

Nº 285

ISSN 0104-8910

***CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS
CAPÍTULO III: CÁLCULO NO \mathbb{R}^n***

***Rubens Penha Cysne
Humberto de Athayde Moreira***

Agosto de 1996

Rubens Penha Cysne
Humberto Moreira
Agosto de 1996

PREFÁCIO

Os autores objetivam, com este trabalho preliminar, bem como com aqueles que lhe darão continuidade, na sequência de composição de um livro de matemática para economistas, registrar as suas experiências ao longo dos últimos anos ministrando cadeiras de matemática nos cursos de pós-graduação em economia da Fundação Getulio Vargas, da UFF (Universidade Federal Fluminense) e da PUC-RJ.

Reveste-se de constante repetição em tais cursos a discussão sobre que pontos abordar, bem como com qual grau de profundidade, e em que ordem. É neste sentido que os autores esperam, com a sequência didática aqui apresentada, trazer alguma contribuição para o assunto.

1. NOÇÕES DE TOPOLOGIA E O TEOREMA DE WEIERSTRASS

Topologia

Nesta seção estudaremos algumas noções de topologia, bem como sua importância em economia, através de exemplos na teoria do consumidor e da firma.

Entre os vários teoremas que iremos ver (pelo menos o enunciado) destaca-se, pela sua importância, o teorema de Weierstrass. Este teorema garante, sob certas condições, a existência de ótimo para um problema de maximização (ou minimização). Por exemplo, se quisermos maximizar a utilidade do consumidor sujeito a sua restrição orçamentária, veremos que este problema tem solução, desde que a função utilidade seja contínua e que o conjunto da restrição orçamentária seja compacto.

Vejamos agora algumas definições:

Definição: Sejam X um conjunto, τ uma coleção de subconjuntos de X que contenha \emptyset e X . Diz-se que τ é uma topologia sobre X se:

- i) $A \cap B \in \tau$, se $A, B \in \tau$.
- ii) $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \tau$, se $A_\lambda \in \tau, \forall \lambda \in I$, I um conjunto de índices qualquer.

Neste caso, diz-se que o par (X, τ) é um espaço topológico e os elementos de τ são chamados de conjuntos abertos. Evidentemente, este nível de abstração não nos interessa no momento, embora seja importante conhecer a definição precisa. Na verdade, estamos interessados na topologia usual do \mathfrak{R}^n . Vamos a sua descrição:

A bola aberta de centro num ponto $a \in \mathfrak{R}^n$ e raio $r > 0$ é por definição o conjunto $B(a, r) = \{x \in \mathfrak{R}^n; \|x - a\| < r\}$, onde $\| \cdot \|$ é a norma euclidiana. Da mesma forma, a bola fechada $B[a, r] = \{x \in \mathfrak{R}^n; \|x - a\| \leq r\}$ e a esfera $S(a, r) = \{x \in \mathfrak{R}^n; \|x - a\| = r\}$ ambas com centro a e raio r .

Seja $X \subset \mathfrak{R}^n$ um conjunto. Um ponto $a \in X$ chama-se interior a X se existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$. O interior de X é o conjunto $\text{int } X = \{a \in X; a \text{ é interior a } X\}$. Quando $x \in \text{int } X$ dizemos que o conjunto X é uma vizinhança do ponto x .

Um conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ diz-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $\text{int } X = X$.

Agora é fácil verificar (segundo a definição dada acima) que a coleção de todos os conjuntos abertos definidos desta forma é uma topologia sobre \mathfrak{R}^n , chamada topologia usual do \mathfrak{R}^n .

Dado um conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ e um ponto $a \in \mathfrak{R}^n$, há três possibilidades mutuamente excludentes: ou $a \in \text{int } X$ ou $a \in \text{int } (\mathfrak{R}^n - X)$ ou então toda bola aberta de centro a contém pontos de X e pontos do complementar de X ($\mathfrak{R}^n \setminus X$). Neste último caso, diz-se que a é um ponto da fronteira de X ($\text{fr}(X)$).

Exemplo: Considere $A = \left\{ x \in \mathfrak{R}_+^n; \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq r \right\}$ (este conjunto representa a restrição orçamentária de um consumidor, onde $x \in \mathfrak{R}_+^n$ representa uma cesta de n bens da economia, p_i é o preço positivo do i -ésimo bem e r é a renda do consumidor). Então $\text{int } A = \{x \in \mathfrak{R}_+^n; \sum_{i=1}^n p_i x_i < r\}$; $\text{fr}(A) = \{x \in \mathfrak{R}_+^n; x_i = 0 \text{ para algum } i=1, \dots, n \text{ ou } \sum_{i=1}^n p_i x_i = r\}$ e $\text{int } (\mathfrak{R}^n - A) = \mathfrak{R}^n - (\text{int } A \cup \text{fr } A)$.

Dados (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$, podemos definir a topologia relativa (ou induzida) em Y simplesmente tomando como abertos desta topologia a interseção dos elementos de τ com Y . No caso particular da topologia usual do \mathfrak{R}^n , temos que se $Y \subset \mathfrak{R}^n, A \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se existe um aberto $B \subset \mathfrak{R}^n$ tal que $A = B \cap Y$

Um conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ diz-se limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$, para todo $x \in X$.

Teorema 1.1: Seja $X \subset \mathfrak{R}^n$. Então X é limitado se, e somente se $\pi_i(X) \subset \mathfrak{R}$ é limitado para todo $i=1, \dots, n$, onde $\pi_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é tal que $\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i, i=1, \dots, n$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que X seja limitado. Logo existe $r > 0$ tal que $X \subset B(0, r)$, isto é, $|x_i| \leq \|x\| \leq r, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X, i=1, \dots, n$. Portanto $|x_i| = |\pi_i(x)| \leq r, \forall x \in X, i=1, \dots, n$, ou seja, $\pi_i(X) \subset (-r, r), i=1, \dots, n$. Por definição temos que $\pi_i(X)$ é limitado, $i=1, \dots, n$. Reciprocamente, se $\pi_i(X) \subset \mathfrak{R}$ é limitado para todo $i=1, \dots, n$, significa que $|\pi_i(x)| \leq r_i, \forall x \in X$, onde $r_i > 0$ para cada $i=1, \dots, n$. Tome $r = \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i\} > 0$.

Segue-se que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (\pi_i(x))^2 \leq \sum_{i=1}^n r_i^2 \leq nr^2, \forall x \in X$, ou seja, $\|x\| \leq \sqrt{n} r, \forall x \in X$.

Portanto X é limitado. ■

Exemplo: $A = \{x \in \mathfrak{R}_+^n; \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq r\}$ é limitado se $p_i > 0, i=1, \dots, n$ e $r \geq 0$. De fato, seja

$$p = \min_{1 \leq i \leq n} \{p_i\}. \quad \text{Dado } x \in A, \quad 0 \leq x_j \leq \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{p} x_i \leq \frac{r}{p}, \quad \forall j=1, \dots, n \text{ visto que}$$

$$\frac{p_i}{p} \geq 1 \text{ e } x_i \geq 0, \quad \forall i=1, \dots, n \text{ onde } x = (x_1, \dots, x_n). \text{ Pelo teorema 1.1, } A \text{ é limitado.}$$

Definição: Seja $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ uma função definida no conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$. Diz-se que f é contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto $A \subset \mathfrak{R}^m$ é um conjunto aberto em X (com a topologia relativa). Equivalentemente a esta definição, diz-se que f é contínua se é contínua em a para todo $a \in X$ e definimos continuidade de f em a da seguinte forma: para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ e $x \in X$ então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Intuitivamente, isto significa que se x se aproxima suficientemente de a em X , então a imagem de x por f se aproxima da imagem de a por f , tanto quanto se queira.

Definição: Dado $X \subset \mathfrak{R}^n$, uma função $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ diz-se Lipschitziana quando existe $K > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$, $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$. Neste caso f é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$.

Exemplo: As projeções: $\pi_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ definidas por $\pi_i(x) = x_i, i = 1, \dots, n$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, são contínuas. De fato, $|\pi_i(x) - \pi_i(y)| = |x_i - y_i| \leq \|x - y\|$, ou seja, π_i é uma função Lipschitziana (com $K = 1$).

Exemplo: A função norma euclidiana é contínua, pois $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, i.e., é Lipschitziana com $K=1$.

Teorema 1.2: A composta de duas funções contínuas é contínua.

Teorema 1.3: Sejam $X \subset \mathfrak{R}^n$ e $f, g: X \rightarrow \mathfrak{R}^m, a: X \rightarrow \mathfrak{R}$ funções contínuas. Então as seguintes funções são contínuas:

- i) $f + g$
- ii) $a f$
- iii) $1 / a$ (definida onde fizer sentido, isto é, em $x \in X; a(x) \neq 0$).

Exemplo: $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$ é contínua pois é a soma dos quadrados das projeções, isto é, $f = \pi_1^2 + \pi_2^2$ e pelos resultados anteriores segue-se o afirmado.

Teorema 1.4: Sejam $X \subset \mathfrak{R}^n, f: X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ tal que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, onde $f_i: X \rightarrow \mathfrak{R}$ é definida como $f_i = \pi_i \circ f$ para $i = 1, \dots, m$. Então f é contínua se, e somente se f_i é contínua para todo $i = 1, \dots, m$.

Observações:

- i) A função f_i do teorema anterior é dita ser a i -ésima função coordenada de f .
- ii) Todos os teoremas anteriores para continuidade global (em todo domínio de definição da função) podem ser traduzidos para continuidade pontual.

Existe uma outra caracterização de aplicação contínua que é bastante útil, principalmente para mostrar que uma aplicação não é contínua em um determinado ponto. Para isto precisamos definir o que é uma sequência de pontos em \mathfrak{R}^n .

Uma sequência em \mathfrak{R}^n é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ onde \mathbb{N} é o conjunto de números naturais. O valor que essa função assume no número $k \in \mathbb{N}$ é indicado por x_k e chama-se o k -ésimo termo da sequência. Usaremos a notação $(x_k)_{(k \in \mathbb{N})}$ ou (x_k) para indicar a sequência.

Uma subsequência de $(x_k)_{(k \in \mathbb{N})}$ é a restrição da sequência (como função) a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. A subsequência é indicada pela notação $(x_k)_{(k \in \mathbb{N}')}.$

Diz-se que a sequência (x_k) é limitada se o conjunto dos seus termos é limitado em \mathfrak{R}^n .

Uma sequência (x_k) em \mathfrak{R}^n equivale a n sequências de números reais, a saber $(\pi_i(x_k))$, $\forall i = 1, \dots, n$ que são as coordenadas de x_k para cada $k \in \mathbb{N}$.

Diz-se que um ponto $a \in \mathfrak{R}^n$ é o limite da sequência de pontos (x_k) em \mathfrak{R}^n se para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$. Neste caso, diz-se que (x_k) converge para a ou tende para a , e escreve-se $\lim x_k = a$, ou $x_k \rightarrow a$. Quando existe o limite de (x_k) diz-se que (x_k) é convergente. Caso contrário, diz-se que (x_k) é divergente. Observamos também que quando o limite existe ele é único e que uma sequência convergente é limitada.

Uma sequência (x_k) em \mathfrak{R}^n é chamada de Cauchy se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$. É fácil ver que toda sequência convergente é de Cauchy. A recíproca é verdadeira e é equivalente ao "axioma da completudeza" que veremos abaixo.

Teorema 1.5: Uma sequência (x_k) em \mathfrak{R}^n converge para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se para cada $i = 1, \dots, n$ tem-se $\lim \pi_i(x_k) = a_i$.

Teorema 1.6: Uma sequência é convergente se, e somente se toda subsequência desta sequência é convergente.

Teorema 1.7: Sejam $(x_k), (y_k)$ sequências convergentes em \mathfrak{R} e $\alpha \in \mathfrak{R}$. Então:

- a) $(x_k + y_k)$ é sequência convergente e $\lim (x_k + y_k) = \lim x_k + \lim y_k$.
- b) (αx_k) é sequência convergente e $\lim (\alpha x_k) = \alpha \lim x_k$

Teorema 1.8 (Sandwich): Sejam $(x_k), (y_k), (z_k)$ sequências em \mathfrak{R} tais que $x_k \leq y_k \leq z_k$ e $\lim x_k = \lim z_k$. Então existe $\lim y_k$ e $\lim y_k = \lim x_k$.

Demonstração: Seja $a = \lim x_k = \lim z_k$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k > k_0, |x_k - a| < \varepsilon$ e $|z_k - a| < \varepsilon$. Assim, $\forall k > k_0, -\varepsilon + a < x_k \leq y_k \leq z_k \leq \varepsilon + a$. Logo $-\varepsilon < y_k - a < \varepsilon, \forall k > k_0$, ou seja, $|y_k - a| < \varepsilon, \forall k > k_0$. Portanto $\lim y_k = a$. ■

Finalmente podemos enunciar o seguinte:

Teorema 1.9: Uma aplicação $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^n$, definida num subconjunto $X \subset \mathfrak{R}^m$, é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se para toda sequência (x_k) em X com $\lim x_k = a$ tem-se $\lim f(x_k) = f(a)$.

Supremo e Ínfimo.

Tomemos os conjuntos $\{1,2\}$ e o intervalo $(1,2)$. É claro que o maior elemento do primeiro conjunto é o elemento 2. O conjunto $(1,2)$, entretanto, não possui um maior elemento. Para contornar este fato, substitui-se usualmente o conceito de maior elemento pelo conceito de menor superior.

Assim, o número 2 não é o maior elemento de $(1,2)$, mas é o seu menor superior. Dá-se a este elemento o nome de supremo (sup) de conjunto. Usualmente, $A \subset \mathfrak{R}$ não vazio é limitado superiormente se existe $c \in \mathfrak{R}$ tal que $x \leq c, \forall x \in A$. Neste caso diz-se que c é cota superior de A . Então, por definição o supremo de A ($\sup A$) é tal que:

- 1) $\sup A \geq x, \forall x \in A$ (ou seja, $\sup A$ é cota superior de A)
- 2) se $y \geq x, \forall x \in A$ então $y \geq \sup A$ (ou seja, $\sup A$ é a menor cota superior de A).

Da mesma maneira, se A é não vazio e limitado inferiormente (i.e., $\exists c \in \mathfrak{R}$ tal que $c \leq x, \forall x \in A$; novamente neste caso c é chamado de cota inferior de A) define-se ínfimo de A ($\inf A$) como a maior cota inferior de A :

- 1) $\inf A \leq x, \forall x \in A$ (ou seja, $\inf A$ é cota inferior)
- 2) se $y \leq x, \forall x \in A$ então $y \leq \inf A$ (i.e., $\inf A$ é a maior cota inferior)

O leitor deve perceber uma certa sutileza no que fizemos acima. Não existe necessariamente supremo de um conjunto limitado superiormente, estamos apenas definindo este conceito. Se o conjunto dos racionais fosse o conjunto que estivéssemos trabalhando, ao invés dos reais, teríamos problema com a existência de supremo. Por exemplo, não é difícil mostrar que $(-\infty, \sqrt{2})$, embora limitado superiormente não possui supremo neste conjunto.

Na verdade o conjunto dos reais é "construído" a partir dos racionais exigindo-se exatamente que todo conjunto limitado superiormente possua supremo. Isto é o que diz:

Axioma da completeza:

“Todo subconjunto dos reais limitado superiormente possui um supremo”.

O leitor atento pode verificar que este *axioma* é equivalente a um *axioma* análogo para ínfimo, uma vez que $\inf A = -\sup(-A)$, para todo $A \subset \mathfrak{R}$ limitado inferiormente, onde $-A = \{-x; x \in A\}$.

Vamos agora demonstrar um resultado muito importante: Teorema de Bolzano-Weierstrass. Para isto precisamos de algumas definições e teoremas.

Definição: Seja (x_n) seqüência em \mathfrak{R} .

- i) (x_n) é monótona não-crescente se $x_n \leq x_m$ quando $n > m$.
- ii) (x_n) é monótona não-decrescente se $x_n \leq x_m$ quando $n < m$.

Diremos simplesmente que a seqüência é monótona caso não queiramos especificar se é não-crescente ou não-decrescente.

Teorema 1.10: Toda seqüência monótona limitada (x_n) é convergente.

Demonstração: Suponhamos que (x_n) é monótona não-decrescente (o outro caso é análogo). Seja $A = \{x_n; n \in \mathfrak{N}\}$. Sabemos que A é limitado superiormente, então pelo axioma da completude existe $s = \sup A \in \mathfrak{R}$. Afirmamos que $\lim x_n = s$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ não pode ser cota superior de A . Logo existe $n_0 \in \mathfrak{N}$ tal que $s - \varepsilon < x_{n_0} < s$. Como (x_n) é monótona não-decrescente temos que $s - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq s < s + \varepsilon$, $\forall n > n_0$, i.e., $|s - x_n| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$, como queríamos demonstrar. ■

Precisamos ainda de algumas propriedades elementares de supremo e ínfimo:

- i) Sejam $A \subset B$ subconjuntos de \mathfrak{R} não-vazios limitados superiormente. Então $\sup A \leq \sup B$.
- ii) Sejam $A \subset B$ subconjuntos de \mathfrak{R} não-vazios limitados inferiormente. Então $\inf A \geq \inf B$.

A prova dos resultados fica como exercício.

Teorema 1.11 (Bolzano - Weierstrass): Toda seqüência limitada em \mathfrak{R} possui uma subsequência convergente.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência limitada. Para cada $k \in \mathfrak{N}$, defina $A_k = \inf \{x_n; n > k\}$. É fácil verificar que $\{x_n; n > k\} \supset \{x_n; n > k + 1\}$, logo $A_k \leq A_{k+1}$.

Como (x_n) é sequência limitada, (A_k) também é. Assim pelo teorema 1.10 existe $\ell = \lim A_k$. Defina $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_1 \leq x_{n_1} < A_1 + 1; n_2 > n_1 \text{ tal que } A_{n_1} \leq x_{n_2} < A_{n_1} + \frac{1}{2}.$$

Suponhamos que $n_k \in \mathbb{N}$ está definido. Então podemos definir $n_{k+1} > n_k$ tal que $A_{n_k} \leq x_{n_{k+1}} < A_{n_k} + 1/k + 1$. Construímos assim uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $A_{n_k} \leq x_{n_{k+1}} < A_{n_k} + 1/k + 1$. Pelo teorema 1.8 (passando à subsequência) temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = \ell$.

Observação: Se (x_k) é uma subsequência limitada em \mathfrak{R}^n então $(\pi_1(x_k))$ é uma subsequência limitada em \mathfrak{R} possuindo assim subsequência $(\pi_1(x_{k_1}))$ convergente. Da mesma forma $(\pi_2(x_{k_1}))$ possui subsequência convergente $(\pi_2(x_{k_2}))$ e assim sucessivamente construiremos a subsequência (x_{k_j}) de (x_n) que é convergente pois existe $\lim \pi_j(x_{k_j}), \forall j = 1, \dots, n$. Portanto, o teorema de Bolzano-Weirstrass vale para \mathfrak{R}^n .

Séries

Definição: Se (x_n) é uma sequência em \mathfrak{R} então a série gerada por (x_n) é a sequência (s_k) definida por:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= s_1 + x_2 \\ &\vdots \\ s_k &= s_{k-1} + x_k \end{aligned}$$

Se (s_k) converge, nos referimos a $\lim s_k$ como a soma da série. Os elementos x_n 's são chamados de termos e os elementos s_k de somas parciais ou reduzidas da série.

Notação: Vamos denotar a série da definição acima por $\sum(x_n)$ e $\lim s_n$ por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Teorema 1.12:

(a) Se as séries $\sum(x_n)$ e $\sum(y_n)$ convergem, então a série $\sum(x_n + y_n)$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

(b) Se a série $\sum(x_n)$ converge e $\alpha \in \mathfrak{R}$, então a série $\sum(\alpha x_n)$ converge para $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Demonstração: Imediata a partir do teorema 1.7, uma vez que séries são seqüências. ■

Teorema 1.13: Se $\sum(x_n)$ converge então $\lim x_n = 0$.

Demonstração: Basta observar que $x_k = s_k - s_{k-1}$. Logo limite de (x_k) existe pois limite de (s_k) existe e $\lim x_k = \lim s_k - \lim s_{k-1} = 0$. ■

Teorema 1.14: Seja (x_n) uma seqüência de números reais positivos. Então $\sum(x_n)$ converge se, e somente se a seqüência (s_k) das reduzidas é limitada. Neste caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim s_k = \sup \{s_k ; k \geq 1\}$$

Demonstração: Como $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathfrak{N}$ temos que (s_k) é uma seqüência monótona não-decrescente. Assim pelo teorema 1.10 o resultado segue imediatamente. ■

Teorema 1.15 (Critério de Cauchy): $\sum(x_n)$ é convergente se, e somente se para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathfrak{N}$ tal que se $m > n \geq n_0$, $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Demonstração: Imediata a partir do fato que uma seqüência é convergente se, e só se é de Cauchy. ■

Definição: Seja (x_n) uma seqüência em \mathfrak{R} . Diremos que a série $\sum(x_n)$ é absolutamente convergente se a série $\sum(|x_n|)$ é convergente. A série é dita ser condicionalmente convergente se ela é convergente mas não é absolutamente convergente.

Teorema 1.16: Se uma série $\sum(x_n)$ é absolutamente convergente então ela é convergente.

Demonstração: Basta observar que $|x_{n+1} + \dots + x_m| \leq |x_{n+1}| + \dots + |x_m|$ se $m > n$ e aplicar o critério de Cauchy primeiro para a série convergente $\sum(|x_n|)$ e depois com a desigualdade acima concluir a sua validade para a série $\sum(x_n)$. ■

Exemplos:

(a) (Série geométrica) Seja $a \in (-1, 1)$ e considere a sequência de números reais (a^n) , que gera a série geométrica (s_k) , onde $s_k = \sum_{n=0}^k a^n$. Observe que $(1-a) s_k = 1 - a^{k+1}$, assim se $|a| < 1$ então $\lim a^k = 0$ e portanto $\lim s_k = \lim \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$. Logo a série geométrica converge para $\frac{1}{1 - a}$.

(b) (Série harmônica): Considere a série harmônica $\sum (1/n)$. Afiramos que esta série diverge, embora a sequência dos seus termos convirja a zero. De fato, considere a seguinte sequência de índices $k_i = 2^i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Então

$$s_{k_1} = 1 + \frac{1}{2}$$
$$s_{k_2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = s_{k_1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_{k_1} + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

e por indução temos: $s_{k_i} > s_{k_{i-1}} + 2^{i-1}\left(\frac{1}{2^i}\right) = s_{k_{i-1}} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{i}{2}$

Portanto, a subsequência $(s_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ não é limitada e a série harmônica não converge.

Limites de Funções

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito de acumulação do conjunto X quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X diferente de a . O conjunto dos pontos de acumulação de X será representado pela notação X' .

Teorema 1.17: Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- a é ponto de acumulação de X .
- Existe uma sequência (x_k) em X com $\lim x_k = a$ e $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Toda bola de centro a e raio positivo contém uma infinidade de pontos de X .

Exemplo : 0 é ponto de acumulação do conjunto $\{1/n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , diz-se que a é um ponto isolado de X . Quando todo ponto $a \in X$ é isolado, dizemos que X é um conjunto discreto.

Seja $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ uma função definida num conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ e $a \in X'$. Diz-se que $b \in \mathfrak{R}^m$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a (notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$) quando $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in X, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$. Observa-se que por esta definição, não é necessário que $a \in X$.

Nestes termos a continuidade de f em $a \in X$ se expressa da seguinte forma: se a é isolado, então toda função $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é contínua no ponto a . Se $a \in X'$ então f é contínua no ponto a se, e somente se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Um critério bastante útil para examinar a existência de limite é o seguinte: para que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é suficiente que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x_k)$ seja qual for a seqüência de pontos (x_k) em $X - \{a\}$ com $\lim x_k = a$.

Teorema 1.18: Sejam $X \subset \mathfrak{R}^n, a \in X', f, g: X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ e $\alpha, \beta: X \rightarrow \mathfrak{R}$ tais que existem os limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x), \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) \neq 0$.

Então:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \Big/ \lim_{x \rightarrow a} \beta(x)$$

Conjuntos Fechados

Um ponto $a \in \mathfrak{R}^n$ é dito aderente a um conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X , ou equivalentemente, existe uma seqüência de pontos em X que converge para a . A coleção de todos estes pontos é chamado de fecho de X e será denotado por \overline{X} .

Observação: Se $X \subset \mathfrak{R}^n$ então $X \subset \overline{X}$, pois dado $a \in X, a = \lim x_k$ onde $x_k = a, \forall k \in \mathfrak{N}$. Também vale $X' \subset \overline{X}$, mais especificamente o leitor pode verificar que $\overline{X} = X \cup X'$.

Exemplos:

$$\text{a) Se } X = [1, 2], \overline{X} = [1, 2]$$

b) $\overline{B(a,r)} = B[a,r]$

Teorema 1.19: Dado $A \subset \mathfrak{R}$ limitado, então $\sup A \in \overline{A}$ e $\inf A \in \overline{A}$.

Demonstração: Para cada $n \in \mathfrak{N}$ sabemos que $\sup A - 1/n$ não pode ser cota superior de A , pois $\sup A$ é a menor cota superior de A . Assim, existe para cada $n \in \mathfrak{N}$, $x_n \in A$ tal que $\sup A - 1/n < x_n \leq \sup A$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup A - 1/n) = \sup A$, tem-se pelo teorema do Sandwich que $\lim x_n = \sup A$, com $x_n \in A$, $\forall n \in \mathfrak{N}$. Portanto $\sup A \in \overline{A}$. A prova que $\inf A \in \overline{A}$ é análoga e fica a cargo do leitor. ■

Um conjunto X é dito **fechado** quando $X = \overline{X}$, isto é, se $\lim x_k = a$ e $x_k \in X$ para todo $k \in \mathfrak{N}$, então $a \in X$.

Teorema 1.20: Para todo $X \subset \mathfrak{R}^n$, \overline{X} é fechado.

Exemplo: $B[a,r]$ é um conjunto fechado do \mathfrak{R}^n , pois se $\|x_k\| \leq r$, $\forall k \in \mathfrak{N}$ e $\lim x_k = b$ então $\|b\| = \lim \|x_k\| \leq r$ (veja o exercício resolvido 1 e use o fato que $\| \|x_k\| - \|b\| \| \leq \|x_k - b\|$). Em particular se $X \subset \mathfrak{R}^n$ é limitado então \overline{X} é limitado.

Exemplo: $S(a,r) \subset \mathfrak{R}^n$ é um conjunto fechado de \mathfrak{R}^n provando-se da mesma forma que o exemplo anterior.

Teorema 1.21: Um conjunto é fechado se, e somente se seu complementar for aberto.

Teorema 1.22: Valem as seguintes propriedades.

i) \emptyset e \mathfrak{R}^n são fechados.

ii) Se F_1, \dots, F_k são fechados então $\bigcup_{i=1}^k F_i$ é fechado.

iii) $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ é fechado, se F_λ é fechado $\forall \lambda \in I$, onde I é um conjunto arbitrário de índices.

Observe que $\{x\}$ é fechado com $x \in \mathfrak{R}^n$. Todo conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ é a reunião dos seus pontos, isto é, $\bigcup_{x \in X} \{x\} = X$. Como há conjuntos em \mathfrak{R}^n que não são fechados então a reunião arbitrária de conjuntos fechados não é necessariamente fechada.

Teorema 1.23: Seja $X \subset \mathfrak{R}^n$

$$\text{i) } \text{fr}(X) = \overline{X} \cap \overline{(\mathfrak{R}^n - X)}$$

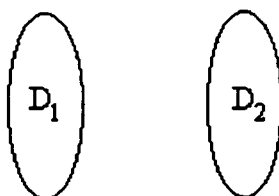
$$\text{ii) } \overline{X} = X \cup \text{fr}(X)$$

Da mesma forma que definimos aberto relativo podemos definir fechado relativo da seguinte forma: Seja $X \subset \mathfrak{R}^n$ um conjunto e $F \subset X$. Diz-se que F é fechado em X se existe $\tilde{F} \subset \mathfrak{R}^n$ fechado tal que $F = \tilde{F} \cap X$. É fácil ver que F é fechado em X se, e somente se $X - F$ é aberto em X .

Teorema 1.24. Seja $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ uma função, $X \subset \mathfrak{R}^n$, f é contínua se, e somente se $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo $F \subset \mathfrak{R}^m$ fechado.

Conjuntos Conexos

Dados dois conjuntos A e B contidos em \mathfrak{R}^n , diz-se que eles são disjuntos se possuem interseção vazia ($A \cap B = \emptyset$) e que são separáveis se a interseção de cada um deles com o fecho do outro é vazia ($A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$). Conjuntos separáveis são sempre disjuntos, mas a recíproca não é verdadeira, como se atesta tomando-se, como exemplo: $A = (0,1]$ e $B = (1,2)$. Um conjunto $C \subset \mathfrak{R}^n$ é dito conexo se não pode ser representado como união de dois conjuntos separáveis ambos não vazios. Em outras palavras, C é conexo se $C = A \cup B$ com $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$ implica $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Exemplos óbvios de conjuntos conexos são os intervalos da reta. Visualmente, um conjunto não conexo $D = D_1 \cup D_2$ podem ser apresentado na forma abaixo:



$$\text{onde } D_1 \cap \overline{D_2} = \overline{D_1} \cap D_2 = \emptyset, \quad D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \neq \emptyset \text{ e } D_2 \neq \emptyset.$$

Teorema 1.25: Um subconjunto I da reta real é conexo se, e somente se para cada $x \in I$ e $y \in I$, com $x < z < y$, implica que $z \in I$ (ou seja, se, e somente se I é um intervalo).

Demonstração:

Necessidade: Suponhamos, por exemplo, que para x e y pertencentes a I e $z \in \mathcal{R}$, com $x < z < y$, tivéssemos $z \notin I$. Neste caso, I poderia ser escrito com $I = I_1 \cup I_2$, onde $I_1 = I \cap (-\infty, z)$ e $I_2 = I \cap (z, \infty)$. Tanto I_1 quanto I_2 são não vazios, pois contêm respectivamente x e y . Decorre também do fato de $I_1 \subset (-\infty, z)$ e $I_2 \subset (z, +\infty)$ que $I_1 \cap \bar{I}_2 = \emptyset$ e $\bar{I}_1 \cap I_2 = \emptyset$, ou seja, I_1 e I_2 são separáveis. Segue que I , não será conexo. Logo, $z \in I$.

