Aplicando-se o teorema de Gale-Nikzido-Debreu conclui-se que existe $p^* > \theta$ e $z^* \in Z(P^*)$ tal que $z^* \geq \theta$.

Pela definição da correspondência Z os pontos y_f^* e x_h^* são pontos que satisfazem a:

(a) $y_f^* \in Y(P^*)$ logo $\langle p^*, y_f^* \rangle = \pi_f(P^*)$ para todo f .

(b) $x_h^* \in X(P^*)$ logo $x_h^* \underset{h}{\geq} x_h$ para todo $x_h \in X_h$ tal que

$$\langle p, x_h \rangle \leq \langle p, \bar{x}_h \rangle + \sum_f d_{hf} \pi_f(P).$$

(c) Pelo lema III.7, $\langle p, x_h^* \rangle = M_h(P^*)$ para todo h .

Portanto as 5 condições que caracterizam o equilíbrio compensado estão satisfeitas.

Q.E.D.

Agora provaremos que um equilíbrio compensado

em que todos os agentes têm renda positiva é um equilíbrio competitivo. Para tal precisamos demonstrar que maximizar a satisfação sujeito a uma restrição orçamentária positiva equivale a minimizar a despesa com a aquisição de bens sujeito a uma restrição de nível mínimo de satisfação.

Lema III.6

Se x_h^* minimiza $\langle p, x_h \rangle$ tal que $x_h \dot{\succcurlyeq}_h x_h^0$ e se $\langle p, x_h^* \rangle > \langle p, x_h^1 \rangle$ para algum $x_h^1 \in X_h$, então x_h^* é preferido a todo x_h tal que $\langle p, x_h \rangle < \langle p, x_h^* \rangle$.

Prova: Seja $x_h' \in X_h$ tal que $\langle p, x_h' \rangle \leq \langle p, x_h^* \rangle$. Defi-

na $x_h(\alpha) = (1-\alpha)x_h' + \alpha x_h^1$. Para $0 < \alpha \leq 1$ temos

$$\langle p, x_h(\alpha) \rangle = (1-\alpha)\langle p, x_h' \rangle + \alpha\langle p, x_h^1 \rangle <$$

$$\langle p, x_h^* \rangle.$$

Se $x_h(\alpha) \dot{\succcurlyeq}_h x_h^0$ então, por hipótese, $\langle p, x_h^* \rangle \leq$

$\langle p, x_h(\alpha) \rangle$, o que contradiz a desigualdade ante-

rior. Logo $x_h^0 \dot{\succcurlyeq}_h x_h(\alpha)$ e, portanto, $x_h(\alpha) \in \{x_h :$

$x_h^0 \dot{\succcurlyeq}_h x_h\}$. Pelo axioma A.6.c este conjunto é fecha-

do, logo.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_h(\alpha) = x'_h \in \{x_h : x_h^0 \dot{\geq}_h x_h\}$$

Como $x_h^* \dot{\geq}_h x_h^0$, tem-se $x_h^* \dot{\geq}_h x'_h$ para todo x'_h tal que $\langle p, x'_h \rangle \leq \langle p, x_h^* \rangle$.

Q.E.D.

Como este resultado podemos provar o:

Teorema III.2: Existência do Equilíbrio Competitivo

O modelo de economia de produção e consumo apresentado admite um equilíbrio competitivo.

Prova: Pelo Teorema III.1 o modelo apresentado admite um equilíbrio compensado $(p^*; y_1^*, \dots, y_m^*, x_1^*, \dots, x_r^*)$.

Os itens (1), (2) e (3) da definição de equilíbrio competitivo são idênticos aos mesmos itens da definição de equilíbrio compensado.

Os itens (4) e (5) da definição de equilíbrio compensado e a hipótese $M_h(p^*) > 0$ para todo h implicam, pelo Lema III.6, o item (4) da definição de equilí-

brio competitivo.

Q.E.D.

III.4 - Eficiência e Equilíbrio

No modelo de economia competitiva apresentado provamos que existe um equilíbrio compensado em que cada agente econômico isoladamente está em um ponto de ótimo condicionado a suas restrições. Nesta seção analisamos as implicações daquele equilíbrio sob o ponto de vista da distribuição da produção entre os indivíduos.

Começamos pelas definições de alocação factível e eficiente e em seguida provamos que uma alocação eficiente é compatível com um equilíbrio compensado. Em seguida provamos que todo equilíbrio compensado é eficiente.

Definição:

Uma alocação factível é um conjunto de pontos de produção e consumo $(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_r)$ tal que:

- 1) $y_f \in Y_f$ para todo f .

2) $x_h \in X_h$ para todo h .

$$3) z = \sum_f y_f + \sum_h (\bar{x}_h - x_h) \geq \theta$$

A definição acima qualifica como factível uma alocação que é compatível com as limitações de recursos da economia.

Definição:

Uma alocação factível $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$ é eficiente no sentido de Pareto (ou eficiente de Pareto) se não existe outra alocação factível $(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_r)$ tal que $x_h \dot{\succ} x_h^0$ para todo h .

De acordo com a definição acima, uma alocação é eficiente de Pareto se não houver outra alocação factível que seja preferida por todos os indivíduos. A propriedade de não-saciedade local (Lema III.1) implica que esta definição é equivalente à definição alternativa: "Não existe outra alocação factível $(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_r)$ tal que $x_h \dot{\succ} x_h^0$ para todo h e $x_{h'} \dot{\succ} x_{h'}^0$ para pelo menos um h' ."

Definição:

Denominamos por Z o conjunto dos vetores de oferta excedente correspondentes a alocações factíveis:

$$Z = \{z: z = \sum_f y_f + \sum_h (\bar{x}_h - x_h) \geq \theta; y_f \in Y_f \text{ para todo } f; \\ x_h \in X_h \text{ para todo } h\}.$$

Dada a alocação factível $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$.

Denominamos por Z^0 o conjunto dos vetores oferta agregada excedentes factíveis correspondentes a alocações factíveis

$(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_r)$ preferidas a $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$:

$$Z^0 = \{z \in Z: x_h \geq_h x_h^0 \text{ para todo } h\}.$$

Demonstramos a seguir 2 lemas que serão usados para provar que uma alocação eficiente de Pareto tem o valor de mercado da oferta excedente igual a zero.

O primeiro lema mostra que não pode haver uma alocação eficiente de Pareto em que ocorre excesso de oferta positivo para todos os bens. De fato, em tal situação uma adequada distribuição dos bens excedentes levaria a uma alocação preferida por todos os indivíduos.

Lema III.7

Se a alocação $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$ é eficiente de Pareto, então os conjuntos $\{z: z \geq 0\}$ e Z^0 têm interseção vazia.

Prova: Seja a alocação $(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_r)$ com oferta excedente $z \geq \theta$. Suponhamos, por absurdo, que $z \in Z^0$. Pelo lema da não-saciedade local existe uma alocação $(y_1', \dots, y_m'; x_1', \dots, x_r')$ arbitrariamente próxima de $(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_r)$ com oferta excedente $z' \geq \theta$ tal que $x_h' \geq x_h$ para todo h . Pela hipótese de absurdo $z \in Z^0$ temos $x_h \geq x_h^0$ para todo h . Tomando-se a alocação $(y_1', \dots, y_m'; x_1', \dots, x_r')$ temos $x_h' \geq x_h^0$ para todo h . Como $z' \geq \theta$, $(y_1', \dots, y_m'; x_1', \dots, x_r')$ é uma alocação factível tal que $x_h' \geq x_h^0$ para todo h , o que contradiz a hipótese de $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$ ser eficiente de Pareto.

Q.E.D.

O próximo lema será usado para provar que

toda alocação preferida a uma alocação eficiente de Pareto possui oferta excedente cujo valor de mercado é não positivo.

Lema III.8

Se A é um conjunto convexo que possui interseção vazia com o conjunto $B = \{z: z \geq \theta\}$ então existe um vetor $P > \theta$ tal que $\langle p, z \rangle \leq 0$ para todo $z \in A$.

Prova: Como B é convexo e não vazio podemos separá-lo de A

por um hiperplano definido por um vetor $P \neq \theta$ tal que

$$\langle p, z \rangle \leq c, \text{ para todo } z \in A \text{ e}$$

$$\langle p, z \rangle \geq c, \text{ para todo } z \in B.$$

Tomemos $\bar{z} \in B$, $e^i \in B$ e $\lambda > 0$. Então $\bar{z} + \lambda e^i \geq 0$

$$\text{Logo } \langle P, \bar{z} + \lambda e^i \rangle \geq c$$

$$\langle p, \bar{z} \rangle + \frac{1}{\lambda} \langle p, e^i \rangle \geq c + \frac{1}{\lambda}$$

Fazendo $\lambda \rightarrow +\infty$ obtemos $p_i \geq 0$ para todo i , logo

$P \geq \theta$. Como por hipótese $p \neq \theta$, segue-se que $P > \theta$.

Para provarmos a segunda parte do lema tomemos $\alpha > 0$

e $e \in B$. Então $-\alpha e \ll \theta$.

Logo $\langle p, -\alpha e \rangle \leq c$

$\langle p, \alpha e \rangle \geq c$

Fazendo $\alpha \rightarrow 0$ obtemos $c \leq 0$.

Com $c \leq 0$ e tomando-se $z \in A$

$\langle p, z \rangle \leq c \leq 0$, o que implica $\langle p, z \rangle \leq 0$ para

todo $z \in A$.

Q.E.D.

Estes dois lemas nos permitem provar que numa alocação eficiente de Pareto os bens com excesso de oferta nulo têm preços positivos e os bens com excesso de oferta positivo têm preços nulos.

Lema III.8

Se $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$ é uma alocação eficiente de Pareto, então existe um vetor de preços $P > \theta$ tal que:

(a) $\langle p, z \rangle \leq 0$ para todo z tal que $x_h \geq x_h^0$ para todo h .

(b) $\langle p, z \rangle = 0$ para todo $z \in Z^0$.

Prova: Pelo Lema III.7 $Z^0 \cap \{z: z \geq \theta\} = \emptyset$.

Pelo Lema III.8 concluímos que existe $P > \theta$ tal que

$\langle P, z \rangle \leq 0$ para todo z tal que $x_h \geq_h x_h^0$ para todo

h , o que prova (a). Se $(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_r)$ é uma

alocação factível então $z \geq \theta$. Com $P > \theta$ temos

$\langle p, z \rangle \geq 0$ para toda alocação factível. Portanto

$\langle p, z \rangle = 0$ para todo $z \in Z^0$.

Q.E.D.

O próximo teorema mostra que qualquer alocação eficiente de Pareto pode ser alcançada mediante adequada distribuição de renda. Dada a alocação desejada $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$ determina-se o vetor P . Dando-se a cada indivíduo h a renda $\langle p, x_h^0 \rangle$, nenhum indivíduo trocará de cesta de bens e todas as empresas estarão maximizando seus lucros.

Teorema III.3 (Debreu)

Se $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$ é uma alocação eficiente de Pareto, então esta alocação pode ser sustentada por um equilíbrio compensado.

