FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

Expectativas Heterogêneas, Análises Técnicas e os Preços de Equilíbrio

Dissertação Submetida à Congregação da Escola de Pós Graduação em Economia (EPGE) da Fundação Getulio Vargas Para a Obtenção do Grau de

Mestre em Economia

Por

Breno Schmidt

Rio de Janeiro

Agosto de 2001

A Letícia Bianchi Guimarães

Agradecimentos:

Este trabalho representa o encerramento dos meus estudos na Escola de Pós Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas. Ambos seriam impossíveis sem o apoio incondicional da minha família e amigos. Em particular, gostaria de agradecer a Antônio Machado, Flávio Cunha, Guilherme Castro e Gustavo Reis por suas contribuições para esta tese e para o meu aprendizado em geral.

Os Professores Aloisio Araujo e Marco Bonomo foram as minhas maiores influências na EPGE e a eles eu devo muito. O Professor Marcio Garcia gentilmente aceitou fazer parte de banca examinadora. Gostaria de agradecê-lo ainda por seus comentários e correções. Agradeço também ao Professor Marcelo Fernandes que comentou uma versão preliminar e me deu a idéia de utilizar o método *block bootstrap* na parte final deste trabalho.

Finalmente, gostaria de agradecer a EPGE, seus alunos professores e funcionários, por todo o apoio e dedicação.

“Life, Prince Leon, may well be compared with these public Games for in the vast crowd assembled here some are attracted by the acquisition of gain, others are led on by the hopes and ambitions of fame and glory. But among them there are a few who have come to observe and understand all that passes here.”

Pitágoras

Resumo

Este trabalho trata das consequências sobre os preços de equilíbrio da presença de agentes com racionalidade limitada e da possibilidade de eficácia de um tipo de análise técnica muito utilizada no mercado financeiro: a regra de médias móveis. Na primeira parte, apresentamos uma resenha de diversos trabalhos sobre o papel dos agentes com racionalidade limitada na formação dos preços de equilíbrio das ações. Os diversos modelos foram colocados em um arcabouço comum para facilitar a exposição. Sob hipóteses gerais, a presença de agentes com racionalidade limitada aumenta a volatilidade das ações e pode tornar as trajetórias de preços bastante complicadas. A presença de agentes irracionais e de analistas técnicos pode ser justificada do ponto de vista teórico. Porém, utilizando técnicas de *bootstrap*, não encontramos evidências empíricas de que um tipo particular de regra de médias móveis produza retornos acima da média incondicional do IBOVESPA.

Sumário

1 Introdução: 2
2 Limitações dos Modelo de Expectativas Racionais Para os Mercados de Ativos 4
2.1 Alguns Fatos Estilizados 4
2.1.1 A Hipótese de Mercados Eficientes 5
2.2 Expectativas Racionais e Eficiência de Mercado 5
2.3 Milgrom e Stokey 6
2.4 O Retorno Excessivo das Ações: *The Equity Premium Puzzle* . . . 7
3 Modelo Básico 7
4 O Risco dos *Noise Traders* 9
4.1 A Sobrevivência dos *Noise Traders* 13
4.2 A Importância do Conceito de *Noise Risk* 15
5 Modelos com Racionalidade Limitada e Expectativas Heterogêneas . . . 16
5.1 O Modelo 17
5.2 Exemplos de Previsores 22
5.2.1 Fundamentalistas versus Tendencialistas 23
5.2.2 Quatro tipos diferentes de previsores 29
5.3 Conclusões 32
6 A Eficácia da Regra de Média Móvel no IBOVESPA 33
6.1 Os Dados 34
6.2 A Eficácia da Estratégia de Média Móvel 35
6.3 A Técnica *Bootstrap* 37
7 Considerações Finais 45
8 Apêndices 46
8.1 Alguns Conceitos de Complexidade 46
8.2 Trajetórias de Preços em Economias com Grande Número de Agentes 49

1 Introdução:

O estudo da Economia possui dois objetivos fundamentais. Por um lado, estamos interessados em entender como os indivíduos e as instituições decidem empregar recursos escassos. Por outro, queremos interferir neste processo, de forma a obter um determinado resultado. Em ambos os casos, nos defrontamos com o problema de como os agentes enxergam o futuro, ou seja, de que modo são formadas as suas expectativas.

O entendimento de como os indivíduos esperam que a economia se comporte no futuro é fundamental: dependendo de como são formadas estas expectativas o modelo pode apresentar resultados bem diferentes[1].

Neste contexto, um ponto de partida natural na elaboração de modelos econômicos com incerteza seria a especificação do modo como os indivíduos formam as suas expectativas. A primeira solução foi dada pela imposição de regras *ad-hoc* para a formação das expectativas. Por exemplo, sob a hipótese de expectativas adaptativas conseguia-se bons resultados na modelagem de algumas dinâmicas econômicas[2].

Porém, neste tipo de modelo, a regra de formação das expectativas não está fundamentada, ou seja, não há uma base teórica sustentando que as expectativas dos indivíduos se comportam de acordo com esta ou aquela regra. Isto leva a debates estéreis sobre qual fórmula seria a mais adequada. A isto, soma-se o fato de que o resultado do modelo não é robusto à forma com que as expectativas são introduzidas. Como consequência, os modelos acabam por perder parte da sua função de instrumentos de previsão, uma vez que através de uma regra de formação de expectativas conveniente podemos supor o resultado desejado.

Buscando encontrar uma alternativa à hipótese de expectativas adaptativas, duas correntes de pensamento tomaram forma no início dos anos 60. De um lado estava Herbert A. Simon da Universidade Carnegie-Mellon, que propunha a idéia de *bounded rationality*. Este conceito está baseado na crença de que os indivíduos, apesar de racionais, possuem habilidades computacionais limitadas. Na direção

[1] O exemplo clássico de como as variáveis endógenas da economia podem ser afetadas pelas expectativas formadas pelos agentes é dado, entre outros, por Nerlove (1958). Ao decidir o quanto deve plantar, o agricultor leva em consideração o preço que ele acredita que irá vigorar a época da colheita. Por outro lado, o preço de equilíbrio depende da quantidade de produto que o agricultor leva ao mercado, além da demanda pelo bem. Neste contexto, diferentes hipóteses quanto a formação das expectativas levam a dinâmicas de preços e produto distintas.

[2] Um dos primeiros modelos em que são utilizadas expectativas *ad-hoc* foi o de Fisher (1930), em que o autor trata da relação entre os juros nominais e as expectativas de inflação. A partir de então, os modelos de expectativas adaptativas tiveram grande sucesso na modelagem de certos fenômenos macroeconômicos. Por exemplo, segundo Simonsen (1983), a teoria aceleracionista da curva de Phillips com a hipótese de expectativas adaptativas conseguiu explicar "por que a prosperidade é a companheira dos primeiros passos da inflação, e por que a política anti-inflacionária costuma exigir uma temporada de recessão." Lembremos ainda que em seu trabalho mais influente, Cagan (1956) também utilizou esta hipótese na construção de um modelo que buscava explicar o processo hiperinflacionário.

oposta estava seu colega de departamento, John F. Muth, desenvolvendo a idéia de expectativas racionais. Por uma razão ou outra, a hipótese de expectativas racionais tomou força e terminou por impulsionar, nas décadas seguintes, uma enorme revolução no pensamento econômico[3].

Desta forma, podemos argumentar que existem duas visões distintas sobre o modo como os indivíduos formam as suas expectativas. De um lado temos a Escola Neoclássica e o conceito de expectativas racionais. Como se sabe, este conceito supõe que, no processo de previsão, o indivíduo leva em consideração toda a informação que possui, utilizando a melhor tecnologia disponível no processamento desta informação. Estreitamente relacionado com este conceito é o argumento da impossibilidade de ganhos de arbitragem no mercado acionário: se algum indivíduo elevasse o preço de um ativo acima do seu equilíbrio, imediatamente os agentes racionais lhe venderiam quantidades ilimitadas deste ativo, forçando o seu preço de volta para o equilíbrio e realizando um lucro infinito[4]. Este raciocínio levou a conclusão de que indivíduos irracionais não sobreviveriam no mercado[5].

Em oposição a esta idéia, a Escola Keynesiana argumenta que os indivíduos não são totalmente racionais[6]. Ao contrário, os indivíduos são muitas vezes impulsionados por suas emoções *(animal spirits)*. Assim, fatores outros que os fundamentos da economia interfeririam no equilíbrio dos preços. Considere, por exemplo, os operadores de mercado que utilizam as chamadas análises técnicas. Estas consistem em tentar descobrir no comportamento passado dos preços relações não lineares que possam ser utilizadas na previsão dos preços futuros. Estes indivíduos, conhecidos na literatura como *tecnical traders,* são muitas vezes chamados de *grafistas* (por causa de sua indispensável ferramenta de trabalho).

A visão neoclássica tem sido muito atacada. Particularmente no contexto dos mercados financeiros, o modelo neoclássico, apesar de teoricamente irrepreensível, não consegue explicar com clareza certos fatos estilizados.

O mundo real não é composto de agentes com expectativas racionais. Como uma primeira aproximação, trabalhar com agentes perfeitamente racionais é mais simples, e produz conclusões importantes a respeito dos preços dos ativos. Porém, cabe perguntar quais as consequências de fazermos tal aproximação. Dito de outra forma, qual a influência que a presença de agentes com racionalidade

[3]Ver Sargent (1993) e Sheffrin (1983) para uma análise sobre a evolução do conceito de expectativas racionais.

[4]Existem certas hipóteses fortes por trás deste argumento, como veremos na seção 4.

[5]Ver Friedman (1953) para o desenvolvimento desta linha de raciocínio. Porém, como veremos ao longo deste trabalho, o argumento de Friedman pressupõe um poder ilimitado de arbitragem por parte dos indivíduos racionais. Se relaxarmos esta hipótese é possível que agentes irracionais sobrevivam no mercado. Trataremos mais deste assunto na seção 4.1.

[6]Devemos ter cuidado como interpretamos a palavra *racional*. Geralmente, dizemos que um indivíduo é racional se ele consegue ordenar, de forma consistente, todas as suas alternativas de escolha. Neste trabalho, o termo *indivíduo racional* será utilizado para designar o indivíduo que possui expectativas racionais. Mais precisamente, iremos utilizar o conceito de expectativas racionais no sentido de Lucas (1972).

limitada teria sobre os preços de equilíbrio?

Este trabalho trata das consequências sobre os preços de equilíbrio da presença de agentes com racionalidade limitada na economia e da possibilidade de eficácia das análises técnicas utilizadas pelos grafistas. A seção 2 expões as limitações dos modelos de expectativas racionais ao não explicar alguns fatos estilizados para o mercado de ativos. Logo a seguir, apresentamos o modelo básico que será utilizado ao longo deste trabalho. As seções 4 e 5 apresentam uma resenha de diversos trabalhos que tratam das consequências sobre o preço de equilíbrio da presença de agentes irracionais e com racionalidade limitada. Tentou-se colocar os diversos modelos em um arcabouço comum, de forma que fosse possível uma melhor identificação de seus resultados e diferenças. Na seção 6, analisamos a eficácia no IBOVESPA de uma técnica muito utilizada pelos grafistas, a técnica de média móvel. As considerações finais são feitas na seção 7.

2 Limitações dos Modelo de Expectativas Racionais Para os Mercados de Ativos

2.1 Alguns Fatos Estilizados

Nesta seção, apresentaremos alguns fatos estilizados para o mercado de ativos. Veremos que alguns são bastante controvertidos, como o caso da hipótese de mercados eficientes. De qualquer forma, iremos supor que o mercado de ativos possui as seguintes características:

1. Existe um grande número de transações ocorrendo diariamente nas bolsas de valores.

2. O retorno das ações é *muito* maior do que o retorno dos títulos sem risco.

3. A volatilidade das ações é maior do que a que seria justificada por seus fundamentos.

O primeiro fato é trivial. A segunda característica foi observada por Mehra e Prescott (1985). Neste famoso artigo, os autores inferiram que o retorno médio das ações americanas era por volta de 8%, enquanto que o retorno dos títulos sem risco era por volta de zero. Obviamente, esperaríamos que o retorno das ações fosse maior do que os dos títulos, já que são ativos arriscados. Porém, o excesso de retorno observado é muito maior do que o esperado (em um sentido que ficará claro na próxima seção). Finalmente, a terceira característica é a que merece uma maior explicação.

2.1.1 A Hipótese de Mercados Eficientes

O mercado de ativos é eficiente em relação a um conjunto de informação se o ganho esperado de uma operação baseada em elementos deste conjunto é zero.[7] Muito se tem publicado na direção de corroborar ou não a hipótese de mercados eficientes.[8] Nas palavras de Shleifer e Summers "*if the efficient markets hypothesis was a publicly traded security, its price would be enourmously volatile*".[9]

Até a década de 80, parecia haver um certo consenso entre os economistas de que os mercados eram eficientes.[10] Porém, como é comum em Economia, este consenso não resistiu muito tempo. Os trabalhos de Shiller (1981) e Leroy e Porter (1981) tiveram grande repercussão ao inferir que a volatilidade no mercado de ações era muito maior do que a que seria justificada por variações nos dividendos. Apesar de as técnicas econométricas utilizadas por estes autores terem sido contestadas, este resultado não é muito surpreendente, já que é difícil imaginar que a enorme variação diária do preço das ações seja fruto apenas de mudanças no valor esperado dos dividendos. Com efeito, a partir do final da década de 80, vários trabalhos utilizando técnicas modernas de econometria suportaram a conclusão que Shiller, Leroy e Porter: os mercados de ativos não são eficientes.[11] Porém, se isto for verdade, então a informação contida nos preços passados ajudaria na previsão dos preços futuros. Esta é exatamente a conclusão de Brock, Lakonishok e LeBaron (1992). Neste trabalho, os autores mostram que indivíduos utilizando técnicas simples de médias móveis poderiam ter tido um retorno superior ao índice Dow Jones no período de 1897 a 1986. Examinaremos esta questão mais detalhadamente na seção 6.

Considere um modelo de equilíbrio geral com expectativas racionais ao estilo de Lucas (1978). Veremos a seguir que este modelo tem dificuldades em explicar os fatos estilizados considerados acima.

2.2 Expectativas Racionais e Eficiência de Mercado

Da maneira com que foi formulado, o conceito de mercados eficientes possui uma ligação estreita com a hipótese de expectativas racionais. Suponha um equilíbrio de expectativas racionais. Se os indivíduos estão utilizando toda a

[7] Fama (1970) classifica a eficiência no mercado de ativos em três esferas distintas, dependendo do conjunto de informação considerado. Existe *eficiência fraca* quando os preços revelam toda a informação contida nos preços passados. A *eficiência semi-forte* ocorre quando o conjunto de informação é composto por toda a informação disponível publicamente. Finalmente, o conceito de *eficiência forte* requer que os preços revelem, inclusive, informações privadas.

[8] Goss (1992) traz inúmeras referências

[9] Shleifer e Summers (1990).

[10] Como exemplo, Shleifer e Summers (1990) citam o artigo de Jensen (1978), no qual o autor afirma que "*the efficient market hypothesis is the best established fact in all of social sciences*".

[11] Ver Campbell e Shiller (1988a,b), Leroy e Parke (1992) e Campbell e Kyle (1993).

informação disponível na economia, ou dito de outra forma, se todos os ganhos de arbitragem já foram exauridos, então os preços dos ativos devem refletir toda esta informação. Caso isto não ocorresse, existiriam oportunidades sistemáticas de lucro para indivíduos melhor informados. Mas isto violaria a hipótese de que os indivíduos utilizam toda a informação da melhor maneira possível.

Considere um modelo simples de um mercado de ativos com expectativas racionais. Em equilíbrio, os preços devem ser função apenas do valor presente dos dividendos futuros, de modo que os mercados são eficientes.[12] Isto significa que as variações nos preços de equilíbrio dos ativos são causadas por mudanças nas percepções quanto ao comportamento dos dividendos futuros. Porém, o que se observa nos dados é uma volatilidade dos preços muito maior do que a justificada pelos dividendos. Voltaremos a este ponto mais tarde.

Uma saída para este problema é relaxar a hipótese de racionalidade plena na economia. Se existem indivíduos que não possuem expectativas racionais, então o preço de equilíbrio deve refletir, além dos fundamentos, o modo com que estes agentes formam as suas expectativas.

2.3 Milgrom e Stokey

De forma a justificar o grande fluxo de transações, suponha que exista assimetria de informação nos mercados financeiros. A idéia é que a existência de informações privilegiadas levaria a um maior volume de transação. Com isso os indivíduos não trocariam ativos apenas com a chegada de novas informações (públicas) sobre os fundamentos. Porém, Milgrom e Stokey (1982) demonstraram que em um modelo de expectativas racionais com assimetria de informação, se a economia começa em uma situação eficiente no sentido de Pareto, o melhor que agentes avessos ao risco podem fazer é não transacionar. A razão disto é bastante intuitiva: em um mercado em que a informação é assimétrica, se um indivíduo A se propõe a transacionar, os demais indivíduos inferem que A deve possuir uma informação privilegiada sobre o ativo. Assim, a única forma destes outros indivíduos aceitarem a transação é se eles próprios possuírem uma informação de melhor qualidade. Porém, neste caso, o indivíduo A não aceitaria a transação que ele mesmo está propondo! Desta forma, o único equilíbrio é não haver transação alguma.[13]

Mas como explicar o enorme fluxo de transações verificados diariamente nas bolsas de todo o mundo?

[12] Lucas (1978) utiliza um modelo de equilíbrio geral com expectativas racionais para encontrar o funcional de preços da economia. O autor mostra que, como caso particular, é possível encontrar o funcional de preços como sendo *igual* ao valor presente (esperado) dos seus dividendos futuros.

[13] Este resultado é de certa forma surpreendente, já que a chegada de novas informações muda as *priors* dos indivíduos. Isto mudaria as taxas marginais de substituição, o que seria um indício de que os agentes estariam dispostos a transacionar.

Podemos responder esta questão de pelo menos duas maneiras.

Em primeiro lugar, poderíamos imaginar que estamos numa situação que não seja Pareto ótima, o que justificaria a existência de transações. Porém, análises fora do equilíbrio são muito controversas, já que o mercado de ativos parece se ajustar quase que instantaneamente. De qualquer forma, é tal o volume de transações, que fica difícil imaginar que estamos apenas observando transições até o ótimo de Pareto. Um outro argumento, este sim bem mais palatável, é que existem indivíduos na economia que não possuem expectativas racionais. A introdução de agentes não racionais na economia possibilita a existência de trocas, mesmo quando partimos de uma situação eficiente no sentido de Pareto[14].