Suficiência: Suponha que I não fosse conexo. Então existiriam dois conjuntos não vazios A e B tais que $A \cup B = I$, com $\bar{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Tomemos $x \in A$ e $y \in B$ com $x < y$ (evidentemente, isto não implica em perda de generalidade). Seja então $z = \sup(A \cap [x, y])$. Decorre do teorema 1.19 que $z \in \bar{A}$. Logo, $z \notin B$. Pode-se então afirmar que $x \leq z < y$. Se $z \notin A$, $x < z < y$ e $z \notin I$. Se $z \in A$, $z \notin \bar{B}$ existe: $z_1 > z$ com $x < z_1 < y$ e $z_1 \notin B$ (pois o complementar de \bar{B} é um conjunto aberto e $z_1 \notin \bar{B} \Rightarrow z_1 \notin B$). Então, $x < z_1 < y$ e $z_1 \notin I$. Como esta é uma contradição com a hipótese, segue que I é conexo. ■

Teorema 1.26: Seja $f: X \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ contínua, com X conexo. Então $f(X)$ é conexo.

Demonstração: Suponha por absurdo que $f(X)$ seja desconexo, ou seja, $f(X) = A \cup B$ com A e B separáveis e ambos não vazios. Seja $C = f^{-1}(A)$ e $D = f^{-1}(B)$. Então $X = C \cup D$ e nenhum dos dois é vazio. Como $A \subset \bar{A}$, $C \subset f^{-1}(\bar{A})$. Dada a continuidade de f e o fato de \bar{A} ser fechado, temos que $f^{-1}(\bar{A})$ é um conjunto fechado em X . Logo $\bar{C} \cap X \subset f^{-1}(\bar{A})$.

Pela definição de D e $\bar{A} \cap B = \emptyset$, $\bar{C} \cap X \cap D = \bar{C} \cap D = \emptyset$. De forma análoga, mostra-se que $C \cap \bar{D}$ é vazio. Segue que C e D são separáveis. Mas este fato colide com a hipótese de X ser conexo. Segue que $f(X)$ é conexo. ■

Exemplos:

- \emptyset, \mathcal{R}^n é conexo
- Todo conjunto finito em \mathcal{R}^n é desconexo.

Conjuntos Compactos

Diz-se que $K \subset \mathcal{R}^n$ é **compacto** quando K for limitado e fechado.

Exemplos :

- $B[a, r], S(a, r)$ são compactos, $a \in \mathcal{R}^n, r > 0$.
- $\{x \in \mathcal{R}_+^n; \langle p, x \rangle \leq r\}$ é compacto para $p \in \mathcal{R}_{++}^n$ e $r \geq 0$.

Teorema 1.27:

- a) $K_1 \cup \dots \cup K_m$ é compacto, se $K_i \subset \mathfrak{R}^n$ é compacto, $i = 1, \dots, m$.
- b) $\bigcap_{\lambda \in I} K_\lambda$ é compacto, se $K_\lambda \subset \mathfrak{R}^n$ é compacto $\forall \lambda \in I$, I conjunto de índices arbitrário.
- c) Seja $K_1 \supset \dots \supset K_m \supset \dots$ uma seqüência decrescente de conjuntos compactos em \mathfrak{R}^n não vazios, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não vazio.

Devido ao teorema de Bolzano-Weierstrass, um conjunto $K \subset \mathfrak{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda seqüência de pontos (x_k) em K possui uma subseqüência que converge para um ponto de K . O que é importante nesta caracterização é que o conceito de conjunto compacto é intrínseco, ou seja, não depende de onde esteja contido. De fato, suponhamos que K seja compacto. Dada uma (x_k) seqüência em K , pelo teorema de Bolzano-Weierstrass e pelo fato de K ser limitado, existe $(x_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ subseqüência de (x_k) tal que $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$, logo $x \in \overline{K} = K$. Reciprocamente, se vale a propriedade acima, dado $x \in \overline{K}$, existe $(x_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ seqüência em K tal que $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$. Como toda subseqüência de uma seqüência convergente é convergente e converge para o mesmo limite, devemos ter que $x \in K$. Assim K é fechado. Se K fosse ilimitado teríamos para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in K$ tal que $\|x_k\| \geq k$. Agora é fácil ver que toda subseqüência de (x_k) é ilimitada, logo não convergente, o que é uma contradição.

Teorema 1.28: Seja $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^m$ contínua no conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$. Se $K \subset X$ é compacto então $f(K)$ é compacto.

Demonstração: Seja (y_k) seqüência em $f(K)$. Então existe (x_k) seqüência em K tal que $f(x_k) = y_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pela observação que antecede o teorema temos que existe $(x_k)_{(k \in \mathbb{N})}$ subseqüência em K tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}} (x_k) = x \in K$. Como f é contínua temos que $(y_k)_{(k \in \mathbb{N})}$ é uma subseqüência de $f(K)$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{N}} (y_k) = f(x) \in f(K)$. Novamente usando a caracterização acima temos que $f(K)$ deve ser compacto, uma vez que dada a seqüência (y_k) existe uma subseqüência $(y_k)_{(k \in \mathbb{N})}$ que converge para um ponto de $f(K)$. ■

Corolário 1.29 (Teorema de Weierstrass): Seja $f: K \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função contínua, $K \subset \mathfrak{R}^n$ compacto, então f atinge seu máximo e seu mínimo em K .

Demonstração: Temos pelo teorema 1.28 que $f(K)$ é compacto em \mathfrak{R} , ou seja, $f(K)$ é um conjunto limitado e fechado de \mathfrak{R} . Assim existe $a = \inf_{x \in K} f(x)$ e $b = \sup_{x \in K} f(x)$, respectivamente

o ínfimo e o supremo de $f(K)$. Além disso, $a, b \in f(K)$ pelo teorema 1.19. Portanto $a \leq y \leq b, \forall y \in f(K)$ com $a, b \in f(K)$. Logo existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = a \leq f(x) \leq b = f(x_1), \forall x \in K$. ■

A definição acima de conjunto compacto não é geral, isto é, em espaços topológicos genéricos, definimos conjunto compacto de outra forma, muito embora nos espaços euclidianos com a topologia usual estas definições sejam equivalentes. Isto é o que veremos abaixo.

Definição: Sejam A um subconjunto de \mathfrak{R}^n e $C = \{C_\lambda\}_{\lambda \in I}$ como coleção de subconjuntos de \mathfrak{R}^n , I conjunto de índices.

i) C é uma cobertura de A se $A \subset \bigcup_{\lambda \in I} C_\lambda$.

ii) Dizemos também que C é uma cobertura aberta de A se C é uma cobertura e C_λ é aberto para todo $\lambda \in I$.

iii) Uma subcobertura de C é uma coleção $B = \{C_\lambda\}_{\lambda \in J}$ tal que $J \subset I$. A subcobertura será finita se J for finito.

Teorema 1.30 (Heine-Borel): Um subconjunto K de \mathfrak{R}^n é compacto se, e somente se toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.

Aplicação à economia

Sejam $X \subset \mathfrak{R}_+^n$ um subconjunto não vazio convexo e fechado e uma relação em X que satisfaz os seguintes axiomas:

i) $\forall x, y \in X, x \succ y$ ou $y \succ x$ (completeza).

ii) $\forall x, y, z \in X, x \succ y$ e $y \succ z \Rightarrow x \succ z$ (transitividade).

iii) $\forall y \in X, \{x \in X; x \succ y\}$ e $\{x \in X; x \prec y\}$ são fechados (continuidade).

iv) $x \geq y$ (i.e., $x_i \geq y_i, i = 1, \dots, n$) e $x \neq y \Rightarrow x \succ y$ (monotonicidade forte).

Observação: $x \succ y$ se $x \succ y$ e não é o caso que $y \succ x$.

Neste caso temos a seguinte proposição:

Proposição: Se $X = \mathfrak{R}_+^n$ então existe $u: X \rightarrow \mathfrak{R}$ contínua tal que $u(x) \geq u(y)$ se, e somente se $x \succeq y, \forall x, y \in X$.

Em linguagem econômica X é o conjunto das cestas possíveis de um consumidor e \succeq representa as preferências deste consumidor neste conjunto de cestas. A proposição acima mostra que sob certas condições (axiomas (i), (ii), (iii) e (iv)) podemos determinar uma escala numérica para as preferências do consumidor.

Demonstração: Seja $\underline{1} = (1, \dots, 1) \in \mathfrak{R}_+^n$. Então, dado $x \in X$, sejam $A = \{t \in \mathfrak{R}_+; \underline{1} \succeq x\}$ e $B = \{t \in \mathfrak{R}_+; x \succeq \underline{1}\}$. Por (iv) A e B são não vazios e por (iii) são ambos fechados, visto que a função $\varphi: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+^n$ é contínua e neste caso $A = \varphi^{-1}(\{y \in X; y \succeq x\})$ e $B = \varphi^{-1}(\{y \in X; y \preceq x\})$.

Por (i) temos que $\mathfrak{R}_+ = A \cup B$. Pela conexidade de \mathfrak{R}_+ existe $t \in \mathfrak{R}$ tal que $\underline{1} \sim x$. Usando (iv), temos que este t é único. Defina $u: X \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $u(x) = t$. Além disso, $u^{-1}[t_0, \infty] = \{x \in X; u(x) \geq t_0\} = \{x \in X; x \succeq u^{-1}(t_0)\}$ e $u^{-1}[0, t_0] = \{x \in X; x \preceq u^{-1}(t_0)\}$ são fechados o que mostra que u é contínua, visto que neste caso todo fechado em $[0, \infty)$ terá imagem inversa fechada (Por quê? Veja exercício proposto 9). ■

Na verdade vale um teorema mais geral: se $X \subset \mathfrak{R}^n$ é conexo e \succeq é uma relação de preferências em X satisfazendo (i) - (iii) então existe $u: X \rightarrow \mathfrak{R}$ contínua representando \succeq (i.e., $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succeq y, \forall x, y \in X$).

O problema básico do consumidor é o seguinte: seja r a renda do consumidor e $p = (p_1, \dots, p_n)$ o vetor de preços dos bens $1, \dots, n$. Dentro do contexto acima, definimos o conjunto factível como $\{x \in X; \langle p, x \rangle \leq r\}$. Se $u: X \rightarrow \mathfrak{R}$ contínua representa as preferências do consumidor, então o problema de maximização das preferências pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \max & u(x) \\ \text{s. a} & \langle p, x \rangle \leq r \\ & x \in X \end{aligned}$$

Uma primeira observação importante é que se u é contínua e $p \in \mathfrak{R}_+^n$ (o que implicará que o conjunto factível neste caso seja compacto) então o problema acima tem solução pelo teorema de Weierstrass desde que exista uma cesta factível.

Diz-se que $x, y \in X$ são indiferentes ($x \sim y$) quando $x \succeq y$ e $y \succeq x$. Uma cesta $x \in X$ é dita ser redundante (veja Simonsen, 1989) quando existir $y \in X$ tal que $x \geq y, y \neq x$, e $x \sim y$.

Considere ainda os seguintes axiomas:

(v) $x, y \in X, x \neq y, x, y$ não redundantes tais que $x \sim y \Rightarrow (1-t)x + ty \succ x, \forall t \in (0,1)$.

(vi) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in X$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$ e $y \succ x$.

Definamos agora a função de utilidade indireta

$$v(p, r) = \max u(x) \\ \text{s.a. } \langle p, x \rangle \leq r, \quad x \in X.$$

Verifica-se sem dificuldade que a cesta que resolve o problema de maximização acima esgota a renda do consumidor, isto é, $\langle p, x \rangle = r$, onde x é a solução do problema, desde que (vi) seja satisfeita ou (iv) seja satisfeita para $X = \mathfrak{R}_+^n$. Temos também que x é não redundante. Com efeito, se x fosse redundante existiria $x' \neq x$ tal que $x' \sim x, x \geq x'$. Como os preços são todos positivos, $\langle p, x' \rangle < \langle p, x \rangle = r$. Mas então x' seria outro ponto de utilidade máxima e que não esgotaria a renda do consumidor, o que não é possível pelo que vimos acima.

Vamos mostrar agora que se além disso (v) for satisfeito tem-se que x é único. Com efeito, suponhamos que x' seja outra cesta factível com a mesma utilidade (máxima) de x . Pelo que foi visto x e x' seriam não redundantes. Mas por (v) $\frac{1}{2}(x+x') \succ x$ com $\frac{1}{2}(x+x')$ factível. Isto contradiz a hipótese de que x seja ponto de utilidade máxima.

Neste caso, chamaremos a única solução do problema acima dado p e r de vetor $x(p, r)$ de demanda marshalliana. Mais especificamente, $x_i(p, r)$ é a função demanda marshalliana do i -ésimo bem.

Teorema 1.31: Suponha que as preferências de um consumidor satisfaçam (i)–(iii) e (vi). Então a função demanda marshalliana $x_i: \mathfrak{R}_{++}^n \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ é contínua, $\forall i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Apresentamos aqui uma demonstração de (Simonsen, 1989): Considere u dada pela observação após a proposição. Sejam $(p_n, r_n) \in \mathfrak{R}_{++}^{n+1}$ tais que $(p_n, r_n) \rightarrow (p, r) \in \mathfrak{R}_{++}^n \times \mathfrak{R}_{++}$. Notemos inicialmente que a seqüência $(x(p_n, r_n))_{n \geq 1}$ é limitada. Com efeito, tomando $p' \in \mathfrak{R}_{++}^n$ tal que $p' \leq p_n, \forall n \in \mathfrak{N}$, e $r' \geq r_n, \forall n \in \mathfrak{N}$, é imediato que $\langle p', x(p_n, r_n) \rangle \leq \langle p_n, x(p_n, r_n) \rangle = r_n \leq r'$. Isto posto, para provar que a função demanda marshalliana é contínua basta provar que qualquer subseqüência convergente de $(x(p_n, r_n))_{(n \in \mathfrak{N})}$ converge para $x(p, r)$.

Seja então $(x(p_{n_i}, r_{n_i}))_{i \in \mathfrak{N}}$ subseqüência que converge para y . Como $\langle p_{n_i}, x(p_{n_i}, r_{n_i}) \rangle = r_{n_i}$, segue-se passando ao limite, que $\langle p, y \rangle = r$, isto é, y é factível com respeito ao par (p, r) . Para provar que $y = x(p, r)$ basta então provar que, se y' é factível com

respeito ao par (p, r) , $u(y) \geq u(y')$. Seja $\mu_n = \frac{\langle p, y' \rangle}{\langle p_n, y' \rangle} \frac{r_n}{r}$. Verifica-se imediatamente que $\langle p_n, \mu_n y' \rangle = \frac{\langle p, y' \rangle}{r} r_n \leq r_n$.

Isso significa que $\mu_n y'$ é factível em relação ao par (p_n, r_n) . Logo, como $x(p_n, r_n)$ é o ponto de equilíbrio do consumidor com respeito ao par (p_n, r_n) tem-se $u(x(p_n, r_n)) \geq u(\mu_n y')$ portanto $u(x(p_n, r_n)) \geq u(\mu_n y')$. Passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ e notando que $\mu_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ temos: $u(y) \geq u(y')$ o que completa a prova. ■

Exercícios Resolvidos – Seção 1

1) Sejam seqüências reais convergentes tais que $x_k \leq y_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Então $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$.

Solução: Sejam $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ e $b = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. Suponha por absurdo que $a > b$. Seja $\varepsilon = (a - b)/2 > 0$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, $|x_k - a| < \varepsilon$ e $|y_k - b| < \varepsilon$. Seja $k \geq k_0$, então $-\varepsilon < x_k - a$ e $y_k - b < \varepsilon$. Como $a - \varepsilon = (a + b)/2 = b + \varepsilon$ temos que $y_k < \frac{a + b}{2} < x_k$, o que é absurdo. Portanto concluí-se que $a \leq b$.

2) (a) Se $X \subset F$, F é fechado em \mathbb{R}^n , então $\overline{X} \subset F$. Mostre também que $X \subset Y$ com X e Y subconjuntos em \mathbb{R}^n implica $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

(b) Se A e B são conjuntos abertos em \mathbb{R}^n então $A \cap B$ é conjunto aberto.

(c) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ uma família de conjuntos abertos onde I é um conjunto arbitrário de índices. Mostre que $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ é sempre um conjunto aberto, embora $\bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda$ nem sempre seja um conjunto aberto. Dê um exemplo justificando a última afirmação.

Solução: (a) Dado $x \in \overline{X}$, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüência de números reais em X com $x_n \rightarrow x$. Como $X \subset F$ e F é um conjunto fechado vale que $x \in F$ também. Como $X \subset \overline{Y}$ e \overline{Y} é um conjunto fechado tem-se imediatamente que $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

(b) Vamos provar que $A \cap B \subset \text{int}(A \cap B)$. Se $x \in A \cap B$ então $x \in A$ e $x \in B$. Como A e B são conjuntos abertos isso implica que existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $B(x; \varepsilon_1) \subset A$ e $B(x; \varepsilon_2) \subset B$. Para $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ tem-se $B(x; \varepsilon) \subset A$ e $B(x; \varepsilon) \subset B$. Logo, $B(x; \varepsilon) \subset A \cap B$ e $x \in \text{int}(A \cap B)$.

(c) $x \in \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ implica que $x \in A_{\lambda'}$ para algum $\lambda' \in I$. Como $A_{\lambda'}$ é aberto, I , existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset A_{\lambda'}$. Daí, tem-se que $B(x; \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ e, portanto, $x \in \text{int}\left(\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda\right)$.

Exemplo: Seja $A_n = (-1/n, 1/n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Obviamente, A_n é um conjunto aberto para todo n . Todavia, $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

3) Mostre que $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$ e $\text{int}(X \cup Y) \supset \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$ com X e Y subconjuntos de \mathbb{R}^n . Dê um exemplo onde a inclusão acima não é uma igualdade.

Demonstração:

Como $\text{int}(X) \subset X$ e $\text{int}(Y) \subset Y$ tem-se que $\text{int}(X) \cap \text{int}(Y) \subset X \cap Y$. Da parte (b) do exercício anterior obtém-se que $\text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$ é um conjunto aberto e, portanto, $\text{int}(X) \cap \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cap Y)$.

Obviamente, $\text{int}(X \cap Y) \subset X$ e $\text{int}(X \cap Y) \subset Y$. Como $\text{int}(X \cap Y)$ é aberto vale que $\text{int}(X \cap Y) \subset \text{int}(X)$ e $\text{int}(X \cap Y) \subset \text{int}(Y)$. Logo, $\text{int}(X \cap Y) \subset \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$. Temos que provar que $\text{int}(X \cup Y) \supset \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$. Como $\text{int}(X) \subset X$ e $\text{int}(Y) \subset Y$ vale que $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset X \cup Y$. Da parte (b) do exercício anterior tem-se que $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$ é um conjunto aberto. Logo, $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$.

Exemplo: Sejam $X = (0, 1]$ e $Y = [1, 2]$. Tem-se que $\text{int}(X) = (0, 1)$, $\text{int}(Y) = (1, 2)$ e $\text{int}(X \cup Y) = (0, 2)$. Obviamente, $\text{int}(X \cup Y) \not\subset \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$, já que $1 \in \text{int}(X \cup Y)$ e $1 \notin \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.

4) Para cada um dos conjuntos seguintes determine sua fronteira:
 $X = [0, 1]$, $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$, $W = \mathbb{R}$ e $A = \{x \in \mathbb{R}_+^n; \langle p, x \rangle \leq m\}$

Solução: $\text{fr}(X) = \{0, 1\}$, $\text{fr}(Y) = \{0, 1, 2\}$, $\text{fr}(W) = \mathbb{R}$ e $\text{fr}(A) = \{x \in \mathbb{R}_+^n; \langle p, x \rangle = m\}$

5) Considere o seguinte problema de maximização de utilidade do consumidor:

$$\text{Max } x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$$

s.a.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$ e $m > 0$

Justifique a existência de solução ótima para o problema acima. Sob que condições não se pode garantir a existência de solução ótima?

Solução: Seja $U: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $U(x_1; x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ com $\alpha \in (0, 1)$, U é uma função contínua. Devemos provar que para toda seqüência $\left\{ (x_{1_n}, x_{2_n}) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^2$ com $(x_{1_n}, x_{2_n}) \rightarrow (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ tem-se $U(x_{1_n}, x_{2_n}) \rightarrow U(x_1, x_2)$. De $x_{1_n} \rightarrow x_1$ e $x_{2_n} \rightarrow x_2$ tem-se que $x_{1_n}^\alpha \rightarrow x_1^\alpha$ e $x_{2_n}^{1-\alpha} \rightarrow x_2^{1-\alpha}$. Da continuidade da multiplicação de números reais tem-se que $x_{1_n}^\alpha x_{2_n}^{1-\alpha} \rightarrow x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. Seja $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2; p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m\}$. Como $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$ tem-se que A é um conjunto compacto. Pelo teorema de Weierstrass, U restrito a A atinge um valor máximo e um valor mínimo. Logo, existe $(x_1^*, x_2^*) \in A$ tal que $U(x_1^*, x_2^*) \geq U(x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in A$.

Se $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$ então A não é necessariamente um conjunto compacto e, neste caso, não se pode garantir a existência de solução ótima. De fato, se $p_i = 0$ para algum $i \in \{1, 2\}$ então A não é um conjunto limitado e o problema do consumidor não tem solução ótima, visto que neste caso U seria ilimitada superiormente em A .

6) Considere o problema de maximização de lucros da firma dado por:

$$\text{Max}_{\{x_1, x_2\}} pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

onde $f: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função definida por $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ com $(a, b) \in \mathfrak{R}_{++}^2$, $(w_1, w_2) \in \mathfrak{R}_{++}^2$ e $p \in \mathfrak{R}_{++}$. Supondo que os lucros sejam sempre positivos em qualquer solução ótima, mostre que o problema da firma assim proposto não possui solução ótima. Será que o mesmo resultado vale para uma função de produção f qualquer com retornos crescentes de escala?

Seja $Y = \{(y, -x_1, -x_2) \in C; f(x_1, x_2) \geq y\} \neq \emptyset$ o conjunto de possibilidades de produção da firma. Supondo que Y seja um conjunto limitado, justifique a existência de solução para o problema de maximização de lucros tanto no caso $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ quanto no caso $f(x_1, x_2)$ uma função de produção com retornos crescentes de escala e contínua.

Solução: O problema de maximização de lucros da firma pode ser escrito da seguinte forma alternativa:

$$\text{Max } py - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

s.a.

$$(y, -x_1, -x_2) \in Y$$

$$\text{onde } Y = \{(y, -x_1, -x_2); ax_1 + bx_2 \geq y\}$$

Suponhamos por absurdo que este problema tenha solução, i.e., existe $(y^*, -x_1^*, -x_2^*) \in Y$ tal que $py^* - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* \geq py - w_1 x_1 - w_2 x_2, \forall (y, -x_1, -x_2) \in Y$

Como $py^* - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* > 0$ e $(ny^*, -nx_1^*, -nx_2^*) \in Y, \forall n \in \mathfrak{N}$ tem-se que, para $n \in \mathfrak{N}$ suficientemente grande, $pn y^* - w_1 n x_1^* - w_2 n x_2^* > py^* - w_1 x_1^* - w_2 x_2^*$ (Contradição!).

No caso da firma possuir uma tecnologia com retornos crescentes de escala, prova-se por argumento semelhante o mesmo resultado. Supondo que Y seja um conjunto limitado, tem-se tanto no caso $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ quanto no caso em que $f(x_1, x_2)$ é uma função de produção com retornos crescentes de escala e contínua que Y é um conjunto fechado e, portanto, compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, em ambos os casos garante-se a existência de solução ótima para o problema da firma.

Exercícios propostos: Seção 1

1) Diga se os seguintes conjuntos são: a) aberto; b) fechado; c) limitado; d) compacto; e) conexo.

i) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}_+^n; \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\}$, onde $a_i, b \in \mathfrak{R}_+, i=1, \dots, n$.

ii) $\mathfrak{R}^n \setminus B(a, r), a \in \mathfrak{R}^n, r > 0$.

iii) $B(0,1) \cup \left\{ x \in \mathfrak{R}_+^n; \sum_{i=1}^n x_i < 2 \right\}$.

iv) $\{(x, y) \in \mathfrak{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 3, x + y \leq 1, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

v) $\{(x, y) \in \mathfrak{R}_+^2; xy \leq 1\}$.

2) Prove que para todo conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$, $\text{int } X$ é um conjunto aberto.

3) Diga se é verdadeiro ou falso; provando a sua afirmativa:

- um conjunto $A \subset \mathfrak{R}^n$ é aberto se, e somente se $fr(A) \cap A = \emptyset$.
- o fecho da união de dois conjuntos é a união dos fechos destes conjuntos.
- o equivalente do item (b) para interseção.
- um conjunto é conexo se, e somente se seu fecho é conexo.
- a interseção de dois conjuntos conexos é conexo.

4) Mostre que se $f: X \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é contínua e $Y \subset X$ então $f|_Y$ é contínua.

5) Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma coleção de conjuntos conexos, I conjunto de índices, tal que $\bigcap_{\lambda \in I} C_\lambda \neq \emptyset$.

Então $\bigcup_{\lambda \in I} C_\lambda$ é conexo.

6) Um conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ é conexo por caminhos se para todo par de pontos x e y em X existe $\alpha: [a, b] \subset \mathfrak{R} \rightarrow X$ contínuo tal que $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$. Mostre que se X é conexo por caminho então X é conexo. (Sugestão: use o exercício anterior).

7) Mostre que toda transformação linear $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ é Lipschitziana. (Decorre daí que toda transformação linear é contínua).

8) Usando o exercício anterior verifique se os conjuntos do exercício 1 são conexos.

9) Seja $f: X \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ tal que a imagem inversa de toda a bola é um aberto em X . Então f é função contínua.

10) Seja $A \subset \mathfrak{R}$ não vazio limitado superiormente. Mostre que $s \in \mathfrak{R}$ é o supremo de A se, e somente se

i) $s \geq x, \forall x \in A$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tal que $s - \varepsilon < x$.

Enuncie e demonstre resultado análogo para ínfimo.

11) (Teorema do valor intermediário) Seja $f: D \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ contínua com D conexo. Se $f(a) < \alpha < f(b)$, com $a, b \in D$ então existe $c \in D$ tal que $f(c) = \alpha$.

12) Mostre que todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real.

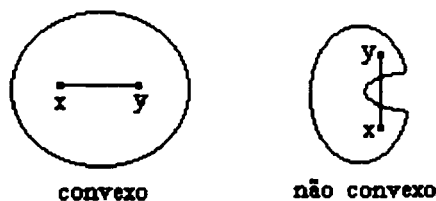
13) Sejam $f, g: X \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ e $a \in X'$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada. Mostre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ existe e é igual a 0.

2) CONVEXIDADE, CONCAVIDADE E QUASE CONCAVIDADE

Convexidade e concavidade

a) Conjuntos Convexos

Dado um conjunto D , diz-se que D é convexo quando, dados dois quaisquer de seus pontos x e y , o segmento que une x a y está todo ele contido em D . Graficamente, no \mathcal{R}^2 , temos:



(figura 2.1)

Formalmente $D \subset \mathcal{R}^n$ é convexo quando para $\forall x, y \in D$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in D$ para todo α tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. Definem-se também como convexas o conjunto vazio e os conjuntos com um único ponto.

Exemplos: As bolas $B(a, r)$, $B[a, r]$ são convexas, enquanto a esfera $S(a, r)$ não é convexa.

b) Funções Convexas

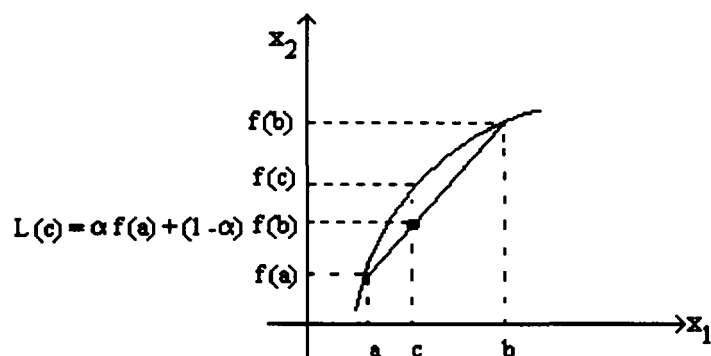
Dada uma função $f: D \rightarrow \mathcal{R}$, $D \subset \mathcal{R}^n$, D convexo, diz-se que f é convexa quando, dado quaisquer x e $y \in D$ e $0 \leq a \leq 1$ tem-se $f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y)$.

Simetricamente, diz-se que f é côncava quando $-f$ é convexa, ou seja, quando dados quaisquer x e $y \in D$ e $0 \leq a \leq 1$, $f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$.

Observe que o termo convexo aplica-se tanto a conjuntos quanto a funções, embora com sentidos diferentes. O termo conjunto côncavo não é definido para conjuntos.

No que se segue, trabalharemos predominantemente com funções côncavas. A modificação dos resultados para o caso de funções convexas é imediata, ficando a cargo do leitor.

A visualização de uma função côncava $f: D \rightarrow \mathcal{R}$, $D \subset \mathcal{R}^n$ é apresentada abaixo, onde $c = \alpha a + (1-\alpha)b$ para $\alpha \in [0, 1]$.



(figura 2.2)

Na figura 2.2, a imagem do ponto c pela função f situa-se acima (na ordenada) da combinação $\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$, o que caracteriza a concavidade da função.

Observe ainda que $\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$ representa a ordenada de c correspondente à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. De fato, esta reta tem por equação:

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Fazendo-se $x = c = \alpha a + (1-\alpha) b$, obtém-se:

$$L(c) = \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$$

O gráfico 2.2 mostra que dados $a, b \in D$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, se definirmos $c = \alpha a + (1-\alpha) b$ e f for côncava, teremos sempre:

$$f(c) = f(\alpha a + (1-\alpha) b) \geq L(c) = \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$$

Geometricamente, isto significa que o gráfico da função ao longo de qualquer segmento no domínio situa-se acima da secante correspondente.