Prova: Devemos mostrar que existe um vetor $p^0 > \theta$ tal que:

$$(a) \sum_h x_h^0 \leq \sum_f y_f^0 + \sum_h \bar{x}_h$$

(b) (x_1^0, \dots, x_r^0) minimiza $\langle p^0, x_h \rangle$ sujeito a $x_h \geq x_h^0$ para todo h .

(c) (y_1^0, \dots, y_m^0) maximiza $\langle p^0, y_f \rangle$ em Y_f para todo f .

$$(d) \sum_h \langle p^0, x_h^0 \rangle = \sum_h \left[\langle p^0, \bar{x}_h \rangle + \sum_f d_{hf} \langle p^0, y_f^0 \rangle \right]$$

para todo h .

Sendo a alocação $(y_1^0, \dots, y_m^0; x_1^0, \dots, x_r^0)$ eficiente de Pareto, ela é factível por definição, o que corresponde ao ítem (a). O Lema anterior garante a existência do vetor $p > \theta$.

Para provarmos (b) e (c) utilizemos o Lema anterior. Seja $z = \sum_f y_f + \sum_h (\bar{x}_h - x_h)$. Pelo Lema III.8.

$$\langle p^0, z \rangle \leq 0 = \langle p^0, z^0 \rangle, \text{ ou}$$

$$\langle p^0, \sum_f y_f + \sum_h (\bar{x}_h - x_h) \rangle \leq \langle p^0, \sum_f y_f^0 + \sum_f (\bar{x}_h - x_h^0) \rangle$$

$$\sum_f \langle p^0, y_f \rangle - \sum_h \langle p^0, x_h \rangle \leq \sum_f \langle p^0, y_f^0 \rangle - \sum_h \langle p^0, x_h^0 \rangle$$

para todo x_h tal que $x_h \geq_h x_h^0$ e todo $y_f \in Y_f$.

Notemos que as desigualdades acima valem termo a termo pois as variáveis x_h e y_f são independentes. Para obtermos (b) façamos $x_h = x_h^0$ para todo $h \neq h'$ e $y_f = y_f^0$ para todo f . Cancelando os termos obtemos:

$$\langle p^0, x_h \rangle \geq \langle p^0, x_{h'} \rangle \text{ para } h' \text{ tal que } x_{h'} \geq_h x_h^0.$$

Analogamente, para obtermos (c) façamos $x_h = x_h^0$ para todo h e $y_f = y_f^0$ para todo $f \neq f'$. Cancelando os termos obtemos:

$$\langle p^0, y_{f'} \rangle \leq \langle p^0, y_f^0 \rangle \text{ para todo } f'.$$

Finalmente o item (d) é obtido de $\langle p^0, z^0 \rangle = 0$.

Q.E.D.

A recíproca do Teorema III.3 é fornecida pelo teorema a seguir:

Teorema III.4

Se $(p^*, y_1^*, \dots, y_m^*; x_1^*, \dots, x_r^*)$ é um equilíbrio compensado, então $(y_1^*, \dots, y_m^*; x_1^*, \dots, x_r^*)$ é uma alocação Pareto eficiente.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que existe uma alocação

$(y_1', \dots, y_m'; x_1', \dots, x_r')$ factível tal que $x_h' \overset{\cdot}{>} x_h^*$ para todo h . Como x_h^* minimiza o custo de se atingir o nível de satisfação proporcionado por x_h^* , $\langle p^*, x_h^* \rangle \leq \langle p^*, x_h' \rangle$ para todo h , e pela definição de equilíbrio compensado, $\langle p^*, x_h^* \rangle = M_h(p^*)$

Como pelo axioma A.5 todo indivíduo tem renda positiva podemos usar o Lema III.6 para afirmar que x_h^* é preferido a x_h para todo x_h tal que $\langle p, x_h \rangle \leq M_h(p^*)$. Como pela hipótese de absurdo $x_h' \overset{\cdot}{>} x_h^*$, segue-se que $M_h(p^*) < \langle p^*, x_h' \rangle$, para todo h .

Temos, então:

$$\sum_h \langle p^*, x_h' \rangle > \sum_h M_h(p^*) = \sum_h \langle p^*, \bar{x}_h \rangle + \sum_f \langle p^*, y_f^* \rangle \quad (1)$$

Por outro lado, a alocação $(y_1', \dots, y_m'; x_1', \dots, x_r')$ é factível $\sum_h x_h' \leq \sum_h \bar{x}_h + \sum_f y_f'$. Como $p^* > \theta$ temos

$$\sum_h \langle p^*, x_h' \rangle \leq \sum_h \langle p^*, \bar{x}_h \rangle + \sum_f \langle p^*, y_f' \rangle. \text{ Como}$$

$$\langle p^*, y_f' \rangle \leq \langle p^*, y_f^* \rangle, \text{ temos}$$

$\sum_h \langle p^*, x_h' \rangle \leq \sum_h \langle p^*, \bar{x}_h \rangle + \sum_f \langle p^*, y_f^* \rangle$ o que contradiz (1).

Q.E.D.

III.5 - Apêndice

Neste apêndice provamos o teorema de Gale-Nikaido-Debreu utilizado na seção III.3 para provar a existência de equilíbrio compensado. Para demonstrarmos este teorema faremos uso do teorema de Kakutani o qual enunciamos — sem demonstração — abaixo.

Lema III - Teorema de Kakutani

Seja C um conjunto compacto e convexo e $\varphi: C \rightarrow 2^C$ uma correspondência semi-contínua superiormente com $\varphi(x) \subset C$ convexo para todo $x \in C$. Então existe $x^* \in C$ tal que $x^* \in \varphi(x^*)$.

Prova: Veja Kakutani, S. (1941).

Teorema III - Gale-Nikaido-Debreu

Seja S^{n-1} simplexo fundamental do R^n ; $C \subset R^n$ compacto e convexo; $Z: S^{n-1} \rightarrow 2^C$ uma correspondência semi-contínua superiormente tal que para todo $P \in S^{n-1}$, o con-

junto $Z(P)$, seja convexo e não-vazio; para todo $z \in Z(P)$ tenha-se $\langle p, z \rangle \geq 0$. Então existe $p^* \in S^{n-1}$ e $z^* \in Z(p^*)$ tal que $z^* \geq \theta$.

Prova:

Definamos a correspondência auxiliar $H: S^{n-1} \times C \rightarrow S^{n-1} \times C$ por $H(p, z) = g(p, z) \times Z(p)$, onde $g: S^{n-1} \times C \rightarrow S^{n-1}$ é uma função com n coordenadas dadas por

$$g_i(p, z) = \frac{p_i - \min(0, z_i)}{1 - \sum_{j=1}^n \min(0, z_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Notemos que $1 - \sum_{j=1}^n \min(0, z_j) \geq 1$, $0 \leq p_i - \min(0, z_i)$ e

$\sum_{i=1}^n g_i(p, z) = 1$. Como a função mínimo é contínua cada função coordenada g_i é contínua e, portanto, g é contínua.

Analizando-se as características da correspondência H :

- (i) $S^{n-1} \times C$ é compacto e convexo pois S^{n-1} e C o são.
- (ii) $g(p, z)$ é um elemento de S^{n-1} e $Z(p)$ é um subconjunto convexo não-vazio de C . Portanto, para cada $(p, z) \in$

$S^{n-1} \times C$ a imagem $H(p, z) \subset S^{n-1} \times C$ é um conjunto convexo não-vazio.

(iii) como Z , é semi-contínua superiormente e g é contínua segue-se que H é semi-contínua superiormente e $H(p, z)$ é convexo pois $Z(p)$ é convexo.

As propriedades (i), (ii) e (iii) acima nos permitem usar o Teorema de Kakutani e afirmar que existe (p^*, z^*) tal que $(p^*, z^*) \in H(p^*, z^*)$, isto é:

$$p^* = g(p^*, z^*) \quad (1)$$

$$z^* \in Z(p^*) \quad (2)$$

Para provarmos que $z^* \geq \theta$ observemos que (1)

implica:

$$p_i^* = \frac{p_i^* - \min(0, z_i^*)}{1 - \sum_{j=1}^n \min(0, z_j^*)}, \text{ para todo } i. \text{ Logo}$$

$$p_i^* \sum_{j=1}^n \min(0, z_j^*) = \min(0, z_i^*) \leq 0.$$

Definamos o conjunto $I = \{i: p_i^* > 0\}$. Notemos que I é não-vazio pois $p^* \in S^{n-1}$. Por hipótese, para todo $z \in Z(p)$,

$\langle p, z \rangle \geq 0$, em particular $\langle p^*, z^* \rangle \geq 0$. Esta desigualdade implica que existe $i' \in I$ tal que $z_{i'} \geq 0$. Portanto $p_{i'} > 0$ e $z_{i'} \geq 0$ implicam:

$$\sum_{j=1}^n \min(0, z_j) = \frac{\min(0, z_{i'})}{p_{i'}} = \frac{0}{p_{i'}} = 0$$

Logo $z_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Isto implica $z^* \geq 0$

Q.E.D.

CAPÍTULO IV

AUSÊNCIA DE CONVEXIDADE

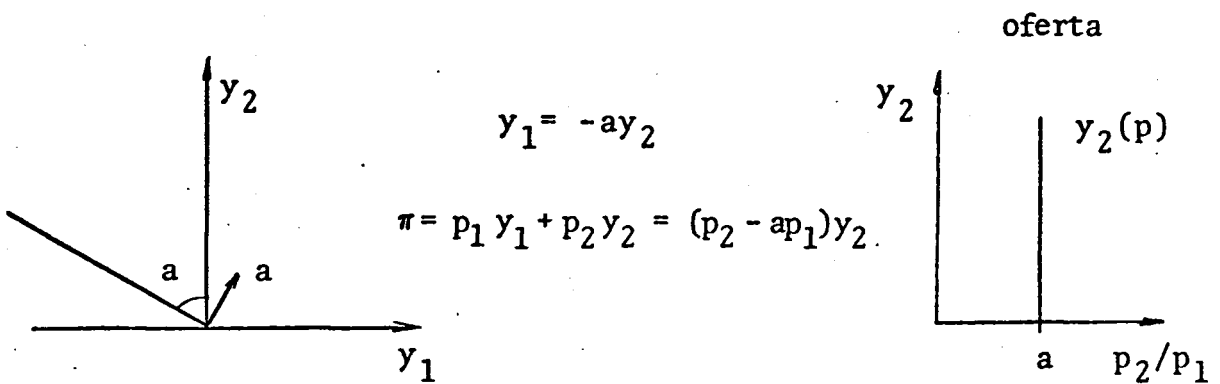
IV.1 - Introdução

No capítulo III trabalhamos com a hipótese de que os conjuntos de possibilidades Y_f são convexos (A1) e as preferências individuais obedecem à propriedade da convexidade semi-estrita (A6.d). Vimos que A.1 significa que a produção é divisível, aditiva e não admite retornos crescentes de escala e A6.d significa que o consumidor prefere médias a extremos. Estas hipóteses foram usadas para provar que as correspondências de oferta de cada firma (lema III.3) e demanda de cada indivíduo (lema III.4) são semi-continuas superiormente e convexas.