2.4 O Retorno Excessivo das Ações: The Equity Premium Puzzle

Em 1985, Mehra e Prescott mostraram em um artigo publicado no *Journal of Monetary Economics* que o retorno médio das ações americanas era por volta de 8%, enquanto que o retorno dos títulos sem risco era por volta de zero. Tal diferença, concluíram os autores, não poderia ser explicada apenas pela aversão ao risco dos investidores, quando consideramos um modelo tradicional de indivíduo representativo. Segundo este modelo o excesso de retorno só seria explicado se os indivíduos possuíssem uma aversão ao risco muito maior do que a empiricamente justificada. Parte do *puzzle* pode ser solucionada se relaxarmos a hipótese de racionalidade plena[15]. Trataremos mais deste assunto na seção 4.

3 Modelo Básico

Nesta seção, descreveremos um modelo simples de preços de ativos que será utilizado ao longo deste trabalho. Considere um modelo competitivo de gerações superpostas com dois períodos. A cada período os agentes devem decidir o quanto alocar de sua riqueza em cada um dos dois ativos disponíveis:

$\Longrightarrow$ Ativo sem risco: custa 1 e possui retorno $R = (1 + r)$, onde $r > 0$;

$\Longrightarrow$ Ativo arriscado: custa p_t e paga dividendos estocásticos y_t.[16]

[14] Esta não é a única forma de resolver o problema de não transação. Em modelos sequenciais com assimetria de informação e choques nas transações, podemos ter equilíbrio com transação. Não trataremos de modelos sequencias neste trabalho. Ver O'Hara (1995) para uma discussão sobre o assunto.

[15] Novamente, a introdução de agentes irracionais não é a única forma de resolver o *Equity Premium Puzzle*. Ver O'Hara (1995).

[16] Por enquanto, não vamos assumir nenhuma hipótese sobre o processo estocástico $\{y_t\}$.

No segundo período os indivíduos consomem tudo aquilo que investiram. Por hipótese, não há consumo no primeiro período.

Suponha que existam $h = 1, 2, ..., H$ tipos de indivíduos nesta economia. Estes indivíduos diferem quanto a sua crença sobre a função de probabilidade que rege os preços (*cum-dividendo)* futuros. Defina E_{ht} e V_{ht} como sendo a esperança e a variância condicionais, percebidas pelo indivíduo h. De maneira semelhante, podemos definir E_t e V_t como sendo a esperança e a variância condicionadas aos valores passados dos preços e dos dividendos.[17]

Imaginemos que a função de utilidade do indivíduo h seja do tipo média-variância[18]:

$$E_{ht}[W^h_{t+1}] - \frac{\gamma_h}{2} V_{ht}[W^h_{t+1}] \tag{1}$$

onde:

W^h_{t+1} : riqueza do indivíduo h no segundo período;
γ_h : coeficiente absoluto de aversão ao risco do indivíduo h.

Nesta estrutura, o problema do indivíduo h é escolher o quanto alocar de sua riqueza em cada ativo de modo a maximizar a sua utilidade esperada quando idoso, sujeito a sua restrição orçamentária:

$$\underset{z^h_t, \phi^h_t}{Max} E_{ht}[W^h_{t+1}] - \frac{\gamma_h}{2} V_{ht}[W^h_{t+1}] \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad W^h_t &= z^h_t p_t + \phi^h_t \\ W^h_{t+1} &= z^h_t (p_{t+1} + y_{t+1}) + \phi^h_t R \end{aligned}$$

onde:

z^h_t : quantidade alocada pelo indivíduo h no ativo arriscado;
ϕ^h_t : quantidade alocada pelo indivíduo h no ativo sem risco.

As restrições orçamentárias do indivíduo podem ser escritas sob a forma intertemporal:

$$W^h_{t+1} = z^h_t (p_{t+1} + y_{t+1} - R p_t) + R W_t \tag{3}$$

[17] Estes valores estão sob domínio público.

[18] Podemos justificar a utilização de funções utilidades deste tipo de diversas formas. Por exemplo, se a função de utilidade do indivíduo é do tipo $U_h = -\exp[-\gamma W^h_{t+1}]$, podemos mostrar que as condições de primeira ordem serão idênticas às que surgem da maximização de (1), desde que os retornos sejam normalmente distribuídos.

Uma outra alternativa, é supor que o indivíduo possue uma função de utilidade quadrática. Isto implica que este indivíduo preocupa-se somente com os dois primeiros momentos da função de probabilidade da sua riqueza futura. Ver Huang e Litzenberger (1988) para um tratamento mais profundo quanto a utilização de funções de utilidade do tipo média-variância em finanças.

Defina o excesso de retorno do ativo arriscado como:

$$R_{t+1} \equiv p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t \tag{4}$$

Iremos assumir que a variância do excesso de retorno é constante ao longo do tempo e para todos os tipos de indivíduos[19]. Com isso, definimos:

$$V_{ht} R_{t+1} \equiv \sigma^2_{R_{t+1}}$$

Com estas hipóteses, o problema do indivíduo é solucionado por:

$$z_{ht} = \frac{E_{ht}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t]}{\gamma_h \sigma^2_{R_{t+1}}} \tag{5}$$

A equação (5) é a função demanda do indivíduo h pelo ativo arriscado. Uma análise desta equação nos apresenta dois canais para a introdução de heterogeneidade nesta economia: a esperança condicional e o coeficiente de aversão ao risco. Neste trabalho estaremos basicamente preocupados com diferenças no primeiro momento da distribuição de probabilidade dos preços futuros e não com diferenças na aversão ao risco. Desta forma, a aversão a risco é suposta constante entre os indivíduos.

4 O Risco dos Noise Traders

O termo *noise trader* foi introduzido na literatura de finanças por Kyle (1985) e Black (1986)[20].

Black começa seu artigo reconhecendo os problemas com os modelos de expectativas racionais, principalmente o problema da não transação e o paradoxo do custo da informação.[21]

[19] Uma justificativa para esta simplificação pode ser encontrada em Nelson (1992). O autor mostra que a estimação de variâncias condicionais é muito mais fácil do que a estimação de médias condicionais. Desta forma, os agentes irão diferir muito mais na média condicional do que na variância condicional.

[20] Enquanto o artigo de Kyle parece estar mais preocupado em modelar como os agentes racionais explorariam a falta de racionalidade dos *noise traders*, gerando o *bid-ask spread*, o trabalho de Black está mais interessado nas consequências gerais da introdução deste tipo de agente na economia e, em particular, na sua ação sobre o preço dos ativos. A influência da presença de ruído na economia parece ser uma questão mais interessante, de modo que nos concentraremos no trabalho de Black.

[21] Em modelos de expectativas racionais com assimetria de informação, o preço de equilíbrio é plenamente revelador. Se toda a informação está nos preços os indivíduos não teriam, *ex-ante,* incentivos a buscar, por si próprios, qualquer informação. Dito de outra forma, a informação privada não teria valor monetário. Mas, se nenhum agente procura informação, como esta informação aparece na economia? Ver Grossman (1989) para uma discussão detalhada sobre o papel informacional dos preços.

O problema dos modelos com racionalidade plena é que, apesar de haver incerteza quanto ao estado futuro da economia, não há incerteza quanto ao comportamento dos agentes. É exatamente este tipo de certeza que permite que os agentes possam inferir que determinado indivíduo possui informação privada meramente pela sua disposição a transacionar. A introdução de incerteza no comportamento dos agentes quebra esta ligação, criando a possibilidade de transação.

A definição de Black para os *noise traders* prima pela clareza e simplicidade: "*noise trading is trading on noise as if it were information*". O exemplo clássico são os indivíduos que acreditam que possuem informações privilegiadas sobre determinada ação mas na verdade só possuem ruído. Porém, existem outros exemplos que tentam justificar este tipo de comportamento sem apelar para diferenças na qualidade da informação. Considere o caso em que ocorreu determinado estado da natureza que fez com que um indivíduo precisasse de liquidez. Isto forçaria este indivíduo a vender parte de seus ativos, independente do preço que está em vigor.

O que mais impressiona no artigo de Black é a forma clara com que ele aborda as principais características da introdução de risco na economia. Apesar do artigo não conter nenhum modelo analítico formal, as principais conclusões do autor receberam o devido respaldo matemático em artigos posteriores, notadamente na trilogia de De Long, Shleifer, Summers, e Waldman.[22] Este será o assunto desta seção.

Em modelos com racionalidade plena os preços seguem apenas os fundamentos da economia. Qual seria a consequência nos preços de equilíbrio da presença dos *noise traders*? Uma análise superficial seria a seguinte: se os preços se desviassem dos seus fundamentos os agentes racionais iriam tomar posições ilimitadas contrárias às dos agentes irracionais, forçando imediatamente o preço de volta ao seu valor fundamental. Nesta análise simplista estamos implicitamente supondo que não existe incerteza (por parte dos agentes racionais) nem quanto aos fundamentos da economia nem quanto ao comportamento dos *noise traders*. Em outras palavras estamos supondo que os racionais possuem um poder de arbitragem ilimitado. Mas, pela própria definição de *noise traders*, o seu comportamento é incerto. Se os agente racionais são avessos ao risco, esta incerteza limita o seu poder de arbitragem. Um exemplo simples ajuda a entender este argumento. Suponha que o comportamento dos agentes irracionais elevou o preço acima do seu fundamento. Os agentes racionais estariam propensos a arbitrar em cima dos *noise traders*. Porém, estes agentes racionais percebem que devido ao comportamento incerto dos *noise traders*, é possível que eles continuem comprando ações, elevando ainda mais o seu preço. Como se tratam de agentes avessos ao risco, esta incerteza quanto ao comportamento dos *noise traders* limita a ação dos arbitradores. Observe que este argumento é valido mesmo quando não existe

[22] De Long, Shleifer, Summers e Waldman (1989, 1990 e 1991).

incerteza quanto aos fundamentos da economia!

Contudo, se os agentes racionais possuíssem vida infinita, esta limitação poderia desaparecer (se a distribuição de probabilidade que rege o comportamento dos *noise traders* fosse conhecida). Por esta razão, uma outra hipótese implícita no modelo básico é a de que o horizonte de escolha dos indivíduos racionais é limitado. Isto impede que os agentes racionais possam amparar-se em alguma lei de grandes números e esperar indefinidamente até que o preço volte ao seu valor fundamental, para então realizar os seus lucros de arbitragem.

De Long, Shleifer, Summers, e Waldman (1990) modelaram formalmente o papel do risco dos *noise traders* no comportamento dos preços. De forma a simplificar o problema, suponha que existam apenas dois tipos de agentes:

$\Longrightarrow$ Racionais, denotados por i;

$\Longrightarrow$ *Noise traders*, denotados por n.

Os indivíduos diferem, basicamente, na sua percepção quanto ao comportamento dos preços. Os indivíduos racionais possuem expectativas racionais e conhecem a verdadeira distribuição dos retornos dos ativos. Por sua vez, os *noise traders* conhecem a taxa de retorno do ativo sem risco, mas erram em sua previsão quanto ao comportamento do preço da ação. Suponha que o erro dos *noise traders* ao inferir o preço *cum-dividendo* esperado para o próximo período seja dado por:

$$\rho_t = \rho^* + \eta_t \tag{6}$$

onde $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$.

Supomos ainda que o valor de ρ_t não é conhecido por nenhum indivíduo até a dada t.

Observe que esta hipótese sobre o erro de previsão nos permite encontrar uma relação entre o excesso de retorno esperado pelos agentes racionais e pelos *noise traders*:

$$E_{nt}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t] = E_{it}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t] + \rho_t \tag{7}$$

Considere o modelo básico descrito na seção 3 onde os indivíduos racionais estão presentes em medida $(1 - \mu)$ e os *noise traders* estão presentes em medida μ. Suponha que ambos os indivíduos possuem riqueza inicial igual a 1 e que a oferta líquida do ativo arriscado também seja igual a 1. Considere o caso em que não existe risco fundamental, ou seja, que o ativo arriscado paga um dividendo certo igual ao dividendo do ativo sem risco, ou seja, $y_t = r$. Apesar de não haver incerteza quanto ao dividendo do ativo arriscado, a presença dos *noise traders* faz com que o preço do ativo não seja previamente conhecido. Com isso, existe incerteza quanto ao excesso de retorno.

Note que isto implica que a variância condicional do excesso de retorno igualase a variância do preço: $\sigma^2_{R_{t+1}} = V_{ht} p_{t+1}$. Usando a equação (7) podemos, através

de uma simples manipulação da equação (5), escrever as demandas pelo ativo arriscado dos dois tipos de agentes:

$$z_{it} = \frac{E_{it}[p_{t+1} + r - Rp_t]}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} \tag{8}$$

$$z_{nt} = \frac{E_{it}[p_{t+1} + r - Rp_t]}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} + \frac{\rho_t}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} \tag{9}$$

Para encontrarmos o funcional de preços de equilíbrio, basta somarmos as demandas dos dois tipos de indivíduos e igualá-las a oferta de ativos arriscados, que é igual 1:

$$\begin{aligned} 1 &= (1-\mu) z_{it} + \mu z_{nt} \\ &= (1-\mu) \frac{E_{it}[p_{t+1} + r - Rp_t]}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} + \mu \frac{E_{it}[p_{t+1} + r - Rp_t]}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} + \mu \frac{\rho_t}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} \\ &= \frac{E_{it}[p_{t+1} + r - Rp_t]}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} + \mu \frac{\rho_t}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever p_t como:

$$p_t = \frac{1}{R} \left\{ r + \mu \rho_t + E_{it}[p_{t+1}] - \gamma \sigma^2_{R_{t+1}} \right\}$$

Resolvendo recursivamente este funcional, e usando a lei das expectativas iteradas, encontramos :

$$p_t = 1 + \frac{\mu(\rho_t - \rho^*)}{R} + \frac{\mu \rho^*}{R} - \frac{\gamma}{r} \sigma^2_{R_{t+1}} + \lim_{\tau \to \infty} \frac{E_{it}[p_\tau]}{R^\tau}$$

Iremos supor que não existem "bolhas" nos preços, ou seja, que $\lim_{\tau \to \infty} \frac{E_{it}[p_\tau]}{R^\tau} = 0$. Isto implica:

$$p_t = 1 + \frac{\mu(\rho_t - \rho^*)}{R} + \frac{\mu \rho^*}{R} - \frac{\gamma}{r} \sigma^2_{R_{t+1}} \tag{10}$$

Substituindo esta expressão na fórmula da variância do preço do período $t+1$, encontramos:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{R_{t+1}} &= Var\left[P_{t+1}\right] = Var\left[\frac{\mu(\rho_t - \rho^*)}{R}\right] \\ &= \frac{\mu^2 \sigma^2_\eta}{R^2} \end{aligned} \tag{11}$$

Logo, o preço de equilíbrio é dado por:

$$p_t = 1 + \frac{\mu(\rho_t - \rho^*)}{R} + \frac{\mu\rho^*}{R} - \frac{\gamma}{r}\frac{\mu^2\sigma_\eta^2}{R^2} \tag{12}$$

A equação (12) pode ser interpretada da seguinte forma. Os seus três últimos termos representam o impacto da presença dos *noise traders* no preço de equilíbrio. Com efeito, se existissem apenas indivíduos racionais na economia ($\mu = 0$ e $\sigma^2_{R_{t+1}} = 0$), a equação (10) nos diz que o preço do ativo deveria ser igual ao valor presente do seu fluxo de dividendos:

$$\begin{aligned} p_t^f &= \frac{r}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^2} + \frac{r}{(1+r)^3} + ... \\ &= 1 \end{aligned}$$

Este é o valor fundamental do preço de equilíbrio. Note que podemos obtê-lo através da equação (12), bastando para isso fazer $\mu = 0$ (ou seja, não existem *noise traders*).

Desta forma, a perturbação dos *noise traders* no preço de equilíbrio possui três componentes. Analisaremos os seus efeitos separadamente.

O primeiro componente, representado por $\frac{\mu(\rho_t - \rho^*)}{R}$, captura as flutuações no preço de equilíbrio devido à mudanças na opinião dos *noise traders* de determinada geração em relação à percepção média dos *noise traders*. Quando uma geração de *noise traders* é mais *bullish* do que a média das gerações, eles elevam o preço do ativo.

O termo $\frac{\mu\rho^*}{R}$, representa o efeito em p_t do viés médio dos *noise traders* em relação ao preço fundamental. Mede, de certa forma, a influência do grau de otimismo ou pessimismo que uma geração média possuiria.

Finalmente, o termo $\frac{\gamma}{r}\frac{\mu^2\sigma_\eta^2}{R^2}$ é o que possui a interpretação mais interessante. Observe que o ativo arriscado só é arriscado pela presença de *noise risk.* Como já vimos, na ausência deste tipo de investidor, o preço deste ativo deveria ser igual ao preço do ativo sem risco, ou seja, deveria ser igual a 1. Porém, se existe *noise risk*, este ativo passa a ter risco, e portanto deve ter um preço menor de modo a estimular a sua compra.

4.1 A Sobrevivência dos Noise Traders

A relutância em se utilizar modelos com agentes irracionais é até certo ponto justificável. Friedman (1953) já argumentava que indivíduos irracionais não poderiam sobreviver no mercado. Isto porque estes indivíduos (em média) comprariam na alta e venderiam na baixa de modo que acabariam por perder toda a sua riqueza. Porém, este argumento não leva em consideração a possibilidade que certas realizações do comportamento dos *noise traders* os levem a assumir um maior risco.

A presença de *noise risk* na economia reduz a atração dos agentes racionais pelo ativo arriscado, diminuindo o seu preço. Como o comportamento dos *noise traders* é aleatório, existe a possibilidade de que eles comprem uma quantidade maior do ativo arriscado que os indivíduos racionais e, por esta razão, possam receber um maior retorno esperado. Observe que este argumento não garante a sobrevivência dos agentes irracionais. No longo prazo, a probabilidade destes agentes enriquecerem é muito baixa, enquanto que a probabilidade deles irem à falência é muito alta. Isto sugere a necessidade de estudarmos o que ocorre com as distribuições de riqueza na economia ao longo do tempo.

Comecemos por analisar a possibilidade de que os agentes irracionais possuam um portifólio com maior retorno esperado.

