MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE BONDS

UMA ANÁLISE EVOLUTIVA

Banca Examinadora

Prof. Orientador: Prof. Dr. João Carlos Douat	EAESP/FGV
Prof. Dr. Sílvio Aparecido de Carvalho	USP/FEA
Prof. Dr. Wladimir Antonio Puggina	EAESP/FGV

A Altarisa, minha esposa, cujo apoio e desprendimento tornaram possível a realização deste trabalho.

ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

EVARISTO DONATO ARAÚJO

MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE BONDS
UMA ANÁLISE EVOLUTIVA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação da FGV/EAESP
Área de Concentração Administração Contábil-Financeira, como requisito para obtenção do título de Mestre em Administração.

Orientador: Prof. Doutor João Carlos Douat

São Paulo
2000

ARAÚJO, Evaristo Donato. Modelos de Precificação de *Bonds*: uma análise evolutiva. São Paulo: EAESP/FGV, 2000, 96p. (Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação da EAESP/FGV, Área de Concentração: Contábil-Financeira.

Resumo: Trata de modelos de avaliação de *bonds*, dentro de uma abordagem evolutiva. Apresenta a evolução das técnicas de precificação desses títulos de renda fixa. Inicialmente discute a abordagem tradicional, que compreende a determinação do valor do fluxo de caixa descontado e a análise de sensibilidade dos preços dos títulos a alterações nas taxas de juros, bem como imunização de carteira de *bonds* quando se admite uma estrutura temporal de juros constante. A seguir apresenta as várias formas da curva de juros a vista e as teorias econômicas elaboradas para explicar estas formas. Finalmente, traz modelos dinâmicos de determinação da estrutura temporal de juros, desenvolvidos para tempo contínuo e para tempo discreto.

Palavras-Chaves: Bonds – Precificação – Renda Fixa – Modelos Binomiais – Opções sobre *bonds* – etc...

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS

À Altarisa, minha esposa, pelo apoio e companheirismo, e Henrique, nosso filho, pelo carinho e compreensão, sem os quais não teria sido possível concluir este curso de mestrado.

Aos meus pais, Nonato e Deusimar, pelo esforço que dispenderam para me propiciar a melhor formação possível.

Ao Professor Douat, meu orientador, pela cobrança, pelo direcionamento e pelo desprendimento, fatores muito importantes na elaboração desta dissertação.

Ao Banco Central do Brasil, pelo sempre necessário suporte financeiro.

INTRODUÇÃO

Os instrumentos de dívida são utilizados pelos governos, empresas e pessoas físicas para financiarem suas necessidades de consumo, para as quais não dispõem de numerário no momento destas demandas.

Esta dissertação aborda os aspectos mais relevantes que determinam o preço de uma classe específica de dívida, livre de risco de crédito, qual seja *bonds* emitidos por governos centrais. Neste intuito este trabalho compreende uma revisão de modelos utilizados para avaliar *bonds*. Tais modelos serão apresentados em uma escala crescente de complexidade.

Por todo este trabalho, sempre que for possível, será feita uma comparação entre a realidade brasileira e a de mercados mais desenvolvidos, em especial os Estados Unidos da América.

O capítulo 1 contempla uma descrição da terminologia empregada no mercado de *bonds*. Além disso descreve as principais características destes instrumentos de endividamento.

O capítulo 2 disserta sobre a maneira tradicional de apreçar ativos de renda fixa. Essa abordagem se baseia na determinação de valor presente de um título de renda fixa e na análise de sensibilidade aos fatores determinantes deste valor. Contempla ainda, discussão acerca de relações matemáticas que permitem quantificar esta sensibilidade (duration e convexidade). Finalmente é mostrado, de modo simplificado, como se constrói um portfólio que permite imunizar uma dívida ou uma necessidade de investimento para uma data no futuro.

O capítulo 3 questiona as simplificações inerentes à abordagem tradicional, em especial a utilização de uma curva de juros constante. Neste questionamento são apresentadas as diversas formas de comportamento dessa curva (ou estrutura temporal da taxa de juros) e as várias teorias econômicas que pretendem explicar estas formas geométricas. Dentro de uma estrutura de juros mais realista do que a admitida na análise tradicional, é apresentado um novo conceito de duration e mostrado como se dá a imunização nesse novo ambiente.

O capítulo 4 traz modelos que têm por objetivo explicitar a estrutura de juros como uma função matemática. Aqui são discutidos modelos dinâmicos que explicam a estrutura temporal das taxas de juros, tanto em tempo contínuo como discreto. Ver-se-á que os modelos de tempo contínuo, apesar do apelo teórico, são de difícil implementação e trazem simplificações embutidas difíceis de serem observadas na prática. Em contrapartida os modelos de tempo discreto, baseados em árvores binomiais, tem forte apelo prático e são, de fato, utilizados pelo mercado financeiro para avaliar títulos de renda fixa. Para não fugir à regra observada em todo este trabalho, o capítulo se encerra com uma aplicação de um modelo binomial a uma situação hipotética de comportamento da taxa de juros.

O capítulo 5 conclui esta dissertação, apresentando de modo comparativo a evolução dos modelos de precificação de *bonds*. Adicionalmente se discute sobre a limitação do uso de alguns dos modelos contemplados neste trabalho à atual realidade brasileira. Por fim, aponta a possibilidade de aplicação prática futura dos constructos teóricos aqui apresentados tendo em vista o processo conduzido pelo Banco Central do Brasil visando alongar o perfil da dívida interna do Governo Brasileiro.

CAPÍTULO 1

A TERMINOLOGIA UTILIZADA NO MERCADO DE *BONDS*

Este capítulo traz a descrição dos termos mais utilizados no mercado de *bonds*, iniciando-se com o próprio conceito de *bond*. Em seguida são apresentados os principais interessados em emitir estes títulos como forma de captação de recursos e discutidos os motivos que os levam a utilizar este tipo de endividamento. Comentam-se ainda os vários conceitos de rentabilidade aplicáveis aos *bonds*, algumas importantes características especiais encontradas nos contratos de especificação desses títulos e, ainda, os riscos incorridos ao se investir neste tipo de ativo financeiro.

1.1 Definição de *bond*

Um *bond* é um instrumento de dívida que requer que o emissor do título (devedor) repague ao comprador (investidor) o montante emprestado, acrescido dos juros devidos pelo período do empréstimo. Os pagamentos de juros são efetuados, na maioria das vezes, de modo periódico, com o resgate do principal no fim da vida do título.

As especificações mínimas que devem constar em um contrato de emissão de um *bond* compreendem a data em que o principal deve ser pago (maturidade do *bond*) e uma taxa de juros de remuneração do capital emprestado.

Se se admite que o devedor não se tornará inadimplente nem resgatará o *bond* antes da maturidade, é assegurado ao credor um padrão de fluxo de caixa conhecido – do que decorre a classificação desses ativos financeiros como títulos de renda fixa

1.2 Principais lançadores de *bonds*

No Brasil os principais emitentes de *bonds* são o governo federal e algumas entidades públicas federais como o Banco Central e o BNDES, os governos estaduais e municipais e as empresas privadas.

Cada um desses demandadores de recursos tem motivação diferente para emissão de títulos de dívida. Assim, o governo central e os demais governos (estaduais e municipais) emitem *bonds* para financiar seus déficits, o Banco Central utiliza-os como instrumentos de gestão da política monetária, o BNDES visa captar recursos de longo prazo compatíveis com suas operações ativas. As empresas, por seu turno, buscam recursos de longo prazo no mercado de capitais[1] para financiar novos investimentos, financiar projetos específicos ou, ainda, obter recursos para capital de giro.

[1] No Brasil, as empresas podem financiar-se com recursos de terceiros em dois mercados: o financeiro, via empréstimos bancários; e o de capitais, através da colocação de títulos junto aos poupadores finais: pessoas físicas e pessoas jurídicas não bancárias.

1.3 A Maturidade

O termo maturidade é propriamente utilizado para se referir à data em que é pago o valor do principal[2] do *bond.* Entretanto, coloquialmente, utiliza-se este termo no sentido de prazo até o vencimento.

Nas economias desenvolvidas, em especial os Estados Unidos, *bonds* com maturidade entre um e cinco anos são considerados de curto prazo; de cinco a doze anos, como de médio prazo e acima de doze anos, como de longo prazo.

No Brasil, em função da ocorrência de um período inflacionário que perdurou por três décadas, somente os títulos de mais curto prazo, de emissão do governo federal, têm alguma liquidez. E, mesmo para estes títulos, o mercado secundário ainda é muito restrito. É verdade que existem títulos de longo prazo, mas estes são pouco líquidos e, ao contrário do que ocorre nos países desenvolvidos em que quase todos os títulos são de fato de renda fixa (fluxos de caixa definidos no momento da emissão), no Brasil as dívidas de longo prazo, emitidas na moeda local, se caracterizam por serem indexados a algum índice ou inflacionário ou de juros, o que lhes confere uma característica de taxas flutuantes[3].

---

[2] O conceito de valor do principal está apresentado na seção 1.4

[3] O Banco Central do Brasil, em sua Nota para a Imprensa – Política Fiscal, de 21/fevereiro/2000, informa que a dívida mobiliária federal fora do Banco Central totalizou R$432 bilhões em janeiro/2000, distribuída entre as principais classes de títulos em: prefixados (9,9%), indexados ao câmbio (23,5%) e indexados ao *over* (61,2%). Os títulos emitidos pelo Tesouro Nacional em janeiro tiveram duração média estimada em 2,3 meses.

A importância do prazo de vencimento de um título de renda fixa como um *bond*, cujos fluxos são definidos *a priori*, decorre de três razões: a primeira reside no fato de que este prazo define o tempo pelo qual o investidor estará recebendo os juros prometidos; a segunda é que a rentabilidade obtida ao se investir nesse título decorre deste prazo e, finalmente, o preço de um *bond* flutuará durante o prazo de maturidade em função das taxas praticadas no mercado para este tipo de ativo financeiro.

1.4 O valor do principal e a taxa de cupom

O valor do principal de um *bond* é o seu valor de face, o qual será pago na maturidade. A taxa de cupom é a taxa de juros que o emitente concorda em pagar em cada período, expressa em termos anuais, e incidente sobre a expressão monetária do valor do principal do titulo. Portanto, ao se multiplicar a taxa de cupom pelo valor de face se obtém o montante de juros a ser pago no período de vigência desta taxa.

Nem todos os bonds pagam juros periodicamente através de cupons. Há uma classe de *bonds* que se caracteriza por não efetuar qualquer pagamento antes do vencimento, são os títulos de desconto puro, externamente conhecidos como *zero-coupon bonds.* Nos países mais desenvolvidos os *zeros* de longo prazo são disponíveis para os investidores a partir de um processo de divisão dos fluxos de caixa prometidos. Assim, um título de 10 anos, com pagamento semestral de cupom, é dividido em 21 *zeros*, sendo 20 correspondentes aos cupons de juros e o último ao valor do principal[4].

No Brasil os títulos de desconto se caracterizam por serem ativos financeiros de prazo muito curto, primordialmente utilizados pelo Banco Central na gestão da política monetária.

Nos Estados Unidos é usual o pagamento de juros semestrais, que correspondem à metade do valor calculado ao se aplicar a taxa de cupom. Os títulos brasileiros lançados no mercado americano apresentam essa mesma característica[5]. No Brasil os títulos de longo prazo do governo federal, bem como as debêntures de empresas privadas, na maioria das vezes, seguem também esta prática.

Os títulos que são emitidos com taxas flutuantes recebem a denominação de *floating-rate bonds* nos Estados Unidos da América e se caracterizam por prometerem uma taxa fixa, que prevalece por um determinado período e que será ajustada, em cada período subseqüente de pagamento de juros, às condições correntes de mercado. Empresas e bancos brasileiros também fazem

---

[4] Estes títulos criados a partir de uma divisão de um outro que paga juros periódicos são conhecidos por STRIPS (Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities). É evidente que, decorrente deste processo, são criados dois *zeros* vencendo na maturidade do *bond*, o último pagamento de cupom e o valor do principal.

[5] Como exemplo, o periódico O Estado de São Paulo, em edição de 26/fevereiro/2000, noticia a colocação externa, em 24/fevereiro/2000, de títulos de emissão: da República Federativa do Brasil, com maturidade em 30 anos, taxa de cupom de 12,25%a.a., vendidos por 93,299% do valor de face e taxa de retorno de 13,15%a.a.; e do Banco Itaú S.A., com vencimento em 2 anos, taxa de cupom de 8,625%a.a. e taxa de retorno de 8,95%a.a.

captação externa nessas condições. No Brasil algumas séries de debêntures de emissão de empresas privadas contêm cláusula de repactuação de juros ou apresentam remuneração indexada a alguma taxa de juros básica praticada no mercado, usualmente o CDI[6].

1.5 Algumas características especiais que podem ser adicionadas aos *bonds*

A inclusão de cláusulas além da determinação de juros, maturidade e periodicidade de pagamento de juros, normalmente conduz a situações em que características presentes em opções sobre ativos financeiros também sejam encontradas em *bonds*. Tais cláusulas podem visar proteger, tanto o credor quanto o devedor, contra movimentos extremamente adversos nos níveis de juros praticados pelo mercado, ou, ainda, tornar mais fácil a venda de títulos de emissão de empresas que passam por situações de restrição ao crédito. Estas características de opções em *bonds* são conhecidas como *embbeded options* (opções embutidas).

Uma empresa que está querendo captar recursos no mercado de capitais pode inserir opções nos contratos dos títulos que emite, quando se encontra em uma situação extremamente desvantajosa para captação de recursos em função de seu elevado risco de não pagamento, e sua gestão estima que isto se reverterá

[6] O CDI, Certificado de Depósito Interbancário, é uma forma de captação de recursos remunerada, utilizada pelas instituições financeiras, em que o investidor é uma outra instituição financeira.

no futuro, ou ainda quando estima que os níveis de juros apresentam uma forte tendência de queda. A existência destas opções pode alterar de modo significativo o padrão de pagamento de um título de renda fixa.

As mais corriqueiras destas opções são as de convertibilidade de dívida em ações e previsão de resgate antecipado.

A existência de cláusula de convertibilidade de títulos em ações embute a possibilidade de um retorno para o investidor maior do que ele obteria apenas com renda fixa. Por outro lado, a empresa devedora deve ser beneficiada com uma taxa de juros menor do que pagaria em um título tradicional. Uma conseqüência adicional é a possibilidade de mudança na estrutura de capital da empresa devedora. Por exemplo, se o valor de mercado de suas ações aumenta muito, pode ser interessante para os credores converter seus créditos em participação acionária. O antigo título de renda fixa se transforma em renda variável, agora sujeito a um novo padrão de risco[7] e de retorno. Para a devedora isto corresponde a uma integralização de capital com emissão de novas ações, o que pode modificar significativamente sua estrutura de capital, dependendo dos montantes envolvidos.

Uma cláusula que permite o resgate antecipado por decisão do devedor representa um efeito contrário ao observado quando pode haver convertibilidade de dívida em ações, no que diz respeito a retorno sobre o

[7] Nesta dissertação, risco corresponde à incerteza acerca dos montantes dos fluxos de caixa futuros.

investimento, pois o investidor ficará privado do recebimento dos fluxos de caixa futuros.

Considerando que a decisão de resgatar a dívida antecipadamente tem o intuito de reduzir o custo de financiamento, esta decisão expõe os credores a um problema de reinvestimento, uma vez que disporão de recursos monetários que somente serão empregados a juros mais baixos do que aqueles auferidos na operação ora quitada. Isto corresponde a uma redução na maturidade do título. De modo semelhante ao que ocorre quando há conversão de dívida em ações, o resgate antecipado também altera a estrutura de capital da empresa se ela quita a dívida com recursos gerados internamente ou integralizados pelos sócios.

Uma outra condição contratual que pode alterar os fluxos prometidos por um *bond* é a existência de *sinking funds*. *Sinking funds* decorrem de especificações encontradas em alguns títulos de dívida que prevêem resgate antecipado de uma fração da dívida a cada período de pagamento de juros. Neste caso a empresa devedora não tem a opção de resgate antecipado, mas a obrigação de fazê-lo. Tal resgate sempre se dará pelo valor de face do título (após o pagamento dos juros do período). Este evento tanto pode beneficiar a empresa devedora como seus credores, dependendo dos níveis de juros de mercado para este tipo de endividamento e de como o mercado avalia a capacidade de pagamento do devedor.

Embora não sejam objeto de discussão nesta dissertação, os empréstimos bancários também são instrumentos de dívida que asseguram ao devedor o direito de resgate antecipado. O cliente do banco tem o direito de resgatar sua dívida em qualquer tempo antes do vencimento. Esta opção pode ser demasiado importante para alguns tipos de empréstimos, como crédito imobiliário e crédito direto ao consumidor de prazo mais longo.