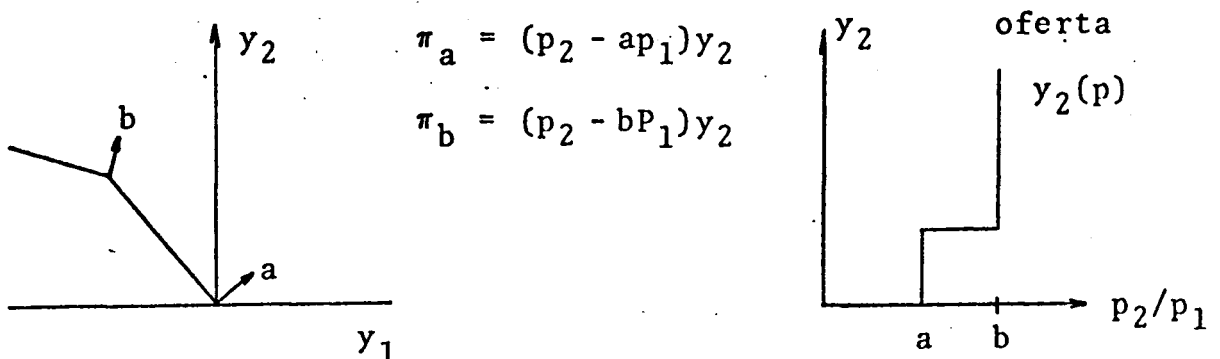
Uma crítica ao axioma A.1 diria que diversos processos de produção, principalmente na indústria, não são divisíveis — não se produz meio automóvel — ou convexas —

a indústria química opera em regime de proporções fixas. Analogamente o axioma A.6.d é também irrealista pois dificilmente uma mistura de meia dose de gin e meia de uísque seria preferida a uma dose inteira de um dos dois. Em que medida as hipóteses de convexidade são fundamentais à existência de equilíbrio? Esta questão pode ser ilustrada tomando-se empresas que produzem um único bem y_2 a partir de um único insumo y_1 , com preços respectivamente iguais a p_1 e p_2 :

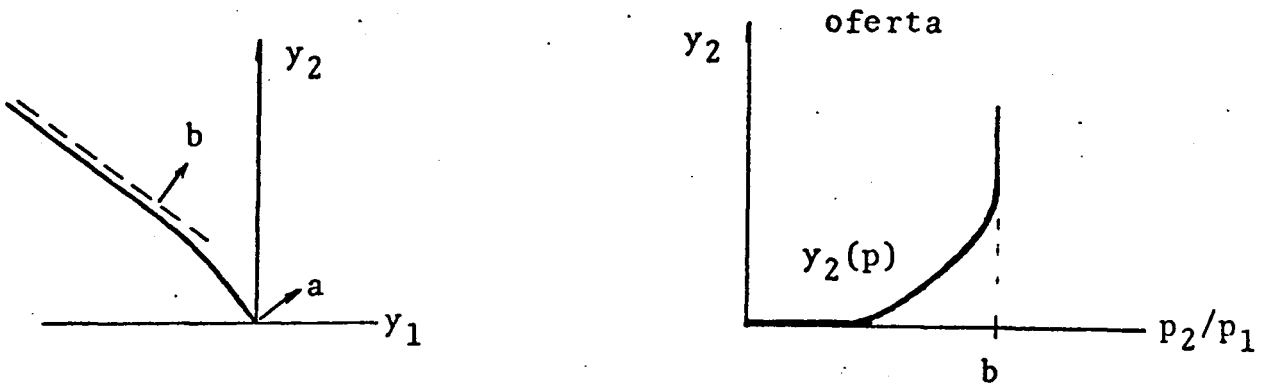
1a. Empresa: Retornos constantes de escala



2a. Empresa: Retornos constantes de escala e dois processos.

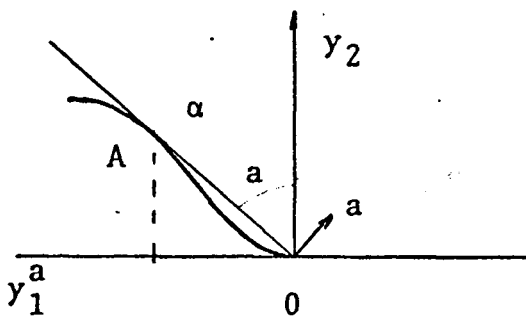


3a. Empresa: Retornos decrescentes de escala.



Nos três exemplos acima, em que o conjunto de possibilidades de produção é convexo, a curva de oferta não apresenta descontinuidades. Se existissem várias firmas a oferta agregada seria contínua. Dada uma demanda agregada contínua, o vetor de preços $P = (p_1, p_2)$ ficaria determinado, bem como as quantidades y_1 e y_2 .

Suponhamos agora, que a economia seja composta de uma única empresa a qual apresenta um conjunto de possibilidades de produção não convexo representado no gráfico $y_1 \times y_2$ pela figura abaixo:



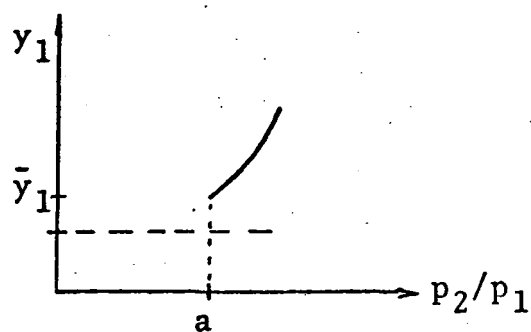
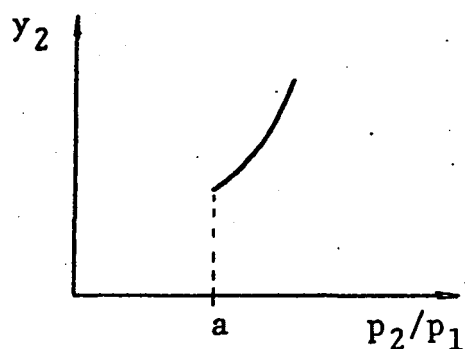
Esta empresa ao utilizar uma quantidade de insumo y_1 produz o nível de produto $y_2 = f(y_1)$.

A empresa só terá produção não nula se puder ter lucro não negativo:

$$\pi = p_2 \cdot f(y_1) - p_1 y_1 \geq 0$$

$$\text{ou } \frac{y_1}{f(y_1)} \leq \frac{p_2}{p_1}$$

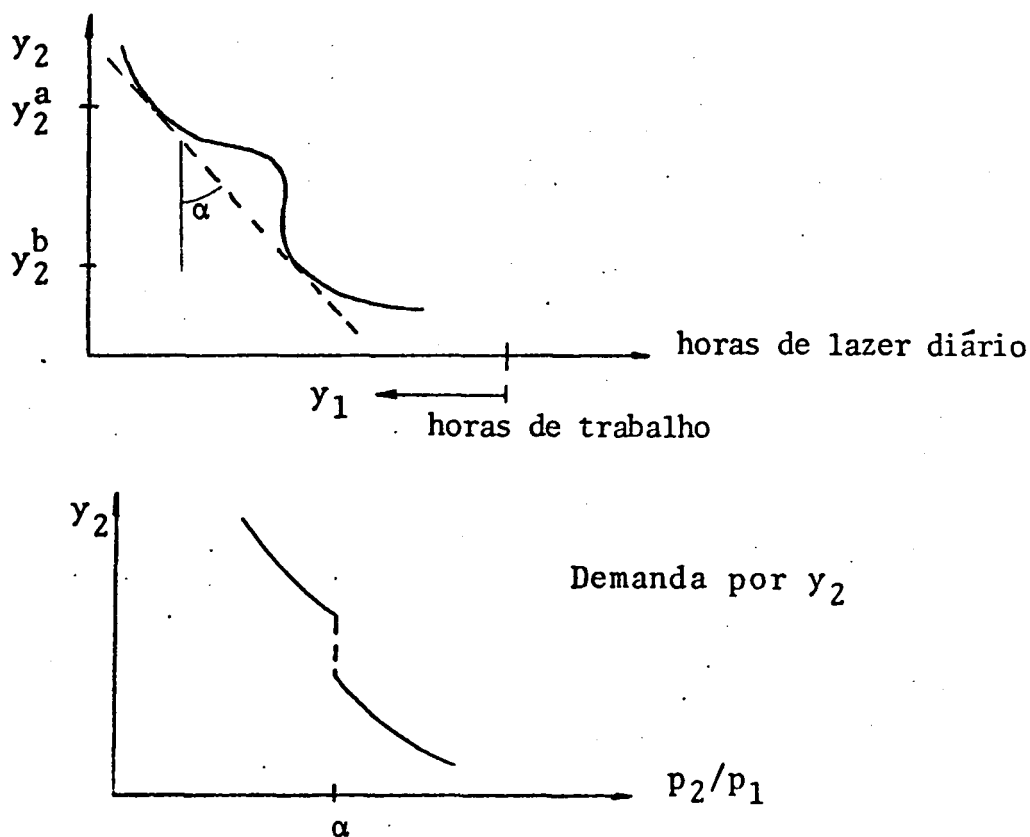
Para $p_2/p_1 = a$ há dois níveis de produção possíveis: $y_2 = y_2^a$ e $y_2 = 0$. Qualquer nível de produção entre 0 e y_2^a traria lucro negativo para a empresa. As curvas de oferta de produto e demanda pelo fator são:



Se houver uma oferta do fator $\bar{y}_1 < y_1^a$ não há equilíbrio neste mercado. A não-convexidade do conjunto de possibilidades de produção gerou uma curva de oferta descontínua que impede o equilíbrio.

Do mesmo modo que geramos curvas de oferta de

produto e demanda por fator descontínuas a partir de um conjunto de possibilidades de produção não convexo, podemos gerar curvas de demanda pelo produto e oferta de trabalho não contínuas para um indivíduo a partir de preferências não convexas:

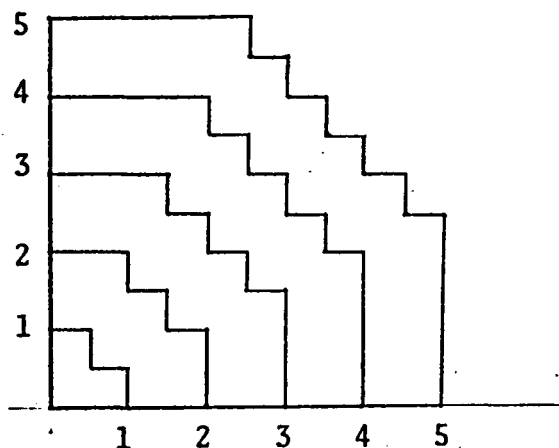


Os desequilíbrios gerados pela ausência de convexidade das preferências e dos conjuntos de produção vistos isoladamente tendem a se reduzir quando se considera a economia em termos agregados. Este fato ocorre pois os conjuntos de produção e consumo (sujeitos a certo nível de sa-

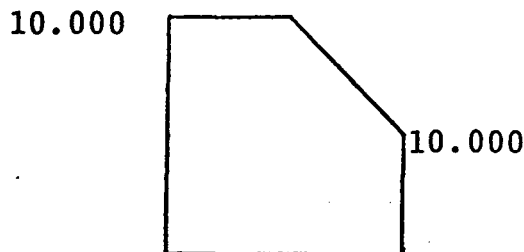
tisfação) somados tendem a reduzir o "grau de não-convexidade" em termos relativos, isto é, o grau de não convexidade do conjunto agregado dividido por uma medida de tamanho da economia — como por exemplo o número de agentes econômicos.