A diferença entre o retorno esperado total dos dois tipos de agentes é dada por:

$$\Delta R_{n-i} = (z_{nt} - z_{it}) \left[p_{t+1} + r - p_t R \right] \tag{13}$$

Ou seja, esta diferença é dada pela diferença nas demandas por ação multiplicado pelo excesso de retorno pago por este ativo. Utilizando as equações (9) e (8), podemos escrever:

$$z_{nt} - z_{it} = \frac{\rho_t}{\gamma \sigma_\pi^2} = \frac{(1+r)^2 \rho_t}{\gamma \mu^2 \sigma_\eta^2} \tag{14}$$

onde a última igualdade segue de (11). Se utilizarmos a equação (10), o valor esperado, no período t, do excesso de retorno pode ser escrito como:

$$E_{it} \left[p_{t+1} + r - p_t R \right] = \gamma \sigma_\pi^2 - \mu \rho_t = \frac{\gamma \mu^2 \sigma_\eta^2}{R^2} - \mu \rho_t$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_{it} \left[\Delta R_{n-i} \right] &= \frac{R^2 \rho_t}{\gamma \mu^2 \sigma_\eta^2} \left(\frac{\gamma \mu^2 \sigma_\eta^2}{R^2} - \mu \rho_t \right) \\ &= \rho_t - \frac{R^2 \rho_t^2}{\gamma \mu \sigma_\eta^2} \end{aligned}$$

Se tomarmos a esperança da expressão acima para todo t:

$$E \left[\Delta R_{n-i} \right] = \rho^* - \frac{R^2 \left(\rho_t^* \right)^2 + R^2 \sigma_\eta^2}{\gamma \mu \sigma_\eta^2} \tag{15}$$

Como foi argumentado, para que os *noise traders* tomem mais risco é necessário que eles sejam *bullish* $(\rho^* > 0)$. Desta forma, quanto mais *bullish* são os indivíduos mais ações eles demandam, o que é refletido em maior retorno esperado de seu portifólio. O segundo termo da equação (15) é o resultado de três efeitos. O

termo $R^2 (\rho_t^*)^2$ incorpora o efeito que o aumento da demanda por ações tem sobre o preço. Novamente, quanto mais *bullish* os *noise traders*, mais eles demandam da ação o que eleva o seu preço, diminuindo o seu retorno. Por sua vez, o termo $R^2\sigma_\eta^2$ reflete a intuição de Friedman sobre o comportamento dos agentes irracionais. Quanto mais os *noise traders* compram da ação mais eles aumentam o risco desta ação (risco que eles mesmo geram). Finalmente, o termo $\gamma\mu\sigma_\eta^2$ explica a possibilidade de maior retorno por parte dos *noise traders*. Quanto mais *noise risk*, mais variável o preço se torna. Como os agentes racionais são avessos ao risco eles limitam a extensão de suas posições contra os *noise traders*. Assim, se este efeito é mais forte do que os dois efeitos anteriores e se os *noise traders* são *bullish* o suficiente, seu portifólio possui um retorno esperado maior.

Como havíamos comentado, esta possibilidade não garante a permanência dos indivíduos irracionais no mercado. Uma análise da distribuição de longo prazo da riqueza dos racionais e dos irracionais é feita por De Long, Shleifer, Summers, e Waldman (1991). A conclusão dos autores é que sob certas condições sobre o grau de "confusão" criada pelos *noise traders*, estes não apenas recebem um retorno esperado maior como também sobrevivem no mercado.

4.2 A Importância do Conceito de Noise Risk

O modelo apresentado é bastante simples. O objetivo dos autores é fazer com que o leitor entenda o papel que a presença de agentes irracionais tem sobre o preço de equilíbrio. Mesmo desprovido de maiores complicações, este modelo nos ajuda a compreender o porquê das dificuldades dos modelos de expectativas racionais em explicar os fatos estilizados da seção 2.

Já vimos como a introdução de agentes irracionais nos permite entender a enorme quantidade de transações nos mercados de ativos. Quanto ao excesso de volatilidade das ações em relação aos seus fundamentos, observe que no modelo descrito acima não existe risco fundamental, mas o preço de equilíbrio das ações varia ao longo do tempo. Assim, a volatilidade de uma ação seria explicada não apenas por mudanças em seus fundamentos, mas também pela presença de *noise traders*. Se existe *noise* na economia esta volatilidade pode ser muito alta.

Finalmente, o modelo também lança luz sobre o chamado *equity-premium puzzle*. Como os agentes são avessos ao risco, o retorno das ações deve ser maior do que o dos títulos sem risco. Chamamos este excesso de *prêmio de risco*. Como vimos, de modo a justificar o prêmio de risco observado no mercado, os modelos de expectativas racionais impõem um grau de aversão ao risco muito maior do que o razoável. Note que podemos olhar a questão por um outro ângulo. Considere um nível razoável de aversão ao risco. De forma a justificar o excesso de retorno, as ações deveriam ser mais arriscadas do que seria explicado pelos seus fundamentos. Mas isto é exatamente o que prevê o modelo de *noise traders*. Resumindo: parte de prêmio de risco deve-se ao *noise risk*, que não é capturado nos modelos de

expectativas racionais.

5 Modelos com Racionalidade Limitada e Expectativas Heterogêneas

Analisamos na seção passada o papel que indivíduos irracionais têm sobre o preço de equilíbrio. Nesta seção, estaremos interessados no comportamento dos preços de equilíbrio em uma economia com indivíduos com expectativas heterogêneas e racionalidade limitada.

Considere uma economia em que os indivíduos desconhecem a distribuição de probabilidade dos preços futuros de equilíbrio. Porém, suponha que estes indivíduos possam adquirir "previsores" para as realizações dos preços futuros. Basicamente existem duas classes de previsores: o fundamentalista e a "análise técnica". A cada período o indivíduo escolhe se será um fundamentalista ou um *tecnical trader* baseado em uma medida de performance para cada previsor.

Technical traders, ou analistas técnicos, são indivíduos que buscam na análise de séries de preços passadas padrões complexos que os ajudem a prever o comportamento dos preços futuros. Estes indivíduos são muitas vezes chamados de *grafistas* ou *tendencialistas*.

A utilização de análises técnicas tem origens remotas[23], e persiste até hoje. Como não existe qualquer fundamentação econômica clara nestas técnicas, seus precursores eram tratados com desprezo pela academia. Apesar disto, o uso de análises técnicas não retrocedeu. Assim, a questão de como os grafistas conseguem (ou conseguirão) sobreviver no mercado e a possível eficácia de suas técnicas voltou a instigar a curiosidade de muitos acadêmicos[24].

De qualquer forma, analistas técnicos e fundamentalistas continuam a conviver no mercado. Esta heterogeneidade das expectativas pode ter consequências interessantes sobre os preços de equilíbrio. Em particular, mostraremos que modelos em que a economia é formada por fundamentalistas e *tecnical traders* podem explicar alguns fatos estilizados que o modelo de expectativas racionais falha em explicar.

Nesta seção, exploraremos os artigos de Brock e Hommes (1997, 1998, 1999) onde os autores introduzem o conceito de *equilíbrio de crenças adaptativas* em

[23]Segundo Bernstein (1993), uma das primeiras técnicas de análise de preços passados para previsão de preços futuros foi desenvolvida por Charles Dow no final do século XIX. A idéia da "Dow Theory" é a mesma dos analistas técnicos atuais: a de que existem tendências nos preços que podem ser extrapoladas sistematicamente. Ironicamente, talvez esta teoria tenha contribuído para a disseminação do que Bernstein acredita ser a contribuição mais importante de Dow: os índices Dow&Jones.

[24]Uma análise sobre a eficácia das técnicas utilizadas por estes indivíduos será desenvolvida na seção 6.

uma economia com agentes heterogêneos. Além da sua beleza matemática, o modelo permite uma análise das possíveis consequências sobre os preços de equilíbrio da heterogeneidade dos agentes.

No que se segue, apresentaremos o modelo e seus principais resultados. Alguns destes resultados encontram respaldo na literatura recente de sistemas dinâmicos. Conceitos básicos de sistemas complexos são apresentados de forma heurística no apêndice.

5.1 O Modelo

Considere novamente o modelo básico da seção 3. Suponha que os ativos arriscados estão em oferta líquida zero. Lembre-se que existem H tipos de indivíduos nesta economia. Seja n_{ht} a proporção de indivíduos do tipo $h = 1, ..., H$ na data t. Em equilíbrio, a oferta de títulos deve ser igual a demanda, de forma que devemos ter:

$$\sum_h n_{ht} \left[\frac{E_{ht}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t]}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} \right] = 0$$

ou equivalentemente,

$$Rp_t = \sum_h n_{ht} E_{ht}[p_{t+1} + y_{t+1}] \tag{16}$$

Um caso particular muito importante é aquele em que todos os indivíduos possuem expectativas racionais. Neste caso, a expressão acima implica que o funcional de preços de equilíbrio sob expectativas racionais deve satisfazer:

$$Rp^*_t = E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1}] \tag{17}$$

onde p^*_t será chamado de solução fundamental. Podemos resolver recursivamente a equação acima (usando a lei das expectativas iteradas). Como resultado, teremos:

$$p^*_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E\left[y_{t+i}\right]}{R^i}$$

onde estamos supondo que, $\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{Ep^*_t}{R^t} = 0$, ou seja, que não existem bolhas especulativas. Observe que para o caso particular em que $\{y_{t+1}\}$ é I.I.D. com $E_t[y_{t+1}] = \bar{y}$, o preço de equilíbrio será constante:

$$\bar{p} = \frac{\bar{y}}{R - 1}$$

Defina o desvio do preço fundamental como sendo:

$$x_t \equiv p_t - p^*_t \tag{18}$$

Veremos mais adiante a conveniência de trabalharmos com desvios em relação ao preço fundamental.

Quanto a estrutura das expectativas dos agentes, suponha que:

$$E_{ht}[p_{t+1} + y_{t+1}] = E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1}] + f_h\left(x_{t-1}, ..., x_{t-L}\right) \tag{19}$$

onde f_h é uma função determinística qualquer que difere entre os diversos tipos de indivíduos. Desta forma, a esperança condicional do agente h sobre o nível de preços futuro é dada pela soma da parte fundamental deste preço com uma função de desvios passados. Esta especificação permite modelar o comportamento dos analistas técnicos, que utilizam informações passadas na previsão dos preços futuros. Note que podemos utilizar as equações (17) e (19) para escrever as demandas pelo ativo arriscado [equação (5)] na forma de desvio:

$$z_{ht-1} = \frac{f_{ht-1} - Rx_{t-1}}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} \tag{20}$$

Podemos então reescrever a equação (16) sob a forma de desvio:

$$\begin{aligned} Rx_t &= \sum_h n_{ht} E_{ht}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp^*_t] \\ &= \sum_h n_{ht}\{E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1} - Rp^*_t] + f_h\left(x_{t-1}, ..., x_{t-L}\right)\} \\ &= \sum_h n_{ht} f_h\left(x_{t-1}, ..., x_{t-L}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

onde a última igualdade segue da equação (17) .

Defina $\rho_{ht} \equiv E_{ht}[R_{t+1}]$ e considere a seguinte função objetivo:

$$\underset{z}{Max} E_{ht}[R_{t+1}]z - \frac{\gamma}{2} z^2 V_{ht}[R_{t+1}] = \underset{z}{Max} \rho_{ht} z - \frac{\gamma}{2} z^2 \sigma^2_{R_{t+1}} \tag{22}$$

Observe que (22) é equivalente ao problema (2) a menos de uma constante. Logo, a solução para a demanda por ativos arriscados é a mesma em ambos os problemas e depende apenas de ρ_{ht}. Chamaremos esta demanda de $z\left(\rho_{ht}\right)$.

Agora, podemos escrever o excesso de retorno do ativo arriscado como:

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t \\ &= x_{t+1} + p^*_{t+1} + y_{t+1} - Rx_t - Rp^*_t \\ &= x_{t+1} - Rx_t + p^*_{t+1} + y_{t+1} - E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1}] + E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1}] - Rp^*_t \\ &= x_{t+1} - Rx_t + p^*_{t+1} + y_{t+1} - E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1}] \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da equação (17). Defina $\delta_{t+1} \equiv p^*_{t+1} + y_{t+1} - E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1}]$. Observe que $E_t[\delta_{t+1}] = 0$, ou seja o processo $\{p^*_{t+1} + y_{t+1}\}$ é um martingal com relação aos fundamentos. Assim, escrevemos:

$$R_{t+1} = x_{t+1} - Rx_t + \delta_{t+1} \tag{23}$$

Podemos interpretar a equação (23) como a decomposição do excesso de retorno em dois componentes. O primeiro, $x_{t+1} - Rx_t$, representa a influência no excesso de retorno da presença dos analistas técnicos. Em outras palavras, indica a ação dos desvios em relação aos fundamentos. O segundo, δ_{t+1}, seria a contrapartida da hipótese de mercados eficientes, ou seja, só existiria excesso de retorno no caso de choques externos.

Precisamos definir a forma como os agentes enxergam o futuro. Numa solução engenhosa, Brock e Hommes (1997) supõe que existem H previsores para o preço futuro. Cada previsor é caracterizado pela forma com que as estimativas do excesso de retorno do ativo arriscado são produzidas. Diferentes tipos de previsores significam diferentes tipos de expectativas. Num contexto de racionalidade limitada, os agentes vão escolhendo entre estes previsores com base em uma medida de performance[25]. Isto introduz uma nova dimensão no problema dos indivíduos: não apenas eles devem escolher o quanto irão demandar do ativo arriscado, mas também qual previsor irão utilizar. Neste contexto, o indivíduo h é totalmente caracterizado pelo fato de estar utilizando o previsor h, de forma que os termos "previsor" e "expectativas" serão equivalentes.

Queremos definir uma medida de performance para um previsor. Uma medida simples poderia ser dada pelo lucro que foi observado quando se utilizou o previsor h no período anterior. Para isto, defina:

$$\pi_{h,t} \equiv \pi\left(R_{t+1}, \rho_{ht}\right) \equiv R_{t+1} z\left(\rho_{ht}\right) - C_{ht} = \left(x_{t+1} - Rx_t + \delta_{t+1}\right) z\left(\rho_{ht}\right) - C_{ht} \quad (24)$$

onde C_{ht} mede o preço do previsor h em t. Uma abordagem mais genérica seria utilizar não apenas o lucro realizado do período corrente, mas também os lucros realizados no passado. Uma das formas de modelarmos isto seria definir a medida de performance como:

$$U_{h,t} = \pi_{h,t} + \xi U_{h,t-1} \quad (25)$$

onde o parâmetro ξ representa a "memória" da medida de performance.

Falta definir a dinâmica da escolha dos previsores. A forma com que Brock e Hommes modelam as escolhas entre previsores é bastante interessante. A cada instante do tempo, o indivíduo deve escolher, entre um número finito de previsores, aquele que mais lhes agrada. Este é, tipicamente, um problema de *escolha discreta*. As últimas décadas presenciaram um enorme desenvolvimento nas aplicações de modelos de escolha discreta em economia. Para uma análise extensa sobre o assunto ver Maski e McFadden (1981) e Anderson, de Palma e Thiesse (1992).

Considere um indivíduo que se defronta com o conjunto finito H de previsores mutuamente exclusivos[26]. Suponha que ele deva selecionar o que mais lhe agrada

[25] Os agentes não são perfeitamente racionais pois não levam em consideração o comportamento dos demais agentes. Além disso, veremos mais que estes agentes não possuem toda a informação necessária para analisar a performance dos estimadores. Neste sentido, os agentes possuem racionalidade limitada.

[26] Na análise dos modelos de escolha discreta, seguimos Anderson, Palma e Thisse (1992).

baseado na medida de performance (25). A abordagem neoclássica para este problema é supor que o indivíduo é capaz de comparar dois previsores $a, b \in H$ usando um operador de preferências $\prec$. Se $a \prec b$, então ou o indivíduo prefere a a b, ou é indiferente entre as duas alternativas[27].

Como H é finito, podemos garantir a existência de uma alternativa preferida, ou seja,

$$\exists a^* \in H;\ a^* \prec a \quad \forall a \in H$$

Também garantimos a existência de uma função $U : H \to \Re$ tal que:

$$a \prec b \Longleftrightarrow U(a) \geq U(b) \quad \forall a, b \in H \tag{26}$$

Desta forma, podemos definir a medida de performance (25) como a função de utilidade sobre os previsores.

Para um economista neoclássico o problema de escolha entre os previsores é bastante simples: a cada período t todos os indivíduos escolhem o previsor de maior performance naquele período[28].

Uma outra alternativa seria imaginar que o indivíduo não consegue observar perfeitamente a performance do estimador. De forma concreta, suponha que a medida de peformance percebida pelo indivíduo seja dada por:

$$\tilde{U}_h = U_h + \varepsilon_h$$

[27]Por hipótese, o operador de preferências possui as seguintes propriedades: Reflexividade ($a \prec a,\ \forall a \in H$), Transitividade ($a \prec b$ e $b \prec c \Longrightarrow a \prec c \quad \forall a, b, c \in H$) e Completude ($a \prec b$ ou $b \prec a \quad \forall a, b, c \in H$). Um indivíduo cujas escolhas podem ser representadas por este operador de preferências é chamado de *racional*.

[28]A abordagem neoclássica tem sido combatida por muitos economistas e psicólogos (ver Anderson, Palma e Thiesse (1992) para inúmeras referências). Para estes, o comportamento humano é muito complexo para ser capturado por um modelo tão simples. Em particular, estudos sugerem que as escolhas dos indivíduos não são consistentes (ver Tversky (1969)). Por exemplo, considere um indivíduo que deve escolher entre duas alternativas repetidas vezes, sob situações semelhantes. O que os estudos sugerem é que pode ocorrer deste indivíduo escolher a primeira alternativa em algumas realizações do experimento, mas escolher a segunda em outras.

Uma forma de considerar este nível de complexidade nos modelos é a introdução de incerteza. O modelo neoclássico supõe determinação tanto no processo de escolha dos indivíduos quanto na forma de modelagem pelos economistas deste processo. Isto nos sugere dois canais para a introdução da incerteza. Por um lado, podemos supor que o processo de decisão dos indivíduos é determinístico mas uma análise completa deste processo por parte dos economistas é impossível. Surgem assim os modelos com função de utilidade estocástica. Alternativamente, podemos imaginar que os próprios indivíduos não possuem um poder analítico suficiente para que suas decisões sejam consistentes com os axiomas de racionalidade. Assim, mesmo que a forma de modelagem fosse ideal, o processo de escolha dos indivíduos possui um componente estocástico que não é capturado por um modelo determinístico. Este tipo de modelo tenta capturar a idéia de *bounded rationality* já que os indivíduos são incapazes de escolher a melhor alternativa para si mesmos.