1.6 Riscos associados aos investimentos em *bonds*

Os riscos envolvidos ao se investir em *bonds* decorrem das cláusulas contratuais, da situação econômico-financeira do devedor e de fatores que afetam a economia como um todo. Estes riscos podem ser genericamente classificados como de crédito e de mercado.

O risco de crédito (ou de *default*, ou ainda de não pagamento) está associado à possibilidade de o devedor não honrar, no prazo e nos montantes prometidos, qualquer um dos fluxos especificados no lançamento do ativo financeiro. É aceito que os títulos de emissão de um governo central, na moeda do país, são os de mais alta qualidade de crédito, sendo, essencialmente, considerados livres do risco de *default*[8].

[8] Ressalte-se que os títulos de emissão de países de economia emergente, denominados em moedas conversíveis, são passíveis de risco de não pagamento - o risco soberano.

Por outro lado, pode ser atribuído um risco de crédito às dívidas de responsabilidade de qualquer outra entidade pública ou privada, mensurando-se este risco por uma probabilidade desta entidade não efetuar os pagamentos prometidos, nas datas devidas.

O risco de mercado diz respeito à possibilidade de perda de valor de um investimento, fruto da ocorrência de eventos sistêmicos, isto é, que afetam o sistema financeiro como um todo. Dentre esses fatores pode-se destacar: risco de taxa de juros e de reinvestimento, risco cambial, de liquidez e de volatilidade, caracterizados a seguir.

O risco de taxa de juros decorre da possibilidade de modificação no valor dos títulos caso ocorram alterações nos níveis de juros. O valor atual de um ativo financeiro com pagamentos certos (e isento do risco de crédito) é tão somente o valor dos fluxos prometidos trazidos a valor atual a uma taxa de juros de mercado. Assim um aumento nas taxas de juros reduzirá o preço desse ativo, incorrendo seu detentor em uma perda de capital. É evidente que se o *bond* paga juros pós-fixados, continuamente ajustados às taxas de mercado, seu detentor está imune ao risco de taxa de juros, em contrapartida não se beneficiará de reduções no custo do dinheiro, caso ocorram.

O risco de reinvestimento decorre de situações em que o investidor está posicionado de tal modo que suas exigibilidades futuras ocorrerão em datas posteriores ao recebimento dos fluxos de caixa de seus investimentos de renda fixa. Neste caso uma redução nos níveis de juros implica que estes fluxos deverão ser reinvestidos a taxas mais baixas, reduzindo o montante futuro obtido na liquidação desses ativos.

Um investidor incorre em risco cambial quando investe em um *bond* denominado em uma moeda diferente daquela que mais utiliza em suas transações habituais. Assim, um alemão que investe em títulos denominados em dólar poderá sentir-se empobrecido frente a seus concidadãos no caso em que o marco se valorize frente à moeda dos Estados Unidos da América.

O risco de liquidez está presente quando os recursos são aplicados em ativos que não podem ser transformados em moeda no momento em que o investidor deseja, sem que tenha que vendê-los com prejuízo, ou obtendo rendimento inferior ao prometido. A maioria dos títulos de emissão de empresas privadas não são negociados facilmente no mercado secundário, o que expõe seus detentores ao risco de liquidez[9]. Para os investidores que adquirem títulos com a intenção de mantê-los até a maturidade, liquidez pode ser considerada irrelevante.

O risco de volatilidade[10] observado em títulos de renda fixa advém primordialmente das oscilações nas taxas de juros no mercado. Se se alteram

[9] Esta constatação da baixa liquidez de títulos empresariais ocorre generalizadamente tanto em países emergentes quanto em economias desenvolvidas. A ausência de liquidez é refletida no mercado pela existência de grandes diferenças entre os preços pedidos e ofertados em negociações destes ativos.

[10] Em finanças, volatilidade significa o tamanho da variação observada no valor de uma variável (por exemplo, juros ou preço) que se está medindo, com relação a seu valor esperado. A medida de volatilidade mais utilizada é o desvio padrão, quando se admite que a distribuição de probabilidade do valor da variável media se comporta como uma distribuição normal.

os juros, mudam os preços. A presença de opções pode também contribuir para o aumento da volatilidade. Se o contrato de emissão de um *bond* prevê a possibilidade de conversão de dívida em ações, a volatilidade do mercado acionário pode também conduzir a uma maior volatilidade no preço do título[11].

Este capítulo apresentou a terminologia utilizada no mercado de *bonds*. Dissertou-se ainda acerca dos principais riscos incorridos ao se investir nestes instrumentos financeiros.

O próximo capítulo compreende a análise tradicional de *bonds*. Serão discutidos os fatores que determinam o valor dos títulos de renda fixa quando se utiliza esta metodologia e, ainda, apresentadas análises de sensibilidade dos preços a estes fatores.

[11] Merton (1974), utiliza o argumento de perfeita correlação entre o valor de mercado dos ativos da empresa e o valor dos débitos. Na análise dele os acionistas possuem a opção de ficarem com a empresa pelo valor da dívida. Assim, os preços dos títulos de renda fixa são também expostos à volatilidade do mercado acionário.

CAPÍTULO 2

A ANÁLISE TRADICIONAL DE *BONDS*

A abordagem tradicional usada na precificação de *bonds* compreende a determinação do valor do fluxo de caixa descontado, análises de sensibilidade quanto ao prazo de vencimento, taxas de cupom e a taxa de juros de requerida pelo mercado (também denominada de taxa de juros de desconto), e ainda, medidas utilizadas para quantificar alterações nos preços dos títulos quando varia esta taxa de desconto.

A principal característica da análise tradicional é que, aqui se admite que a taxa de juros de desconto é a mesma para todos os títulos de renda fixa livres do risco de crédito, independentemente de sua maturidade. Em linguagem acadêmica isto significa dizer que a estrutura temporal da taxa de juros (ou curva de juros) é *flat* ou constante[12]. Assim, durante toda a vida dos títulos os fluxos intermediários existentes poderão ser facilmente reinvestidos à mesma taxa de desconto, ou, o que é equivalente, podem ser reinvestidos no mesmo ativo financeiro.

As próximas seções aprofundarão o estudo desta metodologia de análise no que ela tem de essencial. O capítulo será encerrado com a apresentação de um

[12] O capítulo 3 desta dissertação traz uma discussão acerca das várias formas que a curva de juros pode assumir.

exemplo de imunização ao risco de taxa de juros dentro da abordagem tradicional.

2.1 O valor de um título de renda fixa

Na abordagem tradicional o valor de um título de renda fixa é definido como o somatório do valor presente dos fluxos de caixa prometidos, descontados a uma taxa justa de mercado, a qual independe da data de ocorrência do pagamento.

A taxa de desconto depende apenas do risco de não pagamento associado ao título. Assim, os títulos de emissão do governo central, que são essencialmente livres de risco de crédito, são descontados a menor taxa de juros existente no mercado – a taxa livre de risco de *default*. Dívidas de qualquer outro tipo de emissor, com prazos semelhantes, devem ser descontadas a uma taxa maior que esta livre de risco.

A formulação matemática utilizada quando se calcula o valor do fluxo de caixa descontado de um título de renda fixa é encontrada com mais detalhes em livros que tratam da análise de investimentos.[13]

[13] Ver, por exemplo, Francis (1991).

O preço atual (ou valor presente) de um título de renda fixa é uma função dos montantes dos fluxos de caixa futuros, das datas em que ocorrem e da taxa de juros de desconto, sendo dado por:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}, \text{ onde}$$

- P é preço atual do título;
- F_t é o fluxo de caixa prometido para pagamento no momento t;
- r é a taxa de desconto, aplicável a todos os títulos com a mesma característica de risco de crédito, independente da maturidade, e
- n é o número de períodos de capitalização da taxa r, compreendido entre o momento da avaliação e o instante em que o fluxo de caixa é devido.

Para se obter o valor atual de um *bond* típico – que não tem opção embutida, que paga juros semestrais e o principal na maturidade, modifica-se ligeiramente a fórmula anterior para:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+\frac{1}{2}r)^t} + \frac{VF}{(1+\frac{1}{2}r)^T}, \text{ onde}$$

- P é preço atual do título;
- C_t é o valor do cupom a ser pago no momento t;

- r é a taxa anual de desconto aplicada a títulos da espécie[14];
- VF é o valor de face (ou principal) do *bond*, e
- T representa o número de períodos a decorrer até a maturidade, medido em semestres.

Os títulos de desconto puros são avaliados por uma fórmula extremamente mais simples, uma vez que não efetuam pagamentos intermediários, sendo seu valor presente dado pela equação:

$$P = \frac{VF}{(1+r)^T},$$

- r é a taxa de desconto e T é o tempo a decorrer até a maturidade (medido em períodos de capitalização dos juros) e VF é o valor de face do título.

2.2 A relação preço x taxa de desconto

As fórmulas apresentadas na seção anterior mostram que o preço de um título de renda fixa depende, dentre outros fatores, da taxa de juros utilizada para descontar os fluxos futuros. Agora se analisará isoladamente a influência dos juros na formação do valor do título.

[14] Quando se está avaliando *bonds* usualmente se expressa a taxa de juros por período de um ano, e se obtém o valor do cupom semestral como a metade do produto desta taxa pelo valor de face do título. Evidentemente, pela metodologia de juros compostos, a taxa efetiva de juros é superior a r.

Por simplificação será utilizado um título de desconto puro nesta análise. Entretanto a curva preço-juros que se pretende obter ao final desta seção será desenvolvida para um caso mais geral de um *bond* que paga cupons periódicos.

Como na economia real não se observa a existência de taxas nominais negativas, a função preço é definida para qualquer valor de $r > 0$. Usando-se o conceito de limite pode-se provar que esta função é contínua em todo o seu domínio.

Quando se quer estudar o comportamento de uma função em relação a uma variável que a determina a primeira alternativa é utilizar diferenciação, se aplicável. Sendo o valor presente do *bond* (P), uma função da taxa de juros de desconto (r), diferenciado-se P com relação a r se obtém:

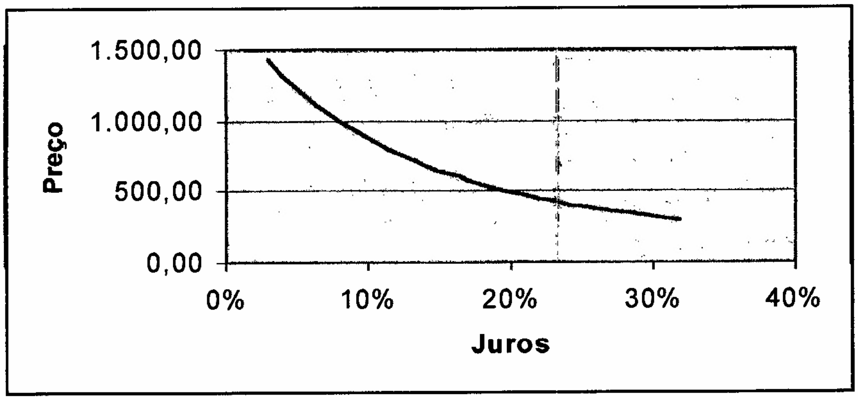
$$\frac{dP}{dr} = -T\frac{VF}{(1+r)^{T+1}} < 0$$

Observa-se que a função preço é decrescente, em todo o seu domínio, com relação a r. Isto significa que preço e juros têm um comportamento inverso: se os juros aumentam, o valor presente do título se reduz; se os juros de mercado se reduzem, o título se valoriza. A tabela-1 e a figura-1 apresentam uma simulação do comportamento do preço de um *bond* que paga juros periódicos quando se altera apenas a taxa de juros de desconto.

Tabela-1 - Relação Preço-Juros
Bond de 10 anos, cupom anual de 8%

Juros	Preço		Juros	Preço
3%	1.426,51		18%	550,59
4%	1.324,44		19%	522,72
5%	1.231,65		20%	496,90
6%	1.147,20		21%	472,97
7%	1.070,24		22%	450,75
8%	1.000,00		23%	430,11
9%	935,82		24%	410,90
10%	877,11		25%	393,01
11%	823,32		26%	376,33
12%	773,99		27%	360,77
13%	728,69		28%	346,22
14%	687,03		29%	332,61
15%	648,69		30%	319,86
16%	613,34		31%	307,91
17%	580,73		32%	296,70

Figura-1 – Curva Preço-Juros, para um *bond* que paga cupom.



Como a função preço é decrescente com os níveis de juros, os preços decaem quando os juros aumentam. É interessante destacar a forma convexa desta curva, pois esta característica de comportamento conduz a implicações importantes quando se estuda o preço de um *bond*. A importância da convexidade da curva preço-juros será objeto de análise na seção 2.4.2 desta dissertação.

2.2.1 Análise de retorno

Existem várias definições de retorno sobre um *bond*: a taxa prometida (ou de cupom), a taxa interna de retorno e, em caso da existência de cláusula prevendo resgate antecipado, a taxa até o pré-pagamento.

A taxa prometida é aquela que corresponde à taxa de cupom, isto é, aos juros intermediários prometidos quando um título é negociado ao par[15] por ocasião de sua emissão. Por exemplo, se um título de valor de face de R$1.000,00 e prazo de maturidade de 5 anos paga juros anuais de R$120,00, a taxa prometida é 12%a.a.

A taxa interna de retorno é aquela obtida ao se resolver a equação que relaciona preço com os fluxos de caixa e com a taxa de juros. Isto é, a taxa interna é aquela que, quando usada para descontar a valor atual os fluxos de caixa futuros, torna o valor presente destes fluxos igual ao preço pelo qual o

[15] Quando um título é vendido por preço acima de seu valor de face diz-se que a venda é com ágio, se abaixo, com deságio e, se é vendido exatamente pelo valor do principal se diz que está sendo negociado ao par.

título está sendo negociado no mercado. No caso específico de um *zero-coupon bond* a taxa interna de retorno (r) é facilmente calculada por:

$$r = \left(\frac{VF}{P}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

A taxa calculada até o pré-pagamento decorre da existência de cláusulas contratuais que impliquem em possibilidade de resgate antecipado, quer por decisão do devedor quanto do investidor[16]. Esta taxa é calculada para a data em que o título pode ser resgatado. Títulos com essas características normalmente definem um valor adicional (bonificação) a ser pago pelo devedor quando este exerce sua opção de pagamento antecipado, ou uma penalidade a ser cobrada do detentor do título, quando este requer resgate antecipado. Neste caso o valor presente do título é dado por

$$P = \sum_{i=1}^{n^*} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{V^*}{(1+r)^{n^*}}, \text{ onde}$$

- V^* é o valor do principal a ser pago antecipadamente com bonificação ou penalidade, o que se aplicar, e

[16] Existe uma outra caracterização para a taxa de retorno no caso de resgate antecipado, quando o título é passível de resgate, por uma opção do devedor, em várias datas diferentes. Considere o caso de um título com maturidade em 10 anos em que o devedor tem uma opção de resgatá-lo antecipadamente nas datas de pagamentos de juros após 5 anos, sendo que para cada data possível de resgate é definido um ágio sobre o principal. Neste caso se calcula a taxa para a situação mais desvantajosa ao credor (yield-to-worst), admitindo-se que o devedor objetiva minimizar seu custo de financiamento. A solução para este problema inclui a avaliação desta opção de resgate, que será abordado no capítulo 4 quando forem discutidos modelos binomiais utilizados pelo mercado financeiro dos Estados Unidos da América.

- n^* é o número de períodos de pagamento de juros até a data definida para resgate antecipado.

Destaca-se que ao se obter a taxa de retorno em um título utilizando as fórmulas aqui apresentadas, admite-se que os fluxos de caixa intermediários podem ser reinvestidos à essa mesma taxa. Se tal não ocorre, o cálculo do retorno obtido ao se investir em um *bond* deve considerar as possíveis taxas de reinvestimento que prevalecerão pela vida do título.

Observe-se ainda que, ao se considerar um investidor que efetua transações intermediárias, isto é, adquire títulos emitidos em datas posteriores ao lançamento e os revende antes da maturidade, a determinação do retorno por ele obtido deve incluir possíveis ganhos/perdas de capital. Esses ganhos/perdas de capital advêm de alterações no preço à vista, decorrentes de mudanças nas taxas de juros correntes de mercado.

Suponha, por exemplo, que um investidor adquira um *bond* , ao par, por R$1.000,00, no instante subseqüente ao pagamento de juros intermediários, que tal título seja resgatável em cinco anos e paga cupons anuais a uma taxa de 12%a.a. Considere, ainda, que o investidor venda desse ativo imediatamente após receber o próximo fluxo de juros e que a taxa corrente de juros para esse título seja agora de 14%. No mercado tal ativo financeiro será negociado por R$941,73. Nesse caso embora a taxa prometida seja de 12%a.a., e os juros estejam a 14%, o investidor obteve um rendimento de apenas 6,17% pelo período de um ano em que manteve o título em seu portfólio.