A intuição por trás deste fenômeno está no fato de que diferentes conjuntos de diferentes agentes apresentam isoladamente diferentes não-convexidades, mas, quando somados, as convexidades tendem a se cancelar gerando conjuntos agregados aproximadamente convexos. Mesmo na hipótese de conjuntos não convexos exatamente iguais, a não convexidade do conjunto agregado fica menor, em termos relativos, conforme a figura abaixo:

5 conjuntos iguais



Se tivéssemos um número muito grande de agentes o conjunto somado aproximar-se-ia do formato abaixo:



Neste capítulo daremos um tratamento rigoroso a este fato que descrevemos heurísticamente. O capítulo está dividido em 3 seções:

A seção IV.2 contém uma prova do Teorema de Shapley-Folkman. Este teorema e o teorema IV.1, usado para prová-lo, serão usados nas aplicações à Teoria Econômica das seções seguintes.

Na seção IV.3 apresentamos uma versão do modelo de Arrow-Debreu discutido no Capítulo III sem as hipóteses de convexidade. Provamos que há um equilíbrio aproximado que se distancia do equilíbrio compensado (veja capítulo III) de uma magnitude que depende do "grau de não convexidade" dos conjuntos de produção e consumo dos agentes econômicos e independe do tamanho, isto é, do número de agen-

tes, da economia.

Na seção IV.4 analisamos uma economia de trocas sem preferências convexas considerando como medida de desequilíbrio o valor de mercado do excesso de demanda. Provamos que existe um equilíbrio aproximado cuja medida de desequilíbrio depende apenas das dotações iniciais mas não do "grau de não convexidade" das preferências.

IV.2 - O Teorema de Shapley-Folkman

Para provarmos o Teorema de Shapley - Folkman precisaremos de alguns lemas que apresentamos a seguir.

Definição: Diz-se que um sistema de equações

$$x = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r$$

$x^i \in R^n$, admite solução não-negativa $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r)$

se $\bar{a}_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, r$.

Lema IV.1

Sejam x, x^1, x^2, \dots, x^r vetores em R^n tais que

existe uma solução não negativa para as n equações.

$$x = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r, \text{ onde } r > n$$

Então existe uma solução também não negativa para estas \underline{n} equações com no máximo n dos termos positivo.

Prova: Por hipótese existe uma solução $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r)$ tal que $\bar{a}_j \geq 0$ para todo j . Se o número de termos positivos entre estes for igual a \underline{n} , o lema está provado. Se este número for superior a \underline{n} temos que provar que há uma outra solução com \underline{n} termos positivos.

Provemos que caso hajam $\underline{n+1}$ coeficientes a_j positivos pode-se encontrar uma solução com apenas \underline{n} termos positivos. Esta mesma argumentação poderia ser repetida caso houvessem $\underline{n+2}$, $\underline{n+3}$, $\underline{n+4}$, ..., r coeficientes positivos, até se chegar a $n+1$.

Seja a solução $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_r)$ em que por remuneração podemos admitir $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1} > 0$, $\bar{a}_{n+2} = \dots = \bar{a}_r = 0$.

Como os vetores $x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}$ pertencem ao espaço

\mathbb{R}^n eles são linearmente dependentes, isto é:

$$c'_1 x^1 + c'_2 x^2 + \dots + c'_n x^n + c'_{n+1} x^{n+1} = 0 \text{ com al-}$$

gum $c'_j \neq 0$. Por renumeração podemos supor $c'_1 \neq 0$ e

$$\text{tomar } c_j = \frac{c'_j}{c'_1}, \text{ obtendo:}$$

$$x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} = 0 \quad \text{como}$$

$$x = \bar{a}_1 x^1 + \bar{a}_2 x^2 + \dots + \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n+1} x^{n+1} + 0 +$$

$$+ 0 x^{n+2} + \dots + 0 x^r \text{ tome } b = \min\left(\frac{\bar{a}_j}{c_j}\right) \text{ para}$$

todo $c_j \neq 0$.

Para $j=k$ ter-se-á $b = \frac{\bar{a}_k}{c_k}$, $1 \leq k \leq n+1$ temos:

$$-b(1 x^1 + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1}) = 0$$

$$x = \bar{a}_1 x^1 + \bar{a}_2 x^2 + \dots + \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n+1} x^{n+1} +$$

$$+ 0 x^{n+2} + \dots + 0 x^r \text{ logo,}$$

$$x = (\bar{a}_1 - b) x^1 + (\bar{a}_2 - bc_2) x^2 + \dots + (\bar{a}_n - bc_n) x^n +$$

$$+ (\bar{a}_{n+1} - bc_{n+1}) x^{n+1} + 0 x^{n+2} + \dots + 0 x^r \text{ para}$$

$j=k$, temos $(\bar{a}_j - bc_j) = (\bar{a}_k - bc_k) = 0$, obtendo-se a

solução $(\bar{a}_1 - b, \bar{a}_2 - bc_2, \dots, \bar{a}_{k-1} - bc_{k-1}, 0, \bar{a}_{k+1} -$

$- bc_{k+1}, \dots, \bar{a}_{n+1} - bc_{n+1}, 0, 0, \dots, 0)$ que possui \underline{n}

termos positivos e $\underline{r-n}$ termos nulos.

Q.E.D.

Lema IV.2 - (Teorema de Caratheodory)

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \text{co}(A)$, isto é, $x = \sum_{i=1}^r a_i x^i$,

$a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r a_i = 1$, $x^i \in A$. Então x é combinação convexa de no máximo $n+1$ dos x^i , $i = 1, 2, \dots, n, \dots, r$.

Prova: Considere as $n+1$ equações com r incógnitas dadas

$$\text{por: } x = \sum_{i=1}^r a_i x^i \quad (n \text{ equações})$$

$$1 = \sum_{i=1}^r a_i \quad (1 \text{ equação})$$

Por hipótese estas $n+1$ equações têm uma solução não negativa pois $a_i \geq 0$. Podemos usar o Lema IV.1 bastando ampliar a dimensão do espaço \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^{n+1} temos,

$$y \in \mathbb{R}^{n+1}, y \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^r \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^r \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{e } y^i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_n^i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nesta notação as $n+1$ equações são dadas por $y = \sum_{i=1}^r a_i y^i$,

onde $y^1, y^2, \dots, y^r \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pelo Lema IV há uma solução $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \dots, \bar{a}_r)$

com no máximo $n+1$ dos coeficientes \bar{a}_j positivos. Logo,

$$y = \sum_{i=1}^r \bar{a}_i y^i \implies x = \sum_{i \in S} \bar{a}_i x^i, \text{ onde } S \text{ é o conjunto dos índices } i = 1, 2, \dots, r, \text{ tal que } \bar{a}_i > 0.$$

Q.E.D.

Q.E.D.

Teorema IV.1

Sejam $B^1, B^2, \dots, B^r \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja $x \in \sum_{j=1}^r \text{co}(B^j)$

isto é, $x = \sum_{j=1}^r x^j$, $x^j \in \text{co}(B^j)$ para $j = 1, 2, \dots, r$.

Então existem $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^r \in \text{co}(B^j)$ e $x = \sum_{j=1}^r \bar{x}^j$

com a propriedade $\bar{x}^j \in B^j$ para todo j com exceção do no máximo um número \underline{n} destes \bar{x}^j .

Prova: Por hipótese $x = \sum_{j=1}^r x^j$, onde $x^j \in \text{co}(B^j)$. Pelo Lema IV.2

cada x_j é uma combinação convexa de no máximo $\underline{n+1}$ elementos, de B^j , isto é:

$$x^j = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^j x_i^j, \text{ onde } x_i^j \in B^j, j = 1, \dots, r, \sum_{i=1}^{n+1} a_i^j = 1$$

temos,

$$x = \sum_{j=1}^r x^j = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 x_i^1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 x_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^r x_i^r \quad (n \text{ equações})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 = 1, \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1, \dots, \sum_{i=1}^{n+1} a_i^r = 1 \quad (r \text{ equações})$$

Para aplicar o Lema IV.2 ampliemos o espaço R^n para R^{n+r} .

$$y \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{n+r} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} [x] = (n, 1) \\ [1] = (r, 1) \end{array}$$

$$y_i^j \equiv \begin{bmatrix} [x_i^j] \\ [1] \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{vetor } (n, 1) \\ \longrightarrow \text{vetor } (r, 1) \end{array}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^1 y_i^1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 y_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^r y_i^r$$

Temos $n+r$ equações e $(n+1)r$ incógnitas a_i^j , $j = 1, \dots, r$
 $i = 1, \dots, n+1$. Pelo Lema IV.2 há uma solução não-negativa com no máximo $n+r$ termos positivos, ou seja,

$$\bar{a} = (\underbrace{\bar{a}_1^1, \dots, \bar{a}_{n+1}^1}_{\text{coeficientes dos pontos de } B^1}; \bar{a}_1^2, \dots, \bar{a}_{n+1}^2; \dots; \underbrace{\bar{a}_1^r, \dots, \bar{a}_{n+1}^r}_{\text{coeficientes dos pontos de } B^r})$$

Na solução \bar{a} existem $n+r$ coeficientes positivos e os $(n+1)r - (n+r) = n(r-1)$ outros coeficientes são todos

nulos. $x \in \text{co}(B^1) + \dots + \text{co}(B^r)$, logo, no mínimo um dos coeficientes de cada B^j é positivo (isto é mostrado por $\sum_{i=1}^{n+1} a_i^j = 1$, para $j = 1, 2, \dots, r$). Se para um certo j houver $a_i^j = 1$ para algum i , então o ponto do $\text{co}(B^j)$ associado a este a_i^j pertence ao conjunto B^j .

Se para um mesmo j houver mais de um i tal que $a_i^j > 0$ então é possível que a combinação convexa dos correspondentes pontos não pertença a B^j .