Apesar de sua clara distinção, estas duas abordagens muitas vezes implicam nos mesmos modelos. A sua escolha torna-se, portanto, uma questão de menor relevância.

onde U_h é a verdadeira medida de performance e ε_h é uma variável aleatória de média zero. Com isso, a probabilidade do agente escolher o estimador h pode ser expressa por:

$$P_H(h) = \Pr\left[\tilde{U}_h = \max_{j=1,...,H} \tilde{U}_j\right] \qquad h = 1, ..., H$$

Sob estas condições, vale o seguinte resultado:

Theorem 1 (Modelo Multinomial Logit) [29] *Suponha que os ε_h são IID e seguem a distribuição exponencial dupla:*

$$F(x) = \Pr(\varepsilon_h \leq x) = \exp[-\exp[-(\beta x + \gamma)]]$$

onde γ é a constante de Euler e $\beta > 0$. Então, as probabilidades de escolha resultantes são:

$$P_H(h) = \frac{\exp[\beta U_h]}{\sum_{j=1}^{H} \exp[\beta U_j]} \qquad h = 1, ..., H$$

A escolha da distribuição exponencial dupla permite que obtenhamos algumas propriedades bastante interessantes[30]:

(a) : Quando $\beta \longrightarrow \infty$, a variância de ε_h tende a zero. Neste caso, toda a informação sobre as preferências dos indivíduos está contida em U e as medidas de performance são perfeitamente conhecidas. Assim, para o caso em que apenas uma alternativa maximiza a utilidade temos:

$$\lim_{\beta \longrightarrow \infty} P_h = \begin{cases} 1 & \text{se } U_h > \max_{j \neq h} U_j \\ 0 & \text{se } U_h \leq \max_{j \neq h} U_j \end{cases}$$

Caso existam m previsores cuja performance seja máxima, teremos:

$$\lim_{\beta \longrightarrow \infty} P_h = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{se } U_h > \max_{j \neq h} U_j \\ 0 & \text{se } U_h \leq \max_{j \neq h} U_j \end{cases}$$

(b) : Quando $\beta \longrightarrow 0$, a variância de ε_h vai para infinito. Neste caso a função U_h não contém nenhuma informação relevante. Consequentemente, todas as alternativas tornam-se equiprováveis:

$$\lim_{\beta \longrightarrow 0} P_h = \frac{1}{H} \qquad h = 1, ..., H$$

[29] Ver Anderson, Palma e Thiesse (1992).

[30] De forma geral, uma variável aleatória x possui distribuição exponencial dupla se $F(x) = \exp\left(-\exp\left(\frac{x-\eta}{\mu}\right)\right)$, onde η e μ são, respectivamente, os parâmetros de localização e escala da distribuição. Prova-se que a média e a variância de x são dadas por $E(x) = \eta\gamma + \mu$ e $Var(x) = \frac{\mu^2\pi^2}{6}$ respectivamente, onde γ é a constante de Euler, ou seja, é o limite: $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \simeq 0.5772$.

Desta forma, a variável aleatória ε_h definida acima possui média zero e variância $\frac{\pi^2}{6\beta^2}$.

O parâmetro β será chamado de "intensidade de escolha" pois mede o quão rápido os agentes trocam de previsor na busca por previsores de maior performance. Dito de outra forma, quanto maior β menor as características não observáveis da medida de performance do estimador. Assim, quando $\beta \longrightarrow \infty$, toda a massa de indivíduos usa o melhor estimador. Por outro lado, quando $\beta \longrightarrow 0$, então os indivíduos estão distribuídos uniformemente entre os previsores.

O teorema acima permite que encontremos a fração de indivíduos que utilizam um determinado tipo de previsor:

$$n_{ht} = \frac{\exp(\beta U_{h,t-2})}{Z_t} \tag{27}$$

onde Z_t é apenas uma normalização para que $\sum_h n_{ht} = 1$, ou seja:

$$Z_t \equiv \sum_h \exp(\beta U_{h,t-2})$$

É importante observarmos que as frações n_{ht} devem depender apenas dos valores x realizados nos períodos $t-1$ e passados. Por esta razão, datamos a medida de performance de $t-2$.

Brock e Hommes chamam o sistema composto por (21) e (27) de *Adaptative Belief System* (ABS). Usando estas equações podemos escrever a condição de equilíbrio do modelo como:

$$Rx_t = \frac{\sum_h \exp(\beta U_{h,t-2}) f_h\left(x_{t-1}, ..., x_{t-L}\right)}{\sum_h \exp(\beta U_{h,t-2})} \tag{28}$$

5.2 Exemplos de Previsores

Da forma como foi apresentado, o modelo não nos permite uma análise concreta do comportamento das soluções do ABS. Os autores sugerem alguns tipos específicos de previsores como exemplos. Como estamos interessados na estrutura básica do sistema, iremos supor ao longo desta seção que os dividendos são constantes ao longo do tempo, o que implica que $\delta_t = 0$.

Suponha que as crenças dos indivíduos possuam a forma:

$$f_{ht} = g_h x_{t-1} + b_h$$

onde g_h é a tendência e b_h é o viés do previsor h. No caso particular em que $g_h = b_h = 0$, o agente espera que o retorno do ativo reverta para seu valor fundamental. Consequentemente, chamaremos este agente de fundamentalista. Note, porém, que ao contrário dos agentes com expectativas racionais, estes indivíduos não levam em consideração a presença de outros agentes na economia[31].

[31] Os agentes perfeitamente racionais são caracterizados por:

$$f_{Rt} = x_{t+1}$$

5.2.1 Fundamentalistas versus Tendencialistas

Suponha que existam apenas dois tipos de agentes na economia: os fundamentalistas e os tendencialistas. Estes últimos são caracterizados por $f_{2t} = gx_{t-1}$. Iremos supor que o previsor usado pelos tendencialistas não custa nada, mas os fundamentalistas devem pagar C a cada período. Isto pode ser justificado se entendermos os fundamentalistas como indivíduos mais sofisticados. Eles entendem (em parte) o que está por trás dos preços: ao invés de extrapolar tendências eles olham para os fundamentos. Deste modo, C pode ser interpretado como o custo incorrido pelos indivíduos para aprender sobre o papel dos fundamentos nos preços daquela determinada ação.

Inicialmente, vamos estudar o caso em que $\xi = 0$, ou seja, quando não há memória na medida de performance. Só então, passaremos ao caso geral. Como veremos, isto nos permitirá analisar separadamente os efeitos de β e ξ sobre a dinâmica do sistema.

Caso 1: $(\xi = 0)$ Considerando que os indivíduos olham apenas para o lucro do período passado como medida de performance e usando a equação (20), os previsores ficam expressos por:

$$\pi_{1t-2} = \frac{1}{\gamma\sigma^2_{R_{t+1}}} Rx_{t-2}\left(Rx_{t-2} - x_{t-1}\right) - C \tag{29}$$

$$\pi_{2t-2} = \frac{1}{\gamma\sigma^2_{R_{t+1}}} \left(x_{t-1} - Rx_{t-2}\right)\left(gx_{t-3} - Rx_{t-2}\right)$$

Assim, o sistema adaptativo fica:

$$Rx_t = n_{2t} g x_{t-1} \tag{30}$$

$$n_{1t} = \frac{\exp\left[\beta\left(\frac{1}{\gamma\sigma^2_{R_{t+1}}} Rx_{t-2}\left(Rx_{t-2} - x_{t-1}\right) - C\right)\right]}{Z_t} \tag{31}$$

$$n_{2t} = \frac{\exp\left[\beta\frac{1}{\gamma\sigma^2_{R_{t+1}}}\left(x_{t-1} - Rx_{t-2}\right)\left(gx_{t-3} - Rx_{t-2}\right)\right]}{Z_t} \tag{32}$$

Isto implica que para este tipo de agente a equação (19) possue a forma:

$$E_{Rt}[p_{t+1} + y_{t+1}] = E_t[p^*_{t+1} + y_{t+1}] + x_{t+1}$$

Assim, os indivíduos racionais conseguem prever com exatidão o efeito que os demais agentes terão sobre o preço de equilíbrio, considerando tal fato na formulação de suas expectativas.

Defina a diferença entre as frações n_{1t} e n_{2t} como[32]:

$$\begin{aligned} m_t &\equiv n_{1t} - n_{2t} \\ &= \tanh\left(\frac{\beta}{2}\left(\pi_{1t-2} - \pi_{2t-2}\right)\right) \\ &= \tanh\left(\frac{\beta}{2}\left[\frac{-1}{\gamma\sigma^2_{R_{t+1}}} g x_{t-3}(x_{t-1} - R x_{t-2}) - C\right]\right) \end{aligned} \tag{33}$$

onde $C > 0$ é o custo de se utilizar o previsor do tipo 1. A seguir enunciaremos o teorema que trata da existência e estabilidade das soluções deste sistema adaptativo.

Theorem 2 [33] *Podemos representar as soluções do sistema adaptativo dado por* $(30) - (33)$ *sob a forma* $E = (x_{eq}, m_{eq})$. *Com isso, vale:*

(i) *Se* $0 < g < R$, *então o equilíbrio fundamental* $E_1 = \left(0, \tanh(-\frac{\beta C}{2})\right)$ *é o único equilíbrio. Este equilíbrio é globalmente estável.*

(ii) *Se* $g > 2R$, *então existem três equilíbrios estacionários: o equilíbrio fundamental (instável)* E_1 *e dois equilíbrios não fundamentais* $E_2 = (x^*, m^*)$ *e* $E_3 = (-x^*, m^*)$, *onde* $m^* = 1 - \frac{2R}{g}$.

(iii) *Seja* $R < g < 2R$ *e assuma que* $C > 0$. *Então, existem* $0 < \beta^* < \beta^{**}$, *tais que:*

  (a) *Se* $0 \leq \beta < \beta^*$, *então o equilíbrio estacionário fundamental é globalmente estável.*

  (b) *Em* $\beta = \beta^*$, *ocorre uma bifurcação pitchfork, onde dois novos estados estacionários não fundamentais são criados.*

  (c) *Se* $\beta^* < \beta < \beta^{**}$, *então o equilíbrio estacionário fundamental é instável e ambos os equilíbrios não fundamentais são estáveis.*

  (d) *Em* $\beta = \beta^{**}$, *ocorre uma bifurcação Hopf em ambos os equilíbrios não fundamentais.*

  (e) *Se* $\beta > \beta^{**}$, *então os três equilíbrios são instáveis.*

(iv) *Seja* $\beta = +\infty$, $C > 0$ *e* $R < g < R^2$. *Então, a variedade instável* $W(E_1)$, *do equilíbrio fundamental é limitada. Além disso, todas as órbitas convergem para o equilíbrio fundamental que é localmente instável (ponto de sela).*

[32] A tangente hiperbólica é definida como $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

[33] Ver Brock e Hommes (1998).

Quando os tendencialistas extrapolam pouco ($0 < g < R$) o equilíbrio fundamental E_1 é globalmente estável. Intuitivamente, a instabilidade criada pelos tendencialistas não é forte o suficiente para desviar o preço de equilíbrio do seu valor fundamental. Note que quando $C = 0$, e $x = 0$ não existe diferença nos lucros dos previsores. Como resultado, metade dos agentes será fundamentalista e a outra metade será tendencialistas[34]. No caso em que $C > 0$, o previsor fundamentalista terá um lucro (em equilíbrio) menor que o de tendência. Como consequência, análises numéricas mostram que a massa de indivíduos do tipo 1 vai para zero, conforme β vai para infinito.

No outro extremo, se os tendencialistas extrapolam muito existe a possibilidade de altos ganhos na utilização deste tipo de previsor, caso os preços estejam longe do seu valor fundamental. Isto abre a possibilidade de que estes indivíduos consigam, efetivamente, elevar (ou diminuir) o preço acima do seu valor fundamental. Consequentemente, quando g aumenta muito, ($g > 2R$) são criados mais dois equilíbrios estacionários, mesmo quando $C = 0$.

O caso intermediário é o mais interessante. Se $R < g < 2R$ e $C > 0$, então conforme a intensidade de escolha vai aumentando, duas bifurcações (uma primária e a outra secundária) são criadas. A primeira bifurcação é do tipo *pitchfork*, onde dois novos estados estacionários estáveis são criados. Quando aumentamos β para além da segunda bifurcação, do tipo Hopf, estes novos estados estacionários perdem a estabilidade com a criação de dois ciclos invariantes ao seu redor. O gráfico abaixo exemplifica o comportamento de duas trajetórias após a segunda bifurcação.

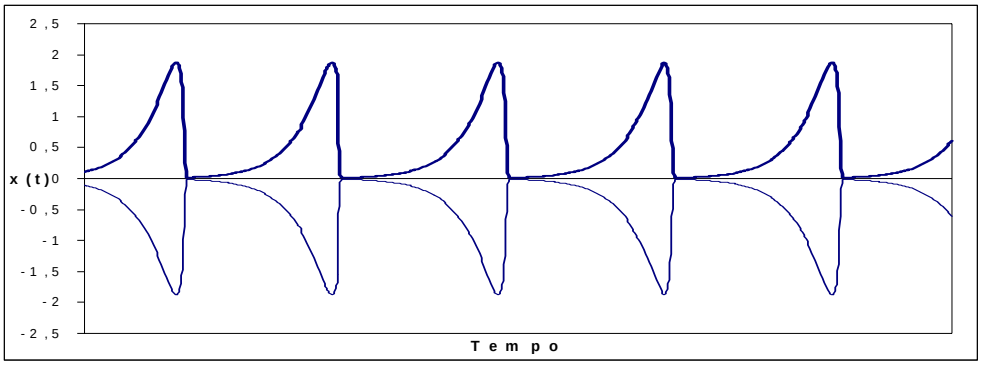

Gráfico 1: Séries de x_t para $\beta = 3.6$ com condições iniciais dadas por $x(0) = \pm 1$.

Os autores afirmam que pelo item (iv) do teorema acima podemos garantir a existência de pontos homoclínicos quando $\beta = +\infty$ e $R < g < R^2$. Isto nos

[34]Neste caso, temos $\pi_1 = \pi_2 = 0$. Usando as equações (31) e (32), encontramos $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}$. Intuitivamente, como não há diferença na utilidade que os previsores oferecem aos indivíduos, a escolha destes previsores será aleatória. Assim, o modelo multinominal atribui a mesma probabilidade de escolha para cada previsor.

sugere que para valores altos de β o sistema deve estar próximo de ter um ponto homoclínico, e portanto possuir trajetórias caóticas[35].

Com efeito, se adicionarmos um pequeno ruído ao modelo podemos obter trajetórias imprevisíveis. Como exemplo, suponha que os dividendos são um processo estocástico dado por $y_t = \bar{y} + \varepsilon_t$, com ε_t uniformemente distribuído no intervalo $[-0.05, 0.05]$. O gráfico abaixo ilustra a ocorrência de caos[36].

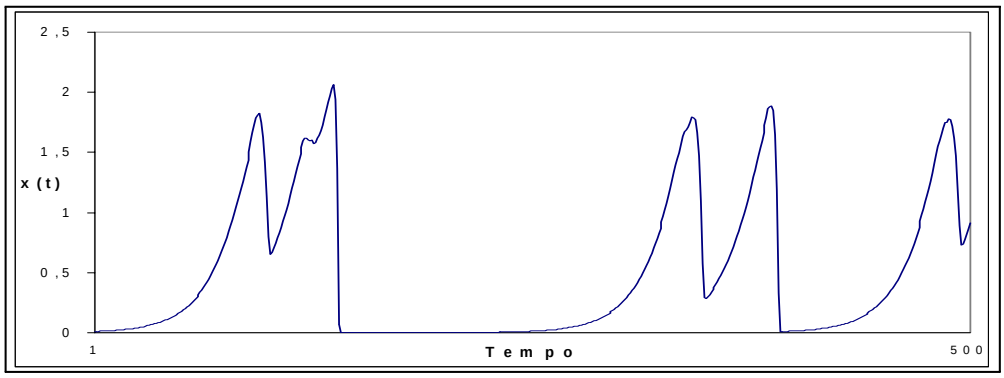

Gráfico 2: Série de x_t para $\beta = 3.55$ com dividendo estoc ástico.

Mais impressionante ainda, é o que ocorre com estas trajetórias se adicionarmos também uma perturbação na equação de equilíbrio (30)[37].

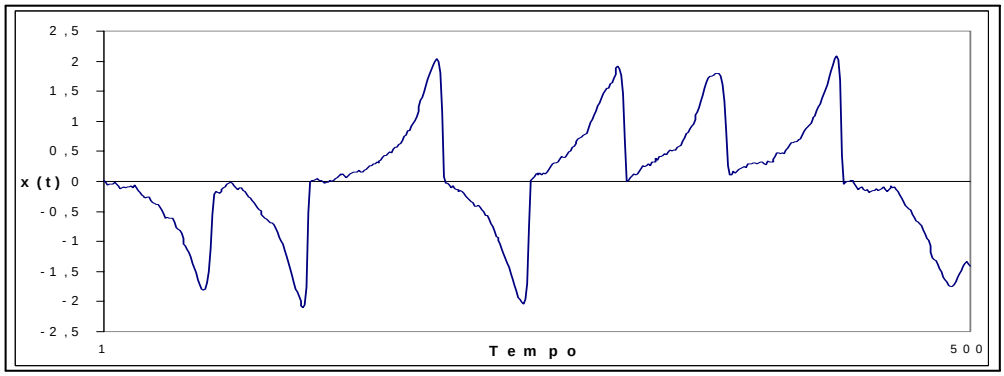

Gráfico 3: Série de x_t para $\beta = 3.55$ com dividendo estocástico e ruído no sistema.

Observe que com a introdução de um pequeno ruído no sistema faz com que o comportamento das trajetórias torne-se altamente instável. Comparando o gráfico 1 com o gráfico 3, podemos perceber que na presença deste ruído a trajetória fica "pulando" (de forma aleatória) de um ciclo para o outro. Assim, fases de otimismo e pessimismo vão se sucedendo no mercado, num processo semelhante ao que se observa na prática.

[35] Ver apêndice.

[36] Os parâmetros utilizados foram $g = 1.2$, $R = 1.1$ e $C = \gamma\sigma^2_{R_{t+1}} = 1$.

[37] Esta perturbação foi extraída da mesma distribuição de ε_t.

Analisamos o caso em que a instabilidade do sistema é causada por aumentos na intensidade de escolha. Porém, esta não é a única "rota" para a complexidade, como veremos a seguir.

