Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE
Fundação Getúlio Vargas

Opções Reais em Decisões de Investimento em Exploração e Produção

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Finanças e Economia Empresarial

Aluno: André Avila Scartezini

Banca Examinadora:
Marco Antonio Guimarães Dias (Orientador; PUC-RIO/DEI)
Marco Bonomo (EPGE/FGV)
José Paulo Teixeira (PUC-RIO/DEI)

Rio de Janeiro
2006

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, afetadas pela minha ausência parcial durante os últimos três anos, colaboraram com seu desprendimento, tolerância e compreensão para a conclusão do meu curso de mestrado em finanças e economia empresarial.

Em especial, agradeço a Silvana Pedroni por seu apoio e companheirismo.

A Marco Antonio Guimarães Dias pela orientação.

A Marco Bonomo pela atenção despendida.

A Adauto Carneiro Pereira, pela oportunidade e incentivo.

A Adelson Antônio da Silva, por viabilizar a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores, minha admiração.

Dedico este trabalho à Petrobras.

Rio de Janeiro, julho de 2006.

Resumo

Este trabalho faz uma revisão dos principais conceitos que definem a Teoria de Opções Reais. Tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob incerteza aplicado a problemas de Exploração e Produção de petróleo (E&P). Foram priorizados modelos simples que podem ser facilmente implantados no dia a dia de uma empresa, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Os modelos discutidos são elaborados com Movimento Geométrico Browniano, que pode ser uma aproximação razoável para a modelagem de preços, a depender dos parâmetros considerados. Em particular, é apresentado um modelo de opção composta para exploração, que se revela mais apropriado por considerar o risco geológico e os estágios da opção com expiração diferenciada. A priorização de investimentos com auxílio de OR para uma carteira representativa de um *portfolio* de projetos de Produção também é testada, resultando numa maior relação VPL / Investimento da carteira selecionada.

Abstract

This work reviews the main concepts of real option theory. It intends to discuss the investment decision problem under uncertainty in petroleum Exploration and Production (E&P). Simple models including the classic Padock, Siegel and Smith (1998) were focused because they may be easily implemented in petroleum companies. All the models discussed consider the Geometric Brownian Motion (GBM) which may be a reasonable approach to modeling prices since appropriated parameters are considered. In particular, a compound option model to exploration and development is presented. It reveals to be more appropriated, mainly when considering both the geologic risk and stages with distinct expiration dates. The selection of projects with real options is also tested in a representative portfolio of development projects, which results in an increasing NPV-investment ratio of selected portfolio.

Sumário

Agradecimentos 3

Resumo 5

Abstract 6

Símbolos, Abreviaturas e Siglas 10

Lista de Figuras 12

Lista de Tabelas 13

1. Introdução 14

2. Conceitos Básicos de Opções Reais 18

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza 18

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money* 20

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias 30

2.4. Taxonomia de opções reais 33

2.4.1. Classificação gerencial 36

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração 38

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica 41

2.6. Introdução à valoração de opções reais 43

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) 44

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*) 48

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados 49

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo 50

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos 53

3.1. Processos estocásticos em finanças 53

3.1.1. Movimentos Brownianos 54

3.1.2. Reversão à média 58

3.1.3. Processos de saltos de Poisson 63

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*).....63

3.1.5. Reversão à média com saltos.....64

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras.....66

3.2. Lema de Ito.....67

3.3. Modelando o ativo subjacente.....70

3.3.1. Marketed Asset Disclaimer (MAD).....70

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente.....71

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos.....74

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB.....74

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica.....79

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração.....81

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB.....82

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993).....87

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas.....89

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção.....91

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P.....93

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo.....94

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*.....98

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P.....101

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão.101

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S).....104

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração.....109

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P).....119

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo 119

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S 125

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples ..131

6. Conclusões 139

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono 142

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica 144

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito 147

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson.....150

Referências Bibliográficas.....151

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo 156

Símbolos, Abreviaturas e Siglas

$a.a.$ = ao ano

B = Volume ou reserva de petróleo

bbl = unidade de volume de um barril, corresponde a cerca de 160,5 litros.

Cov = Operador de covariância

δ = Dividendo ou fluxo de caixa de um período t qualquer.

dz = Incremento de Wiener

$E\ (x)$ = Valor esperado.

FCD = Fluxo de Caixa Livre Descontado ou simplesmente Fluxo de Caixa Descontado.