Defina para cada $j = 1, 2, \dots, r$ o conjunto de coeficientes $S^j = \{a_i^j : a_i^j > 0\}$. Sabe-se que $\# S^j \geq 1$ e

$\sum_{j=1}^r \# S^j \leq r+n$. A igualdade $\sum_{j=1}^r \# S^j = r+n$ ocorre

se para todo S^j , tivermos $\# S^j \leq 2$. Neste caso existem exatamente $r-n$ conjuntos S^j com $\# S^j =$

$= 1$ e n conjuntos S^j com $\# S^j = 2$. Para j

tal que $\# S^j = 1$, temos $a_i^j = 1$ para algum i

e o ponto do $\text{co}(B^j)$ associado a este a_i^j per-

tence a B^j . Para j tal que $\# S^j = 2$ existem a_i^j e a_k^j

positivos e a combinação convexa dos x_i^j e x_k^j asso-

ciados a estes coeficientes pode ou não pertencer a

B^j . Se as n combinações convexas $a_i^j x_i^j + a_k^j x_k^j$ tais que $\# S^j = 2$ não pertencerem aos respectivos conjuntos B^j teremos o caso de maior número de conjuntos B^j tais que $x^j \notin B^j$, sendo este número igual a n

Q.E.D.

Corolário IV.1

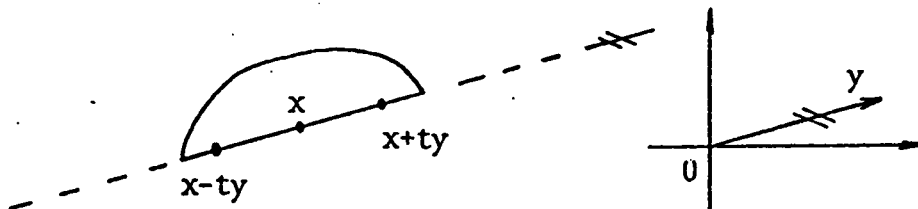
Seja F uma família de conjuntos compactos $S_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, e $x \in \text{co}(\sum_{i=1}^n S_i)$. Então F pode ser dividida em duas sub-famílias F_1 e F_2 onde F_1 possui no máximo n elementos, tal que:

$$x \in \text{co}(\sum_{S \in F_1} S) + \sum_{S \in F_2} S, \quad \text{ou}$$

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{com } x_1 \in \text{co}(\sum_{S \in F_1} S), \quad x_2 \in \sum_{S \in F_2} S).$$

Definição:

Um vetor y é uma direção facial sobre $x \in C$ se $x+ty \in C$ para todo $|t|$ suficientemente pequeno.



Lema IV.3

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \text{co}(S)$. Então existe um subconjunto finito $T \subset S$ tal que $x \in \text{co}(T)$ e $\bar{x} - x$ é uma direção facial sobre x em $\text{co}(S)$ para todo $\bar{x} \in T$.

Prova: Pelo Lema IV.2 podemos afirmar que x é uma combinação convexa de no máximo $n+1$ elementos de S . Tomando-se T como o conjunto formado por estes elementos, conclui-se que existe $T \subset S$ finito.

Para provar a segunda parte do teorema, tomemos

$T = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$, onde $k \leq n+1$, e $x = \sum_{j=1}^k \alpha_j \bar{x}_j$,

$\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$. Suponha por absurdo que para algum \bar{x}_j , $\bar{x} - \bar{x}_j$ não é direção facial sobre x em $\text{co}(S)$.

Podemos supor $\bar{x}_j = \bar{x}_1$ sem perda de generalidade. Te-

remos $x + t(\bar{x}_1 - x) \notin \text{co}(T)$ para algum t , com $|t|$ pe-

queno. $x + t(\bar{x}_1 - x) \notin \text{co}(T)$, logo $(1-t)x + t\bar{x}_1 \notin \text{co}(T)$,

isto implica $(1-t) \sum_{j=1}^k \alpha_j \bar{x}_j + t\bar{x}_1 \notin \text{co}(T)$.

$\sum_{j=1}^k \beta_j \bar{x}_j \notin \text{co}(T)$, para $\beta_j = (1-t)\alpha_j$, $j = 2, \dots, k$ e

$\beta_1 = (1-t)\alpha_1 + t$, temos

$$\sum_{j=1}^k \beta_j = (1-t)\alpha_1 + t + \sum_{j=2}^k (1-t)\alpha_j = (1-t) \sum_{j=1}^k \alpha_j +$$

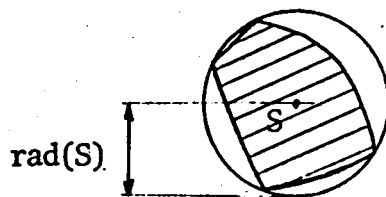
+ t = 1-t + t = 1, logo, $x + t(\bar{x}_1 - x)$ é uma combinação convexa de elementos de T, contradizendo a hipótese de $x + t(\bar{x}_1 - x) \notin \text{co}(T)$.

Q.E.D.

Definição:

O raio de um conjunto compacto $S \subset \mathbb{R}^n$ é definido por: $\text{rad}(S) = \min_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} \max_{y \in S} \|x-y\|$.

$\text{rad}(S)$ é igual ao raio da menor bola fechada que contém S.



Lema IV.4

Para toda família finita F de conjuntos compactos S e todo $x \in \text{co}(\sum_{S \in F} S)$, existe $y \in \sum_{S \in F} S$ tal que

$$\|x-y\|^2 \leq \sum_{S \in F} (\text{rad}(S))^2. \quad (*)$$

Prova: Por indução finita, se $\# F = m = 1$,

$$x = \sum_{y \in T} \alpha(y)y, \text{ para } T \subseteq S \text{ finito e } \alpha(y) \geq 0, \sum_{y \in T} \alpha(y) = 1$$

tome x^* de modo a minimizar $\max_{y \in S} \|x-y\|$ de modo a ter-

$$\text{mos } \text{rad}(s) = \max_{y \in S} \|x^* - y\|.$$

$$\theta = x - x^* = x - \sum_{y \in T} \alpha(y)y = \sum_{y \in T} \alpha(y)(x-y)$$

tomando-se o produto interno com o vetor $x-x^*$.

$$0 = \sum_{y \in T} \alpha(y) \langle x - x^*, x-y \rangle.$$

A igualdade acima impede que se tenha $\langle x-x^*, x-y \rangle > 0$

para todo $y \in T$, de modo que para algum $y \in T$ $\langle x-x^*,$

$$x-y \rangle \leq 0. \text{ Mas } [\text{rad}(s)]^2 \geq \|x^* - x\|^2 = \|(x-x^*) - (x-y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|x-x^*\|^2 - 2 \langle x-x^*, x-y \rangle \|x-y\|^2,$$

portanto a desigualdade (*) vale para $m=1$.

Admitindo que (*) vale para m , provemos para $m+1$ se

$$x \in \text{co}\left(\sum_{j=1}^{m+1} S_j\right) = \text{co}\left(\sum_{j=1}^m S_j\right) + \text{co}(S_{m+1}) \quad \text{teremos}$$

$$x = x^1 + x^2, \quad x^1 \in \text{co}\left(\sum_{j=1}^m S_j\right) \text{ e } x^2 \in \text{co}(S_{m+1}) \quad \text{pela}$$

hipótese de indução, existe $y^1 \in \sum_{j=1}^m S_j$ tal que

$$\|x^1 - y^1\|^2 \leq \sum_{j=1}^m [\text{rad}(S_j)]^2.$$

Tomemos z^0 que minimiza $\|x-y^1 - z\|$ para $z \in \text{co}(S_{m+1})$.

Então para todo $z^0 \in \text{co}(S_{m+1})$ temos:

$$\|x - y^1 - z^0\|^2 \leq \|x - y^1 - x^2\|^2 = \|x^1 - y^1\|^2 \leq \sum_{j=1}^m [\text{rad}(s_j)]^2$$

Para todo $z \in \text{co}(S_{m+1})$, $tz + (1-t)z^0 \in \text{co}(S_{m+1})$,

$0 < t \leq 1$, temos,

$$\begin{aligned} \|x - y^1 - z^0\|^2 &\leq \|x - y^1 - [tz + (1-t)z^0]\|^2 = \|x - y^1 - z^0 - \\ &- t(z - z^0)\|^2 = \|x - y^1 - z^0\|^2 - 2t \langle x - y^1 - z^0, z - z^0 \rangle + \\ &+ t^2 \|z - z^0\|^2, \text{ logo,} \end{aligned}$$

$$\langle x - y^1 - z^0, z - z^0 \rangle \leq t \|z - z^0\|^2. \text{ Fazendo-se } t \rightarrow 0,$$

$\langle x - y^1 - z^0, z - z^0 \rangle \leq 0$, para todo $z \in \text{co}(S_{m+1})$. Pelo

lema IV.3, existe um subconjunto finito $T \subset S_{m+1}$ tal

que $z^0 \in \text{co}(T)$ e como (*) vale para $m=1$ temos,

$$\|y^2 - z^0\|^2 \leq [\text{rad}(T)]^2 \leq [\text{rad}(S_{m+1})]^2.$$

Pelo mesmo lema IV.3, $y^2 - z^0$ é uma direção facial so-

bre z^0 em $\text{co}(S_{m+1})$, logo $z^0 + t(y^2 - z^0) \in \text{co}(S_{m+1})$ pa-

ra $|t|$ suficientemente pequeno. Para $z = z^0 + t(y^2 - z^0)$,

$$\langle x - y^1 - z^0, [z^0 + t(y^2 - z^0)] - z^0 \rangle \leq 0$$

$$t \langle x - y^1 - z^0, y^2 - z^0 \rangle \leq 0.$$

Como t pode ser negativo ou positivo, temos

$$\langle x - y^1 - z^0, y^2 - z^0 \rangle = 0$$

para $y = y^1 + y^2 \in \sum_{j=1}^{m+1} S_j$,

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|x - y^1 - y^2\|^2 = \|(x - y^1 - z^0) - (y^2 - z^0)\|^2 \\ &= \|x - y^1 - z^0\|^2 - 2 \langle x - y^1 - z^0, y^2 - z^0 \rangle + \|y^2 - z^0\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m [\text{rad}(S_j)]^2 + [\text{rad}(S_{m+1})]^2 = \sum_{j=1}^{m+1} [\text{rad}(S_j)]^2, \end{aligned}$$

o que mostra a validade de (*).

Q.E.D.

Finalmente, apresentamos o

Teorema IV.2 - (Shapley-Folkman)

Seja F uma família de conjuntos compactos $S \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\text{rad}(S) \leq L$ para todo $S \in F$. Então para toda sub-família finita $F' \subset F$ de m elementos S_1, \dots, S_m e todo ponto $x \in \text{co}(\sum_{j=1}^m S_j)$ existe um $y \in \sum_{j=1}^m S_j$ tal que $\|x-y\| \leq L\sqrt{n}$.

Prova: Pelo Lema IV.4, para todo $x \in \text{co}(\sum_{j=1}^m S_j)$ existe um $y \in \sum_{j=1}^m S_j$ tal que $\|x-y\|^2 \leq \sum_{j=1}^m [\text{rad}(S_j)]^2$. Se $m \leq n$,

$$\|x-y\|^2 \leq \sum_{j=1}^m [\text{rad}(S_j)]^2 \leq \sum_{j=1}^m L^2 = mL^2 \leq nL^2.$$

Se $m > n$, pelo corolário IV.1, $x = x_1 + x_2$; sendo

$x_1 \in \text{co}(\Sigma_{SEF'_1} S)$ e $x_2 \in \Sigma_{SEF'_2} S$ onde F'_1 e F'_2 são duas

sub-famílias disjuntas de F' sendo o número máximo de elementos

de F'_1 igual a n . Temos $x-x_2 \in \text{co}(\Sigma_{SEF'_1} S)$.