Exemplos:

1) Todas as transformações afins de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} (i.e., uma transformação linear adicionada a uma constante) é côncava e convexa simultaneamente. Reciprocamente dada uma função que é simultaneamente côncava e convexa, ela é a restrição de uma transformação afim a um subconjunto convexo.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função convexa.
 $x \mapsto x^2$

Teorema 2.1: Sejam D um conjunto convexo não vazio do \mathbb{R}^n e f_1 e f_2 funções côncavas, f_1 e f_2 definidas em D e com valores em \mathbb{R} . Sejam ainda a_1 e a_2 números reais não negativos e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$. Então f é uma função côncava.

Demonstração: Sejam $a, b \in D$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 f(\alpha a + (1-\alpha)b) & \stackrel{1}{=} (a_1 f_1 + a_2 f_2)(\alpha a + (1-\alpha)b) \stackrel{2}{=} \\
 & a_1 f_1(\alpha a + (1-\alpha)b) + a_2 f_2(\alpha a + (1-\alpha)b) \geq \stackrel{3}{=} \\
 & a_1 (\alpha f_1(a) + (1-\alpha) f_1(b)) + a_2 (\alpha f_2(a) + (1-\alpha) f_2(b)) \stackrel{4}{=} \\
 & \alpha (a_1 f_1(a) + a_2 f_2(a)) + (1-\alpha) (a_1 f_1(b) + a_2 f_2(b)) \stackrel{5}{=} \\
 & \alpha (a_1 f_1 + a_2 f_2)(a) + (1-\alpha) (a_1 f_1 + a_2 f_2)(b) \stackrel{6}{=} \\
 & \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)
 \end{aligned}$$

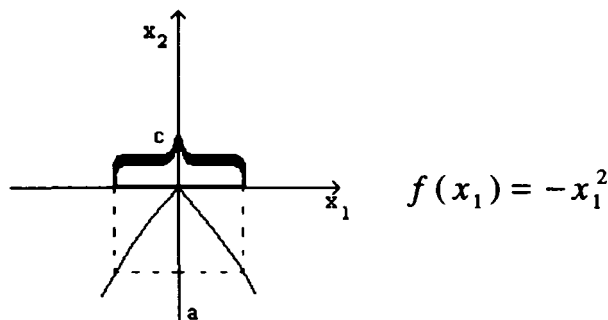
Na demonstração acima as passagens 1 e 6 utilizam a definição de f e as passagens 2 e 5 a definição de $(a_1 f_1 + a_2 f_2)(x)$ como $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$. A desigualdade 3 decorre da concavidade de f_1 e f_2 e do fato de a_1 e a_2 serem número reais não negativos. A passagem (4) corresponde a um simples reordenamento dos termos.

O teorema acima estende-se facilmente no caso de m números reais não negativos a_1, a_2, \dots, a_m , e m funções f_1, f_2, \dots, f_m . Se f é definida como $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_m f_m$ e cada uma das funções f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) é côncava, então f é côncava.

Quase concavidade

Definição (Quase concavidade): Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, sendo D um conjunto convexo do \mathfrak{R}^n . Diz-se que f é quase-côncava quando dado um número real a qualquer, o conjunto $C = \{x \in D; f(x) \geq a\}$ for um conjunto convexo.

Para exemplificar esta definição, tomemos inicialmente a função de apenas uma variável ($D \subset \mathfrak{R}$) $f(x) = -x^2$, cujo gráfico desenhamos abaixo:

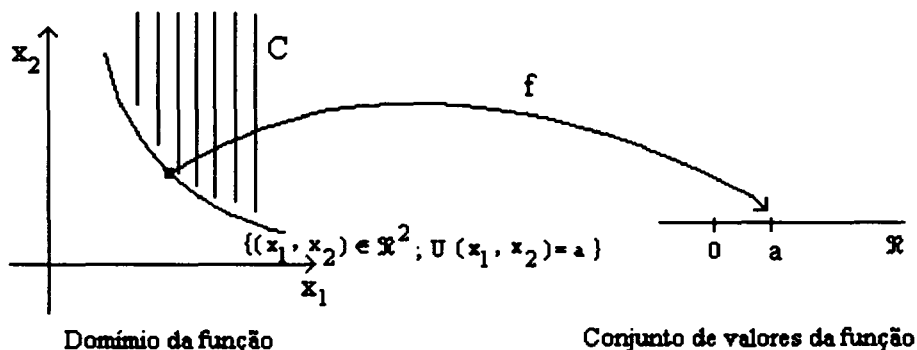


(figura 2.3)

Observa-se facilmente que, qualquer que seja o número real a , o conjunto dos pontos x tais que $-x^2 \geq a$ é um conjunto convexo. Na exposição gráfica acima tomamos $a < 0$. Para $a = 0$

o conjunto C se resumiria a um conjunto formado por um único ponto ($x = 0$), que por definição é convexo. Da mesma forma, se tivéssemos $a > 0$ o conjunto C seria vazio e, também por definição, convexo.

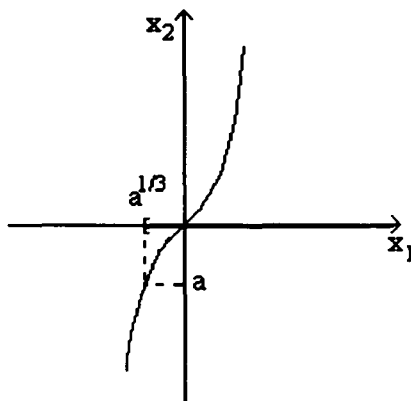
Tomemos agora a função de duas variáveis definida no \mathfrak{R}_+^2 , $U(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/3}$. Neste caso não desenharemos o gráfico da função (o que exigiria um diagrama em três dimensões, duas para o domínio e uma terceira para os valores assumidos pela função), mas apenas o lugar geométrico dos pontos de seu domínio tal que o valor da função seja igual a uma certa constante (curvas de nível da função):



(figura 2.4)

Neste caso, o sentido da quase concavidade é que, dado $a \in \mathfrak{R}$, o conjunto $Z = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_+^2; (x_1 x_2)^{1/3} \geq a\}$ hachureado na parte esquerda da representação acima (para $a > 0$) é um conjunto convexo.

Nos dois exemplos acima apresentados as funções, além de quase côncavas, são também côncavas. Isto não precisa necessariamente ocorrer. Por exemplo, a função $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é quase côncava mas não é côncava. Observa-se facilmente pelo gráfico desta função que, dado o número real na ordenada, o conjunto $\{x; x^3 \geq a\} = [a^{1/3}, +\infty)$ (hachureado na figura abaixo) é um conjunto convexo.



(figura 2.5)

Por outro lado $f(x) = x^3$ não é uma função côncava pois dado por exemplo $a_1 = 2, a_2 = 0$ e $\alpha = 0,5, f(\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2) = 1 < \alpha f(a_1) + (1-\alpha)f(a_2) = 4$.

Um outro exemplo de função quase côncava que não é côncava, definida no \mathfrak{R}_+^2 , é dada por $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Os teoremas a seguir ajudam muito na identificação das funções quase-côncavas. O primeiro deles nos lembra que, embora possa haver funções que são quase-côncavas e não côncavas, o oposto não pode ocorrer. Já o segundo nos dá condições para que uma função 2 vezes diferenciável¹ seja quase-côncava.

Teorema 2.2 : *Toda função côncava é quase-côncava.*

Demonstração: Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^n, D$ convexo, uma função côncava. Seja dado o número real a e suponhamos que para $x_1 \in D$ e $x_2 \in D, f(x_1) \geq a$ e $f(x_2) \geq a$. Como f é côncava, dado qualquer $\alpha \in [0,1], f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geq \alpha a + (1-\alpha)a = a$. Isto prova que o conjunto $\{x \in D; f(x) \geq a\}$ é convexo qualquer que seja $a \in \mathfrak{R}$. Segue que f é quase côncava.

Teorema 2.3: *Seja $f(x)$ uma função real duas vezes diferenciável² em \mathfrak{R}_+^n . Então*

- (i) Se $f(x)$ é quase-côncava, então $B_2 \geq 0, B_3 \leq 0, \dots, (-1)^n B_n \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n$ ($B_1 \leq 0$ sempre).
- (ii) Reciprocamente, se $B_1 < 0, B_2 > 0, \dots, (-1)^n B_n > 0, \forall x \in \mathfrak{R}_+^n$ então $f(x)$ é quase-côncava em \mathfrak{R}_+^n ,

onde

$$B_k = \det \begin{vmatrix} 0 & f_1 & \dots & f_k \\ f_1 & f_{11} & \dots & f_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k & f_{k1} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix} \text{ com } f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Quase Concavidade na Teoria do Consumidor

Na teoria do consumidor, admite-se normalmente que as preferências satisfaçam a uma série de axiomas comportamentais e que sejam passíveis de representação por uma função utilidade $U: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}_+^n$ com $U(D) = A$. Neste contexto, o número real ao qual se faz associar (pela função U) um certo vetor do \mathfrak{R}_+^n representativo de uma cesta de bens tem apenas a função de representar uma hierarquização de preferências, não interessando o seu valor absoluto. Desta forma, diz-se que a cesta de mercadoria x é preferível à cesta de mercadoria y se, e somente se $U(x) > U(y)$. Repare que $U(x)$ e $U(y)$ são dois números reais. Assim, se tomarmos

¹ Ver definição no próximo capítulo.

² A definição de diferenciabilidade será apresentada na seção seguinte.

uma função monótona crescente $f:A' \rightarrow \mathfrak{R}$, $A \subset A'$, teremos $U(x) > U(y)$ se, e somente se $(fo U)(x) > (fo U)(y)$, o que significa que, tal como a função U , a função composta foU é também representativa das preferências do consumidor em questão. Esse arrazoado se resume numa conhecida proposição da teoria do consumidor, apresentada abaixo.

Proposição 2.1: (Teoria do Consumidor) Dada uma função $U:D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo e uma função monótona crescente $f:A \rightarrow \mathfrak{R}$, $U(D) \subset A$ então a função U representa as preferências do consumidor se, e somente se a função composta foU também representa tais preferências.

Este fato implica que, na teoria do consumidor, possa-se operar com uma função utilidade básica U ou qualquer uma de suas transformadas crescentes. Neste sentido, vale a pena observar que, ao contrário da propriedade de concavidade, a propriedade de quase concavidade não se perde quando se efetuam transformações monótonas crescentes de uma função. Este ponto é demonstrado a seguir.

Teorema 2.4: Seja $D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo, $U:D \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função quase-côncava com $U(D) \subseteq A$ e $f:A \rightarrow \mathfrak{R}$, uma função monótona crescente. Então a função composta $foU:D \rightarrow \mathfrak{R}$ é quase-côncava.

Demonstração: (Esta demonstração utiliza o resultado do exercício resolvido número 3). Sejam x e y dois pontos quaisquer pertencentes a D com a propriedade $foU(x) \geq a$ e $foU(y) \geq a$ para um certo $a \in \mathfrak{R}$. Então $U(x), U(y) \in f^{-1}[a, \infty)$ e $U(x), U(y) \geq \min\{U(x), U(y)\} \in f^{-1}[a, \infty) \Rightarrow U(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min\{U(x), U(y)\} \in f^{-1}[a, \infty) \Rightarrow f \circ U(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq f(\min\{U(x), U(y)\}) \in [a, \infty)$. Portanto $foU(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq a$. Segue que foU é uma função quase côncava.

Exercícios resolvidos – Seção 2

1) Sejam $f: \mathfrak{R}_+^n \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função de produção, $Y = \{(y; -x) \in \mathfrak{R}^{n+1}; y \leq f(x)\}$ o conjunto de possibilidade de produção e $V(y) = \{x \in \mathfrak{R}_+^n; y \leq f(x)\}$ o conjunto de fatores de produção requeridos para produzir $y \in \mathfrak{R}_+$ de uma firma. Demonstre que f côncava implica $V(y)$ e Y conjuntos convexos.

Solução: Dado $y \in \mathfrak{R}_+$, sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in V(y)$, $x \neq x'$, e $\lambda \in (0,1)$. Temos que provar que $\lambda x + (1-\lambda)x' \in V(y)$. Como $f(x) \geq y$ e $f(x') \geq y$ e f é côncava tem-se que $f(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x') \geq \lambda y + (1-\lambda)y = y$. Logo, $\lambda x + (1-\lambda)x' \in V(y)$

Agora, sejam $(y, -x)$ e $(y', -x') \in Y$, com $y \neq y'$ ou $x \neq x'$, e $\lambda \in (0,1)$. Temos que provar que $(\lambda y + (1-\lambda)y', -(\lambda x + (1-\lambda)x')) \in Y$. Da concavidade de f , $f(x) \geq y$ e $f(x') \geq y'$ tem-se que $f(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x') \geq \lambda y + (1-\lambda)y'$.

Logo $(\lambda y + (1-\lambda)y', -(\lambda x + (1-\lambda)x')) \in Y$.

2) Seja $V(y)$ o conjunto de requerimento de fatores de produção de uma firma. Verifique em cada caso se a tecnologia é (i) convexa e (ii) fechada:

a) $V(y) = \{x \in \mathfrak{R}_+^2; ax_1 \geq \log y, bx_2 \geq \log y\}$

b) $V(y) = \{x \in \mathfrak{R}_+^2; ax_1 + bx_2 \geq y, x_1 > 0\}$

c) $V(y) = \{x \in \mathfrak{R}_+^2; x_1^a x_2^{1-a} \geq y, 0 < a < 1\}$

d) $V(y) = \{x \in \mathfrak{R}_+^2; \min\{ax_1, bx_2\} \geq y\}$

onde $x = (x_1, x_2)$, $a > 0$, $b > 0$.

Solução:

a)

i) Sejam $X_1 = (X_1^1, X_2^1)$, $X_2 = (X_1^2, X_2^2) \in V(y)$ e $\alpha \in (0,1)$, temos que $\alpha x_1^i \geq \log y$ e $b \alpha x_2^i \geq \log y$, $i = 1, 2$. Portanto $\alpha(\alpha x_1^i + (1-\alpha)x_2^i) \geq \log y$. Donde segue-se que $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in V(y)$.

ii) É fácil ver que $V(y)$, $\forall y \geq 1$. Dado $y \geq 1$, seja $(x_n)_{n \geq 1}$ seqüência em $V(y)$, com $x_n \rightarrow x$, onde $x_n = (x_{1n}, x_{2n})$ e $x = (x_1, x_2)$. A provar que $x \in V(y)$. Observe que

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow x_{1n} \rightarrow x_1 \text{ e } x_{2n} \rightarrow x_2 \text{ e } ax_{1n} \geq \log y \text{ e } bx_{2n} \geq \log y, \forall n \geq 1.$$

Logo, pelo exercício 1 da seção 1 temos que: $ax_1 \geq \log y$ e $bx_2 \geq \log y$. Da mesma forma, $x_{1n} \geq 0$ e $x_{2n} \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Logo, $x = (x_1, x_2) \in V(y)$. O que acontece quando $y < 1$? Neste caso $V(y) = \mathfrak{R}_+^2$.

b)

i) Basta aplicar o exercício anterior uma vez que a função logarítmica é côncava.

ii) Todavia, $V(y)$ não é fechado. De fato, seja $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{y}{b} - \frac{a}{bn}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. De imediato, tem-se $x_n \in V(y)$, $\forall n \geq 1$ e $x_n \rightarrow (0, y/b)$. Todavia, $(0, y/b) \notin V(y)$.

c)

i) Idem ao item anterior.

ii) Seja $(x_n)_{n \geq 1}$ seqüência em $V(y)$, $x_n \rightarrow x$. Temos que provar que $x \in V(y)$. $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_{1n} \rightarrow x_1$ e $x_{2n} \rightarrow x_2$. Como $x_{1n} \geq 0$ e $x_{2n} \geq 0$ tem-se que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, pelo exercício 1 da seção 1. Por outro lado, pela continuidade da função logaritmo $\log x_{1n} \rightarrow \log x_1$ e $\log x_{2n} \rightarrow \log x_2$. Como $a \log x_{1n} + (1-a) \log x_{2n} \geq y$, $\forall n \geq 1$, tem-se pelo exercício 1 da seção 1 que $a \log x_1 + (1-a) \log x_2 \geq y$.

d)

i) Idem ao item anterior.

ii) $V(y)$ é fechado $\forall y \geq 0$. De fato, seja $(x_n)_{n \geq 1}$ seqüência em $V(y)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Temos que provar $x \in V(y)$. $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_{1n} \rightarrow x_1$ e $x_{2n} \rightarrow x_2$. Como $\min\{ax_{1n}, bx_{2n}\} \geq y$, $\forall n \geq 1$ temos $ax_{1n} \geq y$ e $bx_{2n} \geq y$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow ax_1 \geq y$ e $bx_2 \geq y \Rightarrow \min\{ax_1; bx_2\} \geq y$. Da mesma forma, $x_{1n} \geq 0$ e $x_{2n} \geq 0$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

3) Alternativamente à definição apresentada no texto, diz-se que $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo, é quase côncava, quando para quaisquer x e y pertencentes a D e $\alpha \in [0,1]$, $f(x) \geq f(y)$ implica $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq f(y)$. Prove que as duas definições são equivalentes.

Solução:

a) Iniciamos provando que a definição do texto implica a definição aqui apresentada. Para isto, basta tomar $a = \min\{f(x), f(y)\}$. Segue que, como $f(x) \geq a$ e $f(y) \geq a$, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq a = f(y)$ para qualquer $\alpha \in [0,1]$.

b) Suponhamos agora que $f(x) \geq f(y)$ implica $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq f(y)$. Precisamos provar que, para cada $a \in \mathfrak{R}$ e $\alpha \in [0,1]$, se $f(x) \geq a$ e $f(y) \geq a$ implica $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq a$. Sem perda de generalidade, seja $f(y) = \min\{f(x), f(y)\}$. Então, pela hipótese, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq f(y) \geq a$.

4) Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo. Diz-se que f é estritamente côncava se dados $x, y \in D$, $x \neq y$ e $\alpha \in (0,1)$, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$. Alternativamente f é

estritamente convexa se $-f$ é estritamente côncava. É claro que toda função estritamente côncava (convexa) é côncava (convexa). Dê exemplo de funções côncavas (convexas) que não sejam estritamente côncavas (convexas).

Solução:

a) Seja $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ um funcional linear. Dados $x, y \in \mathfrak{R}^n, \alpha \in [0,1]$, temos que $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$. Assim f é côncava e convexa ao mesmo tempo. Mas observe que se tomarmos $x \neq y$ e $\alpha \in (0,1)$ acima, vemos facilmente que f não é nem estritamente côncava nem estritamente convexa.

b) Seja $g: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $g(x, y) = \min\{x, y\}$, ou seja, $g(x, y) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{se } y > x \end{cases}$. Esta função é côncava. De fato, sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{R}^2, \alpha \in [0,1]$. Então $g(\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2)) = g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) = \min\{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2\} \geq \alpha \min\{x_1, y_1\} + (1-\alpha) \min\{x_2, y_2\} = \alpha g(x_1, y_1) + (1-\alpha)g(x_2, y_2)$

Conclui-se então que g é côncava. Mas g não é estritamente côncava, visto que para todo $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ com $x \leq y$, $g(x, y) = x$, que é linear. Segue do exemplo anterior que a restrição de g a esta parte do domínio não é estritamente côncava.

c) Seja $f: D \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, onde D é tal que se $t > 0$ e $x \in D \Rightarrow tx \in D$, uma função homogênea de grau 1, isto é, $f(tx) = t f(x), x \in D, t \in \mathfrak{R}_{++}$. Se f , além disso, é côncava então f não pode ser estritamente côncava. Com efeito, seja $x \in D, x \neq 0$ e portanto $3x \in D$, logo

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(3x)\right) = 2f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(3x).$$

O que ocorre de fato com estas funções é que ao longo das semi retas abertas que partem do $0 \in \mathfrak{R}^n$ elas são lineares. Mas existem exemplos não triviais de funções positivamente homogêneas de grau 1 que são côncavas, como por exemplo a função de Cobb-Douglas: $f: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}, \alpha \in (0,1)$ (veremos mais tarde que f é côncava) e $g: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5) Diz-se que $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo é quase convexa quando $-f$ é quase côncava. Adicionalmente, f é dita estritamente quase côncava se $\alpha \in (0,1)$ e $x, y \in D$ com $x \neq y, f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min\{f(x), f(y)\}$. Além disso f é dita estritamente quase convexa se $-f$ é estritamente quase côncava. É claro que toda função estritamente quase côncava (quase convexa) é quase côncava (quase convexa). Dê exemplos de funções quase côncavas (quase convexas) que não são estritamente quase côncavas (quase convexas).

Solução:

a) Toda função constante é quase côncava (quase convexa) mas não é estritamente quase côncava (quase convexa). Uma função real monótona definida num intervalo na reta é quase côncava (e quase convexa) (ver exercício proposto número 9). Para que ela não seja estritamente quase côncava (ou quase convexa) é necessário que ela possua trechos constantes.

Com efeito, se a função for crescente ou decrescente ela será estritamente quase côncava (e estritamente quase convexa). Então as únicas chances residem nas funções não-crescentes e não-decrescentes. Suponha neste caso que $f: I \rightarrow \mathfrak{R}, I \subset \mathfrak{R}$ intervalo, é não-decrescente. Se f não é estritamente quase côncava, existem $x, y \in I, x < y, \alpha \in (0,1)$ tais que $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \min(f(x), f(y)) = f(x)$ e como f é não-decrescente $f(x) \leq f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ (pois $x < \alpha x + (1-\alpha)y$) o que implica que $f(x) = f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ e portanto f é constante igual a $f(x)$ em $[x, \alpha x + (1-\alpha)y]$.

b) O leitor é agora convidado a generalizar o raciocínio acima para funções reais de duas variáveis (ou mais) num certo sentido, isto é, funções quase côncavas que possuem regiões convexas no seu domínio nas quais são constantes não podem ser estritamente quase côncavas. Reciprocamente se f é quase côncava, mas não estritamente, então possui em seu domínio pelo menos um segmento no qual a função é constante. Os detalhes ficam a cargo do leitor.

6) Dê exemplos de função quase côncavas que não são côncavas.

Solução:

a) As funções reais definidas em um intervalo da reta que são monótonas (veja exercício proposto 9) são quase côncavas, muito embora algumas destas funções possam ser estritamente convexas, como é o caso de $f: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = x^2$

b) Seja $f: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ com $\alpha > 0, \beta > 0$ e $\alpha + \beta > 1$. Veremos posteriormente que a função Cobb-Douglas $g: \mathfrak{R}_{++}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $g(x,y) = x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ é côncava e portanto quase-côncava. Assim $f = h \circ g$ também é quase-côncava, onde $h: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $h(x) = x^{\alpha+\beta}$ é uma transformação monotônica crescente (ver teorema 2.3). Mas f não é côncava, porque

$$f\left(\frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(2,2)\right) = f(1,1) = 1 < 2^{\alpha+\beta-1} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} 2^{\alpha+\beta} = \frac{1}{2} f(0,0) + \frac{1}{2} f(2,2).$$

c) $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

é quase côncava porque é monótona não-decrescente, mas não é côncava como se vê com facilidade. Aliás o "defeito" desta função é que ela é descontínua no 0. Veremos mais tarde (ver capítulo 4, exercício resolvido) que toda função côncava de uma variável definida num conjunto aberto convexo $X \subset \mathfrak{R}$ é contínua.

7) Prove que toda função monótona $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}$ intervalo, é ao mesmo tempo quase côncava e quase convexa.

Demonstração: Vamos supor que f é monótona não-decrescente, isto é, se $x > y$, $x, y \in D$, então $f(x) \geq f(y)$, os outros casos são análogos e ficam a cargo do leitor. Sejam $a \in \mathfrak{R}$, $x, y \in D$ tais que $f(x) \geq a$ e $f(y) \geq a$. Dado $\alpha \in [0, 1]$, $x \leq \alpha x + (1 - \alpha)y \leq y$ o que implica que $f(x) \leq f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f(y)$, visto que f é monótona não decrescente. Assim $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq a$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, ou seja, f é quase côncava já que $a \in \mathfrak{R}$, $x, y \in D$ são arbitrários. A quase convexidade segue-se por um raciocínio análogo.

8) Dê dois exemplos de duas funções quase côncavas cuja soma não seja quase côncava.

Solução:

a) Sejam $f, g: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ tais que $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x$. Observe que f e g são funções monótonas e pelo exercício anterior f e g são quase côncavas, mas $h = f + g: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x$ não é quase côncava, porque $h(0) = h(1) = 0 \geq 0$ mas $h(1/2) = h(1/2) = -1/4 < 0$.

b) Sejam $f, g: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tais que $f(x, y) = x^2$ e $g(x, y) = -y^2$. Vamos verificar que f é quase côncava. A verificação de que g é quase côncava é análoga e fica como exercício. Sejam $a \in \mathfrak{R}$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{R}_+^2$ tais que $f(x_1, y_1) = x_1^2 \geq a$ e $f(x_2, y_2) = x_2^2 \geq a$. Dado $\alpha \in [0, 1]$, queremos mostrar que

$$f(\alpha(x_1, y_1) + (1 - \alpha)(x_2, y_2)) = f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)^2 \geq a.$$

Em primeiro lugar, se $a < 0$ então esta última desigualdade é obviamente atendida. Suponhamos que $a \geq 0$, neste caso, $x_1 \geq \sqrt{a}$ e $x_2 \geq \sqrt{a}$ (observe que $x_1, x_2 \geq 0$), Assim, $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)^2 \geq (\alpha \sqrt{a} + (1 - \alpha)\sqrt{a})^2 = a$.

Porém, $h = f + g: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $h(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = x^2 - y^2$ não é quase côncava. De fato, dados $(0, 1)$ e $(1, \sqrt{2}) \in \mathfrak{R}_+^2$, é fácil ver que $h(0, 1) = h(1, \sqrt{2}) = -1$. Vamos

mostrar que $h(\frac{1}{2}(0, 1) + \frac{1}{2}(1, \sqrt{2})) = h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) < -1$.

Com efeito, $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$. Como $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow$

$$1 + \sqrt{2} > 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) > 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) < -1 \text{ provando assim o que afirmamos.}$$

Observação.: O leitor deve estar se perguntando como encontramos estes vetores para determinar a não quase concavidade de h . Sugerimos que o leitor analise as curvas de nível da função h . Por exemplo, em nosso caso, tomamos os pontos sobre a curva de nível $h(x, y) = -1$ (que é uma hipérbole) e observamos que segmento que liga estes pontos não está contido no conjunto $h(x, y) \geq -1$.

9) Prove que qualquer interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Demonstração: Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma família de conjuntos convexos de \mathfrak{R}^n , onde I é um conjunto de índices arbitrários, isto é, C_λ é convexo para cada $\lambda \in I$. Dados $x, y \in \bigcap_{\lambda \in I} C_\lambda$, $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

que $x, y \in C_\lambda$ para todo $\lambda \in I$. Como todo C_λ é convexo $\alpha x + (1-\alpha)y \in C_\lambda, \forall \lambda \in I$, isto é, $\alpha x + (1-\alpha)y \in \bigcap_{\lambda \in I} C_\lambda$, provando assim que $\bigcap_{\lambda \in I} C_\lambda$, é convexo.

10) Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo. Seja $E = \{(x, t) \in \mathfrak{R}^{n+1}; x \in D, t \in \mathfrak{R} \text{ e } f(x) \geq t\}$, (este conjunto é chamado de o epígrafo de f). Prove que uma condição necessária e suficiente para que f seja côncava é que E seja convexo.

Demonstração: Suponha que f seja côncava. Dados $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in E$ e $\alpha \in [0, 1]$, $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \geq \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$ visto que f é côncava e $f(x_1) \geq t_1$ e $f(x_2) \geq t_2$. Assim $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \in E$ e, portanto, E é convexo.

Recíprocamente, dados $x_1, x_2 \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$, $t_1 = f(x_1)$ e $t_2 = f(x_2)$, então $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in E$. Como por hipótese E é convexo tem-se que $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$, isto é, f é côncava.

11) Utilize os exercícios anteriores para demonstrar que se f_1, \dots, f_n são côncavas, $f = \min\{f_1, \dots, f_n\}$ é côncava.

Demonstração: Seja E o epígrafo de f e E_i o epígrafo de f_i para cada $i = 1, \dots, n$. Então, $(x, t) \in E$ se, e somente se $f(x) \geq t$, ou seja, se, e somente se $\min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \geq t$.

Pelo exercício 10, o epígrafo de cada f_i é convexo. Se conseguirmos provar que o epígrafo de f é a interseção dos epígrafos de $f_i, i = 1, \dots, n$, então, pelo exercício 9, o epígrafo de f será convexo e, pelo exercício 10, f será côncava. Nossa demonstração limita-se, conseqüentemente, a demonstrar que o epígrafo de f é a interseção dos epígrafos de f_1, f_2, \dots, f_n .

Agora, $\min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \geq t$ se, e somente se $f_i(x) \geq t$ para $i = 1, \dots, n$, ou seja, se, e somente se $(x, t) \in \bigcap_{i=1}^n E_i$. Portanto, $(x, t) \in E$ se, e somente se $(x, t) \in \bigcap_{i=1}^n E_i$, isto é, $E = \bigcap_{i=1}^n E_i$.

12) A envoltória convexa $C(X)$ de um conjunto $X \subset \mathfrak{R}^n$ é a interseção de todos os subconjuntos convexos de \mathfrak{R}^n que contém X . Mostre que $C(X)$ é o conjunto de todas as combinações lineares, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p$ tais que $x_1, \dots, x_p \in X, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 1$ e cada $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração: Por definição $C(X) = \bigcap_{\substack{D \subset \mathfrak{R}^n \\ D \text{ convexo}}} D$. Seja

$$C_1 = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p; x_1, \dots, x_p \in X, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathfrak{R}_+ \text{ e } \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1, p \in \mathfrak{N}\}$$

Queremos mostrar inicialmente que $C_1 \subset C(X)$. Dado $D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo tal que $X \subset D$, temos que se $x_1, \dots, x_p \in X$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathfrak{R}_+$ com $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ então $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \in D$. De fato, façamos inicialmente $p = 2$. Neste caso, como $x_1, x_2 \in D$ (pois $X \subset D$), a afirmação decorre da convexidade de D . Por indução finita, suponhamos que esta afirmação vale para $p-1, p \in \mathfrak{N}$.