FCL = Fluxo de Caixa Livre, não descontado.

I = Investimento.

IA = Investimento Atualizado.

μ = Taxa de desconto ajustada ao risco, dada, por exemplo, pelo CAPM.

MAB = Movimento Aritmético Browniano

MAD = *Market Asset Disclaimer*

MGB = Movimento Geométrico Browniano

MM = Abreviatura para milhão.

MRM = Movimento de Reversão à Média

$N(\mu,\sigma)$ = Distribuição normal de média μ e desvio padrão σ

OR = Opção Real ou Opções Reais

p = probabilidade neutra ao risco

q = probabilidade real ou objetiva

π_t = lucro (ou *payout*) no período t

π = prêmio de risco

r = Taxa de desconto não especificada.

$R = 1 + r$

r_f = Taxa de juros livre de risco (*risk free*).

$R_f = 1 + r_f$

$\rho_{AB} ou\ \rho(AB)$ = correlação de A com B

$\sigma_A\ ou\ \sigma(A)$ = desvio padrão de A

$\sigma_{AB} ou\ \sigma(AB)$ = covariância de A com B

$\sigma_A^2\ ou\ \sigma^2(A)$ = variância de A.

US$ = uma unidade de dólar americano.

VPL = Valor Presente Líquido.

$V(x)$ = Operador de variância

Lista de Figuras

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período. 22
Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período. 26
Figura 3 - Evolução do FCL 30
Figura 4 - Classificação das OR (adaptado de Trigeorgis, 1996). 35
Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003). 36
Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar. 46
Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. 55
Figura 8 – MGB. 57
Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999). 65
Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005). 95
Figura 11 – Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Dias, 2005). 103
Figura 12 – Opção de exploração com duas etapas. 113
Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1. 122
Figura 14 - Curva do valor crítico. 123
Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação dos Modelos. 125
Figura 16 – Valor dos dois estágios da opção de exploração IE-2. 128
Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2. 128
Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE. 129
Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE. 129
Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE. 130
Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2. 131
Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento. 137
Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado. 138

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor “verdadeiro” estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%. 86

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado. 133

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo. 135

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.135

1. Introdução

A valoração econômica para a tomada de decisão sobre projetos de investimento é afetada por incertezas econômicas, técnicas e pelas flexibilidades embutidas nos projetos. A incerteza econômica é exógena ao projeto afetando, por exemplo, a demanda, o preço do produto, os custos operacionais, a tributação, etc. A incerteza técnica é endógena ao projeto, relacionando-se a temas como tecnologia, capacidade de produção, desempenho, etc. As flexibilidades embutidas nos projetos por sua vez, criam a faculdade gerencial sobre o empreendimento, permitindo escolhas como o momento adequado (*timing)* para a decisão sobre o investimento, a alternativa de produção, a expansão, a parada temporária, a mudança de escopo, o abandono, o desinvestimento, etc. São escolhas disponíveis ao decisor na gerência de seus projetos e ativos reais, sendo por isso denominadas de opções reais (OR).

O termo opção real foi sugerido por Myers (1977) ao destacar que oportunidades de crescimento de uma empresa podiam ser vistas como opções dependentes de futuros investimentos discricionários da firma[1]. A abordagem de valoração econômica que contempla esses aspectos é denominada de teoria das opções reais e recentemente de análise de investimento sob incerteza.

A teoria de opções reais pode ser vista como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real (VPL) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência e quantidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos em toda a dissertação.

Assim, uma opção real é um direito, por isso uma opção e não uma obrigação, de realizar uma ação sobre um ativo real ou projeto, a um custo chamado preço de exercício, por um período de tempo pré-determinado, denominado de vida da opção. O preço de exercício é o custo do investimento, pois ocorre na expectativa

[1] O trabalho de Myers denominado “Determinants of Corporate Borrowing” tem o mérito de destacar que a visão de investimentos como opções poderia ter como a mais importante contribuição, a valoração de ativos reais (p.170). E estava certo.

de uma recompensa futura, seja pela geração de lucro ou pela redução de uma perda corrente no fluxo de caixa.

A maioria das decisões de investimentos possui características em comum, mas que ocorrem em diferentes intensidades. Destacam-se: O fato do investimento ser totalmente ou parcialmente irreversível; a incerteza sobre o retorno do investimento e a flexibilidade de se adiar a decisão em troca de se obter mais informações.