Como F'_1 tem no máximo n elementos, aplicando-se o Le-

ma IV.5 podemos obter $y_1 \in \Sigma_{SEF'_1} S$ tal que

$$\|(x-x_2) - y_1\|^2 \leq \sum_{SEF'_1} [\text{rad}(S)]^2 \leq \sum_{SEF'_1} L^2 \leq n L^2$$

tomando-se $y = y_1 + x_2$ temos $|x-y|^2 \leq nL^2$, o que pro-

va $\|x-y\| \leq L \sqrt{n}$

Q.E.D.

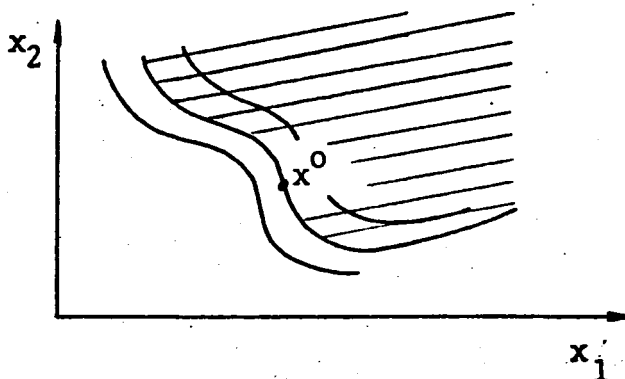
IV.3 - O Modelo de Produção e Consumo sem Convexidade

O modelo de Arrow-Debreu discutido no Capítulo III foi desenvolvido a partir de 6 axiomas sobre os conjuntos de produção e consumo e sobre as preferências dos indivíduos. Nesta seção abandonaremos as hipóteses de:

- 1º) (A.1) o conjunto de possibilidades de produção de cada empresa ser convexo.

2º) (A.6.d) as preferências serem convexas.

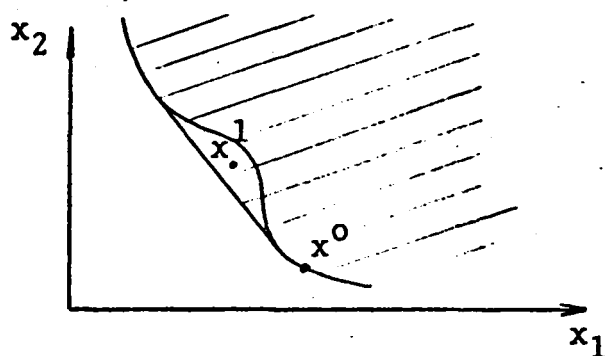
Tomemos uma economia competitiva descrita pelos axiomas A1 - A6, sem as referidas hipóteses de convexidade. A nova ordenação de preferências descreve conjuntos de pontos preferidos a um x_h^0 , isto é, $\{x_h: x_h \dot{\succ} x_h^0\}$ não convexos de acordo com a figura abaixo:



Para podermos comparar o equilíbrio alcançado por esta economia com o equilíbrio (compensado) do modelo de Arrow-Debreu faremos a "convexificação" de nossa economia não convexa. Para isto definamos a "ordenação convexificada" por:

Definição: $x_h^1 \dot{\succ}^c x_h^2$ significa que para todo x_h^0 tal que $x_h^2 \in \text{co}(\{x_h: x_h \dot{\succ} x_h^0\})$ tem-se $x_h^1 \in \text{co}(\{x_h:$

$$: x_h \succcurlyeq_h x_h^0)$$



$$x^1 \succcurlyeq_h x^2 \quad \text{mas}$$

$$x^2 \succcurlyeq_h^c x^1$$

A economia convexificada será descrita por:

I- Os axiomas A.1 - A.3 são satisfeitas com $\text{co}(Y_f)$ no lugar de Y_f .

II- Os axiomas A.4 - A.6 são satisfeitos com \succcurlyeq_h^c no lugar de \succcurlyeq_h .

A economia convexificada satisfaz às condições necessárias à existência de um equilíbrio compensado, isto é, existe um vetor de preços $P^* > \theta$ e uma alocação $(x_1^*, \dots, x_H^*; y_1^*, \dots, y_F^*) = (x^*, y^*)$ tal que:

$$1) \quad x^* \leq y^* + \bar{x} \quad , \quad \text{onde} \quad \bar{x} = \sum_{h=1}^H \bar{x}_h;$$

$$2) \quad y_f^* \text{ maximiza } \langle p^*, y_f^* \rangle \text{ sujeito a } y_f \in \text{co}(Y_f);$$

$$3) \quad x_h^* \text{ minimiza } \langle p^*, x_h^* \rangle \text{ sujeito a } x_h \succcurlyeq_h^c x_h^* ;$$

$$4) \langle p^*, x_h^* \rangle = M_h^* = \langle p^*, \bar{x}_h \rangle + \sum_{f=1}^F d_{hf} \langle p^*, y_f^* \rangle.$$

A economia convexificada, portanto, possui um equilíbrio compensado com as propriedades de factibilidade, otimização para cada agente econômico e satisfação às restrições orçamentárias de cada indivíduo. A economia não-convexificada terá um vetor de preços p^* e duas alocações (x^*, y^*) e (x^+, y^+) a primeira sendo factível e a segunda sendo um ótimo para cada agente e satisfazendo às restrições orçamentárias individuais. Tal que em termos agregados as duas alocações estão próximas. Definamos, pois, este equilíbrio:

Definição:

Um equilíbrio compensado aproximado de módulo A é um vetor de preços $P^* > \theta$ e duas alocações (x^*, y^*) e (x^+, y^+) tais que :

$$(a) \ x^* \leq y^* + \bar{x};$$

$$(b) \ p_i^* = 0 \quad \text{se } x_i^* < y_i^* + \bar{x}_i;$$

(c) y_f^+ maximiza $\langle p^*, y_f \rangle$ para $y_f \in Y_f$;

(d) x_h^+ minimiza $\langle p^*, x_h \rangle$ sujeito a $x_h \geq_h x_h^+$,

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \langle p^*, x_h^+ \rangle &= M_h^+ = \langle p^*, \bar{x}_h \rangle + \sum_{f=1}^F d_{hf} \langle p^*, y_f^+ \rangle = \\ &= M_h^* = \langle p^*, \bar{x}_h \rangle + \sum_{f=1}^F d_{jh} \langle p^*, y_f^* \rangle ; \end{aligned}$$

(f) $\| (x^* - y^*) - (x^+ - y^+) \| \leq A$;

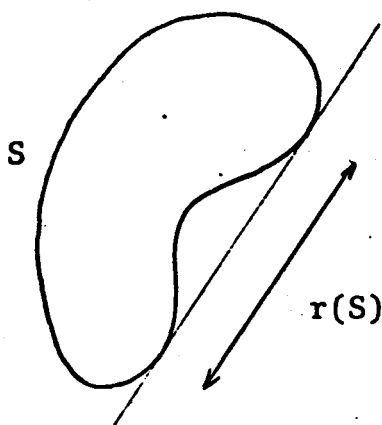
Antes de provarmos a existência do equilíbrio acima, vejamos o conceito de raio interno de um conjunto, que vem a ser uma medida de não-convexidade.

Definição:

O raio interno de um conjunto S , $r(s)$ é definido por

$$r(s) = \sup_{x \in \text{co}(S)} \inf_{x \in \text{co}(T)} \text{rad}(T)$$

Para a compreensão deste conceito parta de $x \in \text{co}(S)$ e obtenha um subconjunto finito $T \subset S$ tal que $x \in \text{co}(T)$. Para cada x faça T variar e tome o ínfimo de $\text{rad}(T)$; a seguir defina como $r(S)$ ao supremo sobre todos os $x \in \text{co}(S)$ de todos estes ínfimos.



note que $r(S) = 0$ se, e somente se S é convexo.

A seguir provaremos que o equilíbrio compensado aproximado existe e que seu módulo é $A = L \sqrt{n}$, onde L é o maior grau de não-convexidade dos conjuntos de possibilidade de produção e consumo (sujeito à restrição $x_h \geq x_h^+$ para todo h) e n é o número de bens.

O resultado

$$|(x^* - y^*) - (x^+ - y^+)| \leq A = L \sqrt{n}$$

indica que no equilíbrio aproximado a discrepância entre o excesso de demanda agregada na economia convexificada $(x^* - y^*)$ e excesso análogo na economia não-convexificada $(x^+ - y^+)$ é limitada por um fator que independe do tamanho da economia (medida pelo número de agentes por exemplo). Isto equivale a dizer que a discrepância dividida pelo número de agentes (discrepância per-capita) tende a zero quando a economia

cresce.

Teorema IV.3 - Existência de Equilíbrio Compensado Aproximado

Sob as hipóteses I e II que caracterizam a economia convexificada, se existe L tal que $r(Y_f) \leq L$ para todo f e $r(\{x_h: x_h \geq_h x_h^+\}) \leq L$ para todo h , existe um equilíbrio compensado aproximado de módulo $L\sqrt{n}$, onde n é o número de bens.

Prova: Sejam P^* e (x^*, y^*) um equilíbrio para a economia convexificada. O equilíbrio de cada empresa $y_f^* \in \text{co}(Y_f)$ é uma combinação convexa de um subconjunto finito $T_f \subset Y_f$. Como $r(Y_f) \leq L$, conclui-se que $\text{rad}(T_f) \leq L$.

$$\text{Temos } y_f^* = \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) y_f, \quad \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) = 1$$

Multiplicando-se escalarmente por P^* obtemos

$$\langle p^*, y_f^* \rangle = \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) \langle p^*, y_f \rangle$$

mas $y_f \in T_f \subset Y_f \subset \text{co}(Y_f)$ para todo $y_f \in T_f$. Pela maximização de lucro em $\text{co}(Y_f)$ conclui-se que

$\langle p^*, y_f^* \rangle \geq \langle p^*, y_f \rangle$ para todo $y_f \in T_f$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha(y_f) > 0$ para todo $y_f \in T_f$, pois caso algum $\alpha(y_f) = 0$ podemos retirar este y_f de T_f . Com $\alpha(y_f) > 0$ para todo $y_f \in T$ e $\sum_{y_f \in T} \alpha(y_f) = 1$ e a expressão $\langle p^*, y_f^* \rangle = \sum_{y_f \in T_f} \alpha(y_f) \langle p^*, y_f \rangle$

$\langle p^*, y_f \rangle \geq \langle p^*, y_f \rangle$, obtem-se $\langle p^*, y_f^* \rangle = \langle p^*, y_f \rangle$ para todo $y_f \in T_f$. Portanto:

Todo $y_f \in T_f$ maximiza $\langle p^*, y_f \rangle$ para $y_f \in Y_f$.