Dados $x_1, \dots, x_p \in X$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathfrak{R}_+$ com $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ temos que se $\alpha_p = 1$ então $\alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$ e neste caso $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x_p \in D$. Caso contrário, seja $\lambda = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i > 0$ e $\alpha_p = 1 - \lambda$. Então $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = \lambda \hat{x} + (1 - \lambda)x_p$, onde $\hat{x} = \frac{\alpha_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{\lambda} x_{p-1} \in D$, pois $\frac{\alpha_1}{\lambda} + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{\lambda} = 1$. Pela hipótese de indução, e novamente pela convexidade de D tem-se $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \in D$. Logo, segue que $C_1 \subset D$, para todo $D \subset \mathfrak{R}^n$, D convexo tal que $X \subset D$. Isto implica que $C_1 \subset C(X)$.

Por outro lado, C_1 é um conjunto convexo. Com efeito, dados $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^q \beta_i y_i$ e $\alpha \in [0, 1]$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathfrak{R}_+$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$,

$\sum_{i=1}^q \beta_i = 1$, $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q \in X$, tem-se

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \alpha \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^q \beta_i y_i = \sum_{i=1}^{p+q} \gamma_i z_i,$$

$$\text{onde } \gamma_i = \begin{cases} \alpha \alpha_i, & \text{se } 1 \leq i \leq p; \\ (1 - \alpha) \beta_{i-p}, & \text{se } p < i \leq p + q \end{cases}$$

$$\text{e } z_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq p \\ y_{i-p}, & \text{se } p < i \leq p + q \end{cases}$$

É fácil ver que $\gamma_i \in \mathfrak{R}_+$, $z_i \in X$, $i = 1, \dots, p + q$ e $\sum_{i=1}^{p+q} \gamma_i = \alpha \sum_{i=1}^p \alpha_i + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^q \beta_i = 1$, ou seja, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C_1$. Além disso, $X \subset C_1$ (faça $p = 1$ e varie x_1 em X). Portanto, pela definição de $C(X)$ fica claro que $C(X) \subset C_1$.

13) Verifique se os conjuntos abaixo são convexos:

a) $\{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3; \min\{x, 2y, z\} \geq 7\}$

b) $\{x \in \mathfrak{R}^2; \|x\| > 1\}$

Solução:

a) Como $f_1, f_2, f_3: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ definidas por $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = 2y$, $f_3(x, y, z) = z$ são côncavas então $f = \min\{f_1, f_2, f_3\}$ também é côncava, logo quase-côncava e, portanto, $\{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3; \min\{x, 2y, z\} \geq 7\} = f^{-1}([7, \infty))$ é convexo.

b) Dados $x_1 = (2, 0)$ e $x_2 = (-2, 0)$, tem-se que $x_1, x_2 \in \{x \in \mathfrak{R}^2; \|x\| > 1\}$ mas $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = (0, 0) \notin \{x \in \mathfrak{R}^2; \|x\| > 1\} \Rightarrow \{x \in \mathfrak{R}^2; \|x\| > 1\}$ não é convexo.

14) Dê exemplos, se for possível,

a) de uma função estritamente quase côncava e estritamente quase convexa.

b) de uma função definida num subconjunto convexo do \mathfrak{R}^4 que seja estritamente quase côncava e não seja côncava.

Solução:

a) Tome qualquer função real definida em intervalo de \mathfrak{R} que seja ou monótona crescente ou monótona decrescente (por exemplo: $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = x$).

b) Seja $f: \mathfrak{R}_{++}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x, y, z, w) = xyzw$. Seja $\lambda: \mathfrak{R}_{++}^4 \rightarrow \mathfrak{R}_{++}^4$ tal que $\lambda(t) = (t, t, t, t)$ então $g(t) = (f \circ \lambda)(t) = t^4$ que é estritamente convexa, logo escolhendo dois pontos ao longo do caminho λ prova-se a não concavidade de f . Observe que a função $f: \mathfrak{R}_{++}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $F(x, y, z, w) = x^{1/4} y^{1/4} z^{1/4} w^{1/4}$ é estritamente quase côncava e então $f = \text{ho}F$ é também estritamente quase côncava, onde $h: \mathfrak{R}_{++}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $h(x) = x^4$ é monótona crescente.

15) Uma função é dita indiretamente côncava se é transformada monótona crescente de uma função côncava, i.e., $F: C \rightarrow \mathfrak{R}, C \subset \mathfrak{R}^n$ convexo, é dita indiretamente côncava se existirem $g: I \rightarrow \mathfrak{R}$ e $f: C \rightarrow \mathfrak{R}$ com I intervalo em \mathfrak{R} contendo $f(C)$, g monótona crescente, f côncava e $F = g \circ f$. Como já vimos toda função indiretamente côncava é quase-côncava.

Dê exemplos de funções quase-côncavas. Se possível, dê também um exemplo de uma função quase côncava que não seja indiretamente côncava.

Solução:

Vejamos dois exemplos:

(i) Seja $F: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $F(x, y) = xy$. Já vimos que F não é côncava, mas se considerarmos $g: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ e $f: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tais que $g(t) = t^2$ e $f(x, y) = x^{1/2} y^{1/2}$, temos que g é monótona crescente e f é côncava, além disso $F = g \circ f$, e pela definição acima F é indiretamente côncava e, portanto, quase-côncava. Observe porém, que se utilizarmos o teorema não poderemos concluir que F é quase-côncava: de fato, $F_1(x, y) = y; F_2(x, y) = x; F_{11}(x, y) = F_{22}(x, y) = 0$ e $F_{12}(x, y) = 1$

calculando em $(x, y) = (0, 0)$ temos $B_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ e $B_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$ logo tanto

B_1 e B_2 não são positivas (>0), como necessitaríamos para utilizar o teorema 2.3. Este fato apenas corrobora a primeira parte do teorema 2.3.

(ii) O leitor poderá verificar com facilidade a existência de várias funções indiretamente côncavas; a pergunta relevante neste instante é se existe alguma função quase-côncava que não seja

indiretamente côncava, isto é, que não seja a transformada monótona crescente de alguma função côncava. Vejamos um exemplo desta situação:

Seja $f: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x,y) = (x-1) + [(1-x)^2 + 4(x+y)]^{1/2}$. Seja $E(x,y) = (1-x)^2 + 4(x+y) = (1+x)^2 + 4y$. Então $f_1 = 1 + (1+x)E^{-1/2}$; $f_2 = 2E^{-1/2}$; $f_{11} = E^{-1/2} - (1+x)^2 E^{-3/2}$; $f_{22} = -4E^{-3/2}$ e $f_{12} = -2(1+x)E^{-3/2}$. Logo

$$B_1 = -f_1^2 < 0 \text{ em } \mathfrak{R}_+^2 \text{ e } B_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} = 2 f_1 f_2 f_{12} - [f_1^2 f_{22} + f_2^2 f_{11}]$$

Fazendo os cálculos obtemos: $B_2 = 0$.

Novamente, como em (i), não podemos concluir que f é quase-côncava. Porém analisando as curvas de nível desta função, fica fácil concluir este resultado. De fato, para cada $c \in \mathfrak{R}$ vamos caracterizar o conjunto $N_c = \{(x,y) \in \mathfrak{R}_+^2 ; f(x,y) = c\}$. Temos que

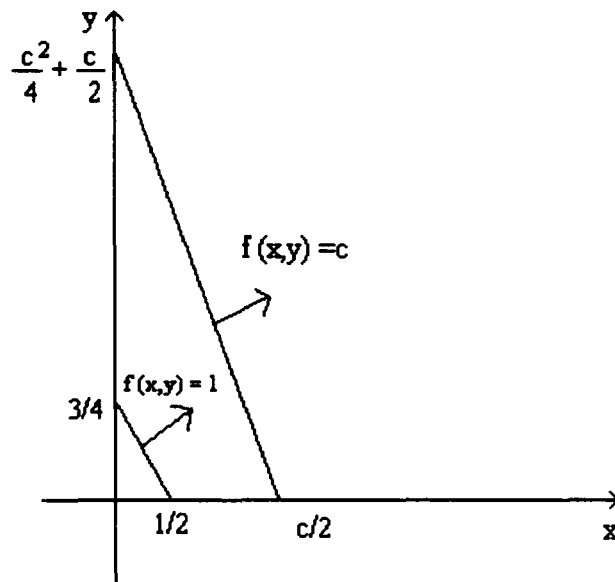
$$f(x,y) = c \Leftrightarrow x-1 + [(1-x)^2 + 4(x+y)]^{1/2} = c \Leftrightarrow ((1-x)^2 + 4(x+y))^{1/2} = c+1-x$$

Sendo que esta última equação implica que $c+1-x \geq 0$, ou seja, $c+1 \geq x \geq 0$. Logo para $c < -1$, $N_c = \emptyset$. Suponha que $c \geq -1$. Então:

$$\begin{aligned} f(x,y) = c &\Leftrightarrow (1-x)^2 + 4(x+y) = c^2 + 2(1-x)c + (1-x)^2 \Leftrightarrow 4(x+y) = c^2 + 2c - 2cx \\ &\Leftrightarrow (4+2c)x + 4y = c^2 + 2c \Leftrightarrow (2+c)x + 2y = \frac{c^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Esta última equação representa o segmento de reta com extremos $\left(0, \frac{c^2}{4} + \frac{c}{2}\right)$ e $\left(\frac{c}{2}, 0\right)$.

Veja a figura abaixo:



(figura 2.6)

Assim dado $c \geq -1$, não é difícil verificar que o conjunto $\{(x, y) \in \mathfrak{R}_+^2; f(x, y) \geq c\}$ é formado pelos pontos em \mathfrak{R}_+^2 acima da reta $f(x, y) = c$.

Portanto f é quase-côncava em \mathfrak{R}_+^2 pelo teorema enunciado. Mostraremos agora que não existe nenhuma função real estritamente crescente duas vezes diferenciável tal que compondo com a função f resulta em uma função côncava, isto é, " f não é indiretamente côncava". Para isto necessitamos do seguinte resultado: (Ver W. Fenchel, *Convex Cones, Sets and Functions* - pg.133).

Proposição: Seja $\varphi: D \rightarrow \mathfrak{R}$ duas vezes diferenciável quase-côncava, $D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo. Para que possa existir uma função $F(\tau)$ estritamente crescente duas vezes diferenciável tal que $F(\varphi(x))$ é côncava, é necessário que para cada $x \in D$ fixo, a forma quadrática $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varphi_{ij}(x) y_i y_j$ restrita ao hiperplano $\sum_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(x) y_i = 0$ seja negativa semi-definida, e se $r-1$ denota o seu posto³, o posto da mesma forma sem restrição deve ser no máximo r .

Seja então $(x, y) \in D$ fixo. Dado $(u_1, u_2) \in \mathfrak{R}^2$ tal que $f_1(x, y)u_1 + f_2(x, y)u_2 = 0$ vamos calcular $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} f_{ij}(x, y) u_i u_j$. Temos que $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} f_{ij}(x, y) u_i u_j = (E^{-1/2} - (1+x)^2 E^{-3/2}) u_1^2 - 4(1+x)E^{-3/2} u_1 u_2 - 4E^{-3/2} u_2^2$.

Mas $(1 + (1+x)E^{-1/2})u_1 + 2E^{-1/2}u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -1/2(E^{1/2} + (1+x))u_1$.

Portanto, $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} f_{ij}(x, y) u_i u_j = (E^{-1/2} - (1+x)^2 E^{-3/2} + 2(1+x)E^{-3/2} (E^{1/2} + (1+x)) -$

$E^{-3/2} (E^{1/2} + (1+x))^2) u_1^2 = 0, \quad \forall (x, y) \in D$. Assim o posto da forma quadrática associada a matriz $(f_{ij}(x, y))_{1 \leq i, j \leq 2}$ é 2 (verifique!) e quando restrita ao hiperplano $f_1(x, y) u_1 + f_2(x, y) u_2 = 0$, o posto é 0. (Veja também o comentário no livro do Fenchel, pg. 134). Portanto pela proposição acima temos que f não é indiretamente côncava.

³ O posto de uma forma quadrática é a dimensão da soma direta dos subespaços vetorial nos quais a forma é definida positiva e definida negativa, respectivamente.

Exercícios propostos - Seção 2

1) Classifique as seguintes afirmativas como verdadeiras ou falsas, provando-as se verdadeiras e apresentando um contra-exemplo, se falsas.

a) Uma função $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, D um subconjunto convexo do \mathfrak{R}^n , é dita quase convexa se $-f$ é quase côncava. Pode-se dizer que f é quase convexa se, e somente se, para todo $a \in \mathfrak{R}$, o conjunto $\{x \in \mathfrak{R}^n; f(x) \leq a\}$ é convexo.

b) A transformada por uma função monótona crescente e côncava de uma função côncava é côncava.

2) Seja $I \subset \mathfrak{R}$ intervalo. Mostre que uma função $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$ é côncava se, e somente se $\forall a, b, x \in I, a < x < b$ tem-se $f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$.

Enuncie e prove resultados análogos para funções convexas, estritamente côncavas e estritamente convexas.

3) Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo. Para que f seja côncava é necessário e suficiente que para cada $p \in \mathfrak{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathfrak{R}_+$ tais que $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1$ e $x_1, \dots, x_p \in D$, $f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p) \geq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_p f(x_p)$. Prove este resultado.

4) Prove se possível ou dê um contra-exemplo se falso: se f é estritamente quase côncava e homogênea de grau $r, 0 < r < 1$, então f é estritamente côncava.

5) Mostre que se $f: I \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é côncava contínua e crescente, I intervalo então a inversa é convexa. O que se pode afirmar quando f é decrescente?

6) Mostre que toda bola em \mathfrak{R}^n , segundo qualquer norma, é convexa.

7) Mostre que todo conjunto convexo é conexo. (Este exercício mostra que $\mathfrak{R}^n, B(a,r), B[a,r]$ são de fato conexos como afirmado no texto).

8) Seja, para cada $n \in \mathfrak{N}, f_n: D \rightarrow \mathfrak{R}$ função côncava. Se existe $\lim f_n(x)$ para cada $x \in D$ então a função $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = \lim f_n(x)$ é côncava.

9) Mostre que toda função monótona definida em um intervalo da reta é quase côncava.

3) DIFERENCIABILIDADE E REGRA DA CADEIA

Iniciamos esta seção com uma breve revisão dos conceitos de conjunto aberto e limite de funções anteriormente apresentadas.

Diz-se que $X \subset \mathfrak{R}^n$ é um conjunto aberto se para todo $x \in X$ existe um número real $r > 0$ tal que o conjunto (chamado bola aberta de centro em x e raio r) $B(x, r) = \{y \in \mathfrak{R}^n; \|y - x\| < r\}$ está contido em X . Intuitivamente, diz-se que X é aberto se dado um ponto seu qualquer x , existe uma "margem de segurança" tal que possamos nos deslocar em qualquer direção (desde que de uma distância suficientemente pequena) a partir do ponto x e continuar no conjunto X . Esta idéia vale por exemplo para o intervalo $(0,1)$, mas não para o intervalo $[0,1]$. Se estamos no ponto 1 e nos movemos para a direita na reta real, sairemos do conjunto, por menor que seja a distância percorrida.

Dado $X \subset \mathfrak{R}^n$ e a um ponto de acumulação de X , seja $f: X \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (lê-se limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L) quando $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, ou seja, se conseguimos fazer com que $f(x)$ se torne tão próxima de L quanto se quer, desde que o ponto x no domínio da função seja tomado tão próximo de a quanto se deve. Uma coisa importante a se observar é que o valor que a função assume no ponto ' a ' é irrelevante para a definição de limite. De fato, f pode até nem estar definida neste ponto. O limite de uma função, quando existe, é sempre único.

Derivadas

Dada uma função $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, D um subconjunto aberto do \mathfrak{R}^n , $a \in D$ e $v \in \mathfrak{R}^n$, seja o quociente $q(t) = \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$ definido para $t \neq 0$ suficiente pequeno. Se existe o limite de $q(t)$ quando t tende a zero, chamamos este limite L de derivada direcional de f no ponto a e na direção v . Como casos particulares, L é dito a i -ésima derivada parcial de f se $v = e_i$ ($e_i = i$ -ésimo vetor unitário do \mathfrak{R}^n). No caso em que $D \subset \mathfrak{R}$ e $v = 1$, dá-se a L o nome derivada de f no ponto a . Assim,

$$L = \frac{\text{DEF } \partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \stackrel{\text{DEF}}{=}$$

derivada direcional de f no ponto a na direção v , no caso geral em que $v \in \mathfrak{R}^n$;

$$L = \frac{\text{DEF } \partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \stackrel{\text{DEF}}{=}$$

derivada parcial de f no ponto a , no caso particular em que $v = e_i$ e ,

$$L = f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} \stackrel{\text{DEF}}{=}$$

derivada de f no ponto a no caso particular em que $D \subset \mathfrak{R}$ e $v = 1$.

Diferenciabilidade

Dada uma função $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, D um conjunto aberto do \mathfrak{R}^n , diz-se que f é diferenciável no ponto $x^* \in D$ se para todo $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $x^* + h \in D$, existem as derivadas parciais de f no ponto x^* e tem-se

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) h_i + r(h) \quad (3.1)$$

$$\text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \quad (3.2)$$

No termo $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) h_i$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ representa a i -ésima derivada parcial da função f calculada no ponto x^* , e o termo h_i a i -ésima coordenada do vetor h .

É importante observar que a expressão (3.1) pode sempre ser escrita, servindo apenas para definir $r(h)$. A chave para a questão de diferenciabilidade é a verificação de (3.2). Intuitivamente, a expressão (3.2) nos informa que, na medida em que h se aproxima de zero, o resto $r(h)$ se aproxima de zero ainda "mais rapidamente". Formalmente, diz-se que $r(h)$ é um infinitésimo de ordem superior a h .

Quando a função é diferenciável e tomamos valores bem pequenos de h , a aproximação do valor da função no ponto $f(x^* + h)$ se dá de forma bastante boa (o sentido preciso desta qualificação é dado por (3.2)) quando se toma o hiperplano tangente ao gráfico de f no ponto $(x^*, f(x^*))$. De fato, a equação deste hiperplano tangente é dada por:

$$L(x^* + h) = f(x^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) h_i \quad (3.3)$$

e o valor da função f , no ponto $x^* + h$, é dado por:

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) h_i + r(h) \quad (\text{equação (3.1)})$$

De (3.1) e (3.3) obtém-se

$$f(x^* + h) = L(x^* + h) + r(h)$$

Para valores suficientemente pequenos de h , $r(h)$ tende a zero, pois $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ implica $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$. Costuma-se escrever, neste caso

$$f(x^* + h) \approx L(x^* + h), \quad (3.4)$$

o sinal \approx denotando "aproximadamente igual".

A expressão acima traduz-se dizendo que o valor da função diferenciável f numa vizinhança do ponto x^* pode ser razoavelmente aproximado pelo hiperplano tangente ao gráfico de f no ponto $(x^*, f(x^*))$.

A título de exemplo, suponha $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}$, uma função definida por $f(x) = x^2$. Dado x_1 um ponto específico da reta real e $h \in \mathfrak{R}$, $f(x_1 + h) = (x_1 + h)^2 = x_1^2 + h^2 + 2hx_1$

$$f(x_1) = x_1^2$$

$$f'(x_1) = 2x_1$$

Por (3.1),

$$r(h) = f(x_1 + h) - f(x_1) - f'(x_1) \cdot h = h^2$$

Donde se conclui imediatamente que a condição de diferenciabilidade é satisfeita, pois

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0.$$

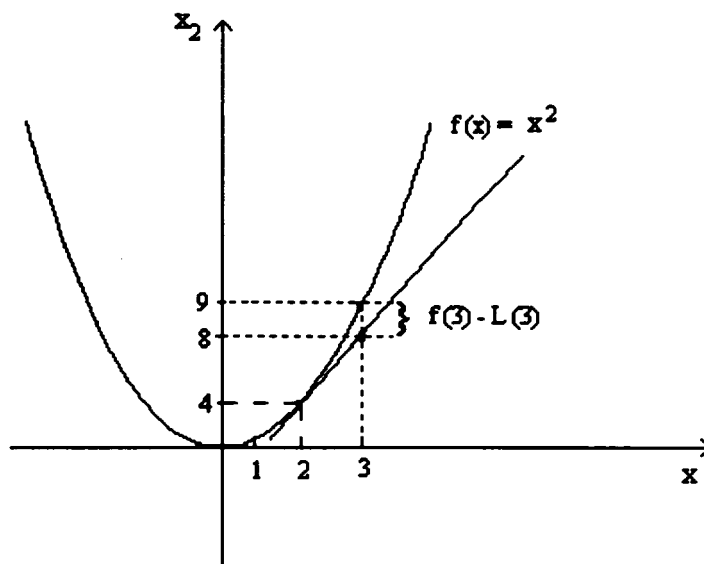
Segue que $f(x) = x^2$ é uma função diferenciável em qualquer ponto de seu domínio. Neste caso, diz-se simplesmente que $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $f(x) = x^2$ é uma função diferenciável (não havendo necessidade de especificar em que pontos do domínio isto ocorre). Segundo a idéia intuitiva apresentada, isto significa que a função $f(x) = x^2$ pode ser razoavelmente aproximada pelo hiperplano tangente (no caso, uma reta) em qualquer ponto de seu domínio. Tomemos $x_1 = 2$ e vejamos o que isto significa. Por (3.1), a equação do hiperplano tangente é dada por

$$L(x_1 + h) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot h$$

ou seja, para $x_1 = 2$,

$$L(2 + h) = 4 + 4 \cdot h$$

Tomemos $h = 1$. Sabemos que $f(x_1 + h) = f(3) = 9$. Na aproximação pelo hiperplano tangente, teremos $L(3) = 8$. O erro resultante $(9 - 8)$ é resultado da não linearidade da função f , a qual estamos tentando aproximar por uma função linear (L). O gráfico abaixo permite a visualização da aproximação efetuada.



(figura 3.1)

A diferenciabilidade de f não nos garante que o erro seja pequeno ou grande (o que depende do valor de h), mas apenas que ele tende a zero quando h tende a zero. Isto decorre do fato de

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} \cdot |h| = 0$$

No exemplo efetuado, se tomarmos $h=0,1$, teremos $f(2,1)=4,41$ e $L(2,1)=4,40$. Observe que o erro da aproximação linear fica bem reduzido (no caso, apenas 0,01) na medida em h decresce (isto era de se esperar, pois já verificamos que $r(h) = h^2$).

A Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Seja $f:[a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função com primeira derivada contínua em $[a, b]$ e que apresente derivada de segunda ordem em qualquer ponto do segmento (a, b) . Então existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que

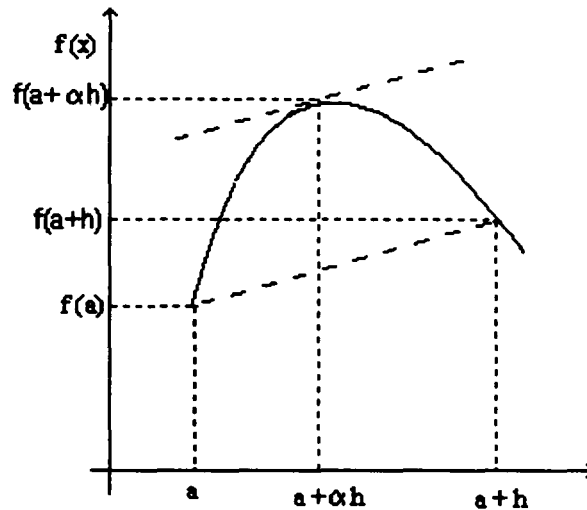
$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\alpha h) \cdot h \quad (3.4)$$

onde $a+h \in [a, b]$, ou ainda, existe $\alpha' \in (0, 1)$, satisfazendo

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a+\alpha' h) \cdot h^2}{2} \quad (3.5)$$

As expressões (3.4) e (3.5) correspondem a casos particulares da fórmula de Taylor com resto de Lagrange. A primeira (3.4) utiliza um polinômio de Taylor de grau zero em h ($f(a)$) e o

resto é dado por $f'(a + \alpha h) \cdot h$. Ela equivale ao teorema do valor médio para funções reais de variável real, sendo a sua intuição gráfica apresentada a seguir:



(figura 3.2)

Escolhendo-se α de tal modo que $f'(a + \alpha h) = (f(a + h) - f(a)) / h$ obtém-se (3.4).

A expressão (3.5) representa uma aproximação da função no ponto $a + h$ utilizando agora um polinômio de Taylor de grau ≤ 1 em h (o polinômio será de grau zero quando $f'(a) = 0$ e de grau 1 quando $f'(a) \neq 0$). O resto de Lagrange neste caso é dado por $h^2 f''(a + \alpha' h) / 2$.

A transposição de (3.4) e (3.5) para o caso de funções definidas no \mathfrak{R}^n é imediata. Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, D um conjunto aberto do \mathfrak{R}^n e $x \in D$. Tomemos h tal que o segmento $[x, x+h] \subset D$. Neste caso, se f é duas vezes diferenciável no segmento aberto $(x, x+h)$, pode-se garantir a existência de $\alpha \in (0, 1)$ tal que:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \alpha h) h_i \quad (3.4')$$

ou ainda, no caso em que se permite que o polinômio de Taylor tenha um grau ≤ 1 nas coordenadas de h ,

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \alpha' h) \cdot h_i h_j \quad (3.5')$$

onde $\alpha' \in (0, 1)$.

As aplicações e exercícios relativos à fórmula de Taylor, da forma como aqui apresentada, surgirão no desenvolvimento das seções seguintes. A título de exemplo veja o caso abaixo:

Exemplo: Vamos apresentar agora um modelo em economia sob incerteza bem simples. Suponhamos que o conjunto $\Omega = \{1, 2, \dots, S\}$ representa "os estados da natureza" e para cada $i \in \Omega$ seja p_i a probabilidade de ocorrência do estado i . Mais precisamente, $p_i \geq 0$, $\forall i \in \Omega$ e $\sum_{i=1}^S p_i = 1$. Uma variável aleatória \underline{x} é simplesmente uma função $\underline{x}: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$.

Dada uma variável aleatória \underline{x} definimos a esperança (ou média) de \underline{x} por $E \underline{x} = \sum_{i=1}^S p_i \underline{x}(i)$ e a variância de \underline{x} por $\sigma^2(\underline{x}) = E \underline{x}^2 - (E \underline{x})^2$.

Em nosso caso específico uma variável aleatória representa a quantidade de um determinado bem em cada estado da natureza, isto é, $\underline{x}(i)$ significa a quantidade de um certo bem da economia no estado da natureza i .

Para fixarmos idéia, cada elemento de \mathfrak{R}_+ será a quantidade do único bem da economia (por exemplo, a moeda). Seja um indivíduo nesta economia com função utilidade $u: \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ de classe C^2 tal que $u' > 0$ e $u'' < 0$. Assim u é estritamente côncava e estritamente crescente. Seja $\underline{x}: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma variável aleatória, definimos a utilidade esperada de \underline{x} por $U(\underline{x}) = \sum_{i=1}^S p_i u(\underline{x}_i) = Eu(\underline{x})$ onde $\underline{x}_i = \underline{x}(i)$, $\forall i \in \Omega$.

A concavidade da função utilidade está relacionada com o conceito de aversão ao risco. Observe que pela concavidade de u , $U(\underline{x}) < u(E \underline{x})$. Assim se \underline{x} representa uma loteria que paga $\underline{x}(i)$ para o indivíduo no estado i então a utilidade de jogar a loteria (utilidade esperada) é menor que a utilidade do valor médio proporcionado pela loteria, ou seja, o indivíduo prefere receber o valor médio proporcionado pela loteria do que arriscar a jogar a loteria.

Podemos ainda definir um conceito de medida de aversão ao risco. Seja $\underline{x} = \bar{x} + \underline{\varepsilon}$ uma variável aleatória com média \bar{x} e variância σ^2 . Definimos o prêmio de risco no nível de riqueza \bar{x} , $\rho(\bar{x}, \underline{\varepsilon})$, como o montante máximo que o agente está disposto a pagar para ter o retorno certo ao invés do retorno esperado da loteria, i.e.,

$$Eu(\underline{x}) = Eu(\bar{x} + \underline{\varepsilon}) = u\left(\bar{x} - \rho(\bar{x}, \underline{\varepsilon})\right)$$

Suponha que a variável aleatória $\underline{\varepsilon}$ é suficientemente pequena. Para qualquer valor ε de $\underline{\varepsilon}$, pela fórmula de Taylor de segunda ordem temos

$$u(\bar{x} + \varepsilon) = u(\bar{x}) + \varepsilon u'(\bar{x}) + \frac{\varepsilon^2}{2} u''(\bar{x}) + r(\varepsilon)$$

onde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0$.

Assim $Eu(\bar{x} + \varepsilon) \approx u(\bar{x}) + \frac{\sigma^2}{2} u''(\bar{x})$ (pois $E\varepsilon = 0$), onde \approx significa "aproximadamente igual". Por outro lado

$$u(\bar{x} - \rho(\bar{x}, \varepsilon)) \approx u(\bar{x}) - \rho(\bar{x}, \varepsilon) u'(\bar{x})$$

pois $\rho(\bar{x}, \varepsilon)$ é pequeno uma vez que ε é pequeno, portanto $\rho(\bar{x}, \varepsilon) = \frac{-1}{2} \sigma^2 \frac{u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})}$.

O coeficiente de aversão absoluta ao risco no nível de riqueza \bar{x} é por definição $r_a(\bar{x}) = -u''(\bar{x})/u'(\bar{x})$, e portanto é duas vezes o prêmio de risco por unidade de variância para risco pequeno.

Se, ao invés de risco aditivo, considerarmos o risco proporcional $\underline{x} = \bar{x}(1 + \varepsilon)$, podemos definir o prêmio de risco relativo $\hat{\rho}(\bar{x}, \varepsilon)$ por

$$Eu(\bar{x}(1 + \varepsilon)) = u(\bar{x}(1 - \hat{\rho}(\bar{x}, \varepsilon)))$$

Pela definição de ρ temos:

$$Eu(\bar{x}(1 + \varepsilon)) = Eu(\bar{x} + \bar{x}\varepsilon) = u(\bar{x} - \rho(\bar{x}, \bar{x}\varepsilon))$$

Logo,

$$\bar{x} \hat{\rho}(\bar{x}, \varepsilon) = \rho(\bar{x}, \bar{x}\varepsilon) = \frac{-1}{2} \bar{x}^2 \sigma^2 \frac{u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})}, \text{ ou}$$

$$\hat{\rho}(\bar{x}, \varepsilon) = \frac{-1}{2} \sigma^2 \bar{x} \frac{u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})}$$

Definindo o coeficiente de aversão relativa ao risco no nível de riqueza \bar{x} por $r_r(\bar{x}) = -\bar{x} \frac{u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})}$ temos que este coeficiente é duas vezes o prêmio de risco relativo por unidade de variância por risco proporcional.