A teoria ortodoxa de decisão de investimento através do VPL (Valor Presente Líquido) não contempla as implicações decorrentes da interação entre essas três características que afetam a decisão ótima do investidor. O VPL não captura as flexibilidades disponíveis ao tomador de decisão, e por isso sistematicamente subestima o valor dos projetos (Copeland e Antikarov, 2001**,** p. 4-5). Além disso, o VPL ignora a possibilidade de perda, isso significa que o decisor que o utiliza ou é indiferente a este risco (neutro ao risco) ou realmente crê que pode se desfazer do investimento pelo seu valor original atualizado. A avaliação por opções reais se propõe a corrigir estas distorções.

Dixit e Pindick (1993, p. 6-7) discutem sobre a sub-avaliação implícita no VPL. Argumentam que o VPL assume que o investimento é reversível (de alguma forma poderia ser desfeito e recuperado) e representa uma decisão do tipo agora ou nunca. Embora muitas decisões de investimento tenham essas características, a maioria é pelo menos parcialmente irreversível e pode ser postergada, o que afeta profundamente a decisão de investir. Quando a firma exerce sua opção de investir, elimina de forma irreversível a possibilidade de esperar por novas informações que afetam o resultado do investimento e o momento ótimo para o investimento.

O valor da flexibilidade perdida é um custo de oportunidade que deve ser incluído no custo do investimento. Esse custo de oportunidade é muito sensível à incerteza associada ao futuro valor do projeto. Talvez isso ajude a explicar por que a teoria neoclássica de investimento falha empiricamente ao descrever o comportamento de investimento da firma. Seja por superestimar o efeito da taxa de juros e da política tributária sobre o nível de investimento, seja pelas empresas somente aprovarem seus projetos com VPL positivo descontando-os a taxas muito superiores ao seu custo de capital (*hurdle rates*) ou em cenários de *stress.* Essa

mesma incerteza também explica por que as firmas permanecem em seus negócios por longos períodos de prejuízo.

A faculdade gerencial de adaptar as decisões futuras às condições de mercado e às ações dos competidores aumenta o valor das oportunidades de investimento da firma, tanto por aproveitar o potencial de melhora dos projetos quanto por limitar perdas em relação às expectativas inicias de um gerenciamento passivo. Trigeorgis (1996, p.4) argumenta que a assimetria resultante da adaptabilidade gerencial revela um critério de investimento expandido ou estratégico com dois componentes: o tradicional VPL (estático, passivo) e o valor criado pela flexibilidade e interações estratégicas.

A abordagem por opções para o problema de valoração tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e das interações estratégicas. Esse valor manifesta-se tipicamente através das opções reais inerentes às oportunidades de investimento de capital, tendo como ativo subjacente o valor esperado descontado dos fluxos de caixa operacionais (Trigeorgis, 1996, p.4).

Assim uma oportunidade de investimento equivale a uma opção de compra financeira (*call*). De forma semelhante às financeiras, o valor das opções reais depende de pelo menos seis importantes variáveis: O valor do ativo de risco subjacente (projeto ou ativo real), o desvio padrão e os dividendos que podem ser obtidos através deste, o preço de exercício (valor do investimento ou desinvestimento), o tempo de expiração da opção e a taxa livre de risco (sob a hipótese de não arbitragem).

Essa dissertação tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob o ponto de vista teórico da ótica de opções reais, aplicados a problemas de Exploração e Produção de petróleo. Foi priorizado o foco em modelos simples que possam ser amplamente utilizados e facilmente implantados no dia a dia de uma empresa de petróleo. Para isso, o trabalho foi dividido em cinco partes. No Capítulo 2 são revistos os principais conceitos de opções reais em tempo discreto, incluindo o valor da redução da incerteza, a nova regra de decisao, taxonomia, valoração e a transição para tempo continuo. No Capítulo 3 amplia-se a discussão sobre opções reais para tempo e estados contínuos, incluindo processos estocásticos, Lema de Ito, modelagem do ativo subjacente, equações diferencias de

valoração, soluções analíticas, não analíticas e a aproximação de Bjerksund e Stensland (1993), além da simetria *call put*. No Capítulo 4 são discutidos dois modelos de valoração de opções simples de investimento em Exploração e Produção de petróleo, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Também é desenvolvido um modelo de opção composta, denominado de Modelo de Exploração. Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se alguns estudos de caso onde os modelos discutidos no capítulo anterior são comparados, além da discussão de priorização de investimentos com opções reais a partir de uma sugestão de Dias (1996). No Capítulo 6 são revistas e discutidas as conclusões.