O mesmo argumento utilizado acima para a produção pode ser repetido para o consumo pois $\{x_h: x_h \stackrel{c}{\geq} x_h^*\} = \text{co}(\{x_h: x_h \stackrel{o}{\geq} x_h^o\})$ e portanto existe um subconjunto finito $S_h \subset \{x_h: x_h \stackrel{o}{\geq} x_h^o\}$ tal que $\text{rad}(S_h) \leq L$ e $x_h^* \in \text{co}(S_h)$. Conclui-se que

Todo $x_h \in S_h$ minimiza $\langle p^*, x_h \rangle$ para $x_h \stackrel{o}{\geq} x_h^o$ e

$\langle p^*, x_h \rangle = \langle p^*, x_h^* \rangle$ para todo $x_h \in S_h$.

Estas expressões mostram que podemos escolher S_h de forma a ter $x_h^o \in S_h$ e que todos os elementos de S_h

são indiferentes temos:

$$x^* - y^* = \sum_{h=1}^H x_h^* - \sum_{f=1}^F y_f^* \in \sum_{h=1}^H \text{co}(S_h) + \sum_{f=1}^F \text{co}(-T_f)$$

$$= \text{co} \left(\sum_{h=1}^H S_h + \sum_{f=1}^F (-T_f) \right)$$

Como $\text{rad}(S_h) \leq L$ e $\text{rad}(-T_f) \leq L$ para todo h e f , podemos aplicar o Teorema de Shapley-Folkman para garantir a existência de um ponto

$$x^t - y^t \in \sum_{h=1}^H S_h + \sum_{f=1}^F (-T_f)$$

tal que

$$\|(x^* - y^*) - (x^t - y^t)\| = \|(x^* - x^t) - (y^* - y^t)\| \leq L\sqrt{n}$$

Q.E.D.

IV.4 - O Modelo de Economia de Trocas

IV.4.1 - Introdução

No modelo de economia de produção e consumo apresentado na seção IV.3 utilizamos como medida de desequilíbrio o grau de não convexidade dos conjuntos de produção e consumo dos agentes econômicos. Nesta seção apresentamos um modelo de economia de trocas em que a medida de desequilíbrio utilizada é o valor de mercado do excesso de

demanda.

Seja o vetor $x \in \mathbb{R}^k$, o conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$ usa-

remos as seguintes notações:

$$\|x\|_M = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$$

$$\|x\|_S = \sum_{i=1}^k |x_i|$$

$$|x| \text{ é o vetor com } |x|_i = |x_i|$$

\bar{P} = conjunto de preferências em \mathbb{R}_+^k obedecendo às hipóteses contidas no axioma A.6 do capítulo III à exceção de A.6.d (convexidade semi-estrita).

IV.4.2 - O Modelo

Uma economia de trocas será caracterizada por uma função $\epsilon: A \rightarrow \bar{P} \times \mathbb{R}_+^k$, onde A é um conjunto finito de agentes econômicos. Para o agente $a \in A$, \hat{p}_a é a projeção de $\epsilon(a)$ sobre \bar{P} — representando as preferências de a — e $e(a)$ é a projeção de $\epsilon(a)$ sobre \mathbb{R}_+^k — definindo as dotações iniciais de a .

Uma alocação é uma função $f: A \rightarrow R_+^k$ tal que

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} e(a). \quad \text{Para uma economia } \varepsilon, \quad M(\varepsilon) =$$

$$= \max \{ \|e(a_1) + \dots + e(a_k)\|_M, a_1, \dots, a_k \in A, a_i \text{ distintos} \}.$$

Um vetor de preços $P \in R_+^k$ é tal que $\|P\|_S = 1$. Sendo S o conjunto de todos os preços e $\overset{\circ}{S}$ seu interior, se $P \in \overset{\circ}{S}$, defini-

mos $C(p) = 1/\min \{p_1, \dots, p_k\}$. Para $P \in \overset{\circ}{S}$ e $a \in A$, defini-

mos o conjunto $D(p, a)$ denominado "demanda do agente a ao

preço P " por $D(p, a) = \{x \in R_+^k; \langle p, x \rangle \leq \langle p, e(a) \rangle \text{ e}$

$\langle p, y \rangle \leq \langle p, e(a) \rangle \text{ implica } x \dot{\geq}_a y\}$. A demanda agregada

per-capita é o conjunto $D(p) = \sum_{a \in A} D(p, a)/|A|$.

Apresentaremos um teorema que prova a existência de um equilíbrio aproximado. As três afirmações nele contidas podem ser interpretada por:

(1) O valor de mercado do excesso de demanda absoluto per-capita é pequeno, isto é, o valor de mercado do ajuste de estoques necessário para equilibrar todos os mercados é pequeno.

(2) Pode-se obter uma cota para a norma do excesso de

demanda. Como $C(p)$ depende de P que é endógeno, seu uso não é adequado como medida de desequilíbrio. Tal problema, contudo, poderia ser contornado tomando-se uma cota superior para $C(p)$, por exemplo, a máxima taxa marginal de substituição β : dado P o vetor de equilíbrio aproximado, $P_i/P_j \leq \beta$, logo $C(p) \leq k \beta$. A conclusão (2) também mostra que existe uma alocação que é próxima ao equilíbrio em termos agregados embora possa gerar grandes desvios em relação ao equilíbrio para alguns agentes tomados individualmente.

(3) Existe uma alocação tal que nenhum agente dispensa mais do que uma pequena fração de sua demanda, isto é, nenhum indivíduo se sente muito insatisfeito em aceitar a alocação ao invés de obter a cesta determinada pela sua demanda.

Teorema IV.4 - Existência de Equilíbrio Aproximado

Seja uma economia de trocas finita $\varepsilon: A \rightarrow \bar{P} \times R_+^k$,

com $|A| = n$ e $\sum_{a \in A} e(a) \gg \theta$. Então existe $P \in S^0$ tal que

$\sum_{a \in A} e(a)/n \in \text{co}(D(p))$. Para tal P existe uma alocação

$h: A \rightarrow R_+^k$ tal que $\langle p, h(a) \rangle = \langle p, e(a) \rangle$ para todo $a \in A$

uma cesta $g(a) \in D(p, a)$ tal que:

$$(1) \langle p, \left| \sum_{a \in A} (g(a) - e(a)) \right| \rangle \leq \langle p, \sum_{a \in A} |g(a) - h(a)| \rangle \leq 2M(\epsilon)$$

$$(2) \left\| \sum_{a \in A} (g(a) - e(a)) \right\|_M \leq \sum_{a \in A} \|g(a) - h(a)\|_M \leq 2C(p) \cdot M(\epsilon)$$

Existe uma alocação $f: A \rightarrow R_+^k$ tal que $\langle p, f(a) \rangle =$

$\langle p, e(a) \rangle$ para todo a e

$$f(a)_j \geq g(a)_j \left[1 - (2 \cdot C(p) \cdot M(\epsilon) / \sum_{a \in A} e(a)_j) \right] \text{ para todo } a \in A,$$

$1 \leq j \leq k.$

Prova: Por um argumento de equilíbrio geral baseado em ponto

fixo (veja Hildenbrand - 1974 - p. 149/150) pode-se

provar que existe um vetor $P \in S^0$ tal que $\sum_{a \in A} c(a)/n \in$

$\in \text{co}(D(p))$. Pelo lema IV.3 existe $h(a) \in D(p, a)$ tal

que $\sum_{a \in A} e(a) = \sum_{a \in A} h(a)$ e $h(a) \in D(p, a)$ para no máximo k

agentes $\{a_1, \dots, a_k\}$. Escolha arbitrariamente $g(a_i) \in$

$\in D(p, a_i)$ para todo $1 \leq i \leq k$ e faça $g(a) = h(a)$ para

todo $a \notin \{a_1, \dots, a_k\}$. Desta forma $g(a) \in D(p, a)$ para

todo a . Como por hipótese as preferências \succsim_a são mo-

nótonas e $g(a) \in D(p, a)$ para todo a , temos $\langle p, g(a) \rangle =$

= $\langle p, e(a) \rangle$ para todo $a \in A$. Mas $h(a) \in \text{co}(D(p, a))$

implica $\langle p, h(a) \rangle = \langle p, e(a) \rangle$ para todo a . Podemos,

pois, escrever

$$\langle p, \left| \sum_{a \in A} (g(a) - e(a)) \right| \rangle = \langle p, \left| \sum_{a \in A} (g(a) - h(a)) \right| \rangle$$

$$\leq \langle p, \sum_{a \in A} |g(a) - h(a)| \rangle$$

$$= \langle p, \sum_{i=1}^k |g(a_i) - h(a_i)| \rangle$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \left| \langle p, g(a_i) \rangle + \langle p, h(a_i) \rangle \right|$$

$$= 2 \sum_{i=1}^k \langle p, e(a_i) \rangle$$

$$= 2 \langle p, \sum_{i=1}^k e(a_i) \rangle$$

$$\leq 2 \left\| \sum_{i=1}^k e(a_i) \right\|_M$$

$$\leq 2.M(\epsilon), \text{ o que prova (1).}$$

Para provarmos (2) notemos que

$$\left\| \sum_{a \in A} (g(a) - e(a)) \right\|_M \leq \sum_{a \in A} \|g(a) - h(a)\|_M$$

$$\leq \langle p, \sum_{a \in A} |g(a) - h(a)| \rangle \leq 1/\min\{p_1, \dots, p_k\}$$

$$\leq 2 M(\epsilon) C(P), \text{ o que prova } \quad (2)$$

Para obtermos (3), tomemos o conjunto de índices de-

finido por $J = \{j: \sum_{a \in A} e(a)_j < \sum_{a \in A} g(a)_j\}$ e

$$r(a)_j = \begin{cases} g(a)_j \left(\frac{\sum_{b \in A} e(b)_j}{\sum_{b \in A} g(b)_j} \right), & \text{se } j \in J \\ g(a)_j, & \text{se } j \notin J \end{cases}$$

Criaremos a alocação $f: A \rightarrow R_+^k$ com o auxílio da

expressão acima. Para tal notemos que:

(i) $r(a) \geq 0$, pois a demanda $g(a)_j$ pelo j -ésimo bem não pode ser negativa.

(ii) $\sum_{a \in A} r(a) \leq \sum_{a \in A} e(a)$, pois para $j \in J$ temos

$$\sum_{a \in A} e(a)_j < \sum_{a \in A} g(a)_j, \text{ o que implica } r(a)_j < g(a)_j.$$

$$r(a)_j = g(a)_j \left(\frac{\sum_{b \in A} e(b)_j}{\sum_{b \in A} g(b)_j} \right)$$

$$\sum_{a \in A} r(a)_j = \sum_{a \in A} g(a)_j \left(\frac{\sum_{b \in A} e(b)_j}{\sum_{b \in A} g(b)_j} \right) =$$

$$= \sum_{a \in A} e(a)_j; \text{ para}$$

$$j \notin J, \text{ temos } \sum_{a \in A} e(a)_j \geq \sum_{a \in A} g(a)_j$$

$$r(a)_j = g(a)_j$$

$$\sum_{a \in A} r(a)_j = \sum_{a \in A} g(a)_j \leq \sum_{a \in A} e(a)_j$$

(iii) $\langle p, r(a) \rangle \leq \langle p, g(a) \rangle = \langle p, e(a) \rangle$, pois

$$r(a)_j \leq g(a)_j \quad e \quad p_j > 0.$$

A última igualdade decorre de $g(a) \in D(p, a)$.