2.3 A relação preço x prazo de maturidade

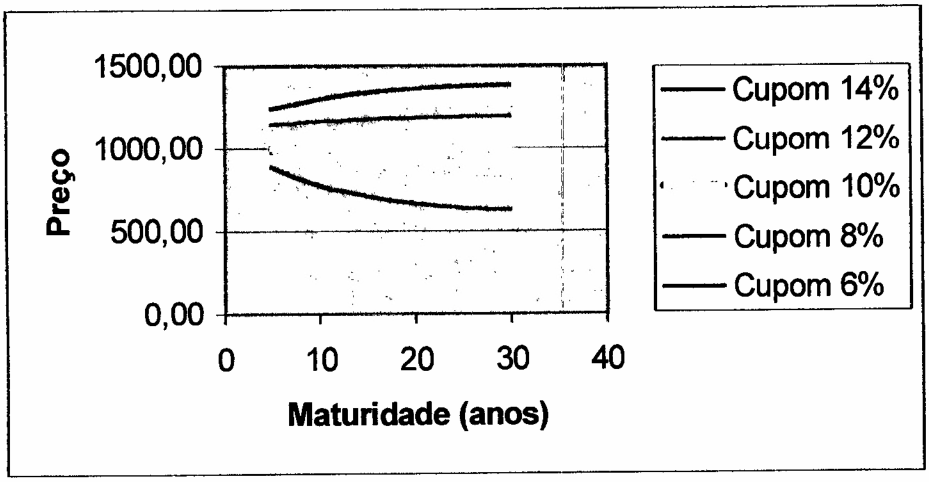
A análise da relação preço com prazo de maturidade indica a sensibilidade do preço a mudanças no prazo, mantendo-se constante as demais características do título.

Para títulos de desconto puro, maior o prazo menor o preço. Trata-se de uma conclusão óbvia pois para um mesmo valor prometido no futuro as pessoas preferirão receber antes a depois, uma vez que os juros são positivos. Quando os títulos pagam cupons o resultado não é tão imediato. Neste caso, se a taxa de cupom for maior que a taxa de juros de desconto para esse tipo de título, maior o prazo maior será o preço e o título é negociado acima de seu valor de face. Em contrapartida, se a taxa de cupom é inferior à de mercado, o título será vendido abaixo do valor de face. Se, eventualmente, a taxa de desconto for igual ao cupom pago periodicamente o título é negociado pelo valor do principal. A tabela-2 e a figura-2 mostram esta relação de preço X maturidade para diversas taxas de cupom e diferentes maturidades, admitindo-se constante a taxa de juros de desconto.

Tabela -2 - Relação Preço-Maturidade
Bonds de diversas maturidades e taxas de cupom, avaliados à taxa de juros de mercado de 10% a.a.

	Cupom				
Maturidade	14%	12%	10%	8%	6%
5 anos	1.238,56	1.150,33	1.000,00	973,86	885,62
10	1.299,76	1.169,16	1.000,00	907,95	777,35
15	1.337,76	1.180,85	1.000,00	867,03	710,12
20	1.361,35	1.188,11	1.000,00	841,62	668,38
25	1.376,00	1.192,62	1.000,00	825,84	642,46
30	1.385,10	1.195,42	1.000,00	816,05	626,36

Figura-2 – Curva Preço-Maturidade



2.4 Medidas de sensibilidade

Até agora se apresentou apenas uma análise estática da relação existente entre o preço de um título e os fatores que determinam este preço. Pelas próprias características de um *bond*, a maturidade e a taxa de cupom são grandezas fixas, determinadas pelas cláusulas contratuais que o especificam. A taxa interna de retorno, entretanto, é uma variável definida pelo mercado.

O objetivo desta seção é aprofundar a discussão acerca da grande influência que oscilações nos juros observados no mercado acarretam nos preços dos *bonds*.

A sensibilidade dos preços será medida por duas grandeza. Uma delas representa uma aproximação de primeira ordem (duration); a outra, por ser de segunda ordem (convexidade), aprimora os resultados obtidos com o uso da primeira aproximação.

2.4.1 Duration

Duration é a relação que mensura as alterações nos preços dos títulos em função de pequenas variações nas taxas de juros.

Os juros de mercado são determinados em processos constantes de negociação. Por isso, prevalece a ocorrência de pequenas alterações nos níveis de juros, em vez de grandes saltos. Disso resulta a popularidade do uso de duration como indicador de sensibilidade do valor dos título de renda fixa às alterações nos juros.

A medida de sensibilidade do valor de um bond às variações nos níveis de juros mais utilizada é conhecida por Macaulay duration[17].

Enquanto medida de sensibilidade, Macaulay duration considera um deslocamento paralelo da curva de juros, isto é, todas as taxas se alteram por um mesmo valor percentual. Portanto, como na análise tradicional a curva é *flat*, a curva resultante após uma perturbação desse tipo também é constante. A seguir se mostra como obter a fórmula da Macaulay duration.

Considere um *bond* comum que efetua n pagamentos anuais de juros (cupom C), e o principal (VF) na maturidade, e cuja taxa de retorno (r) está expressa também em termos anuais. Sendo P o preço do título, pode-se escrever

$$P = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \ldots \frac{C}{(1+r)^n} + \frac{VF}{(1+r)^n}$$

Uma medida aproximada da sensibilidade do preço com relação a pequenas variações nos níveis de juros requeridos é obtida ao se calcular a primeira derivada da função preço (P) com relação ao fator de desconto ($1+r$),

$$\frac{dP}{d(1+r)} = -\frac{C}{(1+r)^2} - \frac{2C}{(1+r)^3} - \frac{3C}{(1+r)^4} - \ldots - \frac{nC}{(1+r)^{n+1}} - \frac{nVF}{(1+r)^{n+1}},$$

[17] Macaulay (1938).

Pondo-se em evidência os termos comuns e dividindo ambos os lados da equação anterior pelo valor do títulos antes da alteração nos juros, P, se obtém

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{d(1+r)} = -\frac{1}{(1+r)}\left[\frac{1}{P}\left(\frac{C}{(1+r)} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \frac{3C}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{nC}{(1+r)^n} + \frac{nVF}{(1+r)^n}\right)\right],$$

A expressão entre colchetes corresponde a Macaulay duration (D). Ou, escrita de uma forma compacta,

$$D = \frac{1}{P}\sum_{t=1}^{n}\frac{t.fc(t)}{(1+r)^t}, \text{ onde}$$

$fc(t)$ representa o fluxo de caixa pago pelo título em t períodos contados a partir da data presente.

Do resultado obtido se constata que Macaulay duration é uma grandeza com a dimensão física de tempo. Isto é, se os fluxos de caixa são devidos anualmente, *D* é expressa em anos.

Os profissionais do mercado financeiro usualmente trabalham com o conceito de duration modificada (MD), porque a partir deste se obtém, de forma mais imediata, a sensibilidade do preço, em termos monetários, com relação a pequenas alterações nos níveis de juros[18]. A duration modificada é expressa pela fórmula

$$MD = \frac{1}{(1+r)} D \text{, de onde se conclui que}$$

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{d(1+r)} = -MD,$$

Macaulay duration é uma medida sempre positiva, quando consideramos um *bond* individualmente. A duration modificada, por construção, também é uma grandeza positiva. Finalmente, se observa que tanto Macaulay duration como a duration modificada se movem em sentido oposto às variações nas taxas de juros.

Muito embora o objetivo primordial de duration seja representar uma medida de sensibilidade dos preços dos *bonds* a pequenas alterações nas taxas de juros, é interessante notar que, para títulos sem opção embutida, também pode-se fazer uma análise acerca da sua dimensão de tempo (esta foi a análise de Macaulay). Neste contexto, Macaulay duration representa uma espécie de vida média de um título, ponderando-se a importância relativa do valor presente de cada fluxo, tomado individualmente, pelo prazo compreendido entre o momento da avaliação e a data de ocorrência do fluxo. Além disso, por considerar os

---

[18] Existe ainda uma outra medida de sensibilidade de primeira ordem, expressa em termos monetários, muito utilizada no mercado financeiro dos Estados Unidos, conhecida por vpb (*value of a basis point*). Um vbp corresponde à variação monetária do preço de um título de valor de face de $1 milhão de dólares dos Estados Unidos decorrente de uma modificação de 0,01% nas taxas de juros.

fluxos intermediários, a Macaulay duration será sempre inferior ao prazo de maturidade, exceção feita aos títulos de desconto puro que, por não pagarem juros intermediários, apresentam Macaulay duration igual à maturidade. E, mesmo para títulos que nunca serão resgatados, como o *consol* inglês, e que portanto não tem prazo de maturidade, é possível calcular-se a Macaulay duration, que neste caso representa uma convergência a um valor extremo quando $t \to \infty$,

$$D_{consol} = \frac{1+r}{r}$$

Duration não é, entretanto, suficiente para explicar alterações nos preços de *bonds* para grandes variações nas taxas de juros. Ela é uma boa aproximação apenas quando as mudanças nos juros são bastante pequenas. O exemplo seguinte esclarece esta afirmação.

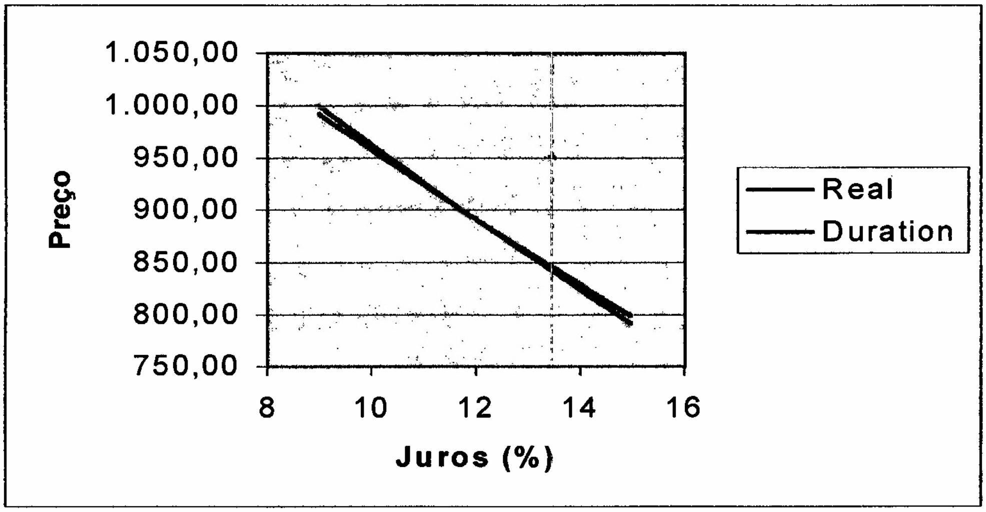
Seja um *bond* que promete pagar cupons anuais a uma taxa de 9% a.a., e resgatar o principal ($1.000,00) ao fim de 5 anos. A taxa de desconto observada no mercado para este título é de 12%a.a. A tabela-3 e a figura-3 mostram o que ocorre quando se avalia este título após uma alteração nas taxas de juros utilizando Macaulay duration como fator de aproximação da variação no valor do título.

Tabela 3 – Determinação do valor de um *bond* usando Macaulay duration como única medida de sensibilidade do preço a alterações nas taxas de juros.

Taxa de Juros	Preço real	Preço aproximado pela Duration*
12,0%	891,86	891,86
12,1%	888,53	888,52
11,9%	895,20	895,19
15,0%	798,87	791,75
9,0%	1.000,00	991,96

*Pela equação da Macaulay Duration, pode-se escrever: $\frac{\Delta P}{P} = -D\frac{\Delta r}{1+r}$

Figura 3 –Comparação entre a curva real de preço de um título e sua aproximação obtida a partir da equação da Macaulay duration.



Real = Preço real; Duration = preço aproximado pela Macaulay duration

Os resultados obtidos evidenciam que para pequenas variações nos juros, o valor do título obtido pela fórmula da Macaulay duration é aproximado do seu valor real. Entretanto, quanto maior for a alteração nos níveis de juros, maior será o erro obtido por tal aproximação. Adicionalmente se observa que esta aproximação conduz a erros maiores quando há redução do que quando há aumento (de mesma magnitude que a redução) na taxa de juros. Além disso, independentemente do movimento das taxas de juros, se para mais ou para menos, se se calcula o valor de um título como sendo o preço antes da mudança nos juros acrescido da variação de preços estimada com o uso de duration, sempre se obterá um valor inferior ao real, calculado diretamente a partir da fórmula para o valor presente. Esta distorção decorre do fato da curva preço-juros ser convexa enquanto que Macaulay duration é uma aproximação linear das variações de preços dos títulos com relação à mudanças nos juros.

2.4.2 Convexidade

Para minorar os problemas de se usar apenas uma aproximação pela primeira derivada para ajustar os preços dos títulos quando os juros se alteram, é definida uma nova medida de sensibilidade, a convexidade, que corresponde à segunda derivada. A seguir se obtém a fórmula para esta medida de sensibilidade.

Seja o preço do *bond* , P, definido como uma função do fator de desconto $(1+r)$, $P = f(1+r)$. Aplicando-se a expansão de Taylor, e se desprezando os termos de ordem maior que 2, se obtém

$$dP = \left(\frac{dP}{d(1+r)} \right) d(1+r) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2P}{d(1+r)^2} \right) [d(1+r)]^2$$

A divisão de ambos os lados da equação acima pelo valor presente do título antes da mudança nos juros resulta em

$$\frac{dP}{P} = \left\{ \frac{1}{P} \left(\frac{dP}{d(1+r)} \right) \right\} d(1+r) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{P} \left(\frac{d^2P}{d(1+r)^2} \right) \right\} [d(1+r)]^2$$

O primeiro termo entre chaves do lado direito da equação acima representa a parte da variação percentual no preço que é explicada pela duration modificada ($= -MD$). O segundo termo entre chaves expressa a distorção decorrente da convexidade da curva do preço como função da taxa de juros de desconto.

O fator de convexidade (C)[19] é dado pela equação

$C = \left(\frac{1}{P} \right) \frac{d^2P}{d(1+r)^2}$, sendo

$$\frac{d^2P}{d(1+r)^2} = \frac{1}{(1+r)} \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1) fc(t)}{(1+r)^{t+1}}$$

[19] Garbade (1998) apresenta um conceito de convexidade C similar ao de dispersão em torno de uma média. Neste caso a média é dada pela Macaulay duration do título.

$$C = \frac{1}{P} \sum_t \frac{(t-D)^2 fc(t)}{(1+r)^t}$$

Uma constatação importante é que os títulos de desconto, por esta fórmula, apresentam convexidade nula.

Quando se estima a variação percentual no valor de um título considerando os fatores de primeira e segunda ordem sempre se encontra um resultado maior do que o obtido apenas com a aproximação pela duration. Isto ocorre porque o fator de convexidade é sempre positivo.

A tabela-4 e a figura-4 trazem uma análise comparativa do valor de um título quando variam os juros: para o caso real (medido pela fórmula do valor preente) e aproximações pela Macaulay duration e por esta acrescida da medida de convexidade.

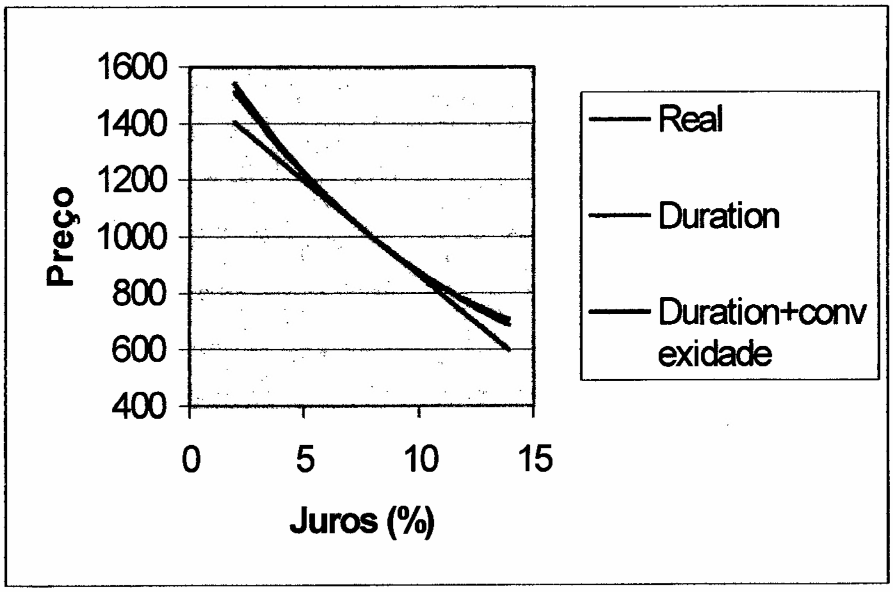
Tabela 4 - Relação Preço-Duration-Convexidade
Para *Bonds* de 10 anos e cupom de 8% a.a.