A abordagem dessa dissertação é heurística. Eventuais erros são de responsabilidade do autor. Referências sobre todos os assuntos abordados são citadas ao longo de todo o texto.

Dias (2005, p.26-43) apresenta um bom resumo sobre a evolução bibliográfica do conhecimento na área de opções reais desde seus precursores na década de 70, passando pelos principais artigos das décadas de 80 e 90 bem como importantes livros textos e coletâneas de artigos publicados até a atualidade. Em seguida passa em revista ao crescente uso de opções reais em empresas e outras instituições, discutindo inclusive procedimentos para sua difusão e consolidação como ferramenta de trabalho. Vários exemplos verídicos disponíveis na literatura são apresentados, abordando tanto o uso de opções reais internamente às empresas como externamente nas negociações entre companhias e, por exemplo, com órgãos reguladores.

2. Conceitos Básicos de Opções Reais

A teoria de opções reais pode ser visto como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real dado pelo VPL (função objetivo) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência, quantidade e qualidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos neste capítulo.

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza

De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.8-9), investimentos são custos afundados quando são específicos da firma ou da indústria, como por exemplo, campanhas de publicidade ou equipamentos industriais especializados. No último caso, embora possa haver um valor de revenda, assim como ocorre com os equipamentos não específicos (veículos, computadores, etc.), os investimentos estão sujeitos à depreciação e outras forças de mercado que os tornam pelo menos parcialmente irreversíveis. De forma similar, ativos que possuem a opção de serem abandonados ou suspensos, incorrem em custos e ou investimentos irreversíveis caso essas opções sejam executadas.

Considerando a irreversibilidade dos investimentos e a incerteza relacionada aos fluxos de caixa futuros, a flexibilidade de esperar pela redução da incerteza pode gerar valor. A proposta de valoração pela teoria de opções reais é justamente capturar e quantificar este valor**.** Uma firma que tem uma oportunidade de gerar fluxos de caixa positivos ou, ao contrário abandonar fluxos de caixa negativos operantes, deve comparar os custos destas decisões com os possíveis benefícios de se esperar pela revelação de novas informações que reduzem ou eliminam as incertezas existentes no presente. Esse é o valor da espera pela redução da incerteza, permitindo a escolha ótima do decisor.

Copeland e Antikarov (2001**,** p.73-74) chamam a atenção para o fato de que o VPL poderia representar uma opção real particular, aquela que assume a inexistência de flexibilidade na tomada de decisão. Uma expressão usual para o VPL de um projeto em tempo discreto é dada por:

$$VPL = -I + \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$$

Na identidade acima I é o investimento, FCL é o fluxo de caixa livre e r a taxa de desconto. Nota-se que apenas um dos muitos caminhos possíveis ao FCL entre o início e o fim de um projeto é explicitamente considerado. A abordagem clássica do VPL usa somente a informação disponível no presente ignorando qualquer incerteza existente, recomendando o investimento caso seu valor seja positivo:

Regra de decisão do VPL: $Máx_{t=0}[0, E_0(V_T) - I]$ onde $E_0(V_T) = \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$.

O VPL ignora a incerteza, portanto desconsidera a possibilidade de perda em qualquer outro cenário que não seja o seu mundo determinístico. Isso significa que decidir com o VPL é ser indiferente ao risco (neutro ao risco), ou realmente crer que se pode desfazer do investimento pelo seu valor atualizado. A primeira alternativa seria considerar diferentes cenários para o projeto, cada qual com probabilidade P_j e valor presente $V_{T,j}$, sendo o valor esperado do projeto dado por: $E_0(V_T) = \sum_j P_j . V_{T,j}$. Essa técnica equivale a considerar uma árvore de decisão com a mesma regra do VPL, ou seja, que a decisão de investir é do tipo agora ou nunca e é feita com base em um valor esperado. Isso significa pressupor que o decisor ainda é neutro ao risco, pois embora possa reconhecer e quantificar a incerteza de um projeto através de cenários, ele se mostra indiferente ou passivo ao decidir com o valor monetário esperado (VME). Somente um novo paradigma pode levar o decisor à uma escolha que contemple o risco em suas decisões: Esperar pela redução da incerteza até que esta se torne equivalente à decisão imediata.