Definamos, portanto, $f: A \rightarrow R_+^k$ por $f(a) = r(a) +$
 $+ \sum_{b \in A} (e(b) - r(b)) \frac{\langle p, e(a) - r(a) \rangle}{\langle p, \sum_{b \in A} (e(b) - r(b)) \rangle}$

Por (i), (ii) e (iii) concluímos $f(a) \geq \theta$. Notemos

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} r(a) + \sum_{a \in A} (e(a) - r(a)) = \sum_{a \in A} e(a),$$

o que prova que f é uma alocação, temos ainda $\langle p, f(a) \rangle =$
 $= \langle p, r(a) \rangle + \langle p, e(a) - r(a) \rangle = \langle p, e(a) \rangle$

para $j \notin J$,

$$f(a)_j \geq r(a)_j = g(a)_j \geq g(a)_j (1 - 2 C(P) M(\epsilon) / \sum_{b \in A} e(b)_j)$$

Para $j \in J$,

$$J(a)_j = r(a)_j = g(a)_j \frac{\sum_{b \in A} e(b)_j}{\sum_{b \in A} g(b)_j}$$

$$= g(a)_j \left[1 - \frac{\sum_{b \in A} (g(b)_j - e(b)_j)}{\sum_{b \in A} g(b)_j} \right]$$

Como para $j \in J$ tem-se $\sum_{b \in A} (g(b)_j - e(b)_j) > 0$ e

para todo $x \in R_+^k$, $\|x\|_M = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i| = \max_{1 \leq i \leq k} x_i \geq x_j$,
 $1 \leq j \leq k$

$$\sum_{b \in A} (g(b)_j - e(b)_j) \leq \left\| \sum_{b \in A} (g(b) - e(b)) \right\|_M \leq 2 C(P) M(\epsilon)$$

de acordo com (2).

$$\text{temos } f(a)_j \geq g(a)_j \left[1 - \frac{2 C(P) M(\epsilon)}{\sum_{b \in A} g(b)_j} \right]$$

$$\geq g(a)_j \left[1 - 2 C(P) M(\epsilon) / \sum_{b \in A} e(b)_j \right]$$

que completa a prova de (3).

Q.E.D.

Nota: A seção IV.3 baseia-se em Starr (1969) e Arrow-Hahn (1971). A seção IV.4 baseia-se em Anderson (1982).

BIBLIOGRAFIA

- 1- ANDERSON, R.M., "Market Value Approach to Approximate Equilibria", Econométrica, vol. 50, nº 1 (January, 1982).
- 2- ARROW, K.J. e DEBREU, G., "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", Econométrica, vol. 22, (1954).
- 3- ARROW, K.J. e HAHN, F., General Competitive Analysis, San Francisco: Holden-Day, 1971, Capítulos 3, 4, 5 e 7.
- 4- DORFMAN, Samuelson e SOLOW, Linear Programming and Economic Analysis, New-York: McGraw-Hill, 1958.
- 5- FRANKLIN, J., Methods of Mathematical Economics, New-York: Springer-Verlang, 1980.
- 6- HILDENBRAND, W., Core and Equilibria of a Large Economy, Princeton: Princeton University Press, 1974.
- 7- KAKUTANI, S., "A Generalization of Brower's Fixed-Point theorem", Duke Mathematical Journal, vol. 8, 1941.
- 8- LUENGERGE, D.G., Optimization by Vector Space Methods, New-York: John Wiley, 1969.
- 9- NIKAIDO, H., Convex Structures and Economic Theory, New-York: Academic Press, 1969.
- 10- SIMONSEN, M.H., Teoria Neo-Classica do Equilíbrio Geral, Mimeo.
- 11- STARR, R.M., "Quasi-Equilíbria in Markets with Non-Convex Preferences", Econométrica, vol. 37, nº 1, (January 1969).
- 12- TAKAYAMA, A., Mathematical Economics, Hinsdale: Dryden-Press, 1974.

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

(a partir de nº 50)

50. JOGOS DE INFORMAÇÃO INCOMPLETA: UMA INTRODUÇÃO - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1984 (esgotado)
51. A TEORIA MONETÁRIA MODERNA E O EQUILÍBRIO GERAL WALRASIANO COM UM NÚMERO INFINITO DE BENS - A. Araujo - 1984
52. A INDETERMINAÇÃO DE MORGENSTERN - Antonio Maria da Silveira - 1984
53. O PROBLEMA DE CREDIBILIDADE EM POLÍTICA ECONÔMICA - Rubens Penha Cysne - 1984 (esgotado)
54. UMA ANÁLISE ESTATÍSTICA DAS CAUSAS DA EMISSÃO DO CHEQUE SEM FUNDOS: FORMULAÇÃO DE UM PROJETO PILOTO - Fernando de Holanda Barbosa, Clovis de Faro e Aloísio Pessoa de Araujo - 1984
55. POLÍTICA MACROECONÔMICA NO BRASIL: 1964-66 - Rubens Penha Cysne - 1985 - (esgotado)
56. EVOLUÇÃO DOS PLANOS BÁSICOS DE FINANCIAMENTO PARA AQUISIÇÃO DE CASA PRÓPRIA DO BANCO NACIONAL DE HABITAÇÃO: 1964-1984 - Clovis de Faro - 1985 (esgotado)
57. MOEDA INDEXADA - Rubens P. Cysne - 1985 (esgotado)
58. INFLAÇÃO E SALÁRIO REAL: A EXPERIÊNCIA BRASILEIRA - Raul José Ekerman - 1985 (esgotado)
59. O ENFOQUE MONETÁRIO DO BALANÇO DE PAGAMENTOS: UM RETROSPECTO - Valdir Ramalho de Melo - 1985 (esgotado)
60. MOEDA E PREÇOS RELATIVOS: EVIDÊNCIA EMPÍRICA - Antonio SaLazar P. Brandão - 1985 (esgotado)
61. INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA, INFLAÇÃO E INDEXAÇÃO - Antonio Maria da Silveira - 1985 (esgotado)
62. MACROECONOMIA - CAPÍTULO I - O SISTEMA MONETÁRIO - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1985 (esgotado)
63. MACROECONOMIA - CAPÍTULO II - O BALANÇO DE PAGAMENTOS - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1985 (esgotado)
64. MACROECONOMIA - CAPÍTULO III - AS CONTAS NACIONAIS - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - 1985 (esgotado)
65. A DEMANDA POR DIVIDENDOS: UMA JUSTIFICATIVA TEÓRICA - TOMMY CHIN-CHIU TAN e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1985 (esgotado)
66. BREVE RETROSPECTO DA ECONOMIA BRASILEIRA ENTRE 1979 e 1984 - Rubens Penha Cysne - 1985 (esgotado)
67. CONTRATOS SALARIAIS JUSTAPOSTOS E POLÍTICA ANTI-INFLACIONÁRIA - Mario Henrique Simonsen - 1985

68. INFLAÇÃO E POLÍTICAS DE RENDAS - Fernando de Holanda Barbosa e Clovis de Faro - 1985 (esgotado)
69. BRAZIL INTERNATIONAL TRADE AND ECONOMIC GROWTH - Mario Henrique Simonsen - 1986
70. CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA: APLICAÇÕES - Clovis de Faro - 1986 (esgotado)
71. A RATIONAL EXPECTATIONS PARADOX - Mario Henrique Simonsen - 1986 (esgotado)
72. A BUSINESS CYCLE STUDY FOR THE U.S. FORM 1889 TO 1982 - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986
73. DINÂMICA MACROECONÔMICA - EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E PROPOSTOS - Rubens Penha Cysne - 1986 (esgotado)
74. COMMON KNOWLEDGE AND GAME THEORY - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1986
75. HYPERSTABILITY OF NASH EQUILIBRIA - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986
76. THE BROWN-VON NEUMANN DIFFERENTIAL EQUATION FOR BIMATRIX GAMES - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986 (esgotado)
77. EXISTENCE OF A SOLUTION TO THE PRINCIPAL'S PROBLEM - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986
78. FILOSOFIA E POLÍTICA ECONÔMICA I: Variações sobre o Fenômeno, a Ciência e seus Cientistas - Antonio Maria da Silveira - 1986 (esgotado)
79. O PREÇO DA TERRA NO BRASIL: VERIFICAÇÃO DE ALGUMAS HIPÓTESES - Antonio Salazar Pessoa Brandão - 1986
80. MÉTODOS MATEMÁTICOS DE ESTATÍSTICA E ECONOMETRIA: Capítulos 1 e 2
Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986
81. BRAZILIAN INDEXING AND INERTIAL INFLATION: EVIDENCE FROM TIME-VARYING ESTIMATES OF AN INFLATION TRANSFER FUNCTION
Fernando de Holanda Barbosa e Paul D. McNelis - 1986
82. CONSÓRCIO VERSUS CRÉDITO DIRETO EM UM REGIME DE MOEDA ESTÁVEL - Clovis de Faro - 1986
83. NOTAS DE AULAS DE TEORIA ECONÔMICA AVANÇADA I - Carlos Ivan Simonsen Leal - 1986
84. FILOSOFIA E POLÍTICA ECONÔMICA II - Inflação e Indexação - Antonio Maria da Silveira - 1986
85. SIGNALLING AND ARBITRAGE - Vicente Madrigal e Tommy C. Tan - 1986
86. ASSESSORIA ECONÔMICA PARA A ESTRATÉGIA DE GOVERNOS ESTADUAIS: ELABORAÇÕES SOBRE UMA ESTRUTURA ABERTA - Antonio Maria da Silveira - 1986
87. THE CONSISTENCY OF WELFARE JUDGEMENTS WITH A REPRESENTATIVE CONSUMER - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang

88. INDEXAÇÃO E ATIVIDADE AGRÍCOLA: CONSTRUÇÃO E JUSTIFICATIVA PARA A ADOÇÃO DE UM ÍNDICE ESPECÍFICO - Antonio Salazar P. Brandão e Clóvis de Faro - 1986
89. MACROECONOMIA COM RACIONAMENTO UM MODELO SIMPLIFICADO PARA ECONOMIA ABERTA - Rubens Penha Cysne, Carlos Ivan Simonsen Leal e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - 1986
90. RATIONAL EXPECTATIONS, INCOME POLICIES AND GAME THEORY - Mario Henrique Simonsen - 1986
91. NOTAS SOBRE MODELOS DE GERAÇÕES SUPERPOSTAS 1: OS FUNDAMENTOS ECONÔMICOS - Antonio Salazar P. Brandão - 1986
92. TOPICOS DE CONVEXIDADE E APLICAÇÕES À TEORIA ECONÔMICA - Renato Fragelli Cardoso - 1986

000049034