Regra da Cadeia

Sejam f e g duas funções diferenciáveis, com $f: D \rightarrow \mathfrak{R}^p$ ($f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$), $g: U \rightarrow \mathfrak{R}$, com $U \supset f(D)$, sendo D e U dois conjuntos abertos respectivamente do \mathfrak{R}^n e \mathfrak{R}^p . Então a função composta $\text{gof}: D \rightarrow \mathfrak{R}$ é diferenciável tendo-se, para todo $a \in D$ e $b = f(a)$

$$\frac{\partial \text{gof}}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), i = 1, 2, \dots, n.$$

No caso particular em que $D \subset \mathfrak{R}$, temos, para $t \in D$,

$$\frac{d \text{gof}}{dt}(t) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(t)) f'_j(t).$$

Uma aplicação importante deste resultado se dará ainda nesta seção quando for feita a demonstração de que o gradiente de uma função calculado em um ponto a de seu domínio é ortogonal à superfície de nível da função neste ponto.

Vejamos agora uma aplicação no cálculo. Seja $f(t) = (f_1(t), f_2(t)) = (t^2, 2t^3)$ e $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Uma forma direta de se calcular $\frac{d}{dt}(\text{gof})$ consiste em se fazer $\text{gof}(t) = 2t^5$ e derivar, obtendo-se $(\text{gof})'(t) = 10t^4$. A outra, que utiliza a regra da cadeia, se dá lembrando-se que, pela segunda fórmula acima,

$$\frac{d(\text{gof})}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{df_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{df_2}{dt}$$

$$\text{onde } \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)) = x_2 = 2t^3, \frac{\partial g}{\partial x_2}(f(t)) = x_1 = t^2, \frac{df_1}{dt} = 2t, \frac{df_2}{dt} = 6t^2.$$

$$\text{Daí, } \frac{d \text{gof}}{dt}(f(t)) = 2t^3 \cdot 2t + t^2 \cdot 6t^2 = 10t^4.$$

Gradiente e Diferencial

Dada uma função diferenciável $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, com D um conjunto aberto do \mathfrak{R}^n , denomina-se gradiente de f calculado no ponto $a \in D$ ($\text{grad } f(a)$) o vetor das derivadas parciais calculadas no ponto a :

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)'$$

À transformação linear que associa cada vetor v do \mathfrak{R}^n o número real $\langle \text{grad } f(a), v \rangle$ dá-se o nome de diferencial de f no ponto a ($\text{dif } f(a)$ ou $D f(a)$).

$$\text{dif } f(a) \cdot v = \langle \text{grad } f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

Usualmente, escreve-se também

$$\text{dif } f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot dx_i$$

para designar o funcional linear $\text{dif } f(a)$ expresso em função dos n funcionais lineares dx_1, dx_2, \dots, dx_n , onde $dx_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é tal que

$$dx_i(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

O vetor $\text{grad } f(a)$, quando diferente de zero, apresenta algumas propriedades importantes relacionadas ao comportamento da função f no ponto a , dadas por:

- 1) O gradiente de f num ponto sempre aponta uma direção (no domínio da função) em que a função f é crescente. Além disso, esta direção é a direção de crescimento máximo da função f .
- 2) O gradiente de f no ponto a é perpendicular à superfície de nível da função que passa pelo ponto a .

Vejam como demonstrar cada uma dessas propriedades. Se tomamos a derivada direcional de f no ponto a na direção do vetor $\text{grad } f(a) \in \mathfrak{R}^n - \{0\}$ teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial \text{grad } f(a)}(a) = \langle \text{grad } f(a), \text{grad } f(a) \rangle = \|\text{grad } f(a)\|^2 > 0$$

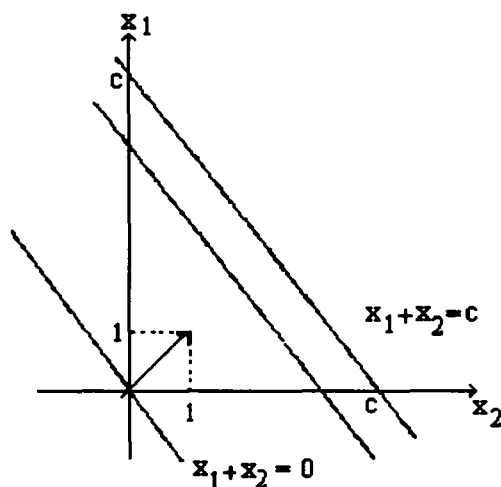
o que prova que a função f sempre cresce na direção $v = \text{grad } f(a)$.

Para mostrarmos que esta direção é a direção de crescimento máximo de f no ponto a , tomemos v tal que $\|v\| = \|\text{grad } f(a)\|$. Isso é necessário para fins de comparação, devido ao fato que $\frac{\partial f}{\partial(tv)}(a) = t \frac{\partial f}{\partial v}(a)$, ou seja, devido ao fato de a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ ser afetada pela norma do vetor v . Assim, para caracterizarmos crescimento máximo de f , devemos tomar a precaução de compararmos derivadas direcionais determinadas por vetores de mesma norma. Fazendo $\|v\| = \|\text{grad } f(a)\|$ e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que a direção do gradiente representa a direção de crescimento máximo da função:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle \leq \|\text{grad } f(a)\| \|v\| = \|\text{grad } f(a)\|^2 = \frac{\partial f}{\partial \text{grad } f(a)}(a)$$

Para provarmos a propriedade (2), precisamos inicialmente esclarecer o que é uma superfície de nível f que passa pelo ponto a e o que significa ser perpendicular a esta superfície.

Uma superfície de nível da função f é o conjunto de pontos x no domínio da função tal que a imagem destes pontos pela função f apresenta um valor constante⁴. Por exemplo, na função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, as superfícies de nível são retas de coeficiente angular -1 . De fato, fazendo-se $x_1 + x_2 = c$, temos $x_2 = c - x_1$. Em particular, para $c = 0$, temos a superfície de nível $f^{-1}(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 + x_2 = 0\}$. Se representarmos o gradiente de f (que no caso, assume o valor $(1, 1)$ em qualquer ponto do domínio) e a superfície de nível de f no \mathbb{R}^2 veremos que ambos são realmente perpendiculares.



(figura 3.3)

Quando a curva de nível da função f não for linear como no caso acima apresentado, precisamos definir mais precisamente o que significa dizer que o gradiente de f é perpendicular a tal superfície de nível. Para isto, seja a função diferenciável no ponto zero $g: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D$ definida de tal forma que

$$f \circ g(t) = c, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \text{ e } g(0) = a. \quad (3.6)$$

Esta função em g é tal que para cada valor de t a imagem $g(t)$ mantém-se sobre a superfície de nível c de f . Derivando-se (3.6) com relação a t no ponto $t = 0$ obtém-se, utilizando-se a regra da cadeia:

$$\langle \text{grad } f(a), g'(0) \rangle = 0 \quad (3.7)$$

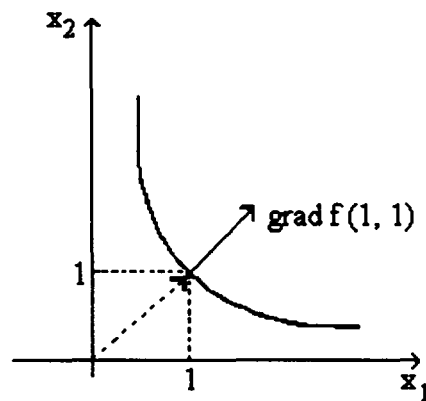
⁴ A rigor, este conjunto será uma superfície quando o gradiente de f calculado em cada um de seus pontos for diferente de zero.

onde $g'(0)$, a derivada da função g no ponto $t = 0$, é chamada vetor velocidade de g no ponto a . E neste sentido que o vetor gradiente de f calculado no ponto a se diz, no caso geral, perpendicular à superfície de nível de f em a . Ele é perpendicular ao vetor velocidade de qualquer função diferenciável (no ponto zero) g definida num subconjunto $(-\epsilon, \epsilon)$ dos reais e com valores em \mathfrak{R}^n , que satisfaça à condição $g(0) = a$ e $f(g(t)) = c$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Para exemplificar, tomemos agora a função $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}_{++}^2$ definida por:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

A superfície de nível $f^{-1}(1)$ é dada pelo conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_{++}^2; x_1 x_2 = 1\}$. O gradiente de f no ponto $(1,1)$ é igual a $(x_1, x_2) = (1,1)$, como se mostra no gráfico a seguir:



(figura 3.4)

Seja agora a função $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^2$ dada por $g(t) = (1+t, 1/(1+t))$. É claro que $g(0) = (1,1)$, e que $f(g(t)) = 1$. O vetor velocidade de g calculado no ponto $t = 0$ é dado por $g'(0) = (1, -1)$, que é obviamente perpendicular ao vetor $\text{grad } f(1,1)$ (o produto interno dos dois é igual a $\langle (1,1), (1,-1) \rangle = 0$). É neste sentido que se diz que $\text{grad } f(a)$ é perpendicular à superfície de nível de f no ponto a .

Exercícios resolvidos - Seção 3.

1) Sejam $U \subset \mathfrak{R}^n$ aberto tal que se $x \in U$ e $t > 0 \Rightarrow tx \in U$ e $k \in \mathfrak{R}$. Uma função $F: U \rightarrow \mathfrak{R}$ diz-se positivamente homogênea de grau k quando $F(tx) = t^k F(x) \quad \forall x \in U$ e $t > 0$. Prove que, se F é diferenciável, então F é positivamente homogênea de grau k se, e somente se vale a relação de Euler: $\langle \text{grad } F(x), x \rangle = kF(x)$.

Demonstração: Suponha que F seja positivamente homogênea de grau k . Seja $x \in U$ (fixo) e defina $g: \mathfrak{R}_{++} \rightarrow U$ tal que $g(t) = tx$. Temos que $F(g(t)) = t^k F(x) \quad \forall t > 0$. Derivando-se esta expressão em relação a t e usando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \text{dif } F(g(t)) \cdot g'(t) &= kt^{k-1} F(x) \\ \Rightarrow \langle \text{grad } F(tx), x \rangle &= kt^{k-1} F(x) \end{aligned}$$

Fazendo $t = 1$, tem-se finalmente que

$$\langle \text{grad } F(x), x \rangle = kF(x)$$

Reciprocamente, se F é tal que a relação de Euler é verdadeira para todo $x \in U$, vamos mostrar que F é homogênea de grau k . De fato, defina $g: \mathfrak{R}_{++} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $g(t) = F(tx)/t^k, x \in U$ (fixo). Vamos calcular a derivada desta função:

$$g'(t) = \frac{t^k \text{dif } F(tx) \cdot x - kt^{k-1} F(tx)}{t^{2k}} \Rightarrow g'(t) = \frac{t^{k-1}}{t^{2k}} [\text{dif } F(tx) \cdot tx - k F(tx)].$$

Aplicando-se a relação de Euler para o ponto $tx \in U$ e substituindo-se na última expressão, segue que:

$$g'(t) = \frac{t^{k-1}}{t^{2k}} [kt^k F(x) - kt^k F(x)] = 0, \quad \forall t \in \mathfrak{R}_{++}.$$

Como \mathfrak{R}_{++} é conexo temos que g é uma função constante, mas $g(1) = F(x)$, portanto $g(t) = F(x), \quad \forall t \in \mathfrak{R}_{++}$. Donde $F(tx) = t^k F(x), \quad \forall t \in \mathfrak{R}_{++}$ e como x é arbitrário segue-se o resultado.

2) Utilize o resultado do exercício anterior e a homogeneidade de grau zero em (p, R) da demanda Marshalliana para demonstrar que $\sum_j n_{ij} + \epsilon_{iR} = 0$, onde $n_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{p_i}$ e $\epsilon_{iR} = \frac{\partial q_i}{\partial R} \frac{R}{q_i}$

q_i = demanda pelo bem i , p é o vetor de preços de venda do consumidor e R a renda do indivíduo.

Solução: Como, para cada i , $q_i = q_i(p, R)$ é homogênea de grau zero em (p, R) , tem-se diretamente pela fórmula de Euler que $\langle \text{grad } q_i(p, R), (p, R) \rangle = 0$ o que implica que

$$\sum_j \frac{\partial q_i}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial q_i}{\partial R} \cdot R = 0.$$

Dividindo-se esta última expressão por q_i , tem-se:

$$\sum_j \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial R} \cdot \frac{R}{q_i} = 0, \text{ ou seja } \sum_j n_{ij} + \varepsilon_{iR} = 0.$$

3) Estude a diferenciabilidade das seguintes funções:

$$\text{a) } f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{c) } f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solução: Alguns teoremas a respeito de funções diferenciáveis são fundamentais para resolução de exercícios como este. Vejamos alguns deles:

i) Se $f: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, U aberto, é diferenciável em $a \in U$ então f é contínua em a .

ii) Seja $f: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ aberto. Então, se f é de classe C^1 , isto é, as derivadas parciais

$\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ existem e são funções contínuas para $j = 1, \dots, n$, a função f é diferenciável em U .

iii) Sejam $f, g: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ funções diferenciáveis em a , e $\alpha \in \mathfrak{R}$. Então

a) $f + g$ é diferenciável em a

b) $f \cdot g$ é diferenciável em a

c) $\frac{1}{f}$, é diferenciável em a , desde que $f(a) \neq 0$.

iv) Seja $f: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, U aberto, diferenciável em a . Então, $\forall v \in \mathfrak{R}^n - \{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = A \cdot v$, onde $A: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma transformação linear, isto é, as derivadas direcionais dependem linearmente das direções, ou ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial (v+w)}(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) + \frac{\partial f}{\partial w}(a) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial tv}(a) = t \frac{\partial f}{\partial v}(a), \quad \forall v, w \in \mathfrak{R}^n - \{0\} \text{ e } \forall t \in \mathfrak{R} - \{0\}.$$

(Para maiores detalhes veja as referências bibliográficas Lima (1976) e Rudin (1976)).

Vamos resolver o exercício:

Em primeiro lugar observe que as três funções neste exercício são diferenciáveis para todo $(x, y) \in \mathfrak{R}^2 - \{(0,0)\}$. Com efeito, para estes pontos as funções são simplesmente somas, produtos e quocientes das funções $\pi_x, \pi_y: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ tais que $\pi_x(x, y) = x$ e $\pi_y(x, y) = y$. Aplique-se então (iii) (visto que o denominador destas funções nos pontos de $\mathfrak{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é nulo). Basta então verificar a diferenciabilidade destas funções em $(0,0)$. Vamos estudar cada caso.

a) Vamos calcular as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\text{Analogamente, } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$$\text{Assim } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(x^2 + y^2)^{-1} - 2x(x^2 + y^2)^{-1} \cos(x^2 + y^2)^{-1}, & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen}(x^2 + y^2)^{-1} - 2y(x^2 + y^2)^{-1} \cos(x^2 + y^2)^{-1}, & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen}(x^2 + y^2)^{-1} = 0$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(x^2 + y^2)^{-1} \cos(x^2 + y^2)^{-1}$ não existe (verifique!)

segue-se que $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$. Portanto f não é de classe C^1 . Por outro lado,

podemos escrever $f(x, y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + r(x, y) = r(x, y)$ com

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)^{-1} = 0$$

pois $|\text{sen}(x^2 + y^2)| \leq 1$. Isto prova que f é diferenciável em $(0,0)$.

b) O leitor pode verificar que f é contínua em 0 , pois

$$f(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^4 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + y^2/x^4}} \cdot \frac{(y/|y|)}{\sqrt{x^4/y^2 + 1}}, \quad x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

e, logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. O leitor poderá observar também que $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$ depende linearmente de y . Mas f não é diferenciável. De fato, considere $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que

$$\lambda(t) = \begin{cases} (t, t^2 \text{sen } 1/t), & \text{se } t \neq 0 \\ (0,0) & , \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que λ é diferenciável em 0 (para funções definidas na reta, diferenciabilidade é equivalente à derivabilidade). Pela regra da cadeia se f fosse diferenciável em $(0,0)$, deveríamos ter $f \circ \lambda$ diferenciável em 0 . Mas

$$(f \circ \lambda)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \lambda)(t) - (f \circ \lambda)(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 \text{sen}(1/t)}{t^5(1 + \text{sen}^2(1/t))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(1/t)}{1 + \text{sen}^2(1/t)}$$

e este último limite não existe, pois se tomarmos as seqüências de pontos (x_n) e (y_n) respectivamente como:

$$\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \in \mathfrak{N}} \text{ e } \left(\frac{2}{\pi(1+4n)}\right)_{n \in \mathfrak{N}}$$

temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad \frac{\text{sen } 1/x_n}{1 + \text{sen}^2 1/x_n} = 0 \text{ e } \frac{\text{sen } 1/y_n}{1 + \text{sen}^2 1/y_n} = 1/2, \quad \forall n \in \mathfrak{N},$$

mostrando que o limite acima não existe.

c) O leitor pode verificar da mesma forma que fizemos o item (a) que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e novamente neste caso $r(x, y) = f(x, y)$ e então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

pois $\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Prova-se assim que f é diferenciável em $(0,0)$.

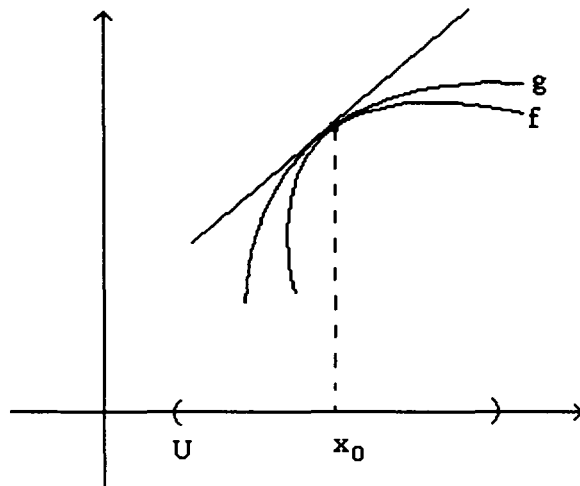
4) Mostre que se $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é tal que U é aberto e $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe para algum $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, com $a \in U$ então $\frac{\partial f}{\partial (tv)}(a) = t \frac{\partial f}{\partial v}(a), t \neq 0$.

Solução: Vamos aplicar a definição de derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial (tv)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h(tv)) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+(ht)v) - f(a)}{h} = t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+(ht)v) - f(a)}{ht} = t \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

5) Sejam $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções côncavas definidas no aberto convexo U . Suponhamos que $f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in U$ e que f é diferenciável em x_0 com $f'(x_0) = g'(x_0)$. Mostre que nestas condições g é diferenciável em x_0 e $\text{dif } g(x_0) = \text{dif } f(x_0)$.

Demonstração: Provaremos primeiro para $n = 1$. Este resultado é bem intuitivo como mostra a figura abaixo:



(figura 3.5)

Em primeiro lugar,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \leq \frac{g(x_0+h) - g(x_0) - f'(x_0)h}{h}, \quad \forall h \in \mathbb{R}_{++}$$

tal que $x_0 + h \in U$, visto que $f(x_0 + h) \leq g(x_0 + h)$ e $f(x_0) = g(x_0)$. Vamos provar que $\frac{g(x_0 + h) - g(x_0) - f'(x_0)h}{h} \leq 0$. Suponhamos por absurdo que $\alpha = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} > f'(x_0)$ para algum $h \in \mathfrak{R}_{++}$ tal que $x_0 + h \in U$.

Então, pela definição de $f'(x_0)$, existe $x \in U$, $x < x_0$ tal que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \alpha$, i.e., $f(x) > f(x_0) + \alpha(x - x_0)$. De fato, caso contrário $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \alpha$, $\forall x \in U, x < x_0$. Passando ao limite quando $x \rightarrow x_0$ teríamos $f'(x_0) \geq \alpha$, o que é uma contradição com a hipótese.

Portanto, $g(x) \geq f(x) > g(x_0) + \alpha(x - x_0)$ para algum $x \in U, x < x_0$, isto é,

$$\begin{aligned} g(x) > g(x_0) + \alpha(x - x_0) &\Rightarrow g(x) > g(x_0) + \frac{(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h}(x - x_0) \\ \Rightarrow hg(x) > hg(x_0) + (x - x_0)g(x_0 + h) - (x - x_0)g(x_0) &\Rightarrow hg(x) > (x - x_0)g(x_0 + h) + (h + x_0 - x)g(x_0) \end{aligned}$$

Como $h + (x_0 - x) > 0$, fazendo-se $\lambda = h / (h + x_0 - x)$ tem-se $0 < \lambda < 1$ e

$\lambda g(x) > (\lambda - 1)g(x_0 + h) + g(x_0) \Rightarrow \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(x_0 + h) > g(x_0)$. Pela concavidade de g temos:

$$g(x_0) = g(\lambda x + (1 - \lambda)(x_0 + h)) \geq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(x_0 + h) > g(x_0)$$

o que é absurdo. Assim $\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \leq f'(x_0)$, $\forall h \in \mathfrak{R}_{++}$ com $x_0 + h \in U$. Portanto

$$(*) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \leq \frac{g(x_0 + h) - g(x_0) - f'(x_0)h}{h} \leq 0, \quad \forall h \in \mathfrak{R}_{++}.$$

com $x_0 + h \in U$. Passando-se ao limite quando $h \rightarrow 0^+$ tem-se $g'_+(x_0) = f'(x_0)$. Tomando $-h \in \mathfrak{R}_{++}$, podemos provar (apenas invertendo todas as desigualdade acima) que $g'_-(x_0) = f'(x_0)$. Portanto $f'(x_0) = g'(x_0)$.

O caso geral decorre deste. Com efeito, seja $h \in \mathfrak{R}^n - \{0\}$ tal que $x_0 + h \in U$ e considere $\alpha: (-\varepsilon, 1] \rightarrow U$ tal que $\varepsilon > 0$ com $x_0 - \varepsilon h \in U$ e $\alpha(t) = x_0 + th$. Logo $f \circ \alpha, g \circ \alpha: (-\varepsilon, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ são côncavas tais que $(f \circ \alpha)(0) = (g \circ \alpha)(0)$, $(g \circ \alpha)(t) \geq (f \circ \alpha)(t)$, $\forall t \in (-\varepsilon, 1]$ e $f \circ g$ é diferenciável em 0.

Por (*) temos que:

$$(f \circ \alpha)(1) - (f \circ \alpha)(0) - (f \circ \alpha)'(0) \leq (g \circ \alpha)(1) - (g \circ \alpha)(0) - (f \circ \alpha)'(0) \leq 0$$

Pela regra da cadeia temos $(f \circ \alpha)'(0) = \text{dif } f(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = \text{dif } f(x_0) \cdot h$

Assim, $f(x_0 + h) - f(x_0) - \text{dif } f(x_0) \cdot h \leq g(x_0 + h) - g(x_0) - \text{dif } f(x_0) \cdot h \leq 0$

Dividindo os membros da desigualdade por $\|h\|$ e fazendo $\|h\|$ tender a 0, tem-se o resultado pela definição de diferenciabilidade.

Exercícios propostos - seção 3

1) Analise a diferenciabilidade das funções abaixo:

$$\text{a) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{c) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{d) } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x, y) = \min\{x, y\}$$

2) Calcule a diferencial das seguintes funções:

$$\text{a) } f(x, y) = x^3 \text{ em } \mathbb{R}^2 \quad \text{b) } f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} \text{ em } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y \neq 0\}.$$

3) Seja $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ definida em \mathbb{R}^3 .

a) Dê um exemplo de uma curva (t) , definida em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e diferenciável em 0, cuja imagem esteja contida na superfície de nível $f(x, y, z) = 1$.

b) Verifique que $\langle \text{grad } f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ e dê a interpretação geométrica.

4) Calcule dz/dt , onde:

$$\text{a) } z = \sin xy, x = 3t \text{ e } y = t^2.$$

$$\text{b) } z = x^3 + 2y^2, x = \sin t \text{ e } y = \cos t.$$

$$\text{c) } z = \ln(1 + x^2 + y^2), x = \cos t \text{ e } y = \sin t.$$

5) Seja $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que

$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \neq \langle \text{grad } f(0, 0), u \rangle$, onde $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Explique (veja exercício 1, item (b)).

4) FORMAS QUADRÁTICAS DEFINIDAS E SEMI-DEFINIDAS

Iniciamos esta seção com o

Teorema de Schwarz 4.1: Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}^n$ aberto, uma função duas vezes diferenciável no ponto $x \in D$. Para quaisquer $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$ tem-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Detenhamo-nos agora na expressão apresentada no último termo do segundo membro da equação (3.5'), $f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \alpha h) h_i h_j$.

$$\text{Dado } h \in \mathfrak{R}^n \text{ e } x \in D, \text{ façamos } S(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) h_i h_j,$$

onde $x^* = x + \alpha h$ representa o ponto onde são calculadas as derivadas parciais de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. Expandindo este termo para $n = 2$, temos (omitindo-se na notação o ponto x^*):

$$S(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2$$

que, em virtude de teorema de Schwarz (cujas hipóteses implicitamente assumimos) pode ser escrito sob a forma:

$$S(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} h_2^2$$

Observe-se que, matricialmente, pode-se ainda escrever

$$S(h) = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

ou ainda, dado o ponto x^* , $h = (h_1, h_2)'$ e

$$H(f, x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$S(h) = h' H(f, x^*) h$, onde h' representa a forma transposta do vetor h .

A matriz $H(f, x^*)$ é denominada matriz hessiana da função f no ponto x^* . Uma vez estipulada a função f e o ponto $x^* \in D$, a função quadrática $S(h)$ definida no \mathfrak{R}^n (denominada "forma hessiana da função f ") associa a cada direção h no \mathfrak{R}^n o número real $h' H(f, x^*) h$. Uma

vez fixado o ponto $x^* \in D$, é muito importante saber se podemos garantir alguma coisa a respeito do sinal de $S(h)$, independentemente do vetor h em questão. Como vimos no Capítulo 2, utilizam-se usualmente os seguintes termos para caracterizar a forma quadrática⁵ $S(h) = h'Hh$.

- a) $S(h)$ é dita positiva definida se $S(h) > 0$ para qualquer $h \in \mathfrak{R}^n, h \neq 0$.
- b) $S(h)$ é dita positiva semi-definida se $S(h) \geq 0$ para qualquer $h \in \mathfrak{R}^n$.
- c) $S(h)$ é dita negativa definida se $S(h) < 0$ para qualquer $h \in \mathfrak{R}^n, h \neq 0$.
- d) $S(h)$ é dita negativa semi-definida se $S(h) \leq 0$ para qualquer $h \in \mathfrak{R}^n$.
- e) $S(h)$ é dita indefinida se existem $h_1 \in \mathfrak{R}^n$ e $h_2 \in \mathfrak{R}^n$ tais que $S(h_1) > 0$ e $S(h_2) < 0$.

Vejamos alguns exemplos:

a) Seja $f(x) = x$. Temos $f'(x) = 1$ e $f''(x) = 0$. A matriz hessiana no caso reduz-se à matriz $1 \times 1 = [0]$. É claro que, neste caso, para qualquer $h \in \mathfrak{R}$, $S(h) = h \cdot H \cdot h = h^2 \cdot 0 = 0$. Conclui-se que a forma hessiana da função $f(x) = x$ é, ao mesmo tempo, positiva semi-definida e negativa semi-definida.

b) Seja $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$

No caso, $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $S(h) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2 h_1 h_2$

Conclui-se que $S(h)$ é indefinida, pois, por exemplo, para $h = (1,1)$, $S(h) = 2$, enquanto que para $h = (-1,1)$, $S(h) = -2$. Diz-se então que a forma hessiana da função $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ é indefinida.

c) Tomemos agora $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ definida no \mathfrak{R}^3 . A hessiana desta função será a matriz 3×3 :

⁵ No Capítulo 2, tratamos de formas quadráticas no caso geral em que a matriz A do termo $x'Ax$ era uma matriz simétrica real qualquer. No contexto deste Capítulo, estaremos interessados no caso particular em que a matriz A é a forma hessiana H de uma função f de classe C^2 , ou seja, matriz das derivadas cruzadas de segunda ordem desta função calculadas num ponto bem definido x^* . Devido ao Teorema de Schwarz, H satisfaz ao requisito de simetria da matriz.

$$H(f, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

Sendo todas as derivadas parciais de segunda ordem calculadas no ponto x . No caso, temos, para qualquer $h \in \mathfrak{R}^3$,

$$S(h) = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$S(h) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$$

Segue que $S(h)$ é uma forma hessiana positiva definida, pois para qualquer $h \in \mathfrak{R}^3 - \{0\}$, $S(h) > 0$.

Já vimos no Capítulo 2 como classificar uma forma quadrática qualquer do tipo $h'Hh$ a partir dos autovalores da matriz H . Uma técnica alternativa neste sentido baseia-se na observação dos menores principais da matriz H . Vejamos como proceder neste caminho alternativo.

Iniciamos a discussão definindo, para a matriz real simétrica de ordem n

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a) O menor principal sucessivo de ordem 1, $H_1 =$ determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$

b) O menor principal sucessivo da ordem 2, $H_2 =$ determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

c) O menor principal sucessivo de ordem 3, $H_3 =$ determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e, seqüencialmente

d) O menor principal sucessivo da ordem $k \leq n$, $H_k =$ determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Observa-se na regra de construção acima apresentada que o menor principal sucessivo de ordem k é definido com o determinante da matriz que se obtém tomando as k primeiras e eliminando-se as $n - k$ linhas e colunas restantes da matriz original.

Teorema 4.2: Dada uma matriz simétrica H de ordem n , a forma quadrática $S(h) = h' H h$ (sendo h um vetor qualquer de \mathfrak{R}^n) será:

a) Positiva definida se, e somente se $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots, H_n > 0$

b) Negativa definida se, e somente se $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots, (-1)^n H_n > 0$

Demonstração: Veja Hadley (1967) ou Debreu (1952).

Com relação aos três exemplos anteriormente apresentados, a forma hessiana de $f(x) = x^2$ não é nem negativa definida nem positiva definida, pois $H_1 = \det[0]$ (determinante da matriz cujo único elemento é o zero) = 0. O mesmo ocorre com $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, pois $H_1 = \det[0] = 0$. A função $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ apresentada no exemplo c apresenta uma forma hessiana positiva definida.