Juros de mercado	Preço		
	Real	Aproximado* pela Duration	Aproximado ** por Duration+Convexidade
2%	1.539	1.403	1.512
3%	1.427	1.336	1.411
4%	1.324	1.268	1.317
5%	1.232	1.201	1.229
6%	1.147	1.134	1.146
7%	1.070	1.067	1.070
8%	1.000	1.000	1.000
9%	936	933	936
10%	877	866	878
11%	823	799	826
12%	774	732	780
13%	729	664	740
14%	687	597	706

*Pela equação da Macaulay Duration, pode-se escrever: $\frac{\Delta P}{P} = -D\frac{\Delta r}{1+r}$

**Pela equação da Macaulay duration + convexidade: $\frac{\Delta P}{P} = -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C(\Delta r)^2$

Figura-4 – Determinação do valor de um título utilizando Macaulay duration e convexidade



Real = Preço real; Duration = preço aproximado pela Macaulay duration
Dureation+convexidade = preço aproximado adicionando os fatores Macaulay duration e convexidade

Uma observação dos resultados da análise de sensibilidade apresentada pela tabela-4 e pela figura-4, permite concluir que: quando se inclui os fatores Macaulay duration e convexidade os resultados obtidos são muito mais aproximados do valor real do que quando se avalia o título apenas considerando a aproximação pela primeira derivada. Além disso se observa que quando há um grande incremento nos juros, a aproximação incluindo Macaulay duration + convexidade conduz a valores maiores que o valor real do título, enquanto que, a curva do preço real fica acima da aproximação pelos dois fatores quando ocorre acentuada redução das taxas de juros.

2.5 Imunização

No capítulo de conceitos básicos foram apresentados os riscos incorridos ao se investir em títulos de renda fixa. No caso específico em análise nesta dissertação, *bonds* emitidos pelo governo federal, na moeda do país, os investidores estão expostos apenas a riscos decorrentes de variações nos níveis de juros: riscos de taxa de juros e de reinvestimento.

Quando alguém quer imunizar um determinado valor monetário (quer seja destinado a investimento, quer ao pagamento de uma dívida) ao risco de taxa de juros, deve ter em mente uma data futura na qual deseja obter tal valor a partir de investimentos de renda fixa. O prazo compreendido entre o momento presente e a data focada para imunização é denominado de horizonte de investimento.

O horizonte de investimento é específico para cada classe de investidor em títulos de renda fixa. Um diretor financeiro de uma empresa industrial pode querer imunizar seus recursos líquidos para um horizonte em que prevê dispêndios importantes, como por exemplo a liquidação de uma série de *bonds* emitidos no passado, que financiaram a construção de uma nova planta, e que será exigida em 6 meses. Por outro lado, um gestor de um fundo de pensão se depara com passivos atuariais que serão exigidos em datas muito distantes, quando uma dada coorte[20] passará a auferir a maior parte dos benefícios da aposentadoria. Assim, o propósito de cada decisão financeira quanto à imunização é que determina os ativos ideais para cada administrador financeiro.

No caso da indústria, o diretor se sentirá confortável investindo em títulos de desconto de curto prazo, que maturem na data de suas necessidades. Se por acaso ele investir em ativos de prazo mais longo, que estão oferecendo um retorno maior, se exporá ao risco da ocorrência indesejada de uma elevação nas taxas de juros. Nesta eventualidade, por não estar imunizado, o valor recebido pela venda dos títulos no momento desejado será insuficiente para satisfazer suas necessidades.

O gestor do fundo de pensão está em uma situação contrária ao diretor da indústria. Investir em títulos mais longevos dá maior proteção do que nos de curto prazo contra o evento indesejado que, neste caso, é uma redução nas taxas de juros. Se os juros se reduzirem os fluxos prometidos pelos títulos de curto prazo serão reinvestidos a uma taxa remuneratória menor de modo que, no horizonte, não haverá recursos suficientes para honrar as demandas dos segurados[21].

[20] Aqui, uma coorte é um grupo de indivíduos que investe seus recursos em um fundo de pensão.
[21] Assume-se que o fundo de pensão é constituído de modo a assegurar uma renda certa no futuro.

Pode-se demonstrar que um portfólio imuniza um investidor, quanto ao risco de taxas de juros, quando a Macaulay duration do portfólio é igual ao horizonte de investimento[22]. O exemplo abaixo evidenciará este resultado.

Um diretor financeiro quer imunizar um passivo de $1milhão que será exigido em 4 anos. As oportunidades de investimento em renda fixa disponíveis restringem-se a dois títulos sem cupom: um vencendo em 3 anos e o outro em 9 anos. A taxa de juros de mercado para estes títulos é de 8%a.a, composta anualmente.

O valor presente da dívida é de $735.029,85 ($P_D = \$1.000.000(1+.08)^{-4}$). Se o diretor investir este montante integralmente em títulos de 3 anos estará sujeito ao risco de reinvestimento pelo último ano. Se os juros se reduzirem, ele não conseguirá liquidar a operação apenas com recursos oriundos deste investimento. Por outro lado, se aplicar todos os recursos em títulos de 9 anos se expõe ao risco de taxas de juros. Caso os juros aumentem durante o horizonte de investimento, ele também se deparará com a necessidade de recursos adicionais para liquidar a dívida. Portanto sua estratégia de investimento visando imunização deve contemplar inversões financeiras nos dois ativos.

A solução do problema de imunização consiste em resolver um sistema de equações lineares em que:

---

[22] Ver Garbade (1998).

1. O valor presente da dívida é igual ao montante investido nos *bonds*;
2. A Macaulay duration do portfólio de *bonds* deve ser igual ao horizonte (4 anos).

Sejam P_3 e P_9 os preços unitários dos títulos, X_3 e X_9 as quantidades a serem compradas, D_3 e D_9 a Macaulay duration de cada um. Os números grafados em subscrito especificam os títulos pela data de maturação. P_D e D_D, são o valor presente e a Macaulay duration da dívida a imunizar e P e D, são o valor presente e a Macaulay duration do portfólio de *bonds*.

$$P = X_3.P_3 + X_9.P_9 = P_D$$

$$P.D = X_3.P_3.D_3 + X_9.P_9.D_9 = P_D.D_D$$

$$P_3 = \$79{,}383 / \$100{,}00 \, de\, valor\, de\, face\,, \quad P_9 = \$50{,}025 / \$100{,}00 \, de\, valor\, de\, face$$

$$D_3 = 3\, anos; \quad D_9 = 9\, anos; \quad D_D = 4\, anos$$

Resolvendo este sistema de equações se obtém as quantidades

$$X_3 = 7.716\, titulos; \qquad X_9 = 2.449\, titulos$$

A tabela-5, resume os resultados desta imunização e apresenta uma simulação com redução e aumento dos níveis de juros em 2%.

Tabela 5 – exemplo de imunização de um passivo futuro utilizando 2 títulos com diferentes padrões de fluxo de caixa.

		P_i, (valor atual de \$100)			$P_i.X_i$,(investimento em cada título)		
		Juros			Juros		
Título	X_i	8%	10%	6%	8%	10%	6%
3 anos	7716	79,383	75,131	83,962	612.519,23	579.510,80	647.850,79
9 anos	2449	50,025	42,410	59,190	122.511,23	103.862,09	144.956,31
Valor presente do portfólio					735.030,46	683.572,89	792.807,10
Valor presente da dívida					735.029,85	683.013,46	792.093,66
Diferença					0,61	559,43	713,44

P_i – preço do título *i*; x_i – quantidade adquirida do título *i*.

As diferenças observadas entre o valor do portfólio e a dívida imunizada são irrisórias em relação aos montantes envolvidos. Além disso, observa-se que o portfólio que imuniza a obrigação é superavitário, quer os juros aumentem quer diminuam. Tal fato sempre ocorre quando se imuniza um valor futuro com um portfólio de *bonds,* devido à convexidade do portfólio. Se se utilizasse apenas um único título com duration de 4 anos, em vez da carteira de títulos, não haveria qualquer diferença.

O processo de imunização é contínuo. Isto é, sempre que ocorrerem fatos importantes que afetem os preços ou os fluxos da carteira é preciso que esta seja rebalanceada. Por exemplo, ocorrendo uma variação de juros nos montantes aqui demonstrados o portfólio deve ser imediatamente revisto. Para este portfólio, mesmo que os juros não se alterem, o diretor financeiro deverá estar atento para o momento de liquidação da primeira classe de títulos. Ele terá que fazer algumas novas transações uma vez que disporá de caixa, com Macaulay duration zero e um outro título agora com Macaulay duration de 6 anos, quando seu horizonte de investimento estará reduzido a apenas 1 ano.

2.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a abordagem tradicional de avaliação de títulos de renda fixa. Esta análise baseia-se no princípio de juros compostos, isto é, não existem problemas de reinvestimento, significando que todos os fluxos intermediários podem ser reinvestidos à taxa de desconto. Este conceito é equivalente a dizer que a curva de juros é *flat* – os juros são os mesmos independentemente do prazo a decorrer até o pagamento.

Na economia real é improvável a ocorrência de uma curva de juros constante, prevalecendo, na maior parte do tempo, uma representação gráfica em que os juros crescem quando aumenta o prazo até a maturidade dos títulos. O próximo capítulo traz uma descrição das formas representativas da curva de juros identificadas no mercado financeiro dos Estados Unidos da América. Contempla ainda as principais teorias elaboradas para explicar estas formas e uma nova maneira de medir duration e imunizar um valor monetário para uma data futura.

CAPÍTULO 3

A ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JUROS

No capítulo anterior estudaram-se os principais aspectos determinantes do valor de um *bond* usando uma abordagem tradicional. Naquele caso a taxa de juros aplicada no apreçamento era a mesma, independente do momento dos fluxos. Hoje, entretanto, se reconhece que cada fluxo intermediário pode ser tratado individualmente e que seu valor depende do seu momento de ocorrência.

Tome-se como exemplo um banco que adquire, com objetivo de revenda, um título público de 15 anos de prazo até a maturidade e que paga juros semestralmente. A instituição pode transferir este ativo a alguns de seus clientes interessados em investir em renda fixa. Se cada um dos clientes se interessa apenas por uma pequena participação no valor total do título, ou por fluxos com datas específicas, o banco pode, então, vender os fluxos intermediários isoladamente de modo a atender às demandas dos investidores. A questão é, como apreçar corretamente cada um dos cupons, que maturam em datas diferentes, muito embora apresentem todas as outras características do título original? É correto avaliar todos igualmente, descontando-os a valor presente à mesma taxa de juros, quando apresentam maturidade em prazos tão diversos que vão de seis meses a 15 anos?

Para solucionar tal questão é que se buscou estudar mais profundamente a estrutura dos juros na economia. Neste mister foram desenvolvidas várias teorias para explicar o comportamento dos juros em função das diversas maturidades dos títulos de renda fixa.

Luenberger (1998, p.73) afirma que a teoria da estrutura de prazos das taxas de juros é baseada na observação que, em geral, os juros requeridos dependem da extensão do período pelo qual o dinheiro é emprestado. Van Horne (1994, p.91), define a estrutura temporal das taxas de juros como a relação entre juros e maturidade em títulos que diferem somente na extensão do prazo de maturidade, todos os demais fatores mantidos constantes.

Neste trabalho a discussão acerca da estrutura temporal da taxa de juros se inicia pelo estudo das duas taxas de juros mais importantes: a taxa a vista ou *spot* e a taxa a termo ou *forward*. Em seguida, em função da existência de maior volume de estudos acerca da taxa a vista, serão apresentadas as diversas formas geométricas que definem a relação juros a vista e tempo de maturidade de investimentos de renda fixa, e as várias teorias que tentam justificar a ocorrência destas curvas. O capítulo se encerra com uma discussão acerca da implicação da existência de curvas de juros não constantes quando se objetiva imunizar investimentos em *bonds* a variações nos níveis dos juros.

3.1 A taxa de juros a vista

A taxa a vista é a taxa básica que define a estrutura temporal de juros. A taxa a vista, s_t, é a taxa de juros, expressa em termos anuais, cobrada por dinheiro emprestado do momento presente (t=0) até o momento t.

A maneira usual e menos sujeita a controvérsias quando se constrói a curva de juros a vista consiste em se considerar títulos sem cupom de diferentes maturidades[23]. Além disso se dá preferência a títulos públicos de governos centrais por serem considerados livres do risco de *default*[24]. A razão entre o valor de face a ser pago no futuro e o preço de mercado define a taxa de juros a vista a vigir no período compreendido entre o momento presente e a data de maturidade. Utilizando títulos de diversas maturidades se constrói uma curva de juros que corresponderá à curva de taxas a vista.

Uma outra maneira de se determinar a taxa de juros à vista consiste em construir um portfólio de *bonds* de mesma característica de risco de crédito, com mesma maturidade e datas de fluxos de pagamento, mas que difiram

[23] Também se pode construir uma curva de juros a vista utilizando títulos que pagam juros intermediários, usando uma metodologia seqüencial. Por exemplo, toma-se o título que vence no período 1, que nesse instante é de desconto puro, e se obtém a taxa para o primeiro período. A seguir, toma-se o que matura no momento 2, mas que paga juros também em 1. Desconta-se o primeiro fluxo à taxa para um período e o cupom final acrescido do valor do principal são descontados à taxa a vista para 2 períodos, que será aquela que iguala o preço do título no mercado, e assim sucessivamente. Esta técnica é, entretanto, questionável uma vez que os títulos que pagam juros intermediários são sujeitos a diferentes funções de oferta e demanda que também impactam momentaneamente seus preços, desvirtuando a curva obtida a partir deste procedimento.

[24] Muito embora países emergentes não tenham suas dívidas quer externa quer interna consideradas como livres do risco de default, mesmo assim admite-se representarem os créditos de melhor qualidade internamente.

quanto ao montante dos pagamentos de juros intermediários. O exercício seguinte ilustra este procedimento.

Considere como exemplo da aplicação dessa técnica (exemplo extraído de Luenberger, 1998): o título A paga cupom de 10% a.a. e está avaliado no mercado em P_A=\$98,72, enquanto que o título B paga cupom anual de 8%, sendo apreçado a P_B=\$85,89. Os títulos maturarão em 10 anos. Construa um portfólio com investimento de –0,8 unidade no título A e uma unidade do título B. Tal carteira pagará \$20 em 10 anos, para um investimento inicial P, P=-0,8*P_A + 1,0*P_B = \$6,914. Todos os fluxos intermediários do portfólio P são nulos e, portanto, a taxa a vista para 10 anos, s_{10}, será de 11,2%a.a[25].

3.2 A taxa de juros a termo

Fabozzi (1996) define a taxa a termo como uma taxa de juros futura calculada implicitamente quer a partir da curva de retornos (*yield curve*)[26] quer da curva de taxas de juros a vista (*spot rate curve*).

Luenberger (1998), diz que as taxas a termo são aquelas incidentes sobre recursos a serem emprestados entre duas datas no futuro mas sob condições

[25] Esta técnica apresenta o mesmo problema da descrita na nota de rodapé n.23. Se os títulos tem características de liquidez diferentes eles podem ser negociados a taxas diferentes. Note ainda que o portfólio é construído com uma posição a descoberto em um dos títulos. Se na linguagem do mercado americano este se torna negociado *on special* no mercado de *repurchase agreement*, as taxas de financiamento serão completamente diferentes das usuais invalidando a aplicação deste procedimento.
[26] Yield curve é uma curva de juros obtida quando se desenha um gráfico com a taxa de cupom em um eixo e a maturidade no outro eixo coordenado, utilizando títulos negociados ao par.

definidas no presente. Uma representação usual para a taxa a termo entre as datas t_1 e t_2, com $t_1 < t_2$, é denotada por f_{t_1,t_2}. Esta é a taxa cobrada por empréstimos em t_1 que serão repagos inclusive com juros em t_2, mas contratados em uma data anterior ou igual a t_1.

A determinação da taxa de juros a termo, a partir da curva de taxas a vista, é obtida com uso do argumento de não existência de arbitragem[27]. Considere um investidor com horizonte de investimento de dois anos que tem duas possibilidade de investimento: a) aplicar os recursos em um título de desconto puro resgatável em dois anos (remunerado à taxa a vista atual que prevalece para investimentos por dois anos, s_2), ou b) investir por um ano em um título que matura ao fim do primeiro ano (à taxa a vista que vigora no primeiro ano, s_1) e, reaplicar os juros e principal recebidos na liquidação deste ativo em um novo, também de um ano, e que será integralmente resgatado ao fim do segundo ano, auferindo os juros que deverão estar vigindo no mercado daqui a um ano (taxa futura, contratada hoje, que remunerará o investimento pelo segundo ano, f_{12}). Admite-se que os mercados são completos – é possível negociar quaisquer quantidades sem interferir nos preços - e perfeitos – não existem custos de transação, impostos e as taxas de captação e aplicação são idênticas.