Caso 2:$(0 < \xi \leq 1)$ Uma simples manipulação das equações (21) , (24) e (25) e lembrando que $m_t \equiv n_{1t} - n_{2t}$ nos permite escrever a dinâmica do sistema como:

$$Rx_t = \frac{1 - m_t}{2} g x_{t-1} \tag{34}$$

$$m_t = \tanh\left(\frac{\beta}{2}\left[\xi u_{t-3} - \frac{g x_{t-3}}{\gamma\sigma^2}\left(x_{t-1} - R x_{t-2}\right) - C\right]\right) \tag{35}$$

$$u_{t-2} \equiv U_{1,t-2} - U_{2,t-2} = \xi u_{t-3} - \frac{g x_{t-3}}{\gamma\sigma^2}\left(x_{t-1} - R x_{t-2}\right) - C \tag{36}$$

Theorem 3 *Seja* $m^{eq} = \tanh\left(-\frac{\beta C}{2(1-\xi)}\right)$, $m^* = 1 - \frac{2R}{g}$ *e* x^* *a solução positiva, se esta existir, de* $\tanh\left(\frac{\beta C}{2(1-\xi)}\left[\frac{(R-1)g}{\gamma\sigma^2}\left(x^*\right)^2 - C\right]\right) = m^*$. *Então:*

(*i*) *Para* $0 < g < R$, $E_1 = (0, m^{eq})$ *é o único equilíbrio. Além disso, este equilíbrio é assintóticamente globalmente estável.*

(*ii*) *Para* $g > 2R$, *existem três equilíbrios:* $E_1 = (0, m^{eq}), E_2 = (x^*, m^*)$ *e* $E_3 = (-x^*, m^*)$. *O equilíbrio* E_1 *é um ponto de sela.*

(*iii*) *Para* $R < g < 2R$, *temos duas possibilidades:*

(*a*) *Se* $m^* < m^{eq}$, *então* E_1 *é único e, além disso, é localmente estável.*

(*b*) *Se* $m^* > m^{eq}$, *então existem três equilíbrios:* $E_1 = (0, m^{eq}), E_2 = (x^*, m^*)$ *e* $E_3 = (-x^*, m^*)$. *O equilíbrio* E_1 *é um ponto de sela.*

Proof. Seja (x^*, m^*, u^*) um equilíbrio estacionário. Este equilíbrio deve satisfazer (34), ou seja:

$$Rx^* = \frac{1 - m^*}{2} g x^* \tag{37}$$

Isto implica que devemos ter $x^* = 0$ ou $R = \frac{g(1-m^*)}{2}$. No segundo caso, podemos escrever

$$m^* = 1 - \frac{2R}{g} \tag{38}$$

A equação (35) implica que devemos ter em equilíbrio $m^* = \tanh\left(\frac{\beta}{2}u^*\right)$ Podemos usar a equação (36) e escrever:

$$m^* = \tanh\left(\frac{\beta}{2\left(1-\xi\right)}\left[\frac{\left(R-1\right)}{\gamma\sigma^2}\left(x^*\right)^2 - C\right]\right) \tag{39}$$

Assim, o equilíbrio fundamental E_1 é dado por

$$(0, m^{eq}) = \left(0, \tanh\left(-\frac{\beta C}{2\,(1-\xi)}\right)\right) \tag{40}$$

Os dois outros equilíbrios são dados por (x^*, m^*) e $(-x^*, m^*)$, onde m^* é dado por (38) e x^* é a solução positiva (se existir) de (39). Vamos aos diferentes casos:

Se $0 < g < 2R$, então por (38) devemos ter $m^* < -1$. Neste caso, como $x^* \geq 0$, não existe uma solução para (39). Assim, E_1 é o único equilíbrio.

Para $g > 2R$, devemos ter $0 < m^* < 1$, o que nos dá duas soluções para (39) uma positiva (x^*) e outra negativa $(-x^*)$. Temos então três equilíbrios estacionários.

Finalmente, para $R < g < 2R$, a equação (39) terá duas soluções se e somente se $m^* = 1 - \frac{2R}{g} > m^{eq}$.

Quanto à estabilidade da solução fundamental, ela segue da equação (34). Os autovalores da solução fundamental são $\lambda_1 = \frac{(1-m^{eq})g}{2R} = \left(1 - \tanh(-\frac{\beta C}{2(1-\xi)})\right)\frac{g}{2R}$ e $\lambda_2 = 0$. Desta forma, $\lambda_1 > 1$ se e somente se $m^* > m^{eq}$. ■

Como no caso anterior, se os tendencialistas extrapolam pouco $(0 < g < R)$ o equilíbrio fundamental E_1 é globalmente estável. Neste caso, se $C = 0$ os indivíduos estão uniformemente distribuídos entre fundamentalistas e tendencialistas. Quando $C > 0$, podemos ver pela equação (40) que a massa de fundamentalistas vai para zero quando $\beta \to \infty$ ou quando $\xi \to 1$. Como antes, a razão para isto é que não faz sentido pagar pelo previsor dos fundamentalistas se o lucro gerado por ele for o mesmo dos tendencialistas. Assim, quando a intensidade de troca na direção do melhor previsor aumenta, ou quando os indivíduos passam a dar um peso maior para as realizações de lucro passadas, temos cada vez mais indivíduos utilizando o melhor previsor.

Quando a extrapolação de tendência é muito forte $(g > 2R)$, existem três equilíbrios estacionários.

Novamente, o caso mais interessante é quando $R < g < 2R$ e $C > 0$. Observe que quando $\beta = 0$ temos $m^{eq} = 0 > m^*$ ao passo que para β suficientemente grande (ou ξ suficientemente próximo de 1) temos $m^{eq} \to 1 < m^*$. Isto significa que existe um $\beta = \beta^*$ (ou um $\xi = \xi^*$) onde ocorre uma bifurcação *pitchfork*. Nesta bifurcação, o estado estacionário E_1 torna-se instável e dois estados estacionários (estáveis) adicionais são criados. Assim, o papel do aumento de memória na formação da primeira bifurcação é o mesmo desempenhado por um aumento na intensidade de escolha.

Vimos que no caso em que $\xi = 0$, se continuarmos aumentando β após a primeira bifurcação, existirá um $\beta = \beta^{**}$ onde ocorre uma bifurcação Hopf. Vimos ainda que se a intensidade de escolha vai para infinito, temos a formação de atratores estranhos. Agora, queremos analisar o que ocorre quando o valor de ξ aumenta após a segunda bifurcação. Os autores não tratam este problema ana-

liticamente, preferindo inferir os resultados através de simulações numéricas[38]. A conclusão é que neste caso, ao mantermos β fixo e aumentarmos ξ para próximo de um, o sistema se aproxima de ter um ponto homoclínico e portanto qualquer perturbação poderia levar à trajetórias caóticas.

Para melhor visualizarmos este resultado, vamos analisar as trajetórias do sistema quando adicionamos um pequeno ruído[39].

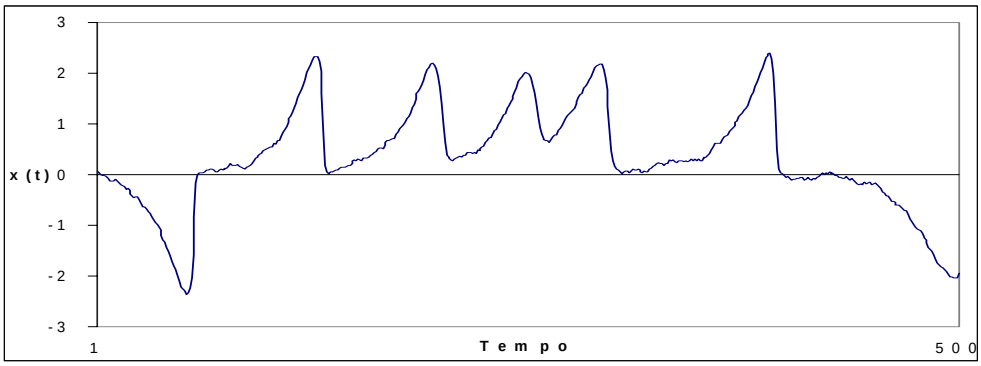

Gráfico 4: Série de x_t para $\xi = 0.72$

Como era esperado, a introdução de um erro ao sistema faz com que as trajetórias fiquem oscilando (de forma aleatória) entre os dois ciclos invariantes criados após a bifurcação Hopf.

5.2.2 Quatro tipos diferentes de previsores

Suponha que existam quatro tipos de previsores, correspondendo a quatro tipos de indivíduos. Iremos parametrizar estes previsores de forma a analisar concretamente as trajetórias resultantes:

$\Longrightarrow$ Fundamentalistas $(g_1 = 0,\ b_1 = 0)$;

$\Longrightarrow$ Tendencialista com viés de alta $(g_2 = 1.1,\ b_2 = 0.2)$;

$\Longrightarrow$ Tendencialista com viés de baixa $(g_3 = 0.9,\ b_3 = -0.2)$;

$\Longrightarrow$ Tendencialista puro $(g_4 = 1.21,\ b_4 = 0)$.

[38] Segundo Brock e Hommes (1999), ao introduzirmos memória na medida de performance, a dimensão do sistema passa para 4, o que dificulta o tratamento analítico.

[39] Os parâmetros utilizados foram $g = 1.2$, $\beta = 1$, $R = 1.1$ e $C = \gamma\sigma^2_{R_{t+1}} = 1$. Adicionamos um erro ao processo de dividendo outro à equação (34). Ambos os erros foram extraídos de uma distribuição uniforme de intervalo $[-0.05, 0.05]$.

Suponha novamente que $\xi = 0$ e que não existem custos para a obtenção de nenhum tipo de previsor. As equações que descrevem o equilíbrio do sistema ficam expressas por:

$$Rx_t = \sum_{j=1}^{4} n_{jt}(g_j x_{t-1} + b_j) \qquad j = 1, 2, 3, 4. \tag{41}$$

$$n_{jt} = \frac{\exp\left(\frac{\beta}{\gamma\sigma^2}\left(g_j x_{t-2} + b_j - Rx_{t-1}\right)\left(x_t - Rx_{t-1}\right)\right)}{Z_t} \qquad j = 1, 2, 3, 4. \tag{42}$$

Substituindo esta equações, encontramos uma equação de diferenças de terceira ordem. A proposição seguinte nos mostra que as trajetórias resultantes podem ser bastante complicadas.

Proposition 4 [40] *Dados os parâmetros acima, a solução fundamental* $x^* = 0$ *e* $n_j^* = \frac{1}{4}$ *é um equilíbrio estacionário para o sistema* (41), (42). *Caso* $0 < \beta < 50$, *este equilíbrio fundamental é estável. Em* $\beta = 50$, *ocorre uma bifurcação Hopf.*

Analisaremos agora a dinâmica do sistema para diferentes valores de β. Suponha que as condições iniciais deste sistema sejam dadas por $x_0 = -0.066$ e $n_j = 0.25$. Vimos pela proposição acima que para valores de β abaixo de 50, o equilíbrio estacionário é estável. O gráfico abaixo ilustra esta situação.

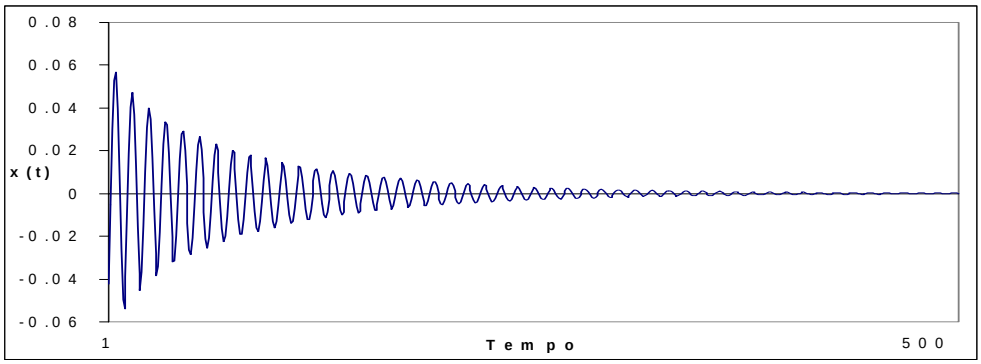

Gráfico 5: Série de x_t para $\beta = 49$.

Quando $\beta = 50$, o estado estacionário torna-se instável em virtude da bifurcação Hopf e é formado um ciclo invariante ao redor do equilíbrio fundamental:

[40] Ver Brock e Hommes (1998).

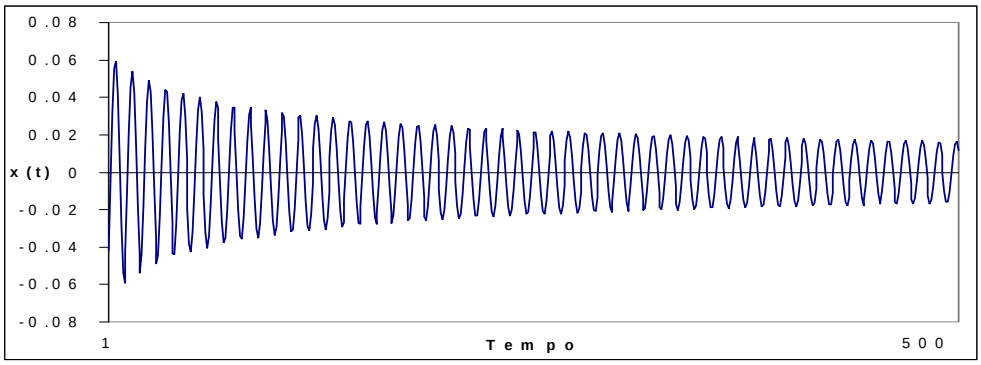

Gráfico 6: Série de x_t para $\beta = 50$.

Conforme β vai crescendo, o ciclo invariante acaba tornando-se um atrator estranho. O gráfico abaixo mostra a ocorrência de caos na série de desvio. Observe que em alguns períodos a série está mais próxima do seu equilíbrio fundamental, enquanto que em outros ela se distancia bastante. A ocorrência de caos é caracterizada pela alternância irregular entre estes períodos.

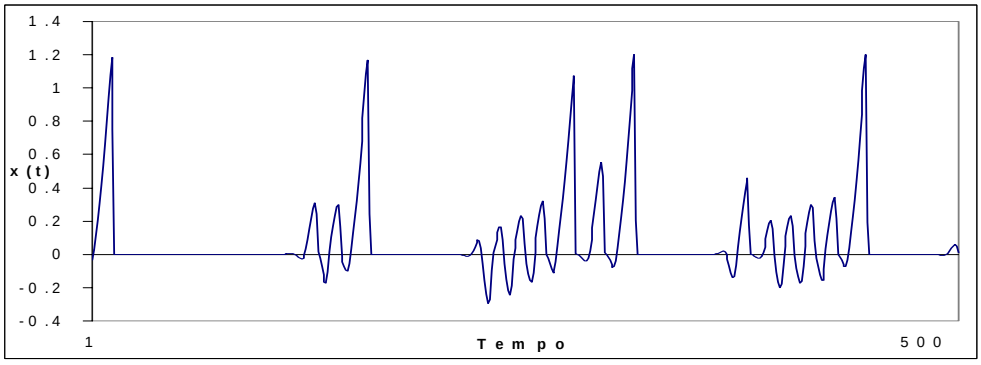

Gráfico 7: Série de x_t para $\beta = 94$.

Se continuamos a aumentar β, ou seja, se a intensidade de escolha é muito elevada, em algum momento quase todos os *traders* passarão a ser fundamentalistas (melhor previsor), levando a série para o seu equilíbrio fundamental[41].

[41] Vimos nesta seção que aumentos na intensidade de escolha dos agentes levam à bifurcações e complicadas flutuações ao redor do preço fundamental. Estas trajetórias foram analisadas por meio de exemplos de tipos de previsores. Para cada um dos casos considerados, tínhamos a presença de diferentes tipos de trajetórias. Assim, não é surpresa a existência de uma estreita ligação entre o tipo de agente considerado e o tipo de bifurcação resultante. Ver Brock e Hommes (1998) para uma discussão detalhada.

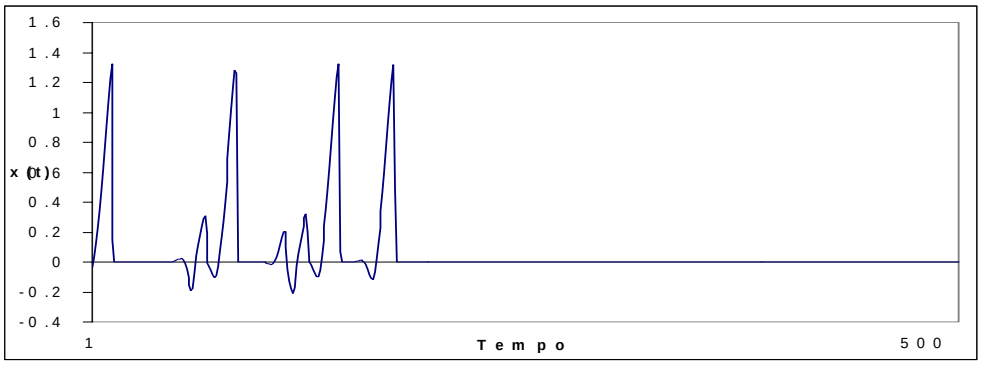

Gráfico 8: Série de x_t para $\beta = 99$.

Este exemplo é muito interessante já que nenhum ruído foi adicionado ao sistema e mesmo assim as trajetórias de preços são imprevisíveis.

Note o papel fundamental do β. Em uma economia formada por fundamentalistas e analistas técnicos, se a parte não observada da performance do previsor for grande o suficiente, os agentes não conseguem discriminar com precisão os previsores. Como consequência, desvios em relação ao preço fundamental não fazem com que muitos agentes busquem nas análises técnicas ganhos extrapolando tendência o que por sua vez diminui a lucratividade das mesmas, já que não existe pressão nos preços o suficiente para que a tendência continue. O resultado é a convergência dos preços para o seu valor fundamental. Por outro lado, se performance do previsor é perfeitamente observada (no sentido de que a variância da parte não observada é zero), desvios em relação ao preço fundamental são rapidamente corrigidos pelos fundamentalistas. Num ponto intermediário existe a possibilidade de que as análises técnicas e os fundamentalistas coexistam, fazendo com que o preço de equilíbrio oscile em relação ao preço fundamental. Além disso, existe uma região em que a trajetória de preços torna-se tão sensível à condição inicial, que pode assumir qualquer forma.

5.3 Conclusões

O modelo apresentado acima nos permite uma análise das consequências da presença de analistas técnicos no mercado.

Em um modelo com expectativas racionais, o preço de equilíbrio será igual ao fluxo de dividendos descontado por algum fator (estocástico) de desconto. Quando permitimos que existam indivíduos com racionalidade limitada na economia, as trajetórias de preços podem ficar bastante complicadas.

Em uma economia formada por agentes fundamentalistas, as consequências da introdução de analistas técnicos depende do modo como os agentes enxergam os previsores. Uma das possibilidades é um aumento na complexidade das trajetórias de preços.

Uma pergunta interessante é se estes resultados seriam possíveis em uma economia com muitos tipos de agentes. No apêndice, mostramos que é possível que em economias com grande diversidade de expectativas o sistema apresente pontos homoclínicos.

A sobrevivência de analistas técnicos segundo o modelo apresentado depende de parâmetros do modelo. Uma outra abordagem seria analisar a possibilidade de sobrevivência de um ponto de vista empírico. Este é o assunto da próxima seção.

6 A Eficácia da Regra de Média Móvel no IBOVESPA

O termo "análises técnicas" denota uma miríade de regras de decisão sobre a compra ou venda de ações através de um estudo do seu comportamento passado. De acordo com a hipótese de eficiência (fraca) de mercado seria impossível prevermos o comportamento das ações com base no seu passado. Logo, sob o ponto de vista neoclássico, a utilização de análises técnicas é um desperdício de tempo e dinheiro. Mas o ceticismo dos acadêmicos não conteve a proliferação do seu uso pelo mercado[42]. Isto sugere que mesmo sem respaldo teórico estas técnicas têm funcionado. Seria uma incapacidade da teoria explicar este fato? Ou será que a eficácia observada das análises técnicas não passa de um evento fortuito? De modo a responder a esta questão, diversos trabalhos analisando (do ponto de vista econométrico) a eficácia destas técnicas foram realizados[43].