Na caracterização de formas quadráticas como positivas semi-definidas ou negativas semi-definidas, trabalharemos apenas com matrizes simétricas de ordem $n \leq 3$. O caso geral pode ser obtido em Debreu (1952), necessitando, para sua análise, da definição do menor principal não sucessivo, que não apresentaremos aqui.

Dada uma matriz quadrada 1×1 , $[a_{11}]$ a condição necessária e suficiente para que ela seja negativa semi-definida (positiva semi-definida) é que $a_{11} \leq 0$ ($a_{11} \geq 0$). Se a matriz é de ordem 2×2 , $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, a condição necessária e suficiente para que ela seja negativa semi-definida é que $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ e $\det A \geq 0$. Alternativamente, ela será positiva semi-definida se, e somente se $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ e $\det A \geq 0$.

Por último a condição necessária e suficiente para que uma matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

seja negativa semi-definida é que $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$, $a_{33} \leq 0$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0 \text{ e } \det A \leq 0.$$

Da mesma forma, $A(3 \times 3)$ será positiva semi-definida se, e somente se todos estes sete menores principais forem não negativos (≥ 0).

Exercícios resolvidos seção 4

1) Determine se cada uma das formas quadráticas abaixo é positiva, negativa (definida ou semi-definida) ou indefinida:

a) $S(h_1, h_2) = h_1^2 - 3h_1 h_2 + h_2^2$

b) $S(h_1, h_2, h_3) = 2h_1 h_2 + h_2 h_3 - 3h_2 h_3 - 3h_1 h_3$

Solução:

a) $S(h_1, h_2) = (h_1 - \frac{3}{2}h_2)^2 - \frac{5}{4}h_2^2$, e portanto é uma forma indefinida, pois se

$h_1 = \frac{3}{2}h_2$ e $h_2 \neq 0$, $S(h_1, h_2) = -\frac{5}{4}h_2^2 < 0$ (por exemplo, $h_1 = 3$ e $h_2 = 2$, $S(h_1, h_2) = -5$) e se $h_1 \neq 0$ e $h_2 = 0$ tem-se $S(h_1, h_2) = h_1^2 > 0$.

b) Como $S(1, 1, 0) = 2 > 0$ e $S(1, 0, 1) = -3 < 0$, tem-se que S é indefinida.

2) Dada a forma quadrática $S(h) = h' H h$, H matriz real simétrica, sempre existe uma matriz G tal que $G' H G = D$, sendo D uma matriz diagonal e $G' . G = I$. Demonstre a seguinte afirmativa: "A definição de sinal da forma quadrática associada à matriz D é a mesma da forma quadrática associada à matriz H ".

Solução: Observe que $G' . G = I$ implica $G' = G^{-1}$. Façamos $y = G' h$. Logo $h = G y$ e portanto $S(h) = h' H h = (G y)' H (G y) = y' (G' H G) y = y' D y = S^*(y)$ onde $S^*(y) = y' D y$. Portanto $S(h) = S^*(G' h)$ e como $G': \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é uma bijeção (lembre que $G' . G = I$) temos que S e S^* são formas quadráticas com o mesmo sinal.

Exercício Propostos - Seção 4

1) Verifique se cada uma das forma quadráticas abaixo é: a) positiva definida; b) negativa definida; c) positiva semi-definida; d) negativa semi-definida; e) indefinida. Justifique sua resposta.

a) $S(h) = 5h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$

b) $S(h) = -2h_1^2 + 2h_1h_2 - h_2^2$

c) $S(h) = 2h_1^2 + 3h_2^2 + 3h_3^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 4h_2h_3$

2) Dada uma matriz H diagonal ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$), em que casos pode-se afirmar que a forma quadrática $S(h) = h' H h$ é: a) positiva definida; b) positiva semi-definida; c) indefinida?

3) Utilize os exercício proposto anterior e o exercício resolvido 2 para determinar se

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ é positiva definida

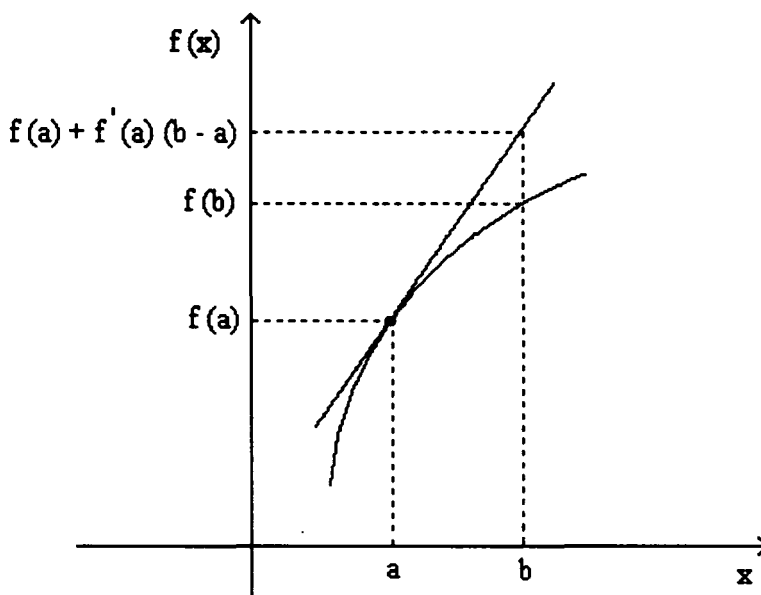
b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ é negativa semi-definida

5) CARACTERIZAÇÃO DE CONCAVIDADE NO CASO DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Iniciaremos esta seção tratando das funções reais de variável real. A extensão ao caso de funções definidas no \mathfrak{R}^n é imediata, e será feita a seguir.

Teorema 5.1. Seja $f:D \rightarrow \mathfrak{R}$, D um subconjunto convexo aberto da reta, f uma função diferenciável. Então f é côncava se, e somente se para quaisquer $a, b \in D$, $f(a) + f'(a) \cdot (b - a) \geq f(b)$

O gráfico abaixo apresenta um função côncava definida no conjunto dos reais:



(figura 5.1)

Observa-se claramente, na ordenada, a relação de ordem $f(b) \leq f(a) + (b-a) f'(a)$. Geometricamente, o que se observa é o seguinte: se, em qualquer ponto do domínio da função côncava f , traçar-se a tangente ao seu gráfico, este último fica todo ele abaixo da tangente. Isso fica claro observando-se que, na relação $f(b) \leq f(a) + (b-a) f'(a)$: a) a e b são pontos quaisquer do domínio de f ; b) o termo $L(b) = f(a) + (b-a) f'(a)$ representa o valor, no ponto b , do hiperplano (aqui uma reta) tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ e, evidentemente; c) $f(b)$ representa o valor da função neste ponto.

Demonstração do Teorema 5.1:

1ª. Parte: f côncava $\forall a, b \in D$, $f(a) + f'(a) \cdot (b-a) \geq f(b)$. Se f é côncava, dados a e $b \in D$, $a \neq b$ e $\theta \in (0,1)$, temos:

$$f(\theta \cdot a + (1-\theta) b) \geq \theta f(a) + (1-\theta) f(b)$$

$$f(a + (1 - \theta)(b - a)) \geq \theta f(a) + (1 - \theta)f(b)$$

$$f(a + (1 - \theta)(b - a)) - f(a) \geq (1 - \theta)(f(b) - f(a))$$

Dividindo-se por $(1 - \theta)$,

$$\frac{f(a + (1 - \theta)(b - a)) - f(a)}{1 - \theta} \geq f(b) - f(a)$$

Ou ainda, multiplicando-se e dividindo-se o primeiro termo por $b - a$,

$$\frac{f(a + (1 - \theta)(b - a)) - f(a)}{(1 - \theta)(b - a)} (b - a) \geq f(b) - f(a)$$

Fazendo $h = (1 - \theta)(b - a)$,

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} (b - a) \geq f(b) - f(a)$$

Tomando o limite quando $h \rightarrow 0$ (o que se obtém fazendo-se $\theta \rightarrow 1$), $f'(a)(b - a) + f(a) \geq f(b)$.

b) 2ª parte: $f(a) + f'(a)(b - a) \geq f(b)$, $\forall a, b \in D \Rightarrow f$ é côncava. Como para $\forall \theta \in [0, 1]$, $c = \theta a + (1 - \theta)b$ pertence ao domínio da função, podemos escrever:

$$f'(c) \cdot (a - c) + f(c) \geq f(a)$$

$$f'(c) \cdot (b - c) + f(c) \geq f(b)$$

Multiplicando-se a primeira desigualdade por θ e a segunda por $1 - \theta$, obtém-se, por soma membro a membro $f(c) = f(\theta a + (1 - \theta)b) \geq \theta f(a) + (1 - \theta)f(b)$ visto que: $\theta(a - c) + (1 - \theta)(b - c) = -c + \theta a + (1 - \theta)b = -c + c = 0$.

Teorema 5.2. Uma função $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$, duas vezes diferenciável no intervalo aberto I é côncava se, e somente se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração:

1ª parte: $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I \Rightarrow f$ é côncava.

Sejam a e b dois pontos quaisquer do intervalo I . Utilizando-se a fórmula de Taylor para $h = b - a$ temos, para $\alpha \in (0, 1)$, $f(b) = f(a) + f'(a) \cdot (b - a) + (1/2)f''(a + \alpha(b - a))(b - a)^2$. Como $f''(a + \alpha(b - a))h^2 \leq 0$, segue que $f(b) \leq f(a) + f'(a)(b - a)$, e do teorema (5.1) que f é côncava.

2ª parte: f é côncava $\Rightarrow f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$. (Primeira demonstração, admitindo f'' contínua). Suponhamos por absurdo que $f''(x_0) > 0$ para $x_0 \in I$. Pela continuidade de f'' existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f''(x) > 0$. Tomemos x nesta vizinhança $(B(x_0, \delta))$ de raio δ de x_0 .

Temos então, utilizando novamente a fórmula de Taylor, para $\alpha \in (0,1)$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \alpha(x - x_0))(x - x_0)^2$. Como $|x_0 + \alpha(x - x_0) - x_0| = \alpha |x - x_0| < \delta$, ou seja, como $x_0 + \alpha(x - x_0)$ pertence à bola de centro em x_0 com raio, segue que $f''(x_0 + \alpha(x - x_0)) > 0$ e $f(x) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$.

Pelo teorema 5.1, este fato é uma contradição com a concavidade de f . Segue que $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

2ª parte: f é côncava $f''(a) \leq 0, \forall a \in I$ (Segunda Demonstração Caso Geral).

Sejam a e b dois pontos quaisquer de I . Pelo teorema 5.1 se f é côncava, podemos escrever:

$$f(a) \leq f'(b) \cdot (a - b) + f(b)$$

$$f(b) \leq f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$$

Somando-se estas duas desigualdades, obtém-se: $(f'(a) - f'(b)) (b - a) \geq 0$.

Dividindo-se por $(b - a)^2 > 0$, $\frac{f'(a) - f'(b)}{b - a} \geq 0 \rightarrow \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} \leq 0$. Tomando-se o limite quando b tende a a , obtém-se pela definição de derivada $f''(a) \leq 0$, para qualquer $a \in I$.

Os teoremas que acabamos de demonstrar são muito úteis na caracterização de concavidade de funções reais de variável real. Passemos agora às suas versões no \mathfrak{R}^n :

Teorema 5.1': Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D$ um subconjunto aberto convexo do \mathfrak{R}^n , f uma função diferenciável. Então f é côncava se, e somente se para quaisquer $x \in D$ e $y \in D$ tivermos

$$f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot (y_i - x_i).$$

1ª Parte: f é côncava $\rightarrow \forall x, y \in D, f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (y_i - x_i)$.

Tal como procedemos na demonstração do teorema 5.1, escrevemos, dada a concavidade de f , e para $\theta \in (0,1)$,

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

$$f(x + (1-\theta)(y-x)) - f(x) \geq (1-\theta)(f(y) - f(x))$$

Dividindo-se por $(1-\theta) > 0$, $\frac{f(x + (1-\theta)(y-x)) - f(x)}{1-\theta} \geq f(y) - f(x)$.

Tomando-se acima o limite quando $\theta \rightarrow 1$ obtém-se do lado esquerdo a derivada direcional da função f no ponto x (na direção $y - x$), que denotamos por $\frac{\partial f}{\partial(y-x)}(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial(y-x)}(x) \geq f(y) - f(x). \text{ Como } f \text{ é diferenciável, } \frac{\partial f}{\partial(y-x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot (y_i - x_i)$$

obtendo-se assim a expressão desejada $f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (y_i - x_i)$

2ª Parte: Se para todo $x, y \in D$, $f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (y_i - x_i)$ então f é côncava.

Da mesma forma que na demonstração do teorema 5.1 agora lidando com vetores do \mathfrak{R}^n no lugar do números reais, seja, para $\alpha \in [0, 1]$, $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ um elemento do domínio de f . Então, pela hipótese do teorema

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \cdot (x_i - z_i) + f(z) \geq f(x)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) (y_i - z_i) + f(z) \geq f(y)$$

Multiplicando-se a primeira desigualdade por α e a segunda por $1 - \alpha$ obtém-se, por soma membro a membro,

$$f(z) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

visto que, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha(x_i - z_i) + (1 - \alpha)(y_i - z_i) = -z_i + z_i = 0$.

Teorema 5.2': Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}^n$ aberto convexo e f uma função duas vezes diferenciável em D com derivadas de segunda ordem contínuas. Então f é côncava se, e somente se a sua forma hessiana é negativa semi-definida em todos os pontos de seu domínio.

Demonstração:

1ª Parte: $S(h) = h' H(f, x) \cdot h \leq 0$, $\forall x \in D \Rightarrow f$ é côncava.

Tal como procedemos na primeira parte do Teorema 5.2, seja h tal que $x + h \in D$. Pela fórmula de Taylor existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i + \frac{1}{2} h' H(f, x + \alpha h) \cdot h.$$

Como $h' H(f, x + \alpha h) \cdot h < 0$, $f(x+h) \leq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i$.

Segue do teorema 5.1' (fazendo-se $h = y - x$) que f é côncava.

2ª Parte: Se f é côncava, então $h' H(f, x).h \leq 0, \forall x \in D$.

Suponhamos que $h' H(f, x_0).h > 0$ para $x_0 \in D$. Então, dada a continuidade das derivadas de segunda ordem de f , existe uma vizinhança de raio δ de x_0 tal que se x pertence a esta vizinhança ($\|x - x_0\| < \delta$) então $h' H(f, x).h > 0$. Dado h tal que $x_0 + h \in D$, seja $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\|\varepsilon h\| < \delta$. Então $x_0 + \varepsilon h$ pertence a esta vizinhança e ao domínio da função, pois $\|(x_0 + \varepsilon h) - x_0\| = \|\varepsilon h\| < \delta$ e $0 < \varepsilon < 1$.

A expansão de Taylor nos garante que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$f(x_0 + \varepsilon h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \varepsilon h_i + \frac{1}{2} (\varepsilon h)' H(f, x_0 + \alpha \varepsilon h).(\varepsilon h),$$

ou seja,

$$f(x_0 + \varepsilon h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \varepsilon h_i + \frac{\varepsilon^2}{2} h' H(f, x_0 + \alpha \varepsilon h).h$$

Mas $\|(x_0 + \alpha \varepsilon h) - x_0\| = |\alpha| \|\varepsilon h\| < \delta$ (pois $|\alpha| < 1$). Segue que $\frac{\varepsilon^2}{2} h' H(f, x_0 + \alpha \varepsilon h).h > 0$, o que nos possibilita escrever $f(x_0 + \varepsilon h) > f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \varepsilon h_i$. Pelo teorema 5.1', isto é uma contradição com o fato de f ser côncava. Segue que $h' H(f, x_0).h \leq 0$ para qualquer $x_0 \in D$.

Passemos agora à concavidade (convexidade) estrita. Trataremos apenas do caso de funções reais definidas em subconjuntos convexos do espaço euclidiano \mathfrak{R}^n . A particularização para funções de variável real é imediata. Diz-se que $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^n$ convexo, é uma função estritamente côncava se para qualquer x e $y \in D$ com $x \neq y$ e $0 < \alpha < 1$, tem-se $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$.

Observe-se que agora está definido no intervalo aberto $(0, 1)$ (e não fechado, como antes) e que a desigualdade é estrita ($>$ ao invés de \geq). Exige-se também, na definição, que $x \neq y$.

Como no caso anterior, f é dita estritamente convexa quando - f é estritamente côncava, ou seja, quando vale

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Os teoremas principais relativos à concavidade estrita são enunciados a seguir:

Teorema 5.3: Seja $f: D \rightarrow \mathfrak{R}, D$ um subconjunto convexo do \mathfrak{R}^n , f uma função diferenciável. Se, para quaisquer $x \in D$ e $y \in D, x \neq y$, tivermos

$$f(y) < f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (y_i - x_i)$$

então f é estritamente côncava.

Teorema 5.4: Seja $f:D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}^n$ aberto convexo e f uma função duas vezes diferenciável em D . Então, se a matriz hessiana de f é negativa definida em todos os pontos de seu domínio, f é estritamente côncava.

As demonstrações dos teoremas acima obtêm-se trocando-se as desigualdades por desigualdades estritas, respectivamente, na segunda parte do teorema 5.1' e na primeira parte do teorema 5.2'. Vale notar que não vale a volta com desigualdades estrita em nenhum dos casos. Ou seja, não é verdade que uma função estritamente côncava apresente hessiana negativa definida em todos os pontos de seu domínio. O contra-exemplo clássico fica por conta de $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}, f(x) = -x^4$, que é estritamente côncava (veja exercício proposto número 3) mas cuja hessiana (no caso, uma matriz 1×1) se anula no ponto $x = 0$. Da mesma forma, se f é estritamente côncava, pode-se dizer que dados dois pontos quaisquer x e y de seu domínio, com $x \neq y$, tenha-se

$$f(y) < f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (y_i - x_i)$$

Observe-se por outro lado que toda função estritamente côncava é também côncava, o que nos possibilita afirmar que uma função não é estritamente côncava quando, por exemplo, existe um ponto de seu domínio onde sua matriz hessiana é positiva definida ou indefinida. Alternativamente, pode-se afirmar que uma função não é estritamente côncava quando existem dois pontos x e y de seu domínio, com $x \neq y$, tais que:

$$f(y) \geq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot (y_i - x_i)$$

Isto decorre diretamente dos teoremas 5.1' e 5.2', visto que qualquer uma dessas verificações caracteriza ausência de concavidade e, conseqüentemente, ausência de concavidade estrita.

Exercícios resolvidos - Seção 5:

1) Verifique se as seguintes funções são: a) côncavas; b) convexas; c) estritamente côncavas; d) estritamente convexas.

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + 3xy$

c) $f: \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{-1/x}$

d) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = x^3 + 3y - 2z$

Solução:

a) Vamos calcular a hessiana de f para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{x^2-y^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2(1+2x^2) e^{x^2-y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y e^{x^2-y^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2(2y^2-1) e^{x^2-y^2} \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4xy e^{x^2-y^2} \end{cases}$$

$$H(f(x, y)) = 2e^{x^2-y^2} \begin{bmatrix} 1+2x^2 & -2xy \\ -2xy & 2y^2-1 \end{bmatrix}$$

Neste caso $\det H(f, (x, y)) = (2e^{(x^2-y^2)})^2 (2y^2 - 2x^2 - 1)$ que não tem sinal definido. Segue que f não se enquadra em nenhuma das categorias acima listadas.

b) Aqui $H(f, (x, y)) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ que é indefinida, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Segue que f não é convexa nem côncava.

c) Temos que $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$ e $f''(x) = \frac{-2}{x^3} e^{-1/x} + \frac{1}{x^4} e^{-1/x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_{++}$.

isto é, $f''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-1/x}$, logo, $f''(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{se } 0 < x \leq 1/2 \\ < 0 & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$, ou seja, f não é

côncava nem convexa.

d) É fácil ver que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 6x$ e que as demais entradas da matriz hessiana são nulas.

Então fica claro que f é côncava se, e somente se $x \leq 0$ e, convexa se, e somente se $x \geq 0$. E como f não é função afim, ela não pode ser simultaneamente côncava e convexa. Portanto ela não é côncava nem convexa.

2) Verifique se as seguintes funções são côncavas:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}_{++}^3$, onde $0 < \alpha < 1/4, 0 < \beta < 1/4$

Solução:

a) $f: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 x_3$

$$H(f, (x_1, x_2, x_3)) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

como $H_{11} = 4 > 0$, f não é côncava.

b) $f: \mathfrak{R}_{++}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^2$

$$H(f, (x_1, x_2, x_3)) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^\beta x_3^2 & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}x_3^2 & 2\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta x_3 \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}x_3^2 & \beta(\beta-1)x_1^\alpha x_2^{\beta-2}x_3^2 & 2\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}x_3 \\ 2\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta x_3 & 2\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}x_3 & 2x_1^\alpha x_2^\beta \end{bmatrix}$$

Como $H_{33} = 2x_1^\alpha x_2^\beta > 0$ em \mathfrak{R}_{++}^3 tem-se que $H(f, (x_1, x_2, x_3))$ não é negativa semi-definida e portanto f não é côncava.

Exercícios Propostos - Seção 5

1) Verifique se cada uma das funções abaixo é: a) estritamente convexa; b) estritamente côncava; c) convexa; d) côncava.

a) $f(x) = -6x^3 + 3x^2 + 1$

b) $f(x) = 3x + 7$

c) $f(x) = a - \frac{b}{c - x^2}$ ($a, b, c > 0, x \geq 0$)

d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 7x_2^2 - x_1 x_2$

e) $f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + cx_1$

f) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \ln x_2$

g) $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3^2$, $c > 0$

h) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$, $a \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$ $0 < \alpha + \beta + \gamma \leq 1$

i) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/2}$

2) Seja $f: I \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, I intervalo aberto. Mostre

a) f é côncava se, e somente se $f': I \rightarrow \mathfrak{R}$ é não crescente

b) f é estritamente côncava se, e somente se $f': I \rightarrow \mathfrak{R}$ é decrescente

3) Prove que $f(x) = x^4$ é uma função estritamente convexa.

Sugestão 1: Mostre que $f'(x) = 4x^3$ é uma função estritamente crescente em todos os pontos de seu domínio. Isto implica (e é implicado por) f estritamente côncava.

Sugestão 2: Como $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, f é convexa. Se f não fosse estritamente convexa, existiriam dois números reais a e b , como $a \neq b$, tais que $f(a) = f(b) + f'(b)(a - b)$. Mostre que isto não pode ocorrer.

4) Mostre que se $f: D \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ (D aberto convexo) é estritamente côncava e diferenciável então

$$f(y) < f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)$$

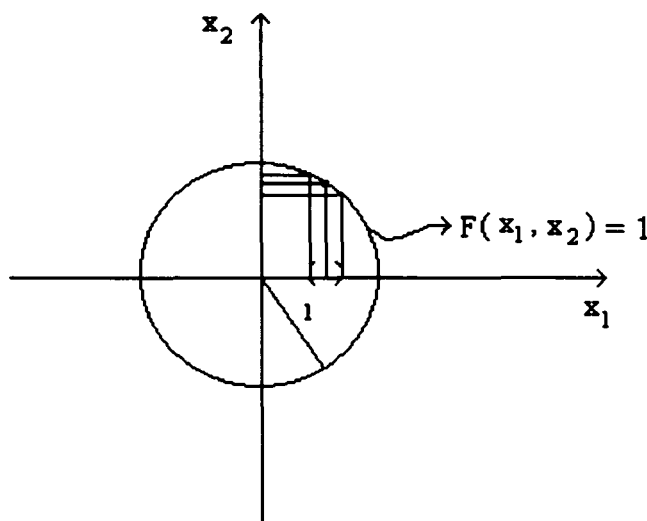
$$\forall x, y \in D.$$

6) O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Freqüentemente em economia deparamo-nos com uma função $F: D \rightarrow \mathfrak{R}$, $D \subset \mathfrak{R}^n$ aberto, no qual se considera o conjunto $\{x \in D; F(x) = c\}$, $c \in \mathfrak{R}$. Tal é o caso, por exemplo, seja no modelo keynesiano simplificado, quando se faz $F(y, I) = y - C(y) - I = 0$, sendo y o produto, $C(y)$ o consumo e I , o investimento autônomo, seja na teoria do consumidor, quando se dá o nome de curva de indiferença ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_{++}^2; F(x_1, x_2) = U(x_1, x_2) = \bar{U}\}$.

Nestas condições, diz-se, para $n = 2$, que a equação $F(x_1, x_2) = c$ define implicitamente x_2 como função de x_1 , quando existe uma função $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$ definida num intervalo aberto I tal que $F(x_1, x_2) = c$ se, e somente se $x_2 = f(x_1)$. Se definirmos o gráfico de uma função $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$, como o conjunto de pontos $G(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2; x_1 \in I \text{ e } x_2 = f(x_1)\}$ a afirmativa anterior equivale a dizer que $(I \times \mathfrak{R}) \cap F^{-1}(c)$ é o gráfico da função f .

Se tomarmos $F: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 0$, é claro que esta equação define trivialmente x_2 como função de x_1 sob a forma da função $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $x_2 = f(x_1) = -x_1$. Mas este não costuma ser o caso geral. Tomemos $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. A imagem inversa do ponto zero pela função F assim definida é o círculo unitário de centro na origem e raio 1. Neste caso não se pode definir x_2 em função de x_1 por uma função $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, pois para cada $x_1 \in (0, 1)$, por exemplo, teríamos os valores $x_2 = f(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2}$ e $x_2 = -f(x_1) = -\sqrt{1 - x_1^2}$ satisfazendo $F(x_1, \pm f(x_1)) = 0$. Mas, com exceção dos pontos $(x_1, x_2) = (1, 0)$ e $(x_1, x_2) = (-1, 0)$, onde $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ se anula, pode-se sempre definir $x_2 = f(x_1)$ numa bola com centro em (x_1, x_2) e raio r suficientemente pequeno. Diz-se, neste caso que $F(x_1, x_2) = c$ define localmente uma função $x_2 = f(x_1)$ tal que $F^{-1}(c) \cap B((x_1, x_2), r)$ é o gráfico de $x_2 = f(x_1)$.



(figura 6.1)

De um modo geral, a equação $F(x_1, x_2) = c$ pode não ser satisfeita para nenhum ponto $(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$, como é o caso de $x_1^2 + x_2^2 + 10 = 0$ ou, ainda que satisfeita, pode não definir

nenhuma função de x_1 em x_2 ou x_2 em x_1 definida num intervalo não degenerado, como é o caso de $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Um outro exemplo é dado por $F(x, y) = x^4 - y^4 = 0$. O ponto $(0,0)$ é uma solução para tal equação, mas qualquer que seja a vizinhança V deste ponto considerada, não se pode definir uma função $y = f(x)$ ou $x = g(y)$, pois $F^{-1}(0) \cap V$ contém necessariamente 2 segmentos de reta que se cortam em $(0,0)$.

Nosso primeiro objetivo nesta seção será estabelecer condições suficientes para que, fixado c , a equação $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = c$ dê origem a uma função implicitamente definida $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. O passo seguinte será qualificar devidamente as propriedades da função f e desenvolver um meio de obter as suas derivadas parciais utilizando-se para tal as derivadas parciais da função F original. Feito isso, passaremos ao caso mais geral em que temos não apenas uma, mas n funções $F_i(x, y)$ definidas em subconjuntos do \mathfrak{R}^{m+n} (com $x \in \mathfrak{R}^m$ e $y \in \mathfrak{R}^n$) e desejamos obter n funções $y_i = f_i(x)$ definidas implicitamente a partir das F_i 's. Passemos agora ao enunciado do teorema da função implícita.

Teorema da Função Implícita (Caso Particular): Seja $F: D \rightarrow \mathfrak{R}, D \subset \mathfrak{R}^{m+1}$ aberto, uma função de classe $C^k (k \geq 1)$. Suponhamos que para $c \in \mathfrak{R}, x_0 \in \mathfrak{R}^m$ e $y_0 \in \mathfrak{R}$, tenha-se $F(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $B(x_0, \delta)$ do ponto x_0 e uma vizinhança unidimensional $B(y_0, \varepsilon)$ do ponto y_0 na qual, para todo $x \in B(x_0, \delta)$ existe um único $y \in B(y_0, \varepsilon)$ com $F(x, y) = c$. Esta propriedade define uma função $f: B(x_0, \delta) \rightarrow B(y_0, \varepsilon), f(x) = y$ com $F(x, f(x)) = c$. A função f assim definida é de classe C^k e para todo $x \in B(x_0, \delta)$ tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial y}(x, f(x)), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Vamos apresentar aqui a demonstração deste teorema para o caso $m = 1$. O leitor pode observar que para o caso $m > 1$ a demonstração é análoga.

Demonstração: Suponhamos que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ (o caso $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$ é análogo). Como

$\frac{\partial F}{\partial y}: D \rightarrow \mathfrak{R}$ é contínua (pois F é pelo menos de classe C^1) temos que existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1 > 0$

tais que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in I_1 \times J$, onde $I_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ e $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ são tais

que $I_1 \times J \subset D$. Assim para cada $x \in I_1$, a função $F_x: J \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $F_x(y) = F(x, y)$ é crescente.