[27] Diz-se que há uma oportunidade de arbitragem quando existe uma probabilidade maior que zero de um investidor obter um fluxo de caixa positivo no futuro a partir de um investimento inicial nulo, ou que aufira um fluxo de caixa positivo inicial pelo qual nada precise pagar no futuro.

Para que não ocorra oportunidade de arbitragem, o montante de recursos obtido ao fim de dois anos de investimento deve ser o mesmo para as duas opções disponíveis. Tem-se, portanto:

$(1+s_2)^2 = (1+s_1)(1+f_{12})$, e,

$$f_{12} = \frac{(1+s_2)^2}{(1+s_1)} - 1$$

Se $(1+s_1)(1+f_{12}) > (1+s_2)^2$, implica que há uma possibilidade de ganho ao se preferir a segunda oportunidade de investimento. Uma pessoa obteria um fluxo de caixa positivo, certo, sem investimento inicial, tomando recursos emprestados por dois anos – incorrendo em um custo total de $(1+s_2)^2 - 1$, e, emprestando por dois anos: no primeiro a s_1, e no segundo, já acertado a partir de agora, a f_{12}. Na liquidação destas operações tal pessoa auferiria um lucro certo igual a $(1+s_1)(1+f_{12}) - (1+s_2)^2 > 0$, para cada unidade monetária transacionada.

Caso $(1+s_2)^2 > (1+s_1)(1+f_{12})$ se obteria o mesmo ganho efetuando as operações de modo contrário ao especificado anteriormente.

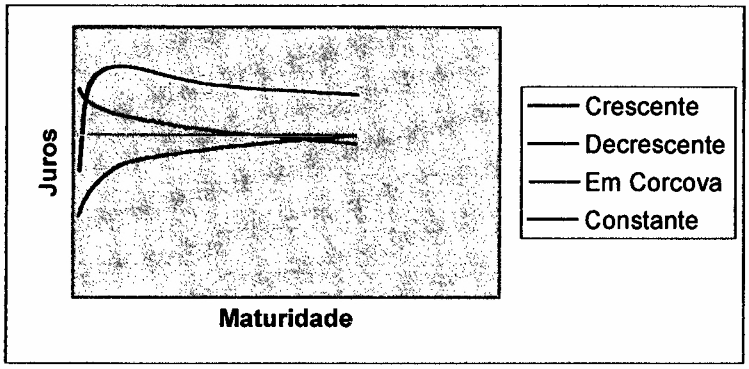
3.3 O formato da curva de juros a vista[28]

Muito embora se tenha discutido as definições de taxas a vista e a termo, será apresentado aqui apenas o formato e as teorias que tratam da curva a vista. Esta decisão decorre de dois fatores: o primeiro é que a curva a vista é a mais estudada das curvas de juros e, o segundo é que a maioria dos modelos que estudam o comportamento de juros – e que são objeto do capítulo 4 desta dissertação – definem a taxa de juros a vista como o fator que direciona todo o comportamento dos juros na economia.

Foram identificadas quatro formas da curva de juros a vista: curva constante (ou *flat*), curva monotonicamente crescente (ou *upward sloping*), curva monotonicamente decrescente (ou *donward sloping*) e curva em corcova (ou *humped*). A figura-5 traz uma representação gráfica destas curvas. A seguir serão discutidas as principais implicações atinentes a cada um destes comportamentos. Mais à frente, na seção 3.4, se fará uma breve descrição das várias teorias que foram elaboradas para explicar estes padrões de comportamento da curva de juros a vista.

[28] A partir deste ponto os termos curva de juros a vista, curva de juros, estrutura temporal das taxas de juros e estrutura temporal de juros são considerados equivalentes.

Figura 5 – As formas da estrutura temporal das taxas de juros



3.3.1 Curva monoticamente crescente

A existência de uma curva monotonicamente crescente implica que há consenso no mercado de que as taxas a vista futuras serão sempre superiores às atuais, aplicáveis ao mesmo prazo. Esta aceleração dos juros, pode ser explicada por pressões inflacionárias que ocorrerão no futuro, as quais influenciarão os juros nominais, de modo a se assegurar a ocorrência de juros reais positivos. Ou, por outro lado, os investidores, sabendo que os títulos mais longevos apresentam maior sensibilidade de preço a alterações nas taxas de juros, e portanto maior volatilidade, requererão taxas de juros maiores para serem compensados por este risco adicional que incorrem quando migram suas aplicações do curto para o longo prazo.

3.3.2 Curva monoticamente decrescente

Quando a curva juros se apresenta monotonicamente decrescente o mercado prevê que os altos juros de curto prazo não prevalecerão no futuro. Eles demandarão taxas anuais menores, que prevalecerão por um prazo maior, para adquirir títulos de longo prazo.

Esta forma geométrica pode ocorrer quando pressões inflacionárias do presente ou do passado recente, tenham contribuído para um forte incremento nas taxas de curto prazo, induzido pela autoridade monetária, quando perseguindo um ajuste econômico de curto prazo. Os analistas avaliam que a taxa de curto prazo se situa em patamar bastante superior ao que se espera seja sua média histórica.

3.3.3 Curva em corcova

Esta curva se caracteriza por apresentar comportamento de juros inicialmente crescentes, para títulos de curto prazo, e depois decrescentes, para títulos de maior maturidade. Esta evolução da curva de juros ocorre quando pressões inflacionárias atuais indicam a premência de um aumento nas taxas de juros de curto prazo, mas não se vislumbra a necessidade de ajustes equivalentes para títulos de todas as maturidades. Tem-se um aumento no nível de juros no curto prazo que as forças de mercado não transferem para o longo prazo, pois há um entendimento de que o processo inflacionário é momentâneo e tende a arrefecer no futuro próximo.[29]

3.3.4 Curva constante

A curva de juros constante é considerada a forma mais improvável de comportamento da estrutura temporal de juros, quando se considera todo o espectro de maturidade. Ela implica que os investidores requererão a mesma taxa de juros para títulos de quaisquer maturidades. Este comportamento, se existisse, implicaria em que não se cobra qualquer retorno adicional por se manter recursos investidos por longo prazo, bem como não existem quaisquer pressões inflacionárias no presente ou no futuro que possam interferir no nível de juros.

A curva constante está implícita quando se considera a análise tradicional de precificar *bonds,* que foi tratada no capítulo 2 desta dissertação.

3.4 As teorias que explicam a estrutura temporal das taxas de juros

Existem quatro importantes teorias que tentam explicar a estrutura temporal das taxas de juros: expectativas, preferência pela liquidez, segmentação de

[29] Esta é a forma atual da curva de juros nos Estados Unidos. O *site* www.bloomberg.com divulgava em 23/fevereiro/2000, às 10:16am EST, as seguinte taxas anuais de juros para títulos de emissão do Tesouro americano: *T-Bills*: 3 meses (5,81%), 6 meses (6,01%), 12 meses (6,20%); *T-Notes/Bonds*: 2 anos (6,59%), 5 anos (6,60%), 10 anos (6,38%) e 30 anos (6,10%).

mercado e habitat preferencial. Cada uma apresenta razões contundentes para justificar o fenômeno econômico. As próximas subseções tratarão brevemente das considerações mais importantes implícitas em cada uma delas.

3.4.1 A teoria das expectativas

Esta teoria foi inicialmente proposta por Fisher (1986) e desenvolvida posteriormente por Lutz (1940). A teoria das expectativas defende que a taxa de retorno esperada de um investimento por um determinado período é a mesma, independente da maturidade do título em que se investe. Isto é, se um dado investidor tem um horizonte de investimento de um ano, e ele espera obter um retorno r durante esse período, para ele é indiferente investir em um título que matura em um ano, ou em um outro que vence em dois anos mas que pode ser vendido decorrido o primeiro ano.

Se vale esta teoria, as taxas de juros a vista são determinadas pela expectativa de como se comportarão os juros no futuro. Assim as taxas de juros a termo, calculadas a partir das taxas *spot*, são a melhor aproximação para as taxas de juros a vista esperadas para o futuro (r_f). Portanto, no exemplo da seção 3.2, teríamos [$r_f = f_{12}$].

O principal senão encontrado na teoria das expectativas ocorre quando a curva de juros é monotonicamente crescente – esta forma prevalece na maior parte do tempo. Tal forma implica, por esta teoria, que o mercado avalia que as taxas de juros irão crescer no futuro, uma vez que a taxa a termo é sempre crescente. Como os juros não crescem indefinidamente a suposição básica da teoria das expectativas é violada.

3.4.2 A teoria da preferência pela liquidez

Os defensores desta teoria argumentam que os investidores usualmente preferem títulos de curto prazo àqueles de prazo mais longo. Segundo Hicks (1946), o propositor da teoria da preferência pela liquidez, os investidores somente adquirirão títulos de maior maturidade se lhes são oferecidas taxas de longo prazo maiores que a média das taxas futuras esperadas. Este diferencial de taxas é definido como um prêmio de risco que é positivamente relacionado com o prazo até a maturidade.

A teoria da preferência pela liquidez amplia o conceito do termo liquidez. Antes, liquidez correspondia à facilidade de se transformar um ativo em moeda corrente. Agora este conceito é remodelado, uma vez que os títulos públicos, em especial de governos centrais de países desenvolvidos, são negociados facilmente em mercados secundários, estando garantida sua pronta conversão em dinheiro. À luz desta teoria, se diz que o investidor se expõe a um risco de liquidez quando seu horizonte de investimento é inferior à maturidade dos títulos que lhe são ofertados. Se tal ocorre, sendo os preços dos títulos de mais longo prazo mais sensíveis às variações nas taxas de juros, o investidor pode ser surpreendido ao ter que vender seus ativos após uma desvalorização. Logo, por necessitarem de liquidez, os investidores demandarão juros maiores de ativos que maturam em maior prazo, mantidos constantes os demais parâmetros determinantes dos preços dos títulos.

Por construção, a teoria da preferência pela liquidez consegue explicar tão somente a curva de juros monotonicamente crescente.

3.4.3 A teoria da segmentação do mercado

Os entusiastas da teoria da segmentação do mercado defendem que investidores e demandadores de recursos atuam investindo/captando recursos sempre em setores temporais específicos da curva de juros.

Culbertson (1957), que propôs esta teoria, sustenta que a forma da curva da estrutura temporal das taxas de juros decorre das restrições de gestão de ativos e passivos (quer impostas por reguladores ou pelos próprios gestores) e que credores/devedores restringem suas aplicações/captações a maturidades específicas.

Se esta teoria é válida, nem investidores nem tomadores de recursos estão dispostos a mudar os prazos em que operam, mesmo que seja para se beneficiarem de outras faixas temporais que ofereçam vantagens momentâneas, em função de seus objetivos de aplicação ou captação de dinheiro.

Assim, os investidores de curto prazo não competem em taxas com aqueles de longo prazo e, portanto, as taxas de juros devem expressar o efeito de forças de demanda e oferta de títulos e de dinheiro, para as diversas maturidades.

A teoria da segmentação é sempre invocada para explicar a ocorrência de curva de juros em corcova. Somente argumentos de forças de oferta e demanda podem explicar tal comportamento da estrutura temporal. Um exemplo considerado típico desta estrutura ocorreu em meados da década de 1980. Naquela época as taxas de juros norte-americanas foram recordes. Quando a taxa de juros se eleva a duration dos *bonds* se reduz. Ora, quando os juros estão muito elevados mesmos os títulos de 30 anos apresentam duration incompatível com as necessidades de *hedge* de alguns investidores institucionais como, por exemplo, fundos de pensão. Os *bonds*, tiveram sua duration reduzida, enquanto que as datas de exigibilidade dos passivos previdenciários eram independentes dos níveis de juros. Este fato propiciou grande crescimento para o mercado de títulos sem cupom de longo prazo, permitindo grande difusão do uso dos STRIPS. A forte demanda conduziu a uma redução dos juros de longo prazo, enquanto que os de curto prazo se mantiveram em patamares elevados, em função de intervenções da autoridade monetária, que estava empenhada em debelar o processo inflacionário.

3.4.4 A teoria do habitat preferencial

A teoria do habitat preferencial representa uma linha menos rígida daquela de segmentação de mercado, mesclando-a com a teoria do prêmio pela liquidez. Modigliani e Sutch (1966), que advogam a existência de habitat preferencial, afirmam que quando a demanda e oferta de títulos para uma dada faixa de maturidade não estão equilibradas , alguns emprestadores e tomadores de recursos se sentirão induzidos a mudar de maturidade, se eles forem compensados por um prêmio de risco apropriado, cuja magnitude reflete seu nível de aversão ao risco.

3.5 A importância da forma da curva de juros na avaliação dos *bonds*

A conclusão que se pode tirar do que tem sido apresentado até agora acerca da estrutura temporal dos juros é que a análise tradicional peca em sua essência, qual seja, utilizar a curva de juros constante.

Na realidade a taxa de cupom e a maturidade são características de um *bond* sem opções embutidas, que não variam após sua emissão[30,31]. A definição de uma curva preço-juros é completamente irrelevante em um ambiente em que a

---

[30] O capítulo introdutório apresentou algumas características de opções que se inclusas em um contrato de um título de renda fixa podem alterar consideravelmente o seu padrão de pagamentos e sua maturidade.
[31] Alguém pode argumentar que a taxa de cupom é constante uma vez que está definida no contrato de lançamento do título. Aqui se acrescentou o termo após a emissão para destacar que os títulos do Tesouro dos Estados Unidos têm suas taxas de cupom definida nos leilões primários. Isto é, os investidores indicam a taxa de retorno desejada, o Tesouro define um ponto de corte e emite os títulos com uma taxa de cupom o mais próximo possível daquilo que seria a taxa de retorno. O intuito é lançar títulos ao par.

curva de juros não é constante. Simplesmente porque agora se trabalha com taxas múltiplas, que podem variar independentemente umas das outras. Resta, então, efetuar análises acerca da sensibilidade dos preços a variações na curva de juros e estudar o processo de imunização em um ambiente em que os juros não são constantes com a maturidade. As próximas duas seções deste capítulo contemplam estas análises.

3.6 Duration e a estrutura temporal das taxas de juros

No capítulo anterior o conceito de Macaulay duration foi apresentado como uma medida da sensibilidade dos preços dos *bonds* a alterações nos níveis de juros. Viu-se que esta medida foi construída com o pressuposto de que a curva de juros é constante. Nas seções anteriores do presente capítulo foram discutidas as diversas formas da curva de juros, onde ficou claro que a ocorrência de curva constante não é constatada na prática.

Este fato implica na necessidade de se definir um novo conceito de sensibilidade, que se adeqüe a uma realidade de taxas de juros diferentes, para diferentes horizontes de investimento.

Este novo conceito de duration, desenvolvido por Fisher e Weil (1977), representa uma medida de sensibilidade dos preços a variações nos juros sem que se tenha que admitir a existência de uma curva *flat*. A seguir se desenvolve este conceito de duration.

Seja um *bond* que paga cupons periódicos no valor de C e o principal (VF) na maturidade T, que está n períodos distante do momento presente. Cada cupom é pago no momento t, $t = 1,2,...,n$. r_{0t} é a taxa de juros a vista que remunera os investimentos em renda fixa, livres de risco de crédito, pelo período compreendido entre a data presente e o instante t, e que é observada na estrutura temporal.