Nesta seção, analisaremos a eficácia de uma regra bem simples e bastante difundida no mercado: a técnica de média móvel. A nossa contribuição para o debate será investigar a existência de evidências no mercado acionário brasileiro que suportem a utilização desta técnica. Usaremos a metodologia *bootstrap* sugerida por Brock, Lakonishok e LeBaron (1992) para a realização de testes de hipótese. Uma pequena contribuição adicional será a utilização de algumas variações das técnicas já consideradas por outros autores, como a utilização do método *block bootstrap*.

[42] Uma busca realizada em uma grande livraria *online* americana retornou mais de 250 títulos com a palavra *technical analysis* no título. Destes 191 foram editados após 1980 e 132 após 1990. Além disso, vários encontram-se na lista dos livros mais vendidos na área de Finanças.

[43] O primeiro trabalho a usar técnicas econométricas modernas para analisar a lucratividade das análises técnicas foi o de Brock, Lakonishok e LeBaron (1992). A este, seguiram-se Levich and Thomas (1993), Hudson, Dempsey e Keasey (1996), Kho (1996), Acar e Satchell (1998), LeBaron (1999), Ratner e Leal (1999), entre outros.

6.1 Os Dados

Usaremos dados diários do fechamento do IBOVESPA, em dólares, desde a sua criação em janeiro de 1968 até dezembro de 2000[44]. A série é composta por 8106 observações. Além da análise de toda a série, dividiremos a amostra em dois períodos, de 1968 a 1984 e de 1985 a 2000[45].

As estatísticas para a série de retorno são as usualmente encontradas[46]:

Tabela 1 - Resumo Estatístico

A tabela abaixo apresenta algumas carcterísticas da série de retorno. Note que os retornos foram calculados como diferenças de logs. O simbolo ρ(1) representa o coeficiente de autocorrelação de primeira ordem.

	1968 - 1984	1985 - 2000	1968 - 2000
Média	0.000577	0.000492	0.000536
Desvio-padrão	0.019673	0.037190	0.029490
Coeficiente de Assimetria	-1.267536	-0.095310	-0.288952
Curtose	21.541709	4.169253	8.284624
ρ(1)	0.211984	0.141516	0.157889
Número de Observações	4,177	3,928	8,105

Em todos os períodos, o retorno médio diário encontra-se entre 0.048% e 0.058%. Isto equivale a retornos anuais em dólar entre 13.3% e 16.3%. A volatilidade é bem maior no período entre 1985 e 2000. Existem evidências de assimetria e de excesso de curtose em relação à uma distribuição normal. Como de costume, existem ainda evidências de autocorrelação de primeira ordem[47].

[44] A série foi deflacionada pelo dólar comercial de fechamento mensal. A estacionariedade da série de retorno resultante foi analisada pelo procedimento Dickey-Fuller. Os resultados não contrariam a hipótese de estacionariedade.

[45] Existe, do ponto de vista econométrico, uma quebra estrutural por volta de 1985. Porém, a data escolhida para a divisão da amostra foi arbitrária.

[46] Definimos o retorno na data t como a diferença entre o log do preço em t e o log do preço em $t-1$.

[47] Segundo Campbell, Lo e MacKinlay (1997), $\sqrt{T}\hat{\rho} \underset{asy}{\sim} N(0,1)$, onde T é o tamanho da amostra. Os coeficientes de autocorrelação apresentados são altamente significantes à 1%.

6.2 A Eficácia da Estratégia de Média Móvel

Neste trabalho, iremos analisar apenas um elemento do amplo conjunto de análises técnicas difundidas no mercado[48]. Esta regra é conhecida como "regra das médias móveis". Trata-se da comparação do preço da ação com uma média móvel dos seus preços passados:

$$m_t = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1} P_{t-i}$$

Comparamos o preço da ação do dia t com m_t e classificamos o resultado como um sinal de compra (se $P_t \geq m_t$) ou de venda (caso $P_t < m_t$). A idéia por trás desta regra é a de que, uma vez iniciada uma tendência de alta ou baixa esta permanecerá por algum tempo. Um dos tipos de média móvel mais analisadas é aquela que toma a média dos últimos 150 dias ($T = 150$). Seguindo o trabalho de LeBaron (1999), nós restringiremos a nossa análise apenas a este tipo de média móvel[49].

Cada dia será classificado como um dia de compra ou de venda. Quando houver um sinal de compra, o indivíduo compra o índice, segura-o por um dia e depois o vende. No caso de um sinal de venda, o processo é invertido. Médias condicionadas à compra e à venda serão calculadas. Para que a regra de média móvel seja eficiente, é necessário que o retorno médio condicionado à compra menos o retorno médio condicionado à venda seja maior do que o retorno incondicional. A tabela a seguir apresenta as médias condicionais para os períodos considerados, bem como a proporção dos sinais de compra. Para cada resultado também foram calculadas as estatísticas t correspondentes[50].

[48] Para uma extensa análise sobre as TTR, seus diversos tipos e formas, ver Brock, Lakonishok e LeBaron (1992).

[49] Nos diversos trabalhos analisados, parece não haver muitas diferenças entre os resultados ao se utilizar diversos tipos de médias móveis.

[50] As estatísticas t calculadas aqui possuem a forma:

$$t_b = \frac{\mu_b - \mu}{(\sigma_b^2/N_b + \sigma^2/N)} \quad e \quad t_s = \frac{-(\mu_s + \mu)}{(\sigma_s^2/N_s + \sigma^2/N)}$$

onde os subescritos b e s significam condicionamento à compra e à venda, respectivamente. N_b representa o número de sinais de compra. Os demais símbolos são autoexplicativos. A estatística t para a "compra - venda" é análoga.

Tabela 2 - Médias Condicionais

As colunas "Compra" e "Venda" apresentam as médias dos retornos condicionados aos sinais de compra e venda, respectivamente. Na coluna "Compra - Venda" temos a diferença entre os retornos condicionados à compra e os condicionados à venda. Este número representa o ganho total em termos de retorno diário que um indivíduo teria se tivesse utilizado a técnica de média móvel apresentada. As estatísticas t para cada resultado também são apresentadas.

	Compra - Venda	Compra	Venda	Proporção de Compra
1968 - 1984	0.00185	0.00141	-0.00043	0.51154
Estatística t	2.1494	1.6097	1.8518	
1985 - 2000	0.00128	0.00096	-0.00032	0.57767
Estatística t	0.6712	0.6007	0.5832	
1968 - 2000	0.00155	0.00121	-0.00034	0.54820
Estatística t	1.5320	1.3275	1.3313	

Quanto aos retornos condicionais, os resultados são análogos aos encontrados por outros autores[51]. O retorno condicionado à compra é positivo e superior à média incondicional em todos os períodos. Um fato curioso é que os retornos condicionados a venda sejam em média negativos. Isto significa que a técnica de média móvel conseguiu prever, na média, aumentos e quedas nos preços. O ganho em termos de retorno diário da regra de média móvel é apresentado na coluna "Compra - Venda". Assim, se um indivíduo tivesse seguido esta regra desde a criação do índice IBOVESPA, ele teria um retorno diário médio de 0.15%, quase três vezes o retorno incondicional! Além disso, foi encontrada uma proporção de compra acima de 50% em todos os períodos[52].

Porém, este fato não deve ser encarado como uma ameaça à hipótese de eficiência de mercado. O fato de determinada regra ter gerado um retorno acima da média não significa que (no futuro) esta mesma regra será capaz de tal proeza. Para que a hipótese de eficiência de mercado seja violada é necessário que encontremos uma regra que sistematicamente gere retornos acima do retorno médio incondicional. Sob o ponto de vista teórico, no momento em que tal regra fosse encontrada (e tornada pública) indivíduos racionais iriam prever o comportamento dos "analistas técnicos" eliminando qualquer possibilidade de ganho da regra.

Sob o ponto de vista estatístico, a eficácia de uma determinada regra seria equivalente à hipótese de que o retorno produzido por tal regra fosse uma variável aleatória com esperança superior à esperança do retorno incondicional. A pergunta neste caso seria: o retorno condicional de 0.15% é apenas uma realização

[51] Compararemos os nossos resultados com os encontrados por outros autores mais adiante.

[52] Sob a hipótese nula de que esta regra não produz sinais úteis, esta proporção deveria ser de 50%.

fortuita ou representa a esperança do retorno produzido pela regra[53]?

A resposta passaria pela realização de um teste de hipótese que verificasse se existem evidências de que a variável aleatória "retorno médio gerado pela regra X" possui esperança superior à esperança incondicional.

Mecanicamente, foram calculadas estatísticas t para os resultados acima. O problema é que estas estatísticas supõem que os retornos são variáveis aleatórias normais, estacionárias e independentes no tempo. No caso das séries de retornos as evidências empíricas não suportam estas hipóteses[54]. Isto significa que não podemos confiar nestas estatísticas para testar a eficácia da regra de média móvel. A alternativa encontrada por Brock, Lakonishok e LeBaron (1992) foi a utilização de uma distribuição empírica para as médias condicionais. De forma a encontrarmos uma medida da significância do excesso de retorno da regra de médias móveis, geraremos uma distribuição empírica para os retornos sob diversas hipóteses nula, usando técnicas de *bootstrap*. Os retornos da série original poderão ser comparados com os desta distribuição da mesma forma que fazemos com distribuições teóricas.

6.3 A Técnica Bootstrap

Suponha inicialmente que os retornos $R = (R_1, ..., R_N)$ formem uma amostra aleatória provinda de uma população com distribuição F. Esta amostra nos permite estimar a esperança de F , utilizando a média amostral de R, denotada por $\mu = \mu(R)$. Uma vez conhecida a distribuição de μ, poderíamos realizar testes de hipótese sobre a esperança. Se conhecêssemos F, a distribuição de μ poderia ser derivada analiticamente. O caminho natural quando F é desconhecida é invocar o Teorema Central do Limite (se possível) e supor que μ é assintóticamente normal. Uma abordagem alternativa (e muitas vezes mais eficiente) seria aproximar a distribuição de μ sob F pela distribuição de μ sob $\hat{F}$, onde $\hat{F}$ é uma distribuição que tenderia para F quando $N \longrightarrow \infty$. Desta forma, poderíamos construir uma distribuição para μ sob $\hat{F}$ utilizando amostras extraídas de $\hat{F}$. Assim, características da distribuição de μ sob F seriam estimadas consistentemente por características da distribuição de μ sobre F. Esta é a idéia do método *bootstrap*[55].

[53] Um ponto importante é se os ganhos via análises técnicas permaneceriam após descontarmos os custos de transação. Neste trabalho não analisamos esta possibilidade. Veja, por exemplo, Ratner e Leal (1999) para uma análise das regras de médias móveis com custos de transação.

[54] Ver Campbell, Lo e MacKinlay (1997) e os resultados na Tabela 1.

[55] O método *bootstrap* foi introduzido por Efron (1979). A origem do termo pode ser encontrada em Davison e Hinkley (1997): "to use data to generate more data seems analogous to a trick used by the fictional Baron Munchausen, who when he found himself at the botton of a lake got out by pulling himself up by his bootstraps".

Outras referências sobre esta técnica são Efron (1982), Politis (1998) e Zoubir e Boashash (1998).

Note que a escolha da distribuição $\hat{F}$ é arbitrária: qualquer distribuição que aproxime F pode ser utilizada[56]. Em particular, poderíamos utilizar a distribuição empírica de R, definida por

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I\left(R_i \leq x\right)$$

onde I é a função indicadora.

Esta metodologia pode ser utilizada para testarmos a eficácia das análises técnicas.

Por exemplo, considere a hipótese nula de os retornos seguem um passeio aleatório. Testar a eficácia da estratégia de média móvel significaria testar se o retorno condicionado à compra menos o retorno condicionado à venda é maior do que zero.

Defina o retorno condicionado à compra menos o retorno condicionado à venda encontrado na amostra original por R^{cv}. A tabela 2 apresenta os valores de R^{cv} encontrados para os diferentes períodos utilizados. Utilizamos a nossa amostra para gerar B outras amostras, através de sorteios com reposição. Para cada uma destas amostras aplicamos a estratégia de média móvel e classificamos cada dia como um dia de compra ou venda, da mesma forma que fizemos com a amostra original. Calculamos então (para cada amostra) a diferença entre o retorno médio condicionado à compra e o retorno médio condicionado à venda, denotando-as por $R_i^{cv*}, i = 1, ..., B$.

Podemos testar a hipótese de que R^{cv} não difere significativamente da média condicional facilmente. Defina

$$T = R^{cv} - \mu$$

como a nossa estatística de teste. Para cada uma das amostras calculamos $T_i^* = R_i^{cv*} - \mu_i^*$, onde μ_i^* é a média incondicional dos retornos da i-ésima amostra gerada. A proporção das amostras em que as estatísticas geradas foram superiores a estatística observada na amostra original pode ser encarada como um *p-value* estimado[57].

$$p - value^* = \frac{1}{B} \sum_{i} I\left(T_i^* > T\right)$$

Porém, como no caso das estatísticas t, a hipótese de independência dos retornos (indispensável para a convergência da distribuição empírica) não encontra respaldo na amostra. Em particular, são apresentados indícios de autocorrelação. Novamente, a existência de correlação serial invalidaria os resultados dos testes.

[56] Ver Zoubir e Boashash (1998).

[57] Ver Efron (1992) e Davison e Hinkley (1997) para uma discussão sobre as propriedades de convergência das estatísticas de teste. Brock, Lakonishok e LeBaron (1992) mostram que os *p-values* estimados considerados neste caso apresentam boas propriedades.

Por exemplo, possíveis evidências a favor das análises técnicas poderiam desaparecer uma vez considerada a autocorrelação das séries de retorno.

O método *bootstrap* pode ser facilmente adaptado para casos em que a hipótese de independência não pode ser considerada. Existem basicamente duas abordagens para o problema: a paramétrica e a não-paramétrica.

A primeira abordagem consiste em supor um modelo paramétrico para os retornos que leve em conta características tipicamente observadas nestas séries, como autocorrelação e agrupamentos de volatilidade[58]. Por exemplo, poderíamos supor que os retornos seguem um processo AR(1). Neste caso, estimaríamos os parâmetros do processo utilizando a amostra original. Sorteios com repetição dos resíduos são então realizados para a formação de novas séries de resíduos. Novas séries de retornos são então construídas utilizando um processo AR(1) com parâmetros estimados originalmente e as séries de resíduos construídos via *bootstrap*[59]. Observe que nada impede que nós nos restrinjamos à processos AR(1): qualquer hipótese nula sobre o processo gerador pode ser considerada. Na tabela abaixo, apresentamos os *p-values* estimados sob diversas hipóteses nula: retornos I.I.D., AR(1) e GARCH(1,1). Em cada um dos casos, as estatísticas de teste representam o excesso de retorno induzido pela regra. Assim, para um indivíduo que utilizasse a regra de média móvel aqui considerada, e estatística relevante seria o retorno condicionado a compra menos o retorno condicionado à venda menos o retorno incondicional. Por outro lado, para testar a eficácia da regra que utiliza apenas sinais de venda, teríamos que considerar a estatística dada pela diferença entre o retorno incondicional e o retorno condicionado à venda. A título de ilustração, os *p-values* das estatísticas t também foram calculados.

[58] Brock, Lakonishok e LeBaron (1992) investigam os casos em que os retornos são supostos gerados por processos AR(1), GARCH-M e EGARCH.

[59] Um detalhe técnico é que os resíduos da regressão original devem ser centralizados antes de iniciarmos os sorteios. Isto previne que nossos resultados sejam viesados. Para uma discussão sobre o assunto ver Horowitz (2001).

Tabela 3 - *P-Values* das Estatísticas de Teste

A tabela apresenta os valores dos *p-values* estimados sob diversas hipóteses nula sobre o processo dos retornos. Em todos os casos (com exceção da estatística t), o *p-value* foi calculado como a fração das 1000 amostras geradas em que se obteve uma estatística de teste superior à estatística de teste observada na amostra original. As estatísticas de teste representam o excesso de retorno gerado pela regra. Assim, se um indivíduo só seguisse os sinais de compra a estatística de teste correspondente seria o retorno médio condicionado à compra menos o retorno incondicional.

PERÍODOS	Compra - Venda	Compra	Venda
1968 - 1984	*Médias Condicionais*		
	0.00185	0.00141	-0.00043
	P-Values		
Estatística t	0.0159	0.0539	0.0322
IID	0.0170	0.0000	0.0680
AR(1)	0.1380	0.0240	0.2550
GARCH(1,1)	0.1880	0.0050	0.5290
1985 - 2000	*Médias Condicionais*		
	0.00128	0.00096	-0.00032
	P-Values		
Estatística t	0.2511	0.2741	0.2800
IID	0.2010	0.1340	0.2560
AR(1)	0.4000	0.4090	0.4040
GARCH(1,1)	0.4980	0.4990	0.5200
1968 - 2000	*Médias Condicionais*		
	0.00155	0.00121	-0.00034
	P-Values		
Estatística t	0.0629	0.0923	0.0917
IID	0.0350	0.0020	0.1020
AR(1)	0.2890	0.2060	0.3360
GARCH(1,1)	0.3350	0.1000	0.5320

Com poucas exceções não encontramos evidências de que a técnica aqui considerada produza um retorno superior ao retorno incondicional. Observe as diferenças nos valores dos *p-values* quando consideramos dependências seriais na série de retorno. Já comentamos sobre o perigo de utilizarmos a estatística t e o *bootstrap* sob a hipótese de retornos i.i.d. Com apenas uma exceção, os testes que levam em consideração dependências seriais não rejeitam a hipótese de ineficácia das análises técnicas ao nível de significância de 1%. Ao nível de 5%, são duas

as exceções. Podemos comparar nossos resultados com os encontrados por outros autores.

Utilizando dados diários do índice Dow Jones entre 1897 e 1986, Brock, Lakonishok e LeBaron (1992) encontraram que a média dos retornos condicionados à regra de média móvel era superior à média incondicional. Além disso, análises de intervalos de confiança construídos por *bootstrap* sob diversas hipóteses nulas indicaram a significância desta diferença. Anos depois, LeBaron (1999) estendeu a amostra até fevereiro de 1999. Seus resultados mostram uma diminuição do excesso de retorno das análises técnicas. A significância deste excesso de retorno passa a depender do período considerado. Para a amostra como um todo permanecem as evidências a favor da regra de média móvel.

Evidências a favor das análises técnicas usando pequenas modificações da mesma metodologia utilizada por Brock, Lakonishok e LeBaron (1992) também foram encontradas por Rodríguez, Rivero e Félix (1999) para a bolsa de Madrid, por Ito (1999) para várias bolsas internacionais, por Bessembinder e Chan (1995) para bolsas asiáticas, por Parisi e Vasquez (2000) para o Chile e por Isakov e Hollistein (1999) para a Suiça. Para a América Latina, Ratner e Leal (1999) também encontraram médias condicionais superiores à média incondicional dos retornos mas as evidências a favor de sua significância foram escassas.