Sejam $y_1, y_2 \in J$ tais que $y_1 < y_0 < y_2$, então $F_{x_0}(y_1) < F_{x_0}(y_0) = F(x_0, y_0) = c < F_{x_0}(y_2)$. Como F é contínua, existe $0 < \delta < \delta_1$ tal que

$F_x(y_1) = F(x, y_1) < c < F(x, y_2) = F_x(y_2), \quad \forall x \in I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Como F_x é contínua para

cada $x \in I$, tem-se pelo teorema do valor intermediário que existe $y_x \in J$ tal que $F_x(y_x) = c$. Uma

vez que F_x é crescente, tal y_x é único em J tal que $F(x, y_x) = c$. Defina então a função tal que

$f(x) = y_x : f: I \rightarrow [y_1, y_2] \subset J$. Mostraremos agora que f é contínua. Sejam $x \in I$ e (x_n) seqüência em I tal que $\lim x_n = x$. Como $(f(x_n))$ é uma seqüência no compacto $[y_1, y_2]$ existe uma subseqüência $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $y \in [y_1, y_2]$. Basta mostrar que $y = f(x)$, pois neste caso concluiríamos que qualquer subseqüência de $(f(x_n))$ convergiria para $f(x)$, donde ela mesma convergiria para $f(x)$. Observe que para cada $k \in \mathbb{N}$ $F(x_{n_k}, f(x_{n_k})) = c$. Como F é contínua em $I \times [y_1, y_2]$ tem-se:

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}, f(x_{n_k})) = F(x, y)$$

Como $(x, y) \in I \times J$ é tal que $F(x, y) = c$, pela unicidade de y_x devemos ter $y = f(x)$. Finalmente vamos mostrar que f é classe C^k . Para cada $x \in I$ fixo, e para todo $t \in \mathfrak{R}$ tal que $x+t \in I$ temos que $F(x+t, f(x+t)) = F(x, f(x)) = c$. Definindo a função $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $\varphi(\theta) = F(x+\theta t, f(x) + \theta(f(x+t) - f(x))) - F(x, f(x))$ temos que é diferenciável e $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Logo pelo teorema do valor médio, existe $\theta_0 \in (0, 1)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(x + \theta_0 t, f(x) + \theta_0(f(x+t) - f(x))) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta_0 t, f(x) + \theta_0(f(x+t) - f(x))) \cdot (f(x+t) - f(x)) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x + \theta_0 t, f(x) + \theta_0(f(x+t) - f(x)))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x + \theta_0 t, f(x) + \theta_0(f(x+t) - f(x)))}$$

Quando $t \rightarrow 0$, temos pela continuidade de F , $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ tem-se

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Como x é arbitrário, esta última igualdade mostra que f' é contínua (visto que F é de classe C^1 e f é contínua) e por indução finita nesta igualdade tem-se que F é de classe C^k .

Vejam agora como utilizar o teorema da função implícita nos dois casos apresentados. No modelo keynesiano simplificado temos, de acordo com o "princípio da demanda efetiva",

$$\bar{y} - C(\bar{y}) - \bar{I} = F(\bar{y}, \bar{I}) = 0$$

Para que possamos utilizar o teorema da função implícita podemos supor que $C(y)$ seja uma função de classe C^1 . Se queremos expressar y como função de I , a condição de suficiência é dada por $(\partial F / \partial y)(\bar{y}, \bar{I}) \neq 0$. Devido à hipótese usual de que a propensão marginal a consumir $C'(y)$ se situa no intervalo $(0, 1)$, $(\partial F / \partial y)(\bar{y}, \bar{I}) = 1 - C'(\bar{y}) > 0$ o que atende à condição de

suficiência. Segue daí que existem vizinhanças $B(\bar{I}, r)$, $B(\bar{y}, \varepsilon)$ de \bar{I} e \bar{y} tais que para qualquer $I \in B(\bar{I}, r)$ existe um único $y \in B(\bar{y}, \varepsilon)$ com a propriedade $F(y, I) = \bar{y} - C(y) - I = 0$. Fazendo $y = f(I)$ segundo esta regra de diferenciação, temos, pelo teorema acima

$$\frac{df}{dI}(I) = \frac{-\partial F / \partial I}{\partial F / \partial y}(I, f(I)) = \frac{1}{1 - C'(f(I))}$$

Chegamos assim à conhecida fórmula do multiplicador Keynesiano, que ensina que o efeito sobre o produto de uma unidade monetária a mais de investimento autônomo é amplificado pelo inverso da propensão marginal a poupar.

Voltemos agora ao problema microeconômico de determinação da curva de indiferença $\{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_{++}^2; U(x_1, x_2) = \bar{U}\}$ associada ao nível de utilidade \bar{U} .

Suponhamos que a função utilidade U seja de classe C^1 e que as utilidades marginais $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, sejam positivas em qualquer ponto do \mathfrak{R}_{++}^2 . Então, dado qualquer $(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_{++}^2$ existe uma vizinhança B_i de x_i , $i = 1, 2$, e uma função de classe C^1 $f: B_1 \rightarrow B_2$ tais que $U^{-1}(\bar{U}) \cap B_1 \times B_2$ é o gráfico da função f .

A título de ilustração, para $U(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \bar{U}$, $U: \mathfrak{R}_{++}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ e $\bar{U} \in \mathfrak{R}_{++}$, temos $x_2 = f(x_1) = \bar{U} / x_1$, sendo $f: \mathfrak{R}_{++} \rightarrow \mathfrak{R}_{++}$ uma função definida não apenas localmente. Pelo teorema da função implícita,

$$f'(x_1) = \frac{-\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_2}(x_1, f(x_1)) = \frac{-f(x_1)}{x_1} = \frac{-\bar{U}}{x_1^2}$$

Seja agora $F(x, y) = x^2 y + y^2 x + 3xy = 5$. Esta função é de classe C^1 , $\text{grad } F(x, y) = (2xy + y^2 + 3y, x^2 + 2xy + 3x)$ e o ponto $(1, 1)$ satisfaz $F(1, 1) = 5$. A pergunta é: pode-se definir $y = f(x)$ numa vizinhança do ponto $(1, 1)$? Se possível, qual o valor de $f'(x)$? Aplicando-se o teorema da função implícita, chega-se a uma resposta positiva para esta pergunta (já que $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 6 \neq 0$) e ao resultado (para x numa vizinhança de $(1, 1)$):

$$f'(x) = \frac{-\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = \frac{-2xy - y^2 - 3y}{x^2 + 2xy + 3x}$$

É importante lembrar o teorema da função implícita estabelece apenas condições suficientes, mas não necessárias, para a existência de uma função implícita nas vizinhanças de um ponto. Tomemos por exemplo $F(x, y) = x^5 - y^5$ definida no \mathfrak{R}^2 e com valores reais.

Temos $\text{grad } F(0, 0) = (0, 0)$, e no entanto a equação $f(x, y) = 0$ define trivialmente a equação $y = f(x) = x$ em torno do ponto $(0, 0)$.

Jacobiana das derivadas parciais de $F = (F_1, F_2)$ em relação às variáveis endógenas, $D_2 F$, que deve ser calculada no ponto (M_0, G_0, y_0, r_0) é dada por

$$D_2 F = \begin{bmatrix} 1 - C'(y_0) & -I'(r_0) \\ -L_y(r_0, y_0) & -L_r(r_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$\det D_2 F = \Delta = -(1 - C'(y_0)) L_r(r_0, y_0) - I'(r_0) L_y(r_0, y_0) > 0$$

Segue o teorema que existe uma vizinhança $B((M_0, G_0), \delta)$ do ponto $(M_0, G_0) \in \mathfrak{R}^2$ e uma vizinhança $B((r_0, y_0), \epsilon)$ do ponto $(r_0, y_0) \in \mathfrak{R}^2$ tais que para qualquer que seja $(M, G) \in B((M_0, G_0), \delta)$ existe apenas um ponto $(r, y) \in B((r_0, y_0), \epsilon)$ com

$$y = y(M, G) \quad e \\ r = r(M, G)$$

satisfazendo

$$y - C(y) - I(r) - G = 0 \quad e \\ M - L(r, y) = 0$$

Segue também do teorema que $\det D_2 F$ calculado neste ponto (M, G, r, y) pertencente à vizinhança de (M_0, G_0, r_0, y_0) é diferente de zero e que as funções $r(G, M)$ e $y(G, M)$ definidas em $B((M_0, G_0), \delta)$ são de classe C^1 . Para o cálculo de

$$Df = \begin{bmatrix} \partial y / \partial M & \partial y / \partial G \\ \partial r / \partial M & \partial r / \partial G \end{bmatrix}$$

no ponto (M, G) , podemos utilizar (6.1) com as derivadas parciais calculadas em $(M, G, y(M, G), r(M, G))$. No caso,

$$(-D_2 F)^{-1} = - \begin{bmatrix} 1 - C' & -I' \\ -L_y & -L_r \end{bmatrix}^{-1} = \frac{-1}{\Delta} \begin{bmatrix} -L_r & I' \\ L_y & 1 - C' \end{bmatrix}$$

$$D_1 F = \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial M & \partial F_1 / \partial G \\ \partial F_2 / \partial M & \partial F_2 / \partial G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{De (6.1), } Df = -(D_2 F)^{-1} \cdot D_1 F = \frac{-1}{\Delta} \begin{bmatrix} I' & L_r \\ 1 - C' & -L_y \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\frac{\partial y}{\partial M} = \frac{-I'}{\Delta} > 0, \quad \frac{\partial y}{\partial G} = \frac{-L_y}{\Delta} > 0,$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1-C')}{\Delta} < 0, \quad \frac{\partial r}{\partial G} = \frac{L_y}{\Delta} > 0$$

Os resultados obtidos confirmam intuição macroeconômica usual. Um aumento da oferta monetária normalmente reduz os juros e corrobora o grau de atividade econômica. Um aumento dos gastos públicos, por outro lado, tende a fomentar o produto e a elevar os juros.

É importante observar que as funções $r(M, G)$ e $y(M, G)$ são determinadas apenas localmente. Isto significa que dado qualquer ponto (M_0, G_0, y_0, r_0) do \mathfrak{R}^4 no qual F se anula, existe um conjunto aberto $Z_0 = B((M_0, G_0), \delta) \times B((r_0, y_0), \varepsilon)$ tal que $F^{-1}(0) \cap Z_0$ é o gráfico da função $f: B((M_0, G_0), \delta) \rightarrow \mathfrak{R}^2$. Como $\det D_2 F = \Delta > 0$ para todos os pontos $(M, G, y, r) \in Z_0$, segue que cada ponto solução da equação $F(M, G, y, r) = 0$ está contido em algum conjunto aberto U_i tal que $F^{-1}(0) \cap U_i$ é o gráfico de uma função $f_i: (M, G) \rightarrow (y, r)$.

Na prática, as derivadas parciais de f costumam ser calculadas por procedimentos alternativos àquele ditado pela equação (6.1). Após a verificação de que $\det D_2 F \neq 0$ e F satisfaz às demais condições explicitadas no Teorema (sendo, conseqüentemente, pelo menos de classe C^1), podemos assegurar que a função $f(M, G) = (y(M, G), r(M, G))$ existe e é de classe C^1 num certo domínio e

$$\begin{cases} y(M, G) - C(y(M, G)) - I(r(M, G)) - G = 0 \\ M - L(r(M, G), y(M, G)) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Como a composta de funções de classe C^1 é classe C^1 , podemos aplicar a regra da cadeia, obtendo, para G constante (omitindo-se o ponto no qual as derivadas parciais são calculadas),

$$\frac{\partial y}{\partial M} - C' \frac{\partial y}{\partial M} - I' \frac{\partial r}{\partial M} = 0$$

$$1 - L_r \frac{\partial r}{\partial M} - L_y \frac{\partial y}{\partial M} = 0$$

Colocando-se em evidência e reescrevendo-se o sistema sob a forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 1 - C' & -I' \\ -L_y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial M} \\ \frac{\partial r}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se a regra de Cramer obtém-se

$$\frac{\partial y}{\partial M} = \frac{-I'}{\Delta} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial M} = \frac{-(1-C')}{\Delta} < 0$$

que reproduzem os resultados anteriormente obtidos. Procedendo da mesma forma para M constante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial G} - C' \frac{\partial y}{\partial G} - I' \frac{\partial r}{\partial G} &= 1 \\ -L_r \frac{\partial r}{\partial G} - L_y \frac{\partial y}{\partial G} &= 0 \end{aligned}$$

Rearranjando-se os termos e colocando-os sob a forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1-C' & -I' \\ -L_y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial G} \\ \frac{\partial r}{\partial G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendo-se uma vez mais

$$\frac{\partial y}{\partial G} = \frac{-L_r}{\Delta} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial G} = \frac{L_y}{\Delta} > 0$$

Observe que as duas equações matriciais apresentadas no desenvolvimento em duas etapas que efetuamos podem ser escritas sob a forma

$$\begin{bmatrix} 1-C' & -I' \\ -L_y & -L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial y/\partial M & \partial y/\partial G \\ \partial r/\partial M & \partial r/\partial G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtendo-se a equação (6.1),

$$\begin{aligned} Df &= \begin{bmatrix} \partial y/\partial M & \partial y/\partial G \\ \partial r/\partial M & \partial r/\partial G \end{bmatrix} = \\ &= (-1) \begin{bmatrix} 1-C' & -I' \\ -L_y & -L_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -(D_2 F)^{-1} \cdot D_1 F \end{aligned}$$

O método acima considerado permite a obtenção, em cada etapa, de cada uma das colunas da matriz D f. Inicialmente obtivemos a coluna um ($\partial y/\partial M$ e $\partial r/\partial M$) e depois a coluna dois desta matriz ($\partial y/\partial G$ e $\partial r/\partial G$). Dependendo de qual dentre as m variáveis exógenas escolhemos para a estática comparativa, podemos nos concentrar em uma qualquer das colunas de D f. Quando se deseja obter a matriz D f como um todo, utiliza-se em geral uma notação abreviada do diferencial de cada uma das variáveis endógenas consideradas em relação a cada uma das

variáveis exógenas. Este é o chamado método do diferencial total para o cálculo de D f. Para exemplificá-lo, voltemos às equações (6.2):

$$\begin{aligned} y(M, G) - C(y(M, G)) - I(r(M, G)) - G &= 0 \\ M - L(r(M, G), y(M, G)) &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo-se

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{\partial y}{\partial G} \right) dG + \left(\frac{\partial y}{\partial M} \right) dM \\ dr &= \left(\frac{\partial r}{\partial G} \right) dG + \left(\frac{\partial r}{\partial M} \right) dM \end{aligned} \quad (6.3)$$

temos, tomando o diferencial total das equações acima,

$$\begin{aligned} dy - C' dy - I' dr &= dG \\ L_y dy + L_r dr &= dM \end{aligned}$$

Ou ainda, sob a forma matricial,

$$\begin{aligned} dy &= \frac{L_r}{\Delta} dG + \frac{I'}{\Delta} dM \\ dr &= \frac{1 - C'}{\Delta} dM - \frac{L_y}{\Delta} dG \end{aligned} \quad (6.4)$$

Seguem daí os resultados já obtidos

$$\frac{\partial y}{\partial G} = L_r / \Delta, \quad \frac{\partial y}{\partial M} = I' / \Delta \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial G} = -L_y / \Delta$$

onde $\Delta = (1 - C') L_r + I' L_y$. A identificação de cada uma das derivadas parciais a partir de simples inspeção das equações (6.3) e (6.4) decorre do fato de dM e dG se constituírem numa base do espaço das transformações lineares do \mathfrak{R}^2 em \mathfrak{R} . Isto implica no fato das representações dos funcionais lineares dy e dr serem únicas na base. Segue daí a identificação efetuada.

Um exemplo numérico

Dado o sistema de equações $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z))$, com

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= x^2 y + 2x y^2 - z \\ F_2(x, y, z) &= x y + 7 \end{aligned}$$

temos, no ponto $(1, 2, 3)$, $F_1(x, y, z) = 7$ e $F_2(x, y, z) = 9$.

Tentemos avaliar, se possível, o valor das derivadas parciais $\partial x/\partial z$ e $\partial y/\partial z$ no ponto considerado. Para isto notemos inicialmente que a matriz das derivadas de F em relação às variáveis (escolhidas como endógenas) x e y é dada por

$$\begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x & \partial F_1/\partial y \\ \partial F_2/\partial x & \partial F_2/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y^2 & x^2 + 4xy \\ y & x \end{bmatrix}$$

que, avaliada no ponto (1, 2, 3), assume os valores:

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é igual a -6 e, portanto diferente de zero. Podemos então escrever, para z numa vizinhança do ponto (3) e (x, y) numa vizinhança do ponto (1,2),

$$\begin{aligned} x &= x(z) \\ y &= y(z) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Derivando F_1 e F_2 com respeito a z, e usando (6.5),

$$\begin{aligned} 2x \frac{\partial x}{\partial z} \cdot y + x^2 \frac{\partial y}{\partial z} + 2y^2 \frac{\partial x}{\partial z} + 4xy \frac{\partial y}{\partial z} &= 1 \\ y \frac{\partial x}{\partial z} + x \frac{\partial y}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Sob a forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 2xy + 2y^2 & x^2 + 4xy \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando-se as derivadas no ponto (1, 2, 3),

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se a regra de Cramer obtém-se facilmente

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -1/6 \text{ e } \frac{\partial y}{\partial z} = 1/3.$$

A análise Gráfica

Um instrumento muito útil na avaliação dos sinais das derivadas parciais das funções implicitamente definidas pela equação vetorial $F(x, y) = c$, quando $c \in \mathcal{R}^2$, é dado pela análise gráfica. Para ilustrar o método, voltemos ao modelo IS-LM anteriormente apresentado:

$$y - C(y) - I(r) - G = 0 \quad (IS)$$

$$M - L(r, y) = 0 \quad (LM)$$

Já sabemos, em virtude das hipóteses efetuadas sobre C', I', L_r e L_y , que podemos escrever

$$\begin{aligned} y &= y \left(\overset{+}{G}, \overset{+}{M} \right) \\ r &= r \left(\overset{+}{G}, \overset{-}{M} \right) \end{aligned}$$

onde o sinal acima de cada variável representa o sinal da derivada parcial, respectivamente, de y e r , em relação a esta variável.

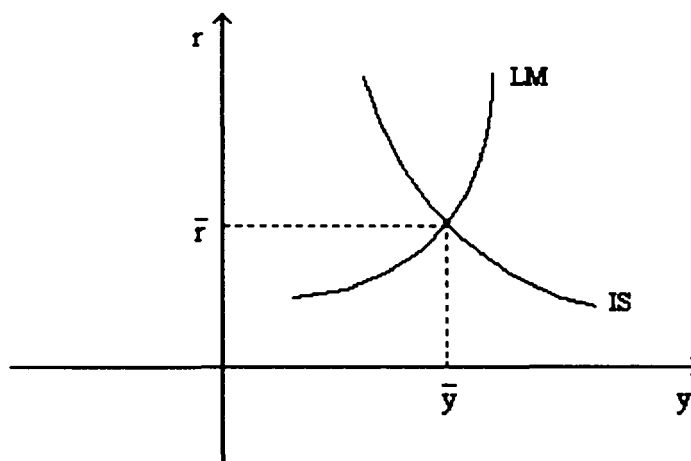
O método gráfico, adequado aos modelos em que apenas duas variáveis endógenas se determinam a cada etapa, inicia-se plotando-se cada uma destas variáveis nos eixos coordenados. No nosso caso, as variáveis endógenas são r (representada no eixo das ordenadas) e y (representada no eixo das abcissas). Em seguida, plota-se o lugar geométrico das combinações de r e y que satisfazem, mantidas constantes as variáveis exógenas, a cada uma das equações do modelo. O formato de cada uma destas curvas obtém-se por simples inspeção ou, mais formalmente, utilizando-se preliminarmente o próprio teorema da função implícita.

Tomemos inicialmente a LM. Se r aumenta, L cai. Como M é constante, para que se verifique $M - L(r, y) = 0$ é necessário que y se eleve contrabalançando o efeito do aumento de r sobre L . Conclui-se daí que LM é positivamente inclinada: quando r se eleva, o mesmo deve acontecer com y . Formalmente, temos, pela simples aplicação do teorema da função implícita à equação $M - L(r, y) = 0$, que $\frac{dr}{dy} = -L_y/L_r > 0$.

Com o mesmo tipo de raciocínio conclui-se que a IS é negativamente inclinada. Alternativamente, aplicando-se o teorema da função implícita à equação $y - C(y) - I(r) - G = 0$, obtemos a inclinação local da IS:

$$\frac{dr}{dy} = \frac{1 - C'(y)}{I'(r)} < 0$$

O equilíbrio do produto e da taxa de juros em função de G e M se expressa então pelo gráfico abaixo



(figura 6.2)

que consiste numa forma alternativa de se expressarem as soluções

$$\begin{aligned}\bar{y} &= y(\bar{G}, \bar{M}) \\ \bar{r} &= r(\bar{G}, \bar{M})\end{aligned}$$

A etapa seguinte, de estática comparativa, avalia os sinais de $\partial y/\partial M$, $\partial y/\partial G$, $\partial r/\partial M$ e $\partial r/\partial G$ através dos deslocamentos de cada uma das curvas plotadas no gráfico. Para se saber a direção na qual cada uma das curvas se desloca, procede-se novamente por simples inspeção ou por uma nova utilização do teorema da função implícita. O artifício comum a ambos os procedimentos consiste em tomar-se como constante qualquer uma das variáveis endógenas expressas no gráfico.

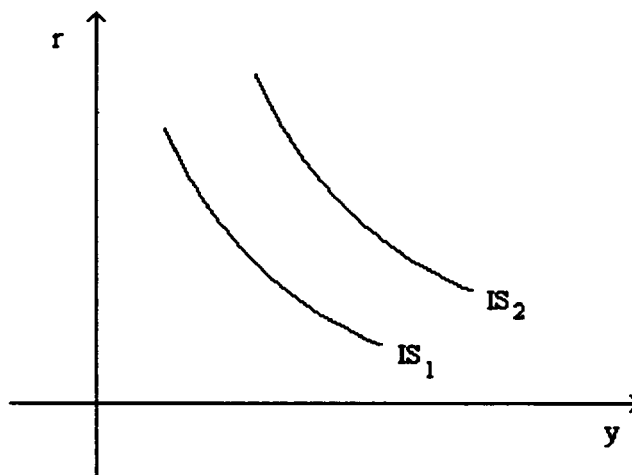
A título de ilustração, tomemos um aumento da variável G . A LM não se desloca, pois esta variável não aparece como parâmetro na equação da LM. Mas a IS se deslocará para a direita. Informalmente, porque para (por exemplo) r constante deveremos ter um valor mais elevado de y de forma a continuar valendo a igualdade.

$$y - C(y) - I(r) - G = 0$$

Isto decorre do fato de I não se alterar (já que estamos nos deslocando paralelamente ao eixo das abcissas r constante), e do fato de uma elevação de y ser capaz de provocar um aumento (que deve ser o aumento de G) em $y - C(y)$. Formalmente, o que estamos dizendo conclui-se novamente por simples aplicação do teorema da função implícita à equação acima, tomando-se r como parâmetro. Obtém-se

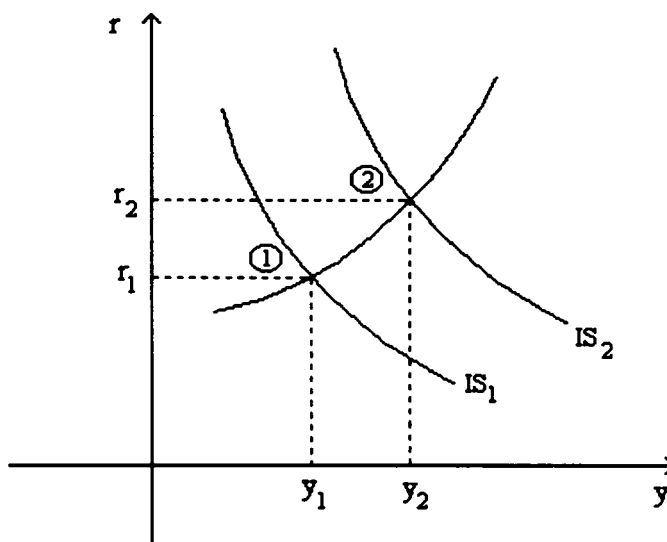
$$\frac{\partial y}{\partial G} = \frac{1}{1 - C'(y)} > 0$$

Isto significa que, para cada valor de r considerado na IS, o valor de y deve ser mais elevado quando G se eleva. Este deslocamento da IS é ilustrado no gráfico abaixo:



(figura 6.3)

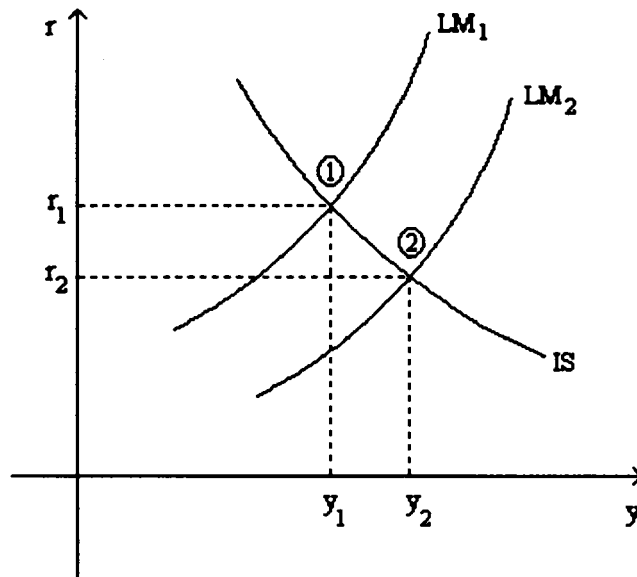
Plotando-se conjuntamente a IS e a LM conclui-se que um aumento de G leva a uma elevação do produto e dos juros, como se mostra abaixo:



(figura 6.4)

O mesmo tipo de raciocínio leva à conclusão de que um aumento de M : a) deixa a IS inalterada, já que esta variável não aparece na equação da IS; b) desloca para a direita a LM, já que, aplicando-se o teorema da função implícita à equação $M - L(r, y) = 0$ obtém-se

$\frac{\partial y}{\partial M} = \frac{1}{L_y} > 0$ e c) provoca uma elevação do produto e redução dos juros de equilíbrio, o que se mostra no gráfico abaixo:



(figura 6.5)

Todos estes resultados reproduzem, como se observa, os sinais das derivadas parciais $\partial y/\partial M$, $\partial y/\partial G$, $\partial r/\partial M$ e $\partial r/\partial G$ anteriormente obtidas. Quando não estamos interessados nos aspectos quantitativos da estática comparativa, o método gráfico mostra-se de grande utilidade.

Exercícios resolvidos - Seção 6

1) Em cada caso, ache, se possível, $\frac{\partial y}{\partial x}$ no ponto considerado:

a) $F(x, y, z, w) = x^2 y + 2 zwx$ no ponto $(-1, 2, 1, 1)$

b) $F(x, y, z) = \frac{y}{1-x(1-z)}$ no ponto $(1, 1, 1)$

Solução:

a) Como $F: \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $F(x, y, z, w) = x^2 y + 2 zwx$ é classe C^1 , para que $y = y(x, z, w)$ numa vizinhança de $(-1, 2, 1, 1)$ é suficiente que $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 2, 1, 1) \neq 0$. Mas $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, w) = x^2$

e então $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 2, 1, 1) = 1 \neq 0$. Assim $\frac{\partial y}{\partial x}(-1, 1, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 2, 1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 2, 1, 1)}$ e como $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, w) = 2xy + 2zw$, $\frac{\partial y}{\partial x}(-1, 1, 1) = 2$.

b) Sejam $U = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3; 1-x(1-z) \neq 0\}$ aberto e $F: U \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $F(x, y, z) = \frac{y}{1-x(1-z)}$.

Observe que F é de Classe C^1 em U e $(1, 1, 1) \in U$. Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{1-x(1-z)}$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 1) = 1 \neq 0$. Assim existe uma vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$ em U

tal que $y = y(x, z)$ e $\frac{\partial y}{\partial x}(1, 1) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 1)}$. Mas

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y(1-z)}{[1-x(1-z)]^2} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}(1, 1) = 0.$$

2) Consideremos o seguinte problema de maximização de lucro

$$\max_{(K, L) \in \mathfrak{R}_+^2} pF(K, L) - W_K K - W_L \cdot L$$

onde F é uma função de produção do capital (K) e do trabalho (L), p é o preço do produto, W_K de cada unidade de capital e W_L o salário por unidade de trabalho. Admitamos que a matriz hessiana de F seja negativa definida em todo o seu domínio, que F seja de classe C^2 e admita uma solução em \mathfrak{R}_{++}^2 , para cada $p > 0$, $W_K > 0$ e $W_L > 0$.

i) Determine condições suficientes para que se possa ter $K = K(p, W_K, W_L)$; $L = L(p, W_K, W_L)$.

ii) Calcule, nestas condições, $\frac{\partial L}{\partial W_K}, \frac{\partial L}{\partial W_L}$.

Solução:

i) Fixados $p > 0, W_K > 0, W_L > 0$ temos que (K, L) será um ótimo para o problema se, e somente se satisfaz as condições de primeira ordem⁴, isto é, se, e só se

$$\begin{cases} p \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) - W_K = 0 \\ p \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) - W_L = 0 \end{cases}$$

Sejam $g_i: \mathfrak{R}_{++}^2 \rightarrow \mathfrak{R}, i = 1, 2$, definidas por

$$\begin{cases} g_1(K, L, p, W_K, W_L) = p \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) - W_K \\ g_2(K, L, p, W_K, W_L) = p \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) - W_L \end{cases} \text{ e}$$

Para que possamos ter $K = K(p, W_K, W_L)$ e $L = L(p, W_K, W_L)$ é suficiente, pelo Teorema da Função Implícita, que g_1 e g_2 sejam de classe C^1 e que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial K} & \frac{\partial g_1}{\partial L} \\ \frac{\partial g_2}{\partial K} & \frac{\partial g_2}{\partial L} \end{vmatrix} \neq 0$$

em $g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0)$. Como F é classe C^2 temos que g_i é de classe $C^1 (i = 1, 2)$. Além disso, $\frac{\partial g_1}{\partial K} = p F_{KK}; \frac{\partial g_2}{\partial K} = p F_{LK}; \frac{\partial g_1}{\partial L} = p F_{KL}; \frac{\partial g_2}{\partial L} = p F_{LL}$, onde

$F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}; F_{LK} = F_{KL} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}$ e $F_{LL} = \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}$ (e estamos omitindo (K, L) por comodidade).