Admitindo-se que vale a teoria das expectativas e que as taxas de juros a termo representam a melhor estimativa para as taxas a vista futuras, define-se r_{01} como a taxa a vista aplicável ao período que se estende do momento atual até o pagamento do primeiro cupom e r_{it} como sendo a taxa a termo que prevalecerá pelo período compreendido entre os instantes i e t, com $t \geq i$. P é o valor presente dos pagamentos efetuados pelo *bond*, expresso como uma função dos montantes dos fluxos, dos prazos e dos juros aplicáveis a cada período de ocorrência de um pagamento,

$$P = \frac{C}{(1+r_{01})} + \frac{C}{(1+r_{01})(1+r_{12})} + ... + \frac{C}{(1+r_{01})\Pi_{i=2}^{n}(1+r_{i-1,i})} + \frac{VF}{(1+r_{01})\Pi_{i=2}^{n}(1+r_{i-1,i})},$$

Derivando-se a função preço em relação ao fator de desconto comum a todos os fluxos de caixa $(1+r_{01})$[32] e admitindo-se que vale a relação

[32] Na determinação desta medida de duration, Fisher e Weil utilizaram juros compostos continuamente. Aqui se deu preferência pela forma discreta para tratar este assunto o mais próximos possível da prática de mercado. A utilização da relação $\frac{d(1+r_{i-1,i})}{(1+r_{i-1,i})} = \frac{d(1+r_{01})}{(1+r_{01})}$ corresponde a um incremento igual para todos os níveis de juros quando continuamente compostos.

$$\frac{d(1+r_{i-1,i})}{(1+r_{i-1,i})}=\frac{d(1+r_{01})}{(1+r_{01})}$$, se obtém

$$\frac{dP}{d(1+r_{01})}=-\frac{1}{(1+r_{01})}\sum_{t=1}^{n}\frac{t.fc(t)}{\Pi_{i=1}^{n}(1+r_{i-1,i})}$$

Fisher-Weil duration (D_{FW}) é a grandeza definida pela expressão:

$$D_{FW}=\frac{1}{P}\sum_{t=1}^{n}\frac{t.fc(t)}{\Pi_{i=1}^{n}(1+r_{i-1,i})}$$

De modo similar a Macaulay duration, Fisher-Weil duration também apresenta dimensão de tempo. A simplificação, na definição desta medida de sensibilidade, fica por conta de se considerar que os deslocamentos que acontecerão em toda a curva de juros serão proporcionais à variação observada na taxa de juros de curto prazo (primeiro período). Esta consideração implica que se admite que a taxa de juros de curto prazo é uma raiz de todos os níveis de juros e que as variações nos níveis de juros para as demais maturidades são muito correlacionadas com as mudanças na taxa de curto prazo.

3.7 Imunização utilizando a estrutura temporal das taxas de juros

Quando se considera a estrutura temporal, a imunização de um portfólio ao risco de taxa de juros se dá de modo abrangente em que a consideração de taxa de retorno em um título se torna irrelevante. Aqui as taxas de retornos são múltiplas para um título que paga juros periódicos. Na realidade cada um destes títulos pode ser interpretado como um portfólio constituído de títulos de desconto puro. O exemplo seguinte mostra como se faz a imunização nesse ambiente de taxas múltiplas.

Considere o portfólio P, constituído pelos títulos A e B, que tem o objetivo de imunizar um passivo de \$1milhão exigível em 7 anos. O título A, com maturidade em 13 anos, paga cupom anual de 8,5%, enquanto que o título B, com maturidade em 7 anos remunera o investidor em 12%a.a. A idéia é encontrar os montantes a serem investidos em A e em B de modo que o valor do portfólio replique o passivo. Considere ainda uma curva hipotética de juros a vista, r_{0t}, como indicado na segunda coluna da tabela-6A. Δ_t representa o fator de variação em cada taxa de juros. Após esta variação, os juros subirão para $r_{0t}+\Delta_t$, ou se reduzirão para $r_{0t}-\Delta_t$. $F_{i,t}$ representa o fluxo prometido pelo título i, $i = A,B$, para cada data t. Na tabela-6B, PV_i é o valor presente de cada fluxo de caixa quando descontado a cada nível de juros. As demais colunas da tabela-6B representam os resultados que serão utilizados para a determinação da duration Fisher-Weil.

Tabela 6A – Taxas de juros e fluxos de caixa

Data(t)	r_{0t}	Δ_t	$r_{0t}+\Delta_t$	$r_{0t}-\Delta_t$	$F_{A,t}$	$F_{B,t}$
1	6,52%	2,00%	8,52%	4,52%	8,5	12
2	7,12%	2,01%	9,13%	5,11%	8,5	12
3	7,68%	2,02%	9,70%	5,66%	8,5	12
4	8,38%	2,03%	10,41%	6,35%	8,5	12
5	8,82%	2,04%	10,86%	6,78%	8,5	12
6	9,34%	2,05%	11,39%	7,29%	8,5	12
7	9,72%	2,06%	11,78%	7,66%	8,5	112
8	10,50%	2,07%	12,57%	8,43%	8,5	
9	10,80%	2,08%	12,88%	8,72%	8,5	
10	11,10%	2,09%	13,19%	9,01%	8,5	
11	11,37%	2,09%	13,46%	9,28%	8,5	
12	11,62%	2,10%	13,72%	9,52%	8,5	
13	11,84%	2,10%	13,94%	9,74%	108,5	

Tabela 6B – Determinação da Fisher-Weil duration (D_{FW})

	TÍTULO-A				TÍTULO-B			
	$r = r_{ot}$		$r = r_{0t} + \Delta$	$r = r_{0t} - \Delta$	$r = r_{ot}$		$r = r_{0t} + \Delta$	$r = r_{0t} - \Delta$
Data(t)	PV_i	$t.fc(t)/(1+r)^t$	PV_i	PV_i	PV_i	$t.fc(t)/(1+r)^t$	PV_i	PV_i
1	7,98	7,98	7,83	8,13	11,27	11,27	11,06	11,48
2	7,41	14,82	7,14	7,69	10,46	20,92	10,08	10,86
3	6,81	20,42	6,44	7,21	9,61	28,83	9,09	10,17
4	6,16	24,64	5,72	6,65	8,70	34,79	8,07	9,38
5	5,57	27,85	5,08	6,12	7,86	39,32	7,17	8,65
6	4,97	29,85	4,45	5,57	7,02	42,14	6,28	7,87
7	4,44	31,08	3,90	5,07	58,51	409,56	51,36	66,81
8	3,82	30,59	3,30	4,45				
9	3,38	30,40	2,86	4,01				
10	2,97	29,67	2,46	3,59				
11	2,60	28,60	2,12	3,20				
12	2,27	27,27	1,82	2,85				
13	25,33	329,31	19,89	32,41				
Soma	83,71	632,48	72,99	96,95	113,43	586,82	103,11	125,22
D_{FW}		7,56			5,17			

O valor do portfólio (P) constituído dos títulos A e B deve ser igual ao valor presente do passivo (P_D) , $P = 1.000.000,00/(1+0.0972)^7 = \$522.395,48$. A questão consiste em se determinar as quantidades, X_A e X_B, dos títulos A e B, que se deve adquirir para que o portfólio P esteja livre de risco de taxa de juros. A resposta é a encontrada na solução do seguinte sistema de equações:

$$P = X_A.P_A + X_B.P_B = P_D$$

$$P.D = X_A.P_A.D_A + X_B.P_B.D_B = P_D.D_D$$

$$P_A = \$83,71 / \$100,00\, de\ valor\ de\ face,\ P_B = \$113,43 / \$100,00\, de\ valor\ de\ face$$

$$D_A = 7{,}56\, anos; \qquad D_B = 5{,}17\, anos; \qquad D_D = 7\, anos$$

Portanto, as quantidades que devem ser adquiridas de cada título são:

$X_3 = 4.778$ títulos e $X_B = 1.079$ títulos

O resultado da imunização está expresso na tabela abaixo:

Tabela 6C – Imunização usando Fisher-Weil duration

	$r = r_{ot}$	$r = r_{0t} + \Delta_t$	$r = r_{0t} - \Delta_t$
TÍTULO-A			
Quantidade	4.778		
Preço	83.71	72,99	96,95
Total (A)	399.966,38	348.756,40	463.243,38
TÍTULO-B			
Quantidade	1.079		
Preço	113,43	103,11	125,22
Total (B)	122.390,97	111.254,00	135.115,33
Investimento (A+B)	522.357,35	460.010,40	598.358,70
Passivo	522.395,48	458.615,80	596.515,46
Diferença	-38,13	1.394,59	1.843,24

Observa-se que a imunização de fato protege o investimento quanto ao risco de taxa de juros. As diferenças apresentadas são de pequena monta, comparadas com o valor do investimento. Além disso, como se dá na análise tradicional, a imunização usando um portfólio de *bonds* sempre conduzirá a um pequeno superávit, em função da convexidade da carteira.

3.8 Conclusão

Este capítulo tratou do estudo do comportamento das taxas de juros na economia. Diferentemente da abordagem tradicional, em que se admite uma taxa única de juros, aqui se trabalhou com toda a estrutura temporal de juros.

Foram apresentadas as diversas teorias que buscam explicar a estrutura temporal: a teoria da preferência pela liquidez, a teoria das expectativas, a teoria da segmentação do mercado e a teoria do habitat preferencial.

Finalmente mostrou-se como, ao se utilizar toda a curva de juros, se determina a dimensão duration de um título de renda fixa e como construir um portfólio imunizado ao risco de taxas de juros nesse ambiente de taxas múltiplas.

O próximo capítulo refina ainda mais a análise da estrutura temporal de juros, ao se fazer uma análise dinâmica desta curva.

CAPÍTULO 4

MODELOS DINÂMICOS QUE EXPLICAM A ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JUROS

Até agora foram apresentados modelos estáticos de avaliação de *bonds*. Nesses modelos se considerava uma dada situação, aliada a uma curva de juros a vista previamente definida e se avaliava os títulos de renda fixa. Neste capítulo se está interessado em ambientes em que as taxas de juros se comportem dentro de alguns parâmetros não mais sujeitos a uma vontade mas a uma regra definida de evolução. E, com base nesses fatores, que agora variam de modo randômico, é que se apreça *bonds* e qualquer ativo financeiro cujo valor seja uma função das taxas de juros.

Os modelos dinâmicos baseiam-se na assunção de que os movimentos nas taxas de juros ocorrem de forma estocástica. Além disso a evolução dos juros está associada a uma distribuição de probabilidade.

Este capítulo está dividido em três partes: na primeira são discutidos os principais modelos dinâmicos desenvolvidos em tempo contínuo; a segunda parte traz os modelos em tempo discreto e a última apresenta uma aplicação de um desses modelos a uma situação hipotética.

4.1 Os modelos de tempo contínuo

Os modelos de tempo contínuo assumem que os mercados financeiros funcionam em todo e qualquer momento. Assim, os preços de quaisquer ativos podem variar continuamente. Tais modelos supõem a existência de mercados completos e perfeitos – sem fricções.

Esses modelos trazem em suas estruturas a descrição de evolução dos juros como uma função matemática, expressa por uma equação diferencial parcial estocástica aplicada a processos de difusão.[33]

Esta dissertação não discutirá todos os múltiplos modelos contemplados na literatura que utilizam esta metodologia, mas com certeza abordará aqueles que se destacam pelo pioneirismo de trazerem novas considerações acerca do comportamento dos juros. Aqui serão tratados os modelos de Merton (1973), Vasicek (1977) - e uma extensão deste, o modelo de Brennan e Schwartz (1979) - e de Cox, Ingersoll e Ross (1985).

[33] Para um estudo destes processos estocásticos ver Neftci (1996).

4.1.1 O modelo de Merton

O leitor perceberá que a forma como será apresentado este modelo difere da dos demais. Entretanto ele não está aqui por capricho, mas pelo pioneirismo de utilizar a abordagem de tempo contínuo para apreçar ativos financeiros (títulos de renda fixa, de renda variável e instrumentos derivativos). Esta apresentação é feita dentro de um contexto de aplicação para a precificação de opções lançadas tendo como ativo objeto um título de renda fixa. E é dentro deste arcabouço de análise de opções que se discutirá o modelo.

Black e Scholes (1973), em um trabalho pioneiro, apresentaram uma equação fechada para precificação de derivativos – neste caso uma opção de compra de uma ação do tipo européia.[34]

Merton modificou o modelo básico de Black e Scholes de modo a especificar um processo estocástico de difusão, com distribuição lognormal dos retornos, aplicável ao apreçamento de um título de longo prazo, de modo semelhante ao da evolução do preço de uma ação. A expressão analítica de evolução do preço do titulo é dada por:

$$\frac{dB}{B} = \mu dt + \sigma dz ,$$

[34] As opções são classificadas, quanto ao exercício, em européia e americana. A opção européia é aquela que só pode ser exercida no vencimento, enquanto que a opção americana pode ser exercida a qualquer momento até a data de vencimento.

onde B é o preço de um título sem cupom, que paga \$1 na maturidade, μ é o termo de *drift* (ou tendência, ou deslocamento) que também representa a taxa de retorno instantânea esperada, σ é a volatilidade e z é um movimento browniano padrão.[35]

O preço de qualquer instrumento derivativo, criado a partir do *bond* de longo prazo, pode ser determinado ao se construir um portfólio (posição de *hedge*), constituído de uma posição no próprio título e uma outra em um ativo de curto prazo livre de risco, que replica os fluxos de caixa do derivativo.

Por exemplo, para uma opção de compra do tipo européia, ao se solucionar a posição de *hedge*, restrita à condição de fronteira para o valor da opção {$\max(S-K,0)$, onde S é o preço do ativo objeto (o *bond* de longo prazo) na data de exercício da opção e K é o preço de exercício da opção}, se obtém

$$C = BN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(B/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

- C é o preço da opção européia de compra do *bond* de longo prazo;

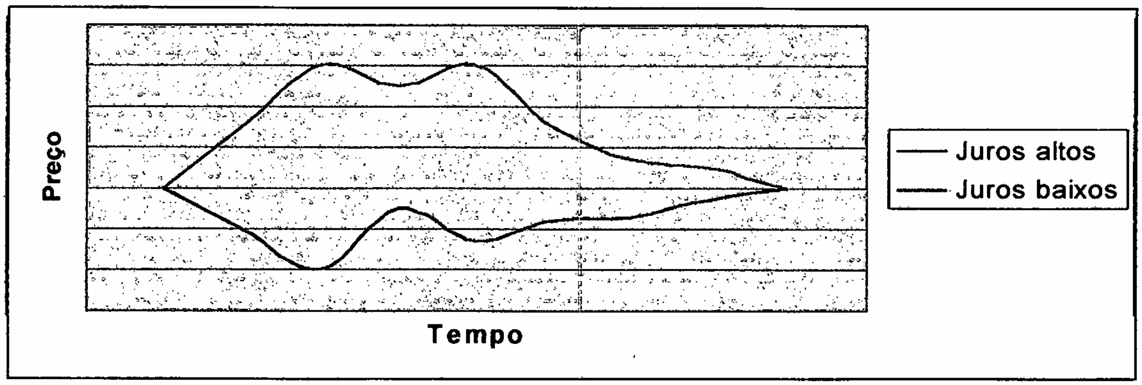
[35] Um movimento browniano padrão é um processo estocástico com média zero e variância igual a dt.

- r é a taxa de juros instantânea livre de risco;
- σ é a volatilidade, constante, da mudança instantânea no logaritmo natural do preço do título – o que implica que os preços dos títulos têm um comportamento lognormal, enquanto a taxa de retorno é explicada por uma distribuição normal padrão;
- $T-t$ é o prazo a decorrer até a data de exercício da opção, e
- N(.) representa a função densidade normal cumulativa padrão.

A vantagem principal deste modelo para a precificação de opções lançadas sobre títulos de renda fixa decorre de sua simplicidade, sendo necessários utilizar somente dados observados no mercado para implementá-lo.

Do ponto de vista conceitual, entretanto, o modelo apresenta problemas difíceis de serem sanados. Um dos problemas está no fato de se admitir que os retornos em títulos de renda fixa seguem uma distribuição normal. Tal consideração conduz á conclusão de que, existe uma probabilidade não nula de ocorrência de taxas nominais de juros negativas, o que não é observado na vida real. Uma outra simplificação, com grandes implicações para a precificação de ativos de renda fixa, é que a volatilidade é considerada constante. Esta suposição não é adequada quando se avalia *bonds* uma vez que pagam um valor definido na maturidade, independentemente do comportamento das taxas de juros. A figura-6 mostra uma representação hipotética de evolução do preço de um *bond* que paga cupons periódicos e que foi inicialmente negociado ao par.

Figura 6 – Evolução dinâmica do preço de um bond com o tempo.



Juros altos = maiores do que a taxa de cupom; juros baixo = menores do que a taxa de cupom.

A evolução temporal do preço do título de renda fixa sugere que sua volatilidade cresce com a maturidade. Títulos mais longevos apresentam maior volatilidade de preço. Adicionalmente evidencia-se um padrão em que a volatilidade é crescente após a emissão do título mas, depois de um certo prazo, se torna decrescente de modo a permitir uma convergência ao valor de face, na maturidade.

4.1.2 O modelo de Vasicek

Trata-se de um modelo de equilíbrio parcial da estrutura temporal das taxas de juros. Vasicek considera que a taxa de juros de curto prazo é o fator único que explica todo o comportamento da curva de juros e, por conseguinte, o único determinante dos preços dos *bonds*. O comportamento da taxa de juros é expresso pelo seguinte processo de difusão

$dr = f(r,t)dt + \rho(r,t)dz$, onde

- $f(r,t)$ e $\rho(r,t)$ são o *drift* e o desvio padrão instantâneos do processo de $r(t)$, e
- dz é um movimento browniano, com variância dt.

O preço de qualquer título de desconto, cujo valor dependente da taxa de juros de curto prazo e do prazo até a maturidade (*s*), pode ser escrito como:

$dP = P\mu(t,s,r)dt - P\rho(t,s,r)dz$.