Uma desvantagem da abordagem paramétrica para a construção de intervalos de confiança é que a validade dos testes de hipótese fica condicionada à veracidade da hipótese nula sobre o processo gerador dos retornos. Uma alternativa seria a utilização de métodos não paramétricos que levassem em consideração as dependências seriais sem apelar para qualquer hipótese sobre a forma do processo gerador. Um destes métodos é o *block bootstrap*[60].

Na sua versão mais simples, o método consiste em dividir a amostra de tamanho N em Q blocos de tamanho L de forma que $N = QL$. Definimos cada bloco por b_i, $i = 1, ..., Q$. Para a construção de uma nova amostra, sorteamos um bloco aleatoriamente. Este bloco representará as L observações iniciais desta nova amostra. Novos sorteios são realizados (utilizando todos os Q blocos iniciais) e, bloco a bloco, a nossa amostra vai sendo construída. Após Q sorteios temos uma nova amostra de tamanho $N = QL$. Este procedimento é repetido B vezes para a construção de B amostras "artificiais". A idéia por trás deste método é que, se os blocos forem grandes o suficiente, as dependências seriais serão preservadas nas séries construídas. Isto fará com que as estatísticas calculadas a partir destas amostras aproximem-se em distribuição da estatística calculada a partir da amostra original. Quanto melhor for a preservação das dependências seriais, melhor será esta aproximação[61]. Uma modificação simples deste método consiste em deixar que os blocos sobreponham-se.

[60] Davison e Hinkley (1997) apresentam uma boa introdução sobre este método. Horowitz (2001) contém boas referências teóricas.

[61] Ver Davison e Hinkley (1997).

Obviamente existe um *trade-off* entre o tamanho dos blocos e o número de blocos a serem sorteados. Hall e Jing (1995) estimam que o tamanho ótimo dos blocos para o nosso tipo de teste deve ser de $N^{1/4}$, onde N é o tamanho da amostra. Isto significa tomar blocos entre 8 e 10 observações. Os resultados das simulações são apresentados na tabela 4.

P-Values Estimados Pelo Método *Block Bootstrap*

Pelo método *block bootstrap* , a amostra é dividida em blocos de tamanho L e os sorteios são relizados nos blocos e não nas observações. A seguir, apresentamos os *p-values* para vários tamanhos de blocos.

1968 - 1984	**Compra - Venda**	**Compra**	**Venda**
	Estatísticas de Teste		
	0.00040	0.00083	-0.00014
Tamanho dos blocos:	*P-Values*		
7	0.1210	0.0320	0.2270
8	0.1460	0.0380	0.2490
9	0.1290	0.0410	0.2320
10	0.1400	0.0430	0.2660
11	0.2090	0.0760	0.3340
Com *overlap* de 2 dias:			
8	0.1340	0.0260	0.2840
9	0.1030	0.0200	0.2040
10	0.0730	0.0270	0.1330
1985 - 2000	**Compra - Venda**	**Compra**	**Venda**
	Estatísticas de Teste		
	0.00079	0.00047	0.00017
Tamanho dos blocos:	*P-Values*		
7	0.3970	0.4030	0.4140
8	0.4140	0.4200	0.4080
9	0.3840	0.3930	0.3990
10	0.4600	0.4960	0.4510
11	0.4540	0.4690	0.4620
Com *overlap* de 2 dias:			
8	0.3000	0.4310	0.2870
9	0.4440	0.4560	0.4470
10	0.3660	0.4570	0.3420
1968 - 2000	**Compra - Venda**	**Compra**	**Venda**
	Estatísticas de Teste		
	0.00101	0.00067	-0.00087
Tamanho dos blocos:	*P-Values*		
7	0.2770	0.1870	0.3340
8	0.3160	0.2410	0.3800
9	0.3650	0.2660	0.4270
10	0.3300	0.2310	0.3910
11	0.3580	0.2590	0.4220
Com *overlap* de 2 dias:			
8	0.2830	0.1950	0.3590
9	0.1890	0.1540	0.2290
10	0.2810	0.2580	0.3230

Novamente, não encontramos evidências de os retornos condicionados sejam estatisticamente superiores do que o retorno incondicional. Ao nível de significância de 1%, nenhum dos *p-values* estimados por este método indica a presença de evidências a favor da técnica de média móvel. Porém, se considerarmos um nível de significância de 5%, a técnica de compra parece ser significante nos dois subperíodos considerados. Porém, para a amostra como um todo mesmo a técnica de compra não apresenta significância estatística segundo os *p-values* estimados.

De um modo geral, a eficácia das análises técnicas não é significante do ponto de vista estatístico. Porém, os resultados não deixam de ser instigantes: se um indivíduo tivesse utilizado esta estratégia de média móvel, seu retorno seria maior do que a média incondicional, para os períodos considerados. Claramente, problemas de *data-mining* devem ser considerados[62]. Uma análise mais completa da eficácia das análises técnicas passaria pela especificação de um amplo conjunto de regras. O nosso objetivo nesta seção foi argumentar que, ao contrário do encontrado para outros países, não existem evidências de que a regra de média móvel de 150 dias produza retornos acima da média incondicional do IBOVESPA.

[62] A este respeito, o trabalho de Sullivan, Timmermann e White (1997) explora as implicações do problema de *data-mining* nos resultados de Brock, Lakonishok e LeBaron (1992). A conclusão dos autores é que os resultados de Brock, Lakonishok e LeBaron são robustos ao problema de *data-mining*.

7 Considerações Finais

Este trabalho tentou analisar as consequências nos preços de equilíbrio da presença de agentes com diferentes expectativas quanto ao preço futuro das ações.

Argumentou-se que modelos de expectativas racionais não são capazes de explicar certos fatos estilizados dos mercados de ativos. Esta lacuna pode ser preenchida se relaxarmos a hipótese de racionalidade: ou pela presença concomitante de agentes irracionais e perfeitamente racionais ou pela coexistência de grafistas e fundamentalistas.

Uma das conclusões apresentadas foi o aumento na volatilidade a possibilidade de trajetórias de preços bastante complicadas para economias em que os grafistas coexistem com agentes fundamentalistas.

Procurou-se dar ênfase maior a um tipo de indivíduo comum no mercado: o analista técnico. Apesar da eficácia de regras de compra e venda baseadas em preços passados estar em desacordo com a hipótese de eficiência fraca de mercado, técnicas econométricas relativamente recentes indicaram evidências a favor destas regras em diversas partes do mundo. Mostramos que a aplicação de técnicas de *bootstrap* no índice IBOVESPA não nos permite rejeitar a hipótese ineficácia de um tipo particular de regra de média móvel. Uma novidade em relação aos trabalhos anteriores foi a utilização do método *block bootstrap*, que permite a análise de séries com dependência serial fraca sem a necessidade de uma hipótese sobre o processo gerador de dados. Os resultados com a utilização deste método só reforçam a ineficácia da regra de média móvel. É importante ressaltar que o fantasma do *data mining* ronda as nossas conclusões. Uma das soluções seria a extensão das técnicas de média móvel para um conjunto bem mais amplo e da aplicação do *reality check* de White, seguindo a receita de Sullivan, Timmerman e White (1997).

8 Apêndices

8.1 Alguns Conceitos de Complexidade

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos de complexidade. Para um tratamento mais detalhado do conceito de dinâmicas caóticas e sua aplicação em Economia, sugerimos o excelente livro de Lorenz (1993).

Começaremos por introduzir o conceito de bifurcação para o caso contínuo. De forma a facilitar a exposição, consideraremos o caso unidimencional em que o sistema dinâmico é dado por[63]:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad x \in \Re, \ \ \mu \in \Re \tag{43}$$

onde μ é um parâmetro. Suponha que para $\mu = \mu_0$, o sistema possua um ponto fixo (x^*, μ_0) tal que $f(x^*, \mu_0) = 0$. Este ponto fixo será localmente assintóticamente estável enquanto o autovalor $\lambda = \frac{df(x^*, \mu_0)}{dx}$ for negativo, e localmente assintóticamente instável quando este for positivo. Suponha que o autovalor em (x^*, μ_0) seja zero. Pelo teorema da função implícita, podemos expressar os pontos fixos de (43) por uma função contínua $x^* = x^*(\mu)$ para valores do parâmetro diferentes de μ_0 e se $\lambda \neq 0$. A função $x^*(\mu)$ descreve os "ramos" dos pontos fixos. Se em (x^*, μ_0), vários ramos se encontram, dizemos que (x^*, μ_0) é um ponto de bifurcação. Assim, um ponto de bifurcação é aquele em que as propriedades qualitativas de um sistema dinâmico são diferentes antes e depois deste ponto. Apresentamos agora os dois tipos de bifurcações que aparecem neste trabalho.

Theorem 5 (Bifurcação Pitchfork) [64] *Seja $\dot{x} = f(x, \mu) \in C^3$ e suponha que exista um ponto fixo $(x^*, \mu_0) = (0, 0)$. Se*

1. $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lambda = 0,$
2. $\dfrac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3} \neq 0,$
3. $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial \mu} \neq 0,$

então, dependendo do sinal das derivadas em (2) e (3), temos:

(i) o ponto fixo x^* é estável (instável) para $\mu < 0$ $(\mu > 0)$ e

[63] A generalização para o caso de dimensão n é direta.

[64] Ver Lorenz (1993)

(*ii*) *o ponto fixo* x^* *é estável (instável) para* $\mu < 0$ $(\mu > 0)$ *e dois ramos adicionais instáveis (estáveis) são criados.*

O caso típico de uma bifurcação *pitchfork* é aquele em que tínhamos um ponto fixo estável que passa a ser instável e, além disso, são criados mais dois pontos fixos estáveis.

Passamos agora a um outro importante tipo de bifurcação, a chamada bifurcação *Hopf*. Lembremos que na bifurcação *pitchfork* a estabilidade ou instabilidade do ponto fixo é alterada e podem aparecer mais dois pontos fixo. Porém, no caso da bifurcação Hopf, o ponto fixo é bifurcado em uma órbita fechada ao seu redor. Só podemos ter bifurcações Hopf em sistemas de dimensão superiores a um.

Theorem 6 (Bifurcação Hopf) [65] *Considere o sistema dinâmico* $\dot{x} = f(x, \mu)$ *onde* $x \in \Re^n$, $\mu \in \Re$, *e* $n > 1$. *Suponha que este sistema possua um ponto fixo* (x_0^*, μ_0) *onde as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *A matriz jacobiana* J *avaliada em* (x_0^*, μ_0) *possui um par de autovalores imaginários puros e nenhum outro autovalor com parte real nula.*

2. $\left.\dfrac{d(\operatorname{Re}\lambda(\mu))}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} > 0$

Então, existem soluções periódicas bifurcando a partir de $x^*(\mu_0)$ *cujo período é de aproximadamente* $\frac{2\pi}{\lambda(\mu_0)}$.

Uma vez entendido o conceito de bifurcação, voltamos a trabalhar com variáveis discretas, já que são estas que utilizamos no trabalho. Com efeito, suponha que o sistema dinâmico seja dado por $x_{t+1} = F(x_t)$, onde $F : \Re^n \longrightarrow \Re^n$ é um difeomorfismo.

Definition 7 *Um conjunto* A *é chamado de atrator se:*

(*i*) $F(A) \subset A$

(*ii*) *O conjunto* $E = \{x : F(x) \longrightarrow A \text{ se } n \longrightarrow +\infty\}$ *tem medida de Lebesgue positiva.*

(*iii*) *Existe um ponto* $x \in A$ *tal que a órbita de* x *é densa em* A.

A propriedade (*iii*) serve apenas para garantir que o conjunto A não é formado por partes independentes.

Para nós, um sistema dinâmico será caótico se possuir um *atrator estranho*. A definição heurística de atrator estranho é dada a seguir.

[65] Ver Lorenz (1993).

Definition 8 *Um atrator estranho é um atrator que possui grande sensibilidade às condições iniciais.*

Um outro conceito muito importante em sistemas dinâmicos é o de *ponto homoclínico*. Como veremos adiante, a existência de pontos homoclínicos possui uma estreita ligação com a ocorrência de dinâmicas complexas.

Considere um ponto fixo p de um difeomorfismo F. As variedades (invariantes) estável e instável são definidas, respectivamente, por:

$$W^s = \{x : F^n(x) \longrightarrow p \text{ se } n \longrightarrow +\infty\}$$

$$W^u = \{x : F^n(x) \longrightarrow p \text{ se } n \longrightarrow -\infty\}$$

Em sistemas não lineares, os conceitos de variáveis instáveis e estáveis são análogos aos conceitos de subespaços invariantes em sistemas lineares: quando um ponto está sobre um destes espaços ele permanecerá para sempre neste espaço, se aproximando ou se afastando do ponto fixo p.

Definition 9 *Seja p um ponto de sela. Um ponto $x \neq p$ é um ponto homoclínico de p se for um ponto de interseção entre uma variedade estável e uma variedade instável de p. Se estas variedades se interceptam transversalmente, este ponto é chamado de ponto homoclínico transverso.*

Chamamos de órbitas homoclínicas as iterações de F no ponto homoclínico. Uma observação importante é que como as variedades W^s e W^u são invariantes[66] então cada iterada $F^n(x)$ também é um ponto homoclínico. Isto significa que a existência de um ponto homoclínico implica na existência de infinitos pontos homoclínicos, com $F^n(x) \longrightarrow p$ quando $n \longrightarrow \pm\infty$. Quando nos aproximamos do ponto fixo p pela variedade estável, mais e mais interseções com a variável instável vão ocorrendo. Isto significa que a variedade instável oscila muito nas proximidades de p. Da mesma forma, a variedade estável também estará oscilando violentamente quando nos aproximamos de p pela variedade instável. Isto ilustra como a dinâmica das trajetórias será complicada caso existam pontos homoclínicos.

Além disso, Smale (1965) demonstrou que a existência de um ponto homoclínico implica na existência de infinitas *horseshoes*[67]. Smale mostrou que esta estrutura geométrica implica que próximo ao ponto fixo existem um conjunto de Cantor com infinitos pontos periódicos, um conjunto não enumerável de órbitas caóticas e que as trajetórias são muito sensível as condições iniciais neste conjunto de Cantor[68].

[66] Isto significa que, para $i = s, u$, $F(x) \in W^i(p)$ para $x \in W^i(p)$.

[67] Ou seja, para qualquer $N > 0$ suficientemente grande, existe uma região retangular R tal que a imagem $F^N(R)$ possue a forma de uma ferradura.

[68] Esta situação é conhecida como *caos topológico*. Observe, porém, que uma *horseshoe* não é um atrator estranho, já que todos os seus pontos são pontos de sela.

Definition 10 *Para a família de aplicações de um parâmetro F_μ com ponto fixo p_μ, dizemos que existe uma bifurcação homoclínica associada à p_μ em $\mu = \mu_0$ se:*

(i) para $\mu < \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ não possuem interseção $x \neq p_\mu$.

(ii) para $\mu = \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ possuem uma tangência homoclínica.

(iii) para $\mu > \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ possuem uma interseção homoclínica transversal $x \neq p_\mu$.

Já podemos perceber que os pontos homoclínicos indicam a presença de trajetórias muito complicadas, mas ainda não estabelecemos a sua relação com a existência de atratores estranhos e, consequentemente, trajetórias caóticas. Na verdade, se considerarmos $F : \Re^2 \longrightarrow \Re^2$, vale o seguinte teorema:

Theorem 11 [69] *Numa família de aplicações de um parâmetro $F_\mu : \Re^2 \longrightarrow \Re^2$ com uma bifurcação homoclínica $\mu = \mu_0$, sob a hipótese de que o ponto de sela p_μ de período k de F_μ é dissipativo (ou seja, em $\mu = \mu_0$ os autovalores λ_1 e λ_2 satisfazem $|\lambda_1 \lambda_2| < 1$), existe um conjunto de valores de μ no intervalo $(\mu_0, \mu_0 + \epsilon)$ com medida de Lebesgue positiva tal que F_μ possui um atrator estranho.*

8.2 Trajetórias de Preços em Economias com Grande Número de Agentes

Ao longo deste trabalho, vimos exemplos de economias com um número pequeno de tipos de expectativas. Porém, uma das características dos mercados financeiros é a grande diversidade de seus agentes. Chega a ser surpreendente a variedade de técnicas financeiras usadas diariamente pelos participantes dos mercados. Isto nos sugere uma diversidade de opiniões muito maior do que a capturada por modelos com dois ou até quatro tipos de agentes. Sendo assim, como o modelo de crenças adaptativas é afetado quando consideramos um número muito grande de agentes? Esta generalização, que é analisada em Brock e Hommes (1999), é o assunto deste apêndice.

A estratégia dos autores começa com a parametrização das medidas de performance e das funções f_{ht}. Suponha que existam vetores θ e ϕ tais que possamos escrever:

$$f_{ht} = f(\theta_h, x_{t-1}, ...) \tag{44}$$

$$U_{ht-2} = U(\phi_h, x_{t-1}, ...) \tag{45}$$

[69] Ver Palis e Takens (1993).