Então $\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial K} & \frac{\partial g_1}{\partial L} \\ \frac{\partial g_2}{\partial K} & \frac{\partial g_2}{\partial L} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} F_{KK} & F_{KL} \\ F_{KL} & F_{LL} \end{vmatrix} = p^2 |H(F, (K, L))|$, onde

$H(F(K, L))$ é a hessiana de F no ponto (K, L) . Segue da hipótese efetuada da matriz hessiana de F ser negativa definida em todos os seus pontos de seu domínio que $|H(F(K, L))| > 0, \forall (K, L) \in \mathfrak{R}_{++}^2$. Segue daí que $\Delta = p^2 |H(F(K, L))| > 0$.

ii) Atendidas as hipóteses do item (i), sabemos pelo teorema da Função Implícita que

⁴ Veja teorema da seção 1 do capítulo 4.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial W_K} & \frac{\partial K}{\partial W_L} \\ \frac{\partial L}{\partial W_K} & \frac{\partial L}{\partial W_L} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial K} & \frac{\partial g_1}{\partial L} \\ \frac{\partial g_2}{\partial K} & \frac{\partial g_2}{\partial L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial W_K} & \frac{\partial g_1}{\partial W_L} \\ \frac{\partial g_2}{\partial W_K} & \frac{\partial g_2}{\partial W_L} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial W_K} = \frac{-p F_{KL}}{\Delta} \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial W_L} = \frac{p F_{KK}}{\Delta}$$

Pela hipótese efetuada sobre a hessiana de F, devemos ter $F_{KK} < 0$ e, conseqüentemente, $\frac{\partial L}{\partial W_L} < 0$. O sinal de $\frac{\partial L}{\partial W_K}$ é indeterminado.

3) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ trinômio do segundo grau tal que $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Neste caso existem $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ raízes deste trinômio. Mostre que é possível tomar r_1 em função de a, b e c e calcule $\frac{\partial r_1}{\partial a}, \frac{\partial r_1}{\partial b}$ e $\frac{\partial r_1}{\partial c}$. Faça o mesmo para r_2 .

Solução: Seja $g: U \subset \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $U = \{(a, b, c, t) \in \mathfrak{R}^4; a \neq 0 \text{ e } b^2 - 4ac > 0\}$ é aberto em \mathfrak{R}^4 e $g(a, b, c, t) = at^2 + bt + c$. É fácil ver que g é de classe C^1 . O problema acima proposto é equivalente a saber se podemos colocar t em função de (a, b, c) em $g^{-1}(0) = \{(a, b, c, t) \in \mathfrak{R}^4; at^2 + bt + c = 0\}$. Isto só será possível se $\frac{\partial g}{\partial t}(a, b, c, t) \neq 0, \forall (a, b, c, t) \in g^{-1}(0)$. Mas $\frac{\partial g}{\partial t}(a, b, c, t) = 2at + b = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{b}{2a}$, mas como $at^2 + bt + c = 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, então $t \neq -\frac{b}{2a}$. Chamaremos (a, b, c, r) um ponto de $g^{-1}(0)$. Neste caso existe uma vizinhança deste ponto tal que $r_1 = r_1(a, b, c)$ e mais ainda

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial a} &= - \frac{\partial g / \partial g}{\partial a / \partial t} \Big|_{(a, b, c, r_1)} = -r_1^2 / (2ar_1 + b) \\ \frac{\partial r_1}{\partial b} &= - \frac{\partial g / \partial g}{\partial b / \partial t} \Big|_{(a, b, c, r_1)} = -r_1 / (2ar_1 + b) \\ \frac{\partial r_1}{\partial c} &= - \frac{\partial g / \partial g}{\partial c / \partial t} \Big|_{(a, b, c, r_1)} = -1 / (2ar_1 + b) \end{aligned}$$

4) Dadas as expressões:

$$\begin{cases} s = 1 - \frac{k}{r} s^2 & (1) \\ s(r) = r m(r) & (2) \end{cases}$$

Seja r_0 tal que $s(r_0) = s_0$, $m(r_0) = m_0$ e $s_0 = r_0 m_0$. Mostre que, para pequenos valores de s_0 , pode-se aproximar k e $s(r)$ por, respectivamente,

$$\begin{cases} k = r_0^{-1} m_0^{-2} & (3) \\ s(r) = m_0 r_0^{1/2} r^{1/2} & (4) \end{cases}$$

Solução:

a) Substituindo-se (2) em (1) no ponto $r = r_0$,

$$r_0 m_0 = 1 - \frac{k}{r_0} r_0^2 m_0^2$$

Como se supõe $s_0 = r_0 m_0$ pequeno,

$$k r_0 m_0^2 = 1 - r_0 m_0 \approx 1$$

Daí,

$$k = r_0^{-1} m_0^{-2}$$

b) Seja $v = s^2$. A expansão de Taylor de primeira ordem em torno de $r = r_0$ nos dá

$$v(r) = v(r_0) + v'(r_0) \cdot (r - r_0) \quad (5)$$

$$\text{onde } v'(r) = 2s s'(r) \quad (6)$$

e $s'(r)$ obtém-se por derivação implícita de (1). Temos

$$s'(r) = \frac{k}{r^2} s(r)^2 - \frac{k}{r} \cdot 2s(r) \cdot s'(r)$$

$$s'(r) = \frac{k}{(r + 2ks(r))r} \cdot s(r)^2$$

No ponto $r = r_0$, temos

$$s'(r) = \frac{m_0}{m_0 r_0 + 2}$$

Substituindo-se em (6), no ponto $r = r_0$

$$v'(r_0) = \frac{2m_0 r_0 m_0}{m_0 r_0 + 2} \approx m_0^2 r_0$$

já que $m_0 r_0 = s_0 \approx 0$. Segue de (5), como $v(0) = s_0 \approx 0$, que

$$v(r) = m_0^2 r_0 \cdot (r - r_0) = m_0^2 r_0 r - s_0^2 \approx m_0^2 r_0 r$$

Como $v = s^2$, temos, finalmente, $s(v) \approx m_0 r_0^{1/2} r^{1/2}$.

Exercícios propostos - seção 6

1) Seja o seguinte sistema de equação representativa de um modelo macroeconômico:

$$r = L(r, y) \quad (1)$$

$$y = C(y) + I(r) + G + H(y, E) \quad (2)$$

$$H(y, E) + K(r) = 0 \quad (3)$$

onde $L_r < 0, L_y > 0, 0 < C'(y) < 1, I'(r) < 0, H_y < 0, H_E > 0, K'(r) > 0$.

Variáveis endógenas: r, y, E .

a) Estipule condições suficientes para que o modelo permita a determinação das funções:

$$r = r(M, G)$$

$$y = y(M, G)$$

$$E = E(M, G)$$

b) Calcule $\frac{\partial r}{\partial M}, \frac{\partial r}{\partial G}, \frac{\partial y}{\partial M}, \frac{\partial y}{\partial G}, \frac{\partial E}{\partial M}$ e $\frac{\partial E}{\partial G}$.

c) Substitua $H(y, E)$ por $-K(r)$ na equação(2). Como você faria para determinar graficamente os sinais de $\frac{\partial y}{\partial M}, \frac{\partial y}{\partial G}, \frac{\partial r}{\partial G}$ e $\frac{\partial r}{\partial M}$? Isto seria possível, uma vez satisfeitas as condições por você determinadas no item (a)?

$$\text{obs.: } L_y = \frac{\partial L}{\partial y}; H_y = \frac{\partial H}{\partial y}; L_r = \frac{\partial L}{\partial r}; H_E = \frac{\partial H}{\partial E}.$$

2) Considere o sistema de equações de equilíbrio

$$\begin{cases} y - C(y - R) - I(r) - G = 0 \\ M - L(r, y) = 0 \\ R = \bar{R} + ty \end{cases}$$

Obtenha a expressão para $\frac{\partial y}{\partial \bar{R}}, \frac{\partial r}{\partial \bar{R}}$, fazendo as hipóteses usuais do modelo IS-LM.

3) Um sistema de equações de equilíbrio é dada por

$$\begin{cases} mB - L(r, y) = 0 \\ y - c(y - R) - I(M) - G = 0 \end{cases}$$

Obtenha as expressões para $\frac{\partial y}{\partial m}$ e $\frac{\partial r}{\partial m}$, fazendo as hipóteses usuais do modelo IS-LM.

4) Seja $f: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x, y, z) = z^3 - xy - y - z$. Dada a superfície de nível zero de f , ela é o gráfico de alguma função numa vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$?

5) Complete o exercício resolvido 3.

6) Seja $w(r)$ uma função crescente dos juros que mede o custo de bem estar para a sociedade de ter uma taxa de juros nominal $r > 0$, ao invés de uma taxa nominal de juros nula, $w(r)$ pode ser definida (Lucas, 1993) sob a forma

$$U[1 + w(r), m(r)] = U(1, m(0))$$

onde $U(c, m)$ mede a utilidade quando o consumo é c e total de encaixes reais $m(r)$ ($m'(r) < 0$); $m(0)$ representa a liquidez real quando a taxa de juros é nula. A fórmula acima define o custo de bem estar de uma taxa nominal de juros r com o consumo adicional ($m(r)$) com o qual se deve premiar a sociedade para torná-la indiferente entre uma taxa de juros nominal e uma taxa de juros nominal nula.

Utilize o teorema da função implícita e a expressão por Taylor em torno do ponto $r = 0$ para obter uma forma funcional para $w(r)$ em função de $m(0)$, r e j , onde $j = -m'(0)/m(0)$ é a semi-elasticidade juros da demanda por moeda (suponha $m'(0) < \infty$).

Referências Bibliográficas:

- Arrow, K. J. and A. C. Enthoven, "Quasi-Concave Programming", *Econometrica* 29 (1961) 779-800.
- Arrow, Kenneth J., e F. H. General competitive analysis. San Francisco, Holden-Day, Inc., 1971.
- Arrow, Kenneth J., e Kurz, Mordecai, Public investment: the rate of return and optimal fiscal policy. Baltimore and London, John Hopkins University Press, 1970.
- Avriel, M. "Nonlinear Programming: Analysis and Methods", Prentice Hall, 1976.
- Bartle, R. G., "The Elements of Real Analysis", New York, John Wiley and Sons, Inc., 1976.
- Birchenhall, Chris & Grout, "Mathematics for Modern Economics", Phillip Allan Publishers Limited, 1984.
- Brandão, Antônio Salazar P., "Análise Matemática : Um Texto para Economistas" IPEA/ INPES, 1982.
- Cass, David, e Shell, Karl. "The Hamiltonian approach to dynamic economics". New York, Academic Press, 1976.
- Chiang, Alpha C., "Fundamental Methods of Mathematical Economics", Mc Graw-Hill, 1974.
- Cysne, Rubens Penha "Notas de aula para o curso de Matemática I", EPGE, Mimeo, dezembro, 1991.
- Debreu, G., "Definite and Semidefinite Quadratic Forms", *Econometrica*, Abril de 1952.
- Debreu, G., "Theory of value and axiomatic analysis of economic equilibrium." Monograph, 17. Cowles Foundation, 1959.
- Dixit, A. K., "Optimization in Economic Theory", Oxford University Press, 1986.
- Fenchel, W., "Convex Cones, Sets and Functions", Office and Naval Research; September, 1953.
- Franklin, J. "Methods of Mathematical Economics", Springer Verlag, New York, 1980.
- Gandolfo, Giancarlo, "Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics", North Holland, 1971.
- Guidorizi, H.L., "Um Curso de Cálculo", Vols. 1,2,3,4, Editora Livros Técnicos e Científicos - São Paulo.
- Hadley, G., "Álgebra Linear", Forense-Universitária, 1979.
- Halmos, Paul R. "Measure Theory", D. Van Nostrand, Inc., 1950.
- Hoffman, K e Kunze, R. "Linear Algebra", Prentice Hall, Inc. 1961.
- Intrilligator, Michael D., "Mathematical Optimization and Economic Theory", Prentice Hall, 1972.
- Kamien, M e N Schwartz "Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economic and Management", North Holland, 1985.

- Leithold, L., “O Cálculo com Geometria Analítica”, Vol. 1 e 2, Segunda Edição, Harper & Row do Brasil.
- Lima, Elon L., “Curso de Análise”, Vol. 1 e 2, IMPA, CNPQ, 1976.
- Lima, Elon L., “Análise Real”, IMPA, CNPQ, Rio de Janeiro, 1989.
- Lucas, Robert Jr., “On The Welfare Cost Of Inflation”, The University of Chicago, Janeiro De 1993.
- Lucas, Robert J. e Stokey, N “Recursive Methods in Economic Dynamics”, Harvard University Press, 1989.
- Luenberger, David G. “Optimization by Vector Space Methods”.
- Murty, G. Katta, “Linear and Combinatorial Programming”, John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Rudin, W., “Principles of Analysis”, Terceira Edição, Mc Graw Hill.
- Sargent, Thomas, J. “Macroeconomic Theory”, Academic Press, Inc, 1987.
- Sidrauski, Miguel, “Inflation and Economic Growth”, JPE 75: 796-810
- Simonsen, M. H., “Dinâmica Macroeconômica”, Mc-Graw Hill do Brasil, 1983.
- Simonsen, M. H., “Teoria do Consumidor”, EPGE, Mimeo, 1988.
- Simonsen, M. H. E Cysne, Rubens Penha, “Macroeconomia”, Editora ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1989.
- Simonsen, M. H., “Análise Convexa no R^n ”, - EPGE, Mímeo, 1990.
- Simonsen, M. H., “Equações Diferenciais Ordinárias com Coeficiente Constantes”, Mímeo, EPGE, 1988.
- Takayama, A. “Mathematical Economics”, Hinsdale, Dryden-Press, 1974.
- Varian, Hal. R., “Microeconomic Analysis”, W. W. Norton Company Inc., 1984.

ENSAIOS ECONÔMICOS DA EPGE

200. A VISÃO TEÓRICA SOBRE MODELOS PREVIDENCIÁRIOS: O CASO BRASILEIRO - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira - Outubro de 1992 - 23 pág. (esgotado)
201. HIPERINFLAÇÃO: CÂMBIO, MOEDA E ÂNCORAS NOMINAIS - Fernando de Holanda Barbosa - Novembro de 1992 - 10 pág. (esgotado)
202. PREVIDÊNCIA SOCIAL: CIDADANIA E PROVISÃO - Clovis de Faro - Novembro de 1992 - 31 pág. (esgotado)
203. OS BANCOS ESTADUAIS E O DESCONTROLE FISCAL: ALGUNS ASPECTOS - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Armínio Fraga Neto - Novembro de 1992 - 24 pág. (esgotado)
204. TEORIAS ECONÔMICAS: A MEIA-VERDADE TEMPORÁRIA - Antonio Maria da Silveira - Dezembro de 1992 - 36 pág. (esgotado)
205. THE RICARDIAN VICE AND THE INDETERMINATION OF SENIOR - Antonio Maria da Silveira - Dezembro de 1992 - 35 pág. (esgotado)
206. HIPERINFLAÇÃO E A FORMA FUNCIONAL DA EQUAÇÃO DE DEMANDA DE MOEDA - Fernando de Holanda Barbosa - Janeiro de 1993 - 27 pág. (esgotado)
207. REFORMA FINANCEIRA - ASPECTOS GERAIS E ANÁLISE DO PROJETO DA LEI COMPLEMENTAR - Rubens Penha Cysne - fevereiro de 1993 - 37 pág. (esgotado)
208. ABUSO ECONÔMICO E O CASO DA LEI 8.002 - Luiz Guilherme Schymura de Oliveira e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - fevereiro de 1993 - 18 pág. (esgotado)
209. ELEMENTOS DE UMA ESTRATÉGIA PARA O DESENVOLVIMENTO DA AGRICULTURA BRASILEIRA - Antonio Salazar Pessoa Brandão e Eliseu Alves - Fevereiro de 1993 - 370pág. (esgotado)
210. PREVIDÊNCIA SOCIAL PÚBLICA: A EXPERIÊNCIA BRASILEIRA - Hélio Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso e Uriel de Magalhães - Março de 1993 - 35 pág - (esgotado) .
211. OS SISTEMAS PREVIDENCIÁRIOS E UMA PROPOSTA PARA A REFORMULACAO DO MODELO BRASILEIRO - Helio Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso e Uriel de Magalhães - Março de 1993 - 43 pág. - (esgotado)
212. THE INDETERMINATION OF SENIOR (OR THE INDETERMINATION OF WAGNER) AND SCHMOLLER AS A SOCIAL ECONOMIST - Antonio Maria da Silveira - Março de 1993 - 29 pág. (esgotado)
213. NASH EQUILIBRIUM UNDER KNIGHTIAN UNCERTAINTY: BREAKING DOWN BACKWARD INDUCTION (Extensively Revised Version) - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Abril de 1993 36 pág. (esgotado)
214. ON THE DIFFERENTIABILITY OF THE CONSUMER DEMAND FUNCTION - Paulo Klinger Monteiro, Mário Rui Páscoa e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Maio de 1993 - 19 pág. (esgotado)

215. DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO - Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Flávio Auler - Agosto de 1993 - 69 pág. (esgotado).
216. SISTEMA MONETÁRIO VERSÃO REVISADA - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 69 pág. (esgotado).
217. CAIXAS DE CONVERSÃO - Fernando Antônio Hadba - Agosto de 1993 - 28 pág.
218. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 50 pág. (esgotado).
219. IMPÔSTO INFLACIONÁRIO E TRANSFERÊNCIAS INFLACIONÁRIAS - Rubens Penha Cysne - Agosto de 1993 - 14 pág. (esgotado).
220. PREVISÕES DE M1 COM DADOS MENS AIS - Rubens Penha Cysne e João Victor Issler - Setembro de 1993 - 20 pág. (esgotado)
221. TOPOLOGIA E CÁLCULO NO R_n - Rubens Penha Cysne e Humberto Moreira - Setembro de 1993 - 106 pág. (esgotado)
222. EMPRÉSTIMOS DE MÉDIO E LONGO PRAZOS E INFLAÇÃO: A QUESTÃO DA INDEXAÇÃO - Clovis de Faro - Outubro de 1993 - 23 pág.
223. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR, vol. 1 - Nelson H. Barbosa, Fábio N.P. Freitas, Carlos F.L.R. Lopes, Marcos B. Monteiro, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) e Matias Vernengo - Outubro de 1993 - 249 pág (esgotado)
224. A SUBSTITUIÇÃO DE MOEDA NO BRASIL: A MOEDA INDEXADA - Fernando de Holanda Barbosa e Pedro Luiz Valls Pereira - Novembro de 1993 - 23 pág.
225. FINANCIAL INTEGRATION AND PUBLIC FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Novembro de 1993 - 29 pág
226. LAWS OF LARGE NUMBERS FOR NON-ADDITIVE PROBABILITIES - James Dow e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Dezembro de 1993 - 26 pág.
227. A ECONOMIA BRASILEIRA NO PERÍODO MILITAR - VERSÃO REVISADA - Rubens Penha Cysne - Janeiro de 1994 - 45 pág. (esgotado)
228. THE IMPACT OF PUBLIC CAPITAL AND PUBLIC INVESTMENT ON ECONOMIC GROWTH: AN EMPIRICAL INVESTIGATION - Pedro Cavalcanti Ferreira - Fevereiro de 1994 - 37 pág. (esgotado)
229. FROM THE BRAZILIAN PAY AS YOU GO PENSION SYSTEM TO CAPITALIZATION: BAILING OUT THE GOVERNMENT - José Luiz de Carvalho e Clóvis de Faro - Fevereiro de 1994 - 24 pág.
230. ESTUDOS SOBRE A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR - vol. II - Brena Paula Magno Fernandez, Maria Tereza Garcia Duarte, Sergio Grumbach, Antonio Maria da Silveira (Coordenador) - Fevereiro de 1994 - 51 pág.(esgotado)
231. ESTABILIZAÇÃO DE PREÇOS AGRÍCOLAS NO BRASIL: AVALIAÇÃO E PERSPECTIVAS - Clovis de Faro e José Luiz Carvalho - Março de 1994 - 33 pág. (esgotado)
232. ESTIMATING SECTORAL CYCLES USING COINTEGRATION AND COMMON FEATURES - Robert F. Engle e João Victor Issler - Março de 1994 - 55 pág. (esgotado)

233. COMMON CYCLES IN MACROECONOMIC AGGREGATES - João Victor Issler e Farshid Vahid - Abril de 1994 - 60 pág.
234. BANDAS DE CÂMBIO: TEORIA, EVIDÊNCIA EMPÍRICA E SUA POSSÍVEL APLICAÇÃO NO BRASIL - Aloisio Pessoa de Araújo e Cypriano Lopes Feijó Filho - Abril de 1994 - 98 pág. (esgotado)
235. O HEDGE DA DÍVIDA EXTERNA BRASILEIRA - Aloisio Pessoa de Araújo, Túlio Luz Barbosa, Amélia de Fátima F. Semblano e Maria Haydée Morales - Abril de 1994 - 109 pág. (esgotado)
236. TESTING THE EXTERNALITIES HYPOTHESIS OF ENDOGENOUS GROWTH USING COINTEGRATION - Pedro Cavalcanti Ferreira e João Victor Issler - Abril de 1994 - 37 pág. (esgotado)
237. THE BRAZILIAN SOCIAL SECURITY PROGRAM: DIAGNOSIS AND PROPOSAL FOR REFORM - Renato Fragelli; Uriel de Magalhães; Helio Portocarrero e Luiz Guilherme Schymura - Maio de 1994 - 32 pág.
238. REGIMES COMPLEMENTARES DE PREVIDÊNCIA - Hélio de Oliveira Portocarrero de Castro, Luiz Guilherme Schymura de Oliveira, Renato Fragelli Cardoso, Sérgio Ribeiro da Costa Werlang e Uriel de Magalhães - Maio de 1994 - 106 pág.
239. PUBLIC EXPENDITURES, TAXATION AND WELFARE MEASUREMENT - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994 - 36 pág.
240. A NOTE ON POLICY, THE COMPOSITION OF PUBLIC EXPENDITURES AND ECONOMIC GROWTH - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1994 - 40 pág. (esgotado)
241. INFLAÇÃO E O PLANO FHC - Rubens Penha Cysne - Maio de 1994 - 26 pág. (esgotado)
242. INFLATIONARY BIAS AND STATE OWNED FINANCIAL INSTITUTIONS - Walter Novaes Filho e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Junho de 1994 - 35 pág.
243. INTRODUÇÃO À INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA - Paulo Klinger Monteiro - Junho de 1994 - 38 pág. (esgotado)
244. PURE ECONOMIC THEORIES: THE TEMPORARY HALF-TRUTH - Antonio M. Silveira - Junho de 1994 - 23 pág. (esgotado)
245. WELFARE COSTS OF INFLATION - THE CASE FOR INTEREST-BEARING MONEY AND EMPIRICAL ESTIMATES FOR BRAZIL - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Julho de 1994 - 25 pág. (esgotado)
246. INFRAESTRUTURA PÚBLICA, PRODUTIVIDADE E CRESCIMENTO - Pedro Cavalcanti Ferreira - Setembro de 1994 - 25 pág.
247. MACROECONOMIC POLICY AND CREDIBILITY: A COMPARATIVE STUDY OF THE FACTORS AFFECTING BRAZILIAN AND ITALIAN INFLATION AFTER 1970 - Giuseppe Tullio e Marcio Ronci - Outubro de 1994 - 61 pág. (esgotado)
248. INFLATION AND DEBT INDEXATION: THE EQUIVALENCE OF TWO ALTERNATIVE SCHEMES FOR THE CASE OF PERIODIC PAYMENTS - Clovis de Faro - Outubro de 1994 - 18 pág.

249. CUSTOS DE BEM ESTAR DA INFLAÇÃO - O CASO COM MOEDA INDEXADA E ESTIMATIVAS EMPÍRICAS PARA O BRASIL - Mario Henrique Simonsen e Rubens Penha Cysne - Novembro de 1994 - 28 pág. (esgotado)
250. THE ECONOMIST MACHIAVELLI - Brena P. M. Fernandez e Antonio M. Silveira - Novembro de 1994 - 15 pág.
251. INFRAESTRUTURA NO BRASIL: ALGUNS FATOS ESTILIZADOS - Pedro Cavalcanti Ferreira - Dezembro de 1994 - 33 pág. (esgotado)
252. ENTREPRENEURIAL RISK AND LABOUR'S SHARE IN OUTPUT - Renato Fragelli Cardoso - Janeiro de 1995 - 22 pág.
253. TRADE OR INVESTMENT ? LOCATION DECISIONS UNDER REGIONAL INTEGRATION - Marco Antonio F.de H. Cavalcanti e Renato G. Flôres Jr. - Janeiro de 1995 - 35 pág.
254. O SISTEMA FINANCEIRO OFICIAL E A QUEDA DAS TRANFERÊNCIAS INFLACIONÁRIAS - Rubens Penha Cysne - Janeiro de 1995 - 32 pág. (esgotado)
255. CONVERGÊNCIA ENTRE A RENDA PER-CAPITA DOS ESTADOS BRASILEIROS - Roberto G. Ellery Jr. e Pedro Cavalcanti G. Ferreira - Janeiro 1995 - 42 pág.
256. A COMMENT ON "RATIONAL LEARNING LEAD TO NASH EQUILIBRIUM" BY PROFESSORS EHUD KALAI EHUD EHUR - Alvaro Sandroni e Sergio Ribeiro da Costa Werlang - Fevereiro de 1995 - 10 pág.
257. COMMON CYCLES IN MACROECONOMIC AGGREGATES (revised version) - João Victor Issler e Farshid Vahid - Fevereiro de 1995 - 57 pág.
258. GROWTH, INCREASING RETURNS, AND PUBLIC INFRASTRUCTURE: TIMES SERIES EVIDENCE (revised version) - Pedro Cavalcanti Ferreira e João Victor Issler - Março de 1995 - 39 pág.(esgotado)
259. POLÍTICA CAMBIAL E O SALDO EM CONTA CORRENTE DO BALANÇO DE PAGAMENTOS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 08 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 47 pág. (esgotado)
260. ASPECTOS MACROECONÔMICOS DA ENTRADA DE CAPITAIS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 08 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 48 pág. (esgotado)
261. DIFICULDADES DO SISTEMA BANCÁRIO COM AS RESTRIÇÕES ATUAIS E COMPULSÓRIOS ELEVADOS - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 09 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 47 pág. (esgotado)
262. POLÍTICA MONETÁRIA: A TRANSIÇÃO DO MODELO ATUAL PARA O MODELO CLÁSSICO - *Anais do Seminário realizado na Fundação Getulio Vargas no dia 09 de dezembro de 1994* - Rubens Penha Cysne (editor) - Março de 1995 - 54 pág. (esgotado)
263. CITY SIZES AND INDUSTRY CONCENTRATION - Afonso Arinos de Mello Franco Neto - Maio de 1995 - 38 pág. (esgotado)
264. WELFARE AND FISCAL POLICY WITH PUBLIC GOODS AND INFRASTRUCTURE (Revised Version) - Pedro Cavalcanti Ferreira - Maio de 1995 - 33 pág. (esgotado)

265. PROFIT SHARING WITH HETEROGENEOUS ENTREPRENEURIAL PROWESS - Renato Fragelli Cardoso - Julho de 1995 - 36 pág.
266. A DINÂMICA MONETÁRIA DA HIPERINFLAÇÃO: CAGAN REVISITADO - Fernando de Holanda Barbosa - Agosto de 1995 - 14 pág.
267. A SEDIÇÃO DA ESCOLHA PÚBLICA: VARIAÇÕES SOBRE O TEMA DE REVOLUÇÕES CIENTÍFICAS - Antonio Maria da Silveira - Agosto de 1995 - 24 pág.
268. A PERSPECTIVA DA ESCOLHA PÚBLICA E A TENDÊNCIA INSTITUCIONALISTA DE KNIGHT - Antonio Maria da Silveira - Setembro de 1995 - 28 pág.
269. ON LONG-RUN PRICE COMOVEMENTS BETWEEN PAINTINGS AND PRINTS - Renato Flôres - Setembro de 1995 - 29 pág. (esgotado)
270. CRESCIMENTO ECONÔMICO, RENDIMENTOS CRESCENTES E CONCORRÊNCIA MONOPOLISTA - Pedro Cavalcanti Ferreira e Roberto Ellery Junior - Outubro de 1995 - 32 pág. (esgotado)
271. POR UMA CIÊNCIA ECONÔMICA FILOSOFICAMENTE INFORMADA: A INDETERMINAÇÃO DE SENIOR - Antonio Maria da Silveira - Outubro de 1995 - 25 pág. (esgotado)
272. ESTIMATING THE TERM STRUCTURE OF VOLATILITY AND FIXED INCOME DERIVATIVE PRICING - Franklin de O. Gonçalves e João Victor Issler - Outubro de 1995 - 23 pág. (esgotado)
273. A MODEL TO ESTIMATE THE US TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES - Antonio Marcos Duarte Júnior e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Outubro de 1995 - 21 pág. (esgotado)
274. EDUCAÇÃO E INVESTIMENTOS EXTERNOS COMO DETERMINANTES DO CRESCIMENTO A LONGO PRAZO - Gustavo Gonzaga, João Victor Issler e Guilherme Cortella Marone - Novembro de 1995 - 34 pág. (esgotado)
275. DYNAMIC HEDONIC REGRESSIONS: COMPUTATION AND PROPERTIES - Renato Galvão Flôres Junior e Victor Ginsburgh - Janeiro de 1996 - 21 pág.
276. FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS OPÇÕES - Carlos Ivan Simonsen Leal - Fevereiro de 1996 - 38 pág. (esgotado)
277. DETERMINAÇÃO DO PREÇO DE UMA OPÇÃO E ARBITRAGEM - Carlos Ivan Simonsen Leal - Fevereiro 1996 - 55 pág.
278. SUSTAINED GROWTH, GOVERNMENT EXPENDITURE AND INFLATION - Pedro Cavalcanti Ferreira - Fevereiro 1996 - 38 pág.
279. REFLEXOS DO PLANO REAL SOBRE O SISTEMA BANCÁRIO BRASILEIRO - Rubens Penha Cysne e Sérgio Gustavo Silveira da Costa - Junho 1996 - 28 pág. (esgotado)
280. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS, CAPÍTULOS I E II: FUNÇÕES, ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Junho 1996 - 75 pág.
281. PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR PATROCINADA: VALE A PENA? - Clovis de Faro e Moacyr Fioravante - Junho de 1996 - 23 pág.

282. OLIGOPOLISTIC COMPETITION UNDER KNIGHTIAN UNCERTAINTY - Hugo Pedro Boff e Sérgio Ribeiro da Costa Werlang - Julho de 1996 - 37 pág.
283. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS - CAPÍTULO IV: OTIMIZAÇÃO ESTÁTICA - Rubens Penha Cysne e Humberto de Athayde Moreira - Julho de 1996 - 71 pág.
284. RIO DE JANEIRO E INTERMEDIÇÃO FINANCEIRA - Rubens Penha Cysne - Julho de 1996 - 30 pág.
285. CURSO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS CAPÍTULO III: CÁLCULO NO R^n - Rubens Penha Cysne e Humberto Athayde Moreira - Agosto de 1996 - 106 pág.