Similarmente ao modelo de Merton (1973), é possível definir um portfólio de hedge consistindo de *bonds* de duas maturidades diferentes que é instantaneamente livre de risco. O mecanismo de arbitragem que rege a relação entre *bonds* de diferentes maturidades, s_1 e s_2, é expresso pelo preço de mercado do risco $q(t,r)$[36],

$$q(t,r) = \frac{\mu(t,s_1) - r(t)}{\sigma(t,s_1)} = \frac{\mu(t,s_2) - r(t)}{\sigma(t,s_2)} = \frac{\mu(t,s,r) - r(t)}{\sigma(t,s,r)}, \quad s \geq t$$

[36] O preço de mercado do risco mede o incremento na taxa de retorno instantânea esperada em um ativo financeiro para cada unidade adicional de risco (desvio padrão dos retornos).

Este modelo genérico não apresenta solução fechada. Vasicek então considera uma simplificação em que o preço de mercado do risco é constante, obtendo:

$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz$,

$f(r,t) = \alpha(\gamma - r)$, $\rho(r,t) = \rho$, e $\alpha > 0$

Nesta formulação α é conhecido como a elasticidade do termo de reversão à média e γ é a média de longo prazo, para a qual a taxa de curto prazo tem uma tendência de reversão.

A grande vantagem do modelo de Vasicek é que apresenta uma solução razoavelmente aceita de que a taxa de juros tende, a longo prazo, a reverter à sua média histórica. Além disso, a fórmula fechada obtida para a evolução da taxa de juros permite que se teste empiricamente o modelo.

Sua fraqueza está no fato de que o preço de mercado do risco é exógeno ao modelo. Além disso é constante para títulos de quaisquer maturidades.

Brennan e Schwartz (1979) explicitamente ampliaram o modelo de Vasicek para incluir um segundo fator para explicar a estrutura temporal de juros, a taxa de juros de longo prazo. No modelo deles a taxa de curto prazo apresenta um comportamento de reversão à media, que neste caso é admitida ser a taxa de longo prazo. Os processos de difusão das taxas de juros obedecem às equações estocásticas:

$$dr = \beta_1(r,l,t)dt + \eta_1(r,l,t)dz_1 \qquad \text{(curto prazo)}$$

$$dl = \beta_2(r,l,t)dt + \eta_2(r,l,t)dz_2 \qquad \text{(longo prazo)}$$

$$\beta_1(r,l,t) = r\left[\alpha \ln(\frac{l}{pr}) + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right], \qquad \eta_1(r,l,t) = r\sigma_1, \text{ e } \eta_2(r,l,t) = l\sigma_2$$

onde dz_1 e dz_2 são movimentos brownianos padrão, $dz_1 dz_2 = \rho dt$, η_1 e η_2 são os desvios padrões dos processos das taxas de juros de curto e de longo prazo, respectivamente, e ρ é a correlação entre os processos que governam estas taxas de juros. $\beta_1(.)$ e $\beta_2(.)$ são as taxas de mudança instantânea esperadas para as taxas de curto e longo prazo, respectivamente.

A taxa de juros de longo prazo é representada pelos juros pagos em um título perpétuo, o *consol* inglês, uma variável observada no mercado.

A vantagem de um modelo com dois fatores é que permite explicar uma variedade maior de movimentos na estrutura temporal de juros.

A grande desvantagem está na dificuldade maior de implantação de um modelo com duas taxas diferentes e processos próprios de evolução. Como em Vasicek, o preço de mercado do risco é obtido exogenamente.

4.1.3 O Modelo de Cox, Ingersoll e Ross (CIR)

O modelo CIR é o primeiro modelo de equilíbrio geral para apreçar ativos de renda fixa que pode ser aplicado para modelar a estrutura temporal das taxas de juros.

Os principais pressupostos do modelo são que: as preferências dos investidores são logarítmicas e que a variável de estado que descreve o comportamento dos juros na economia (a taxa de juros de curto prazo) segue um processo em que sua volatilidade está relacionada com a raiz quadrada de seu nível atual. O processo para a taxa de juros de curto prazo é explicitado pela equação:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz .$$

Para $\kappa, \theta > 0$, a taxa de curto prazo evolui através de um processo autorregressivo de ordem 1[37], onde o movimento randômico da taxa é elasticamente direcionado para um valor de longo prazo, θ. O parâmetro κ determina a velocidade de ajustamento da taxa atual à sua média de reversão de longo prazo. κ, θ, σ^2 são constantes.

---

[37] Greene (1997) define um processo autorregressivo de ordem 1 como uma série temporal que pode ser explicada pela equação: $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \mu_t$, sendo $E[\mu_t] = 0$ e $E[\mu_t^2] = \sigma_t^2$.

A grande vantagem deste modelo é que, por se basear em uma condição de equilíbrio geral, ele é completamente consistente internamente.

Por construção, a taxa de juros de curto prazo não pode tornar-se negativa uma vez que sua variância, em cada momento, é função da raiz quadrada do nível da própria taxa. Isto implica que, na existência de juros elevados podem ocorrer grandes variações nominais nos juros; enquanto que, quando o nível de juros é baixo, a variação possível na taxa é pequena.

Um problema de especificação do modelo, que decorre da característica de equilíbrio é que, por construção, a estrutura de juros é determinada endogenamente e pode não explicar a curva real em sua totalidade. Uma outra restrição feita diz respeito à condição de ser unifatorial, implicando que as variações dos preços de todos os *bonds* são perfeitamente correlacionadas. O modelo pode ser útil para explicar as diversas formas da estrutura temporal de juros mas falha em explicar mudanças na curva.

4.2 Os modelos de tempo discreto

Os modelos de tempo discreto aqui apresentados são baseados em uma árvore binomial, em especial uma *lattice*[38]. A principal vantagem dos modelos

[38] Uma árvore binomial é uma construção em que partindo-se de um dado estado se admite apenas dois resultados possíveis de ocorrência no instante seguinte, um movimento para cima (*up*) ou para baixa (*down*). Quando se admite que a árvore binomial se reconecte, isto é, um movimento de alta seguido por um de baixa conduz ao mesmo resultado de um movimento para baixo seguido de um outro para cima, se obtém uma *lattice*.

binomiais sobre os de tempo contínuo está na facilidade de implantação, quando se deseja avaliar ativos financeiros.

Os modelos binomiais admitem que o mercado opera em tempo discreto. Além disso se assume que as decisões tomadas acerca de compra ou venda de ativos, ocorrem em momentos previamente especificados. Isto é, quando se constrói uma árvore binomial se admite que as transações são realizadas nos instantes para os quais se definem os nós da árvore, não se prevendo negócios no período compreendido entre dois momentos subseqüentes.

Até o momento presente, em função de maior facilidade de implementação, os modelos binomiais têm sido mais utilizados pelo mercado do que seus pares de tempo contínuo. Inicialmente será apresentado o modelo desenvolvido Ho e Lee (1986), como um modelo geral da técnica e depois serão discutidos dois modelos utilizados por instituições financeiras: Solomon e Goldman Sachs.

4.2.1 O Modelo de Ho e Lee

O modelo Ho-Lee foi desenvolvido em tempo discreto, utilizando uma *lattice* binomial como suporte para explicar a evolução da estrutura temporal da taxa de juros. O objetivo principal dos autores consiste em prover o mundo acadêmico e o mercado financeiro de uma ferramenta de fácil implementação para o apreçamento de ativos financeiros cujo preço é função da estrutura temporal de juros.

A taxa de desconto a vista, continuamente composta $r(T)$ é dada pela relação

$$r(T) = -\frac{\ln P(T)}{T},$$

- T é o prazo até a maturidade, e
- $P(T)$ é uma função de desconto, para o valor do título de desconto puro que paga $1 na maturidade.

Genericamente, $P_i^n(T)$ representa o valor do título de desconto que paga $1 na maturidade T, cujos preços evoluíram através de uma *lattice* binomial pelos últimos n períodos, tendo apresentado i movimentos ascendentes, sujeito às condições de fronteira:

$$P_i^n(0) = 1, \quad \text{e,} \quad \lim_{T\to\infty} P_i^n(T) = 0$$

Estas condições de fronteira implicam que o preço de todos os títulos de renda fixa convergem para seu valor de face na maturidade e, para maturidades infinitas, um título de desconto puro tem valor insignificante.

Se não se espera qualquer risco de taxa de juros no próximo período, para que se evite a possibilidade de arbitragem, a função de desconto a vista, que é o próprio preço do título, deve ser igual à função de desconto a termo $F_i^n(T)$,

$$F_i^n(T) = P_i^{n+1}(T) = P_{i+1}^{n+1}(T) = \frac{P_i^n(T+1)}{P_i^n(1)}, \qquad T = 0,1,2,...$$

A modelagem das incertezas acerca da estrutura temporal de juros – função das taxas a termo – é feita ajustando-se divergências entre as taxas a termo possíveis (dada sua evolução binomial) à condição de certeza ($F_i^n(T)$). Estes ajustes são efetuados através do uso de funções de perturbação, $h(T)$ e $h^*(T)$, para os estados decorrentes de movimentos ascendentes ou descendentes, respectivamente. Estes movimentos são descritos pelas seguintes equações:

Up $$P_{i+1}^{n+1}(T) = \frac{P_i^n(T+1)}{P_i^n(1)} h(T)$$

Down $$P_i^{n+1}(T) = \frac{P_i^n(T+1)}{P_i^n(1)} h^*(T)$$

Com $h(0) = h^*(0) = 1$. Os movimentos *up* e *down* ocorrem com probabilidades π e $1-\pi$ respectivamente, que os autores denominam de probabilidades binomiais implícitas, e que se constituem em probabilidades definidas para investidores neutros ao risco.

A principal vantagem deste modelo é que considera a estrutura temporal de juros como dada. A partir da curva observada no mercado são calculadas as funções de perturbação e as probabilidades implícitas, de modo a assegura que os preços calculados pelo modelo sejam os mesmos observados no mercado. Todo o desenvolvimento da árvore se dá em um ambiente que evita a possibilidade de arbitragem. Assim, para o período inicial, todos os ativos dependentes dos níveis de juros devem render obrigatoriamente a taxa livre de risco para um período.

A extensão temporal da árvore define o prazo máximo de sua utilização para o apreçamento de ativos cujos valores são contingentes aos níveis de taxas de juros. Assim, se se constrói uma *lattice* que se estende do momento inicial (definido como zero) até o momento 10, pode-se avaliar ativos que maturem até o instante 10. A árvore se aplica ao apreçamento tanto de títulos de desconto puros, quanto daqueles que efetuam pagamentos intermediários, e, ainda, para quaisquer derivativos lançados, tendo um instrumento de renda fixa como ativo objeto, e que tenham data de exercício até o instante 10.

4.2.2 O modelo Solomon[39]

Trata-se de um modelo unifatorial, onde a taxa de juros de curto prazo é a raiz de todas as demais taxas a vista futuras. O modelo se desenvolve em um ambiente em que a volatilidade das taxas de juros é constante para todo o período de observação.

[39] Ver Elton (1999).

Dada sua característica binomial, partindo-se de uma taxa a vista original, admite-se apenas duas possíveis taxas a vigorar no período seguinte, r_u ou r_d, para os movimentos *up* ou *down*, respectivamente. A evolução da taxa segue os seguintes parâmetros:

Movimento *up* $\quad r_u = re^{m_t + \sigma\sqrt{t}}$

Movimento *down* $\quad r_d = re^{m_t - \sigma\sqrt{t}}$

- r é a taxa de juros de curto prazo, aplicável ao período inicial;
- m_t representa o fator de *drift*, que indica a tendência futura dos juros durante o período *t;*
- σ é a volatilidade das taxas de juros, e
- *e = 2,71828.*

Neste modelo admite-se que a volatilidade da taxa de juros é constante para todo o período de análise. Isto é, se se quer avaliar o comportamento dos juros por um período de 3 anos se admite que σ é invariante pelos próximos 3 anos. O fator de *drift*, entretanto, modifica-se entre estágios intermediários de avaliação. O *drift* tanto pode ser positivo quanto negativo, dependendo do comportamento da curva de juros a vista. Se esta apresenta-se monotonicamente crescente o *drift* é positivo, caso a curva seja decrescente o *drift* é negativo.

4.2.3 O modelo Goldman Sachs (BDT)

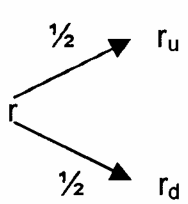
Este modelo binomial, também conhecido como Black, Derman e Toy (1990) (BDT) apresenta as seguintes características principais:

a) O modelo é unifatorial. Todas as taxas de juros, e por conseguinte os preços dos títulos de renda fixa, dependem apenas de um fator - a taxa de juros de curto prazo.

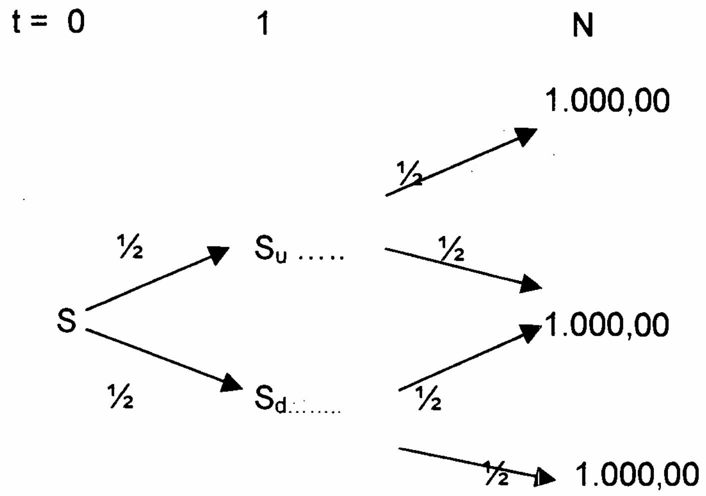
b) São considerados como dados: a curva de juros a vista e a curva de volatilidade destas taxas. Estas curvas são obtidas a partir de dados do mercado, tendo como base o comportamento de títulos de desconto puro, isentos de risco de crédito.

c) A evolução das taxas de juros segue um padrão previamente definido. Os resultados obtidos no modelo devem ser tais que ao se apreçar um título de renda fixa, utilizando a árvore binomial, se obtenha o mesmo valor definido pela curva de juros vigente no mercado.

A taxa de juros por um período evolui de r, ou para r_u ou para r_d, com a mesma probabilidade.



O preço de um título de desconto que paga $1.000,00 na maturidade, evolui em função dos juros, conforme o seguinte diagrama binomial:



$$S = \frac{1000}{(1 + r_{0t})^t},$$

r_{0t} é a taxa a vista para títulos que maturam em t períodos. Para o caso específico de títulos de desconto vencendo em dois períodos resolve-se o seguinte sistema de equações:

$$S = \frac{\frac{1}{2}S_u + \frac{1}{2}S_d}{1 + r}$$

$$S_u = \frac{1000}{1 + r_u}$$

$$S_d = \frac{1000}{1 + r_d}$$

Quando se quer construir uma árvore para um horizonte superior a 2 períodos o que se faz é incorporar novos ramos. Os resultados obtidos para os títulos de desconto que vencem em n períodos continuam válidos quando adicionamos o período $n+1$.

A convergência da *lattice* é assegurada pela relação entre a medida de volatilidade e as taxas de juros. Para o segundo período, tal relação é dada por:

$$\sigma_2 = \frac{\ln \frac{r_u}{r_d}}{2},$$

Para os demais períodos deve-se observar a curva de volatilidade medida com dados do mercado, uma vez que a volatilidade não é constante. A volatilidade, por este modelo, depende apenas do tempo, sendo independente da evolução das taxas.

A seguir será apresentado um exemplo usando o modelo BDT. A intenção é mostrar, passo a passo, como se constrói uma árvore binomial com o objetivo de precificar *bonds*.

4.3 Aplicação do modelo BDT a uma situação hipotética

Considere que as curvas de juros e volatilidade das taxas de juros observadas no mercado sejam as indicadas na tabela 7.

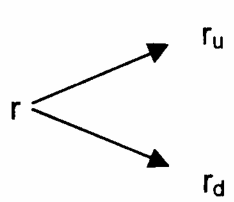
Tabela 7 – Curvas hipotéticas de juros e de volatilidade.