Ou seja, o agente do tipo h é totalmente caracterizado por (θ_h, ϕ_h). Além disso, suponha que os valores de θ e ϕ são extraídos de uma função de distribuição normal multivariada dada por G. Com isso, podemos escrever a equação de equilíbrio (28) como:

$$Rx_t = \frac{\sum_h \exp(\beta U_{h,t-2}) f_h(x_{t-1}, ..., x_{t-L})}{\sum_h \exp(\beta U_{h,t-2})}$$

Dividindo por H ambos o denominador e o numerador da expressão acima e substituindo as equações (44) e (45) encontramos:

$$Rx_t = \frac{\hat{E}[\exp[\beta U(\phi_h, x_{t-1}, ...)] f(\theta_h, x_{t-1}, ...)]}{\hat{E}[\exp[\beta U(\phi_h, x_{t-1}, ...)]]} \tag{46}$$

onde $\hat{E}[.] \equiv \frac{1}{H}\sum_h [.]$. Observe que extraímos da distribuição G uma amostra de H elementos. Assim, podemos interpretar $\hat{E}[.]$ como uma média amostral. Sob certas condições de regularidade, as médias amostrais da equação (46) irão convergir em probabilidade para as médias populacionais. Isto sugere que podemos usar os momentos populacionais em (46) para analisarmos o comportamento do sistema quando o número de agentes é muito grande:

$$Rx_t = \frac{E[\exp[\beta U(\phi_h, x_{t-1}, ...)] f(\theta_h, x_{t-1}, ...)]}{E[\exp[\beta U(\phi_h, x_{t-1}, ...)]]} \tag{47}$$

Resta o problema de calcularmos os momentos populacionais de (47). Suponha para facilitar, que $\xi = 0$, ou seja, a performance de um estimador é medida pelo lucro deste estimador no período imediatamente anterior. Reescrevendo as equações (20) e (24):

$$\pi_{h,t-2} = (x_{t-1} - Rx_{t-2} + \delta_{t-1}) \frac{f_{ht-2} - Rx_{t-2}}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}} - C_{ht-2} \tag{48}$$

Precisamos dar uma forma para a função f_{ht}. No espírito da seção 5.2 suponha que:

$$f_{ht} = f_t(\theta_h) = \theta_{0h} + \theta_{1h} x_{t-1} + ... + \theta_{Lh} x_{t-L} \tag{49}$$

Com estas especificações, podemos manipular as equações (47), (48) e (49) encontrando:

$$Rx_t = \frac{E[f_t(\theta_h) \exp(\eta \vartheta_{t-1} f_{t-2}(\theta_h))]}{E[\exp(\eta \vartheta_{t-1} f_{t-2}(\theta_h))]} \tag{50}$$

onde $\eta \equiv \frac{\beta}{\gamma \sigma^2_{R_{t+1}}}$, $\vartheta_{t-1} \equiv x_{t-1} - Rx_{t-2}$. Agora, defina $\tau \equiv \eta \vartheta_{t-1}$ e $s_0 \equiv \tau$, $s_1 \equiv \tau x_{t-2}, ..., s_L \equiv \tau x_{t-2-L}$ e escreva $\exp(\eta \vartheta_{t-1} f_{t-2}(\theta_h)) = \exp(\sum_i s_i \theta_i)$. Para calcularmos uma forma fechada para a equação (50) supomos que as variáveis θ_h

são extraídas de forma independente. A variável $n = \sum_i s_i \theta_i$ possui distribuição normal, o que implica que $\exp(n)$ é lognormal com:

$$E[\exp(n)] = \exp\left[E(n) + \frac{1}{2}Var(n)\right] \tag{51}$$

Com isso, podemos escrever (50) como[70]:

$$Rx_t = m_0 + \eta\vartheta_{t-1}\sigma_0^2 + a_{1t}x_{t-1} + ... + a_{Lt}x_{t-L} \tag{52}$$

onde,

$$a_{kt} = m_k + \eta\vartheta_{t-1}\sigma_k^2 x_{t-2-k}$$

com $m_k \equiv E(\theta_k)$ e $\sigma_k^2 \equiv Var\left(\theta_k^2\right)$.

A equação (52) descreve o equilíbrio do modelo. Em seu artigo, Brock e Hommes utilizam exemplos de funções para ilustrar o modelo, deixando um tratamento mais geral para trabalhos subsequentes. Seguindo os autores, consideramos o caso mais simples em que a função f_t é dada por $f_t(\theta_h) = \theta_{0h}$ e $m_0 = 0$. O equilíbrio fica determinado por uma equação de diferenças de segunda ordem, dada por:

$$Rx_t = \eta\sigma_0^2(x_{t-1} - Rx_{t-2})$$

Existe um ponto de bifurcação claro em $\alpha_c \equiv \eta\sigma_0^2 = 1$. Consequentemente, aumentos de η ou de σ_0^2 que levem α para além desta bifurcação, tornam o sistema instável. O resultado que aumentos na diversidade dos agentes (σ_0^2) levam à instabilidade não surpreende já que diferenças muito grandes quanto ao viés tenderiam a reforçar os desvios em relação ao preço de equilíbrio num processo explosivo.

Um exemplo mais geral seria supor que os indivíduos consideram períodos passados na formulação de suas expectativas. Assim, considere:

$$f_t(\theta_h) = \theta_{0h} + \theta_{1h}x_{t-1} + \theta_{2h}x_{t-2} + \theta_{3h}x_{t-3}$$

Neste caso, a equação de equilíbrio do sistema torna-se uma equação de diferenças de quinta ordem:

$$\begin{aligned} Rx_t &= m_0 + m_{1t}x_{t-1} + m_{2t}x_{t-2} + m_{3t}x_{t-3} \\ &\quad +\eta(x_{t-1} - Rx_{t-2})\left(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 x_{t-1}x_{t-3} + \sigma_2^2 x_{t-2}x_{t-4} + \sigma_3^2 x_{t-3}x_{t-5}\right) \end{aligned}$$

Os equilíbrios estacionários desta equação são a solução fundamental $x = 0$ e as possíveis raízes de

$$(x^*)^2 = \frac{\left(\frac{\bar{\mu}-R}{\eta(R-1)} - \sigma_0^2\right)}{\bar{\sigma}^2} \tag{53}$$

[70] Note que o valor de $E[\theta_k \exp(\sum_i s_i\theta_i)]$ pode ser obtido diferenciando (51) com relação a s_k.

onde $\mu = m_1 + m_2 + m_3$ e $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$. Observe que para valores de $\bar{\mu}$ suficientemente grandes, dois novos estados estacionários (um positivo e outro negativo) são criados (bifurcação *pitchfork*). Segundo os autores, se continuarmos aumentando $\bar{\mu}$, teremos a criação de uma nova bifurcação (Hopf) e o aparecimento de flutuações caóticas, num padrão semelhante ao modelo com dois tipos de previsores.

Porém, podemos analisar a formação de trajetórias complexas por um outro ângulo, através do parâmetro η. Para uma determinada parametrização do modelo[71], temos a seguinte "rota para o caos".

Para valores pequenos de η o sistema é estável e a trajetória dos desvios tende para a solução fundamental.

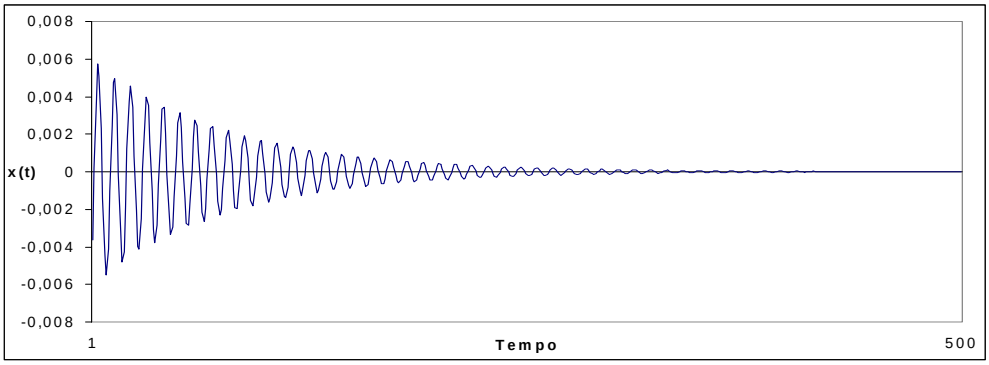

Gráfico 9: Trajetória de $x(t)$ para $\eta = 1.3$.

Se aumentamos η, temos a ocorrência de uma bifurcação Hopf e a presença de ciclos periódicos e quasi-periódicos na trajetória de $x(t)$.

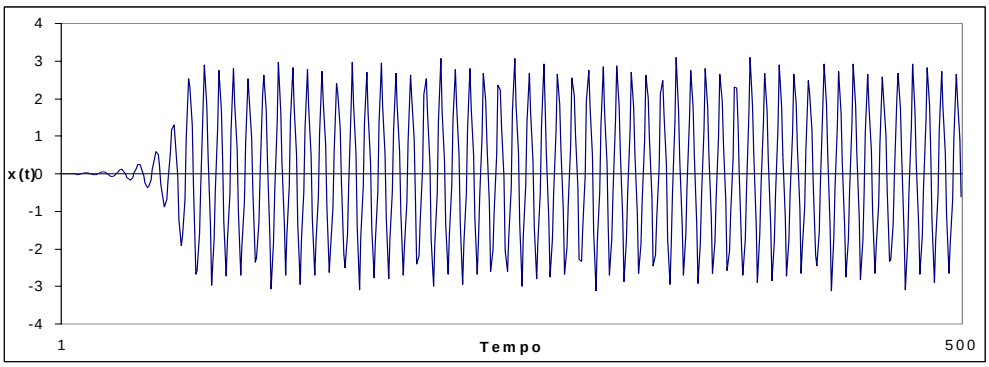

Gráfico 10: Trajetória de $x(t)$ para $\eta = 1.5$.

Finalmente, persistindo no aumento de η, vemos o aparecimento de atratores estranhos[72].

[71] Colocamos $m_0 = 0$, $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.2$, $m_3 = 0.1$, $\sigma_0^2 = 1$ $\sigma_1^2 = 0.1$ e $\sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.05$. Estes parâmetros fazem com que a equação (53) só possua soluções complexas, garantindo que o equilíbrio estacionário seja único.

[72] Os autores mostram ainda que para valores muito altos de η as trajetórias tornam-se explosivas.

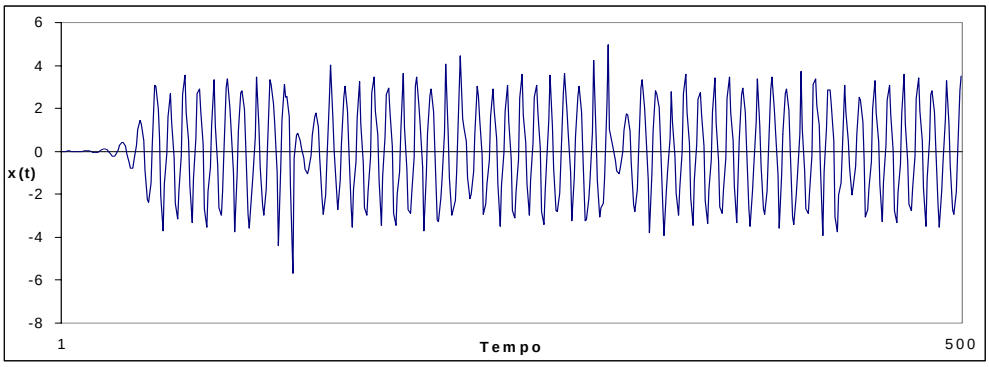

Gráfico 11: Trajetória de $x(t)$ para $\eta = 1.59$.

Concluindo, lembramos que nos modelos com poucos tipos de agentes, a complexidade emerge da diversidade entre as tendências. Aqui também vemos este padrão, representado pelo parâmetro σ_0^2.

Referências

[1] Acar, E. e Satchell, S. (1998): *Advanced Trading Rules.* Butterworth - Heinemann, Oxford.

[2] Anderson, S., Palma, A. e Thisse, J. (1992): *Discrete Choice Theory of Product Differenciation.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[3] Bernstein, P. (1993): *Capital Ideas: The Improbable Origins of Wall Street.* The Free Press, New York, NY.

[4] Black, F. (1986): "Noise"; *Journal of Finance* 41:529-43.

[5] Brock, W. e Hommes, C. (1997): "A Rational Route to Randomness"; *Econometrica* 65:1059-95.

[6] Brock, W. e Hommes, C. (1998): "Heterogeneous Beliefs and Routes to Chaos in a Simple Asset Pricing Model"; *Journal of Economic Dynamics and Control* 22:1235-1274.

[7] Brock, W. e Hommes, C. (1999): "Rational Animal Spirits"; in *The Theory of Markets*, P. Herings, A. Talman and G. van der Laan (eds.), North Holland: Amsterdam, for the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 109-137.

[8] Brock, W., Lakonishok, J. e LeBaron, B. (1992): "Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns"; *Journal of Finance* 47:1731-64.

[9] Cagan, P. (1956): "The Monetary Dynamics of Hyperinflation" *in* Friedman (1956).

[10] Campbell, J. e Kyle, A. (1993): "Smart Money, Noise Trading and Stock Price Behavior"; *Review of Economic Studies* 60:1-34.

[11] Campbell, J. e Shiller, R. (1988a): "The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors"; *Review of Financial Studies* 1:195-228.

[12] Campbell, J. e Shiller, R. (1988b): "Stock Prices, Earnings and Expected Dividends"; *Journal of Finance* 43:661-676.

[13] Davison, A. e Hinkley, D. (1997): *Bootstrap Methods and Their Application*; Cambridge University Press, Cambridge.

[14] De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H. e Waldman, R. J. (1987): "The economic Consequences of Noise Traders"; *NBER Working Paper Series*. No 2395.

[15] De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H. e Waldman, R. J. (1989): "The Size and Incidence of Losses from Noise Trading"; *Journal of Finance* 44:681-696.

[16] De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H. e Waldman, R. J. (1990a): "Noise Trader Risk in Financial Markets" *Journal of Political Economy* 98:703-38.

[17] De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H. e Waldman, R. J. (1990b): "Positive Feedback Investment Strategies and Destabilizing Rational Speculation"; *Journal of Finance* 45:379-395.

[18] De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H. e Waldman, R. J. (1991): "Survival of Noise Traders in Financial Markets"; *Journal of Business* 64:1-19.

[19] Efron, B. (1979): "Bootstrap Methods, Another Look at the Jacknife"; *The Annals of Statistics* 7:1-26

[20] Efron, B. (1982): *The Jacknife, The Bootstrap and Other Resampling Plans*; Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[21] Fama, E. (1970): "Efficiency Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work"; *Journal of Finance* 25:383-417.

[22] Fisher, I. (1930): *The Theory of Interest as Determined by Impatience to spend Income And the opportunity to Invest It*; Macmillan, New York.

[23] Friedman, M. (1953): *Essays in Positive Economics*; University of Chicago Press, Chicago.

[24] Friedman, M. (1956): *Studies in the Quantity Theory of Money*; University of Chicago Press, Chicago.

[25] Goss, B. A. (1992): *Rational Expectations and Efficiency in Future Markets*; Routledge, Chapman and Hall, New York.

[26] Grossman, S. (1989): *The Informational Role of Prices*; MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[27] Hall, P. e Jing, B. (1995): "On Blocking Rules For The Bootstrap With Dependent Data."; *Biometrika* 82:561-574.

[28] Horowitz, J. (): "The Bootstrap"; *Handbook of Econometrics*, Vol. 5, ainda não publicado.

[29] Huang, C. e Litzenberger R. H. (1988): *Foundations for Financial Economics*; North-Holland Press.

[30] Hudson, R., Dempsey, M. e Keasey, K. (1996): "A note on the weak form efficiency of capital markets: The application of simple technical trading rules to UK stock prices - 1935 to 1994" *Journal of Banking and Finance,* 20: 1121-1132.

[31] Isakov, D. e Hollistein, M. (1999): "Application of simple technical trading rules to Swiss stock prices : Is it profitable?", *Finanzmarkt und Portfolio Management*, 13: 9-26.

[32] Ito, A. (1999): "Profits on Technical Trading Rules and Time -Varyng Expected Returns: Evidence from Pacific - Basin Equity Markets"; *Pacific - Basing Finance Journal* 7:283-330.

[33] Jensen, M. (1978): "Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency"; *Journal of Financial Economics* 6:95-102.

[34] Kho, B. (1996): "Time-varing risk premia, volatility and technical trading rule profits: Evidence from foreign currency futures markets" *Journal of Financial Economics* 41: 249-290.

[35] Kyle, A. (1985): "Continuos Auctions and Insider Trading"; *Econometrica* 53(6):1315-1335.

[36] LeBaron, B. (1999): "The Stability of Moving Average Technical Trading Rules on the Dow Jones Index"; *NBER*, Novembro de 1999.

[37] Leroy, S. e Parke, W. (1992): "Stock Price Volatility: Tests Based on Geometric Random Walk" *American Economic Review.*

[38] Leroy, S. e Porter, R. (1981): "The Present-Value Relation: Tests Based on Implied Variance Bounds" *Econometrica* 49:97-113.

[39] Levich, R. e Thomas, L. (1993): "The Significance of Technical Trading Rules. Profits in Foreign Exchange Markets: a Bootstrap Aproach", *Journal of International Money and Finance* 12: 451-474.

[40] Lorenz, H.-W. (1993): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*; Springer-Verlag, Berlin.

[41] Lucas, R. E., Jr. (1972): "Expectations and the Neutrality of Money"; *Journal of Economic Theory* 4:103-24.

[42] Lucas, R. E., Jr. (1978): "Asset Prices in a Exchange Economy"; *Econometrica* 46:1429-45.

[43] Maski, C. e McFadden, D. (1981): *Structure Analysis of Discrete Choice Models with Econometric Applications;* MIT Press, Cambridge.

[44] Mehra, R. e Prescott, E. (1985): "The Equity Premium Puzzle"; *Journal of Monetary Economics* 15:145-61.

[45] Milgrom, P. e Stokey, N. (1982): "Information, Trade and Common Knowledge"; *Journal of Economic Theory* 26:17-27.

[46] Nelson, D.B. (1992): "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I: Getting the Right Variance with the Wrong Model"; *Journal of Econometrics* 52:61-90.

[47] Nerlove, M. (1958): "Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena"; *Quarterly Journal of Economics* 73:227-40.

[48] O'Hara, M. (1995): *Market Microstructure Theory*; Blackwell Publishers Ltd, Oxford.

[49] Palis, J. e Takens, F. (1993): *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*; Cambridge University Press, Cambridge.

[50] Parisi, F. e Vasquez, A. (2000): "Simple Technical Trading Rules of Stock Returns: Evidence From 1987 to 1998 in Chile"; *Emerging Markets Review* 1: 152-164.

[51] Politis, D. (1998): "Computer Intensive Methods is Statistical Analysis"; *IEEE Signal Process Magazine* 15:39-55.

[52] Ratner, M. e Leal, R. (1999): "Tests of technical trading strategies in the emerging markets of Latin America and Asia"; *Journal of Banking and Finance* 23:1887-1905.

[53] Rodríguez, F., Rivero, S. e Félix, J. (1999): "Technical Analysis in the Madrid Stock Exchange"; *Documento de Trabajo* 99-05. FEDEA.

[54] Sargent, Thomas J. (1993): *Bounded Rationality in Macroeconomics*; Oxford University Press, New York.

[55] Sheffrin, Steve M. (1983): *Rational Expectations*; Cambridge University Press, New York.

[56] Shiller, R. (1981): "Do Stock Prices Move Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?"; *A.E.R. 71:421-36.*

[57] Shleifer, A., Summers, L. H. (1990): "The Noise Trader Approach to Finance"; *Journal of Economic Perspectives*, Spring 1990,19-33.

[58] Simonsen, M. H. (1983): *Dinâmica Macroeconômica*; McGraw-Hill, São Paulo.

[59] Smale, S. (1965): "Diffeomorphisms with Many Periodic Points" in *Differential and Combinatorial Topology*, editado por S. S. Cairns. Princeton University Press.

[60] Sullivan, R., Timmerman, A. e White, H. (1997): "Data-Snooping, Technical Trading Rules Performance And The Bootstrap"; *Discussion Paper 97-31.* University of California, San Diego.

[61] Tversky, A. (1969): "Intransitivity of Preferences"; *Psychological Review* 76:31-48.

[62] Zoubir, A. e Boashash, B. (1998): "The Bootstarp and its Applications in Signal Processing"; *IEEE Signal Process Magazine* 15:56-76.