Prazo (t períodos)	Juros (%a.p.)	Volatilidade (%a.p.)	PV_t
1	1,800	0,300	982,32
2	1,700	0,250	966,85
3	1,600	0,200	953,50
4	1,500	0,180	942,18

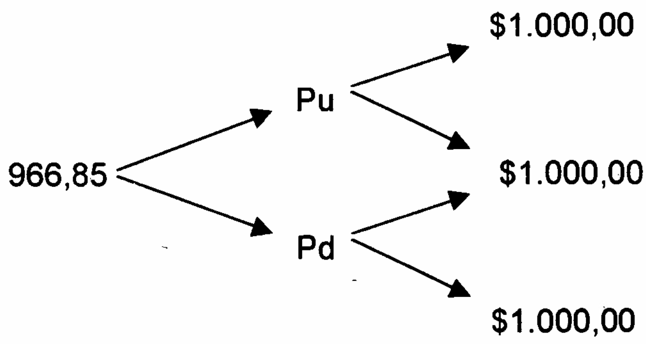
PV_t – valor presente de um título sem cupom que paga $1.000,00 na data *t*.

Não há qualquer necessidade de se montar uma árvore para o primeiro período pois este é certo. Um banco investindo seus recursos hoje receberá, ao fim do primeiro período, um rendimento de 1,800%. Para o segundo período, entretanto, admite-se que os juros a vista podem aumentar ou diminuir com probabilidade igual a 0,50. Abaixo são representadas as árvores binomiais de evolução da taxa de juros e do preço do título.

Juros



Preços



Para estas árvores escreve-se as equações correspondentes a seus nós:

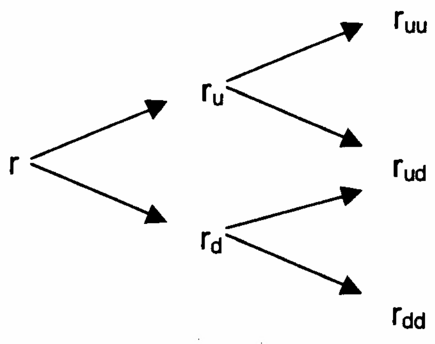
$$966{,}85 = \frac{\frac{1}{2}(P_u + P_d)}{(1+r)} \qquad P_u = \frac{1000}{(1+r_u)} \qquad P_d = \frac{1000}{(1+r_d)} \qquad \sigma_2 = \frac{\ln \frac{r_u}{r_d}}{2}$$

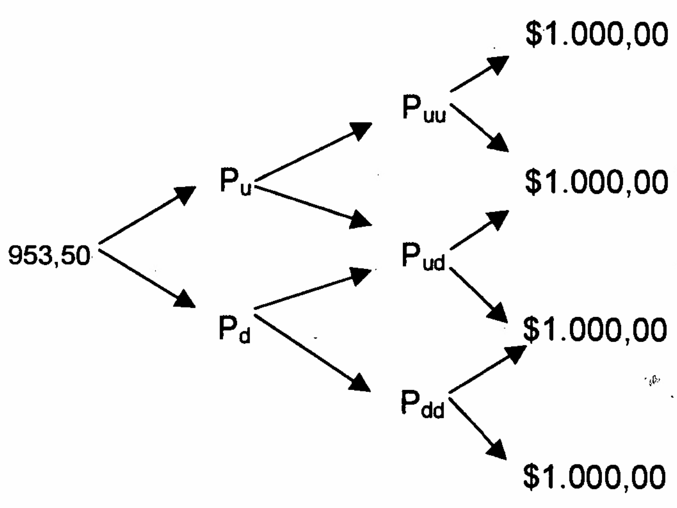
Do sistema de equações acima se obtém as possíveis taxas a vista, passíveis de vigorar no próximo período:

$r_u = 1{,}604\%$, e, $r_d = 1{,}596\%$

O próximo passo consiste em acrescentar um novo período à árvore. Os resultados obtidos para a situação com apenas dois períodos continuam válidos também para três.

Abaixo são apresentadas as novas lattices:



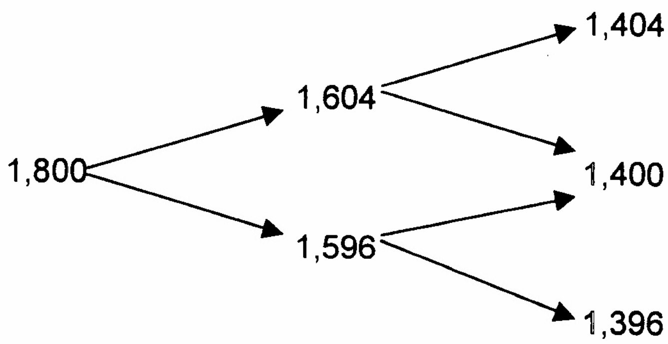


E seu correspondente sistema de equações:

$$P_u = \frac{\frac{1}{2}(P_{uu} + P_{ud})}{(1 + r_u)} \qquad P_d = \frac{\frac{1}{2}(P_{ud} + P_{dd})}{(1 + r_d)} \qquad \sigma_3 = \frac{\ln \frac{r_{uu}}{r_{ud}}}{2} = \frac{\ln \frac{r_{ud}}{r_{dd}}}{2}$$

$$P_{uu} = \frac{1000}{(1 + r_{uu})} \qquad P_{dd} = \frac{1000}{(1 + r_{dd})} \qquad P_{ud} = \frac{1000}{(1 + r_{ud})}$$

Ao se resolver o sistema de equações se obtém a árvore de taxas de juros abaixo.



Esta árvore binomial permite precificar qualquer instrumento financeiro cujo valor seja dependente das taxas de juros e que matura em até três períodos.

Por exemplo, considere que se deseja determinar o valor de um título de emissão do Banco Central, que matura em 3 períodos, paga juros de

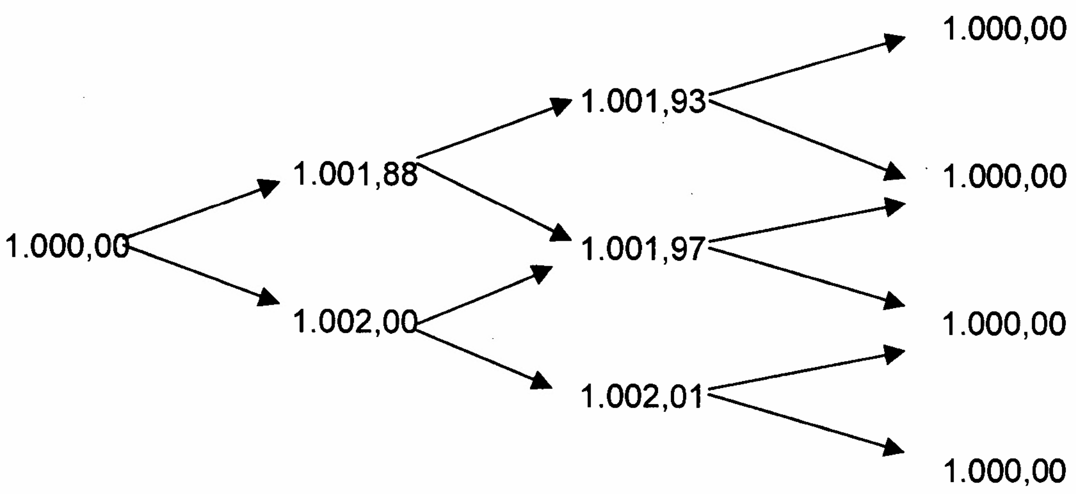
1,600%a.p. mas pode ser resgatável ao fim do segundo período pelo valor de face.

O preço de um título que tem uma característica de opção é igual ao valor de um título comum, adicionado (ou reduzido) do valor da opção.

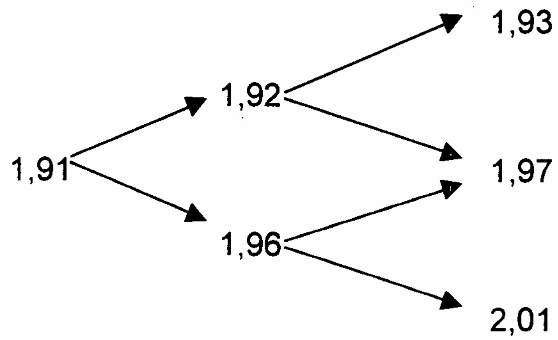
Preço do *bond* com opção = preço do *bond* sem opção + preço da opção

A solução deste problema consiste em construir duas árvores binomiais, uma para apreçar o título de dívida puro e uma outra para definir o valor da opção.

A árvore seguinte corresponde á evolução do preço do título de dívida puro.



A árvore correspondente á opção de resgate antecipado é obtida ao se comparar o valor de pagamento com o valor previsto pelo modelo. Como o emissor pode resgatar ao fim do segundo período pelo valor de face a opção será exercida para qualquer um dos padrões de comportamento de juros e será avaliada conforme a seguinte árvore:



Portanto, um banco ao comprar este instrumento financeiro deve pagar por ele $998,09 (=$1.000,00 - $1,91).

Este capítulo final tratou de modelos mais atualizados utilizados para precificar títulos de renda fixa. Foram discutidos modelos de tempo contínuo e de tempo discreto. Como foi lugar comum nesta dissertação, mais uma vez se apresentou um exercício que demonstra a utilização da técnica. Deu-se preferência ao modelo Balck, Derman e Toy em função de ser aplicado por instituições financeiras para a determinação de preço de títulos de renda fixa e de seus instrumentos derivativos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Esta dissertação discute diversos modelos de avaliação de *bonds*. Estes modelos são apresentados de forma evolutiva de complexidade e de atualidade. Parte-se com a análise tradicional e se atinge a fronteira atual das técnicas utilizadas por instituições financeiras para precificar estes títulos.

A análise tradicional (contemplada no capítulo 2) se dá em um ambiente de muitas simplificações, sendo a mais importante a assunção de que existe uma taxa de juros única, que pode ser utilizada para avaliar *bonds*, livres de risco de crédito, das mais diversas maturidades. Adicionalmente, por esta abordagem qualquer deslocamento da curva de juros se dá em paralelo, o que significa que se admite perfeita correlação entre os retornos de todos os títulos de renda fixa no mercado.

Ainda na análise tradicional são explicitados os principais fatores determinantes do preço de um *bond*: cupom, maturidade e taxa de juros de desconto. Destaca-se na apresentação desta metodologia de avaliação de preços de *bonds*, a análise feita acerca da sensibilidade do preço desses títulos com relação às alterações nas taxas de juros, através do uso das medidas Macaulay duration e convexidade. A discussão da metodologia tradicional é encerrada com um exemplo de imunização. Nesta ilustração se mostra como utilizar

Macaulay duration para construir um portfólio de títulos de renda fixa imune aos riscos de taxa de juros e de reinvestimento.

No capítulo 3 são apresentadas as diversas formas já detectadas de ocorrência da curva de juros e as várias teorias econômicas que pretendem explicar o comportamento da estrutura temporal da taxa de juros. Mostra-se que a existência de uma curva constante, consideração fundamental na análise tradicional, é um evento improvável. Nenhuma das teorias apresentadas se propõe defender a existência desta forma geométrica para a curva de juros.

O capítulo 3 traz ainda um novo conceito de duration de um título, Fisher-Weil duration. Esta medida considera a existência de uma estrutura temporal de juros não constante, e admite a ocorrência de deslocamentos não paralelos desta curva. Entretanto, por construção, os juros para as várias maturidade são admitidos serem ainda muito correlacionados. As variações que se espera ocorrer nos juros a vista para as mais diferentes maturidades dependem do deslocamento observado na taxa de curto prazo. Também se usa Fisher-Weil duration em um exercício de imunização contemplando alterações em toda a estrutura temporal de juros.

O capítulo 4 discute duas maneiras recentes de se precificar ativos financeiros cujos valores são explicitamente dependentes da taxa de juros – os modelos dinâmicos desenvolvidos para tempo contínuo e para tempo discreto. Os modelos de tempo contínuo estão aí para desafiar pesquisadores acerca de sua validação, ou instigar os que operam no mercado financeiro a utilizá-los no dia a dia. Os modelos de tempo discreto, muito embora não pareçam tão elegantes quanto seus pares de tempo contínuo, têm em sua simplicidade o dom de se transformarem em ferramentas utilizadas pelos analistas financeiros. Para não fugir à regra presente em toda esta dissertação, este capítulo traz também uma aplicação de um modelo para avaliar *bonds*. Nesse caso mostra-se ainda que o modelo binomial é útil também para apreçar opções lançadas tendo como ativo objeto um instrumento de dívida.

Tinha-se uma ambição maior que era aplicar os modelos dinâmicos a uma situação real do mercado brasileiro. Entretanto alguns fatores frustaram o autor. O primeiro é que o mercado financeiro brasileiro se caracteriza pela limitação de prazos de maturidade de títulos verdadeiramente de renda fixa. Como dito oportunamente, mesmo os títulos de emissão do governo federal padecem de alguns problemas que impedem uma análise mais rigorosa como: os títulos de desconto são de curtíssimo prazo, com maturidade em menos de 6 meses em sua grande maioria (se não na totalidade); os nossos títulos de longo prazo denominados na moeda nacional são indexados, e o que é pior, a taxas diárias, o que significa dizer que apresentam Macaulay duration de 1 dia, e finalmente, o mercado secundário é ainda muito reduzido.

Entretanto sempre fica alguma coisa boa. Sabe-se que o Banco Central do Brasil vem desenvolvendo um trabalho junto ao mercado financeiro buscando maneiras de alongar o prazo de vencimento dos títulos da dívida interna. Para induzir os investidores a adquirir títulos mais longevos estes instrumentos poderão incluir opções que propiciem proteção aos investidores contra grandes incertezas nas taxas de juros. Além disso se discute maneiras que contribuam para o desenvolvimento de um mercado secundário de títulos federais, tornando-os mais líquidos. Todas estas notícias são um alento, pois se o trabalho não pôde ser concluído como desejado, a perspectiva da utilização dos conceitos e técnicas aqui apresentadas permitem antever alguma utilização futura para esta dissertação.

Bibliografia

Banco Central do Brasil, Nota para a Imprensa – Política Fiscal, 21 fevereiro 2000.

BLACK, Fisher, DERMAN, Emanuel e TOY, William. A one-factor model of interest rates and its application to treasury *bonds* options. Financial Analysts Journal, p. 33-39. Jan/Feb, 1990.

BLACK, Fisher, e SCHOLES, Myron. The valuation of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81, p. 637-54, May/June, 1973.

BRENNAN, Michael J. e SCHWARTZ, Eduardo S. A continuous time approach to the pricing of *bonds*, Jounal of Banking and Finance,3, p. 133-155, 1979.

COX, John C., INGERSOLL Jr., Jonathan E. e ROSS, Stephen A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, vol.53, N.2, p. 385-407, 1985.

CULBERTSON, J.M. The term structure of interest rates. Quarterly Journal of Economics, p. 485-517, November, 1957.

ELTON, Edwin J. Debt Instruments and Markets, Lecture Notes. New York: Stern School of Business, Fall 1999.

FABOZZI, Frank J., *Bond* markets, analysis and strategies. 3.ed. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1996. 595p.

FISHER, Irving. Appreciation and interest. Publications of the American Economic Association, XI, August, 1986.

FISHER, L. e WEIL, R. L. Coping with the risk of market-rate fluctuations: returns to bondholders from naive and optimal strategies. Journal of Business, 44, p. 408-431, 1977.

FRANCIS, Jack Clark. Investments: analysis and management. 5.ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1991. 825p.

GARBADE, Kenneth D. Fixed income analytics. 2.ed. Cambridge, Massachusetts, USA: The MIT Press, 1998. 472p.

GREENE, William H. Econometric Analysis. 3.ed. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1997. 1075p.

HICKS, John R. Value and capital. 2.ed. London: Oxford University Press, 1946, p.141-145.

HO, Thomas S. Y. e LEE, Sang-Bin. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. The Journal of Finance, Vol.XLI, N.5, p. 1011-1029, 1986.

LUENBERGER, David G. Investment science. New York: Oxford University Press, Inc, 1998. 494p.

LUTZ, F. The structure of interest rates. Quarterly Journal of Economics. p. 36-63, November 1940.

MACAULAY, Frederick,. Some theoretical problems suggested by the movement of interest rates, bond yields, and stock prices in the U. S. since 1856. New York: National Bureau of Economic Research, 1938.

MODIGLIANI, Franco e SUTCH, Richard. Innovations in interest rate policy. American Economic Review, p. 178-197, May 1966.

MERTON, Robert C. Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, p. 141-83, Spring 1973.

MERTON, Robert C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. Journal of Finance, 29, p. 449-70, May 1974.

NEFTCI, Salih N. An introduction to the mathematics of financial derivatives. New York: Academic Press, 1996. 352p

Papéis brasileiros reconquistam confiança, O Estado de São Paulo, 26 fevereiro 2000. Caderno Economia & Negócios, p. B2.

Site www.bloomberg.com, 23 fevereiro 2000, às 10:16am EST.

Van HORNE, James C. Financial market rates & flows. 4.ed. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1994. 338p.

VASICEK, Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5, p.177-188, 1977.