A abordagem por opções reais considera que a decisão é tomada quando a informação sobre o estado da natureza é revelada. Entre todas as alternativas mutuamente excludentes, escolhe-se a melhor. Assim, por exemplo, o valor do exercício (*payoff*) de uma de uma opção de investimento (*call* européia) é dado pelo valor esperado dos máximos (e não o máximo entre os valores esperados):

Regra de decisão de uma *call* européia: $E_0[Máx_{t=T}(0, V_T - I)]$

O valor das três abordagens na presença da flexibilidade de esperar somente será o mesmo se $E_0(V_T) = V_T$. Ou seja, na ausência de incerteza, o valor esperado em t_0 do valor futuro é igual ao valor futuro atualizado. De outra forma, decidir antecipadamente com o VPL equivale a supor que o investimento é reversível, ou seja, na medida em que um cenário desfavorável se concretize, o decisor sairia do negócio recuperando seu capital, o que não é real (Dixit e Pindick, 1994, p.28).

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money*

Como visto, a escolha ótima do decisor consiste em optar entre a decisão imediata ou esperar pela redução da incerteza, quando possível. Se nesta análise o decisor conclui que agir imediatamente é mais valioso do que esperar, diz-se que a opção real está madura ou *deep in the money*, e ele "mata" a opção ao agir. Se há maior valor na espera, o decisor deve adiar a decisão e manter a opção real ativa ou "viva".

Para se entender em que condições (regra de decisão) exercer ou manter uma opção real é mais vantajoso para a firma, são apresentados dois exemplos de decisão simples em tempo discreto: Em que condição a firma deve investir em um novo projeto e; Em que condição não deve abandonar um ativo real que apresenta VPL negativo.

Os exemplos são apresentados com a abordagem de valor esperado em árvores binomiais com nós de decisão e nós aleatórios. A utilização do valor esperado requer taxas de descontos adequadas ao ativo que está sendo descontado. Então para descontar o ativo subjacente usa-se uma taxa e ao descontar a opção outra. Além disso, a taxa de desconto de cada ativo deve variar ao longo da árvore com a incerteza ou estados da natureza. Este é um problema que não ocorre nos exemplos, pois são considerados apenas dois períodos e dois estados da natureza. Além disso, a taxa de desconto para a opção e para o ativo subjacente é considerada a mesma, mas essa premissa só é correta no mundo neutro ao risco, discutido na Seção 2.6.1. Portanto a taxa de desconto r utilizada nos dois exemplos é a rigor a taxa livre de risco (*risk free* - r_f) e probabilidade real q

é a rigor a probabilidade neutra ao risco p . Como os exemplos visam explorar as regras de decisão e o mundo neutro ao risco é discutido somente na Seção 2.6.1, preservou-se a notação r e q.

Exemplo 1: Opção de investimento com a flexibilidade de esperar por um período. Considere um projeto de investimento postergável por 1 período, cujo investimento I gera um fluxo de caixa V. No primeiro período t_0, o decisor pode escolher entre investir imediatamente e gerar um *payoff* positivo ou postergar a decisão para o segundo período (ver árvore de decisão - Figura 1). Se o decisor não tem a flexibilidade de adiar a decisão de investimento, ele encontra-se no ramo inferior da árvore e sua decisão de investir é com base na regra tradicional do VPL. Mas se o decisor dispõe da flexibilidade esperar e decidir sobre o investimento em t_1, ele pode escolher adiar a decisão para o segundo período (ramo superior da árvore). Em t_1 pode então observar o estado da natureza que se revela com as novas estimativas de Fluxo de Caixa Livre Descontado (FCD) do projeto. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*), o FCD do projeto apresenta valor V_U e caso contrário, V_D (estado da natureza pior ou *down*). Note que os estados da natureza V_U e V_D são os mesmos em qualquer ramo da árvore e que $V_U > V_D$. Após esperar, qualquer que seja o estado da natureza, a decisão de investir também é feita com base na regra do VPL. Demonstra-se em seguida em que condições o decisor racional que maximiza a riqueza da firma escolhe esperar por t_1 ou investir imediatamente.

Quando o decisor não dispõe da flexibilidade de esperar, sua decisão é do tipo investir agora ou nunca (ramo inferior). Considerando as probabilidades (reais) q e 1-q dos estados da natureza *up* e *down*, o VPL do projeto (V_0) em t_0 é dado pelo valor esperado do fluxo de caixa de t_1 ($E_0(V_1)$) descontado a uma taxa r apropriada, subtraído do investimento e somado do fluxo de caixa livre δ (dividendo) em t_0:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \text{, onde } E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} - I + \delta \qquad (1)$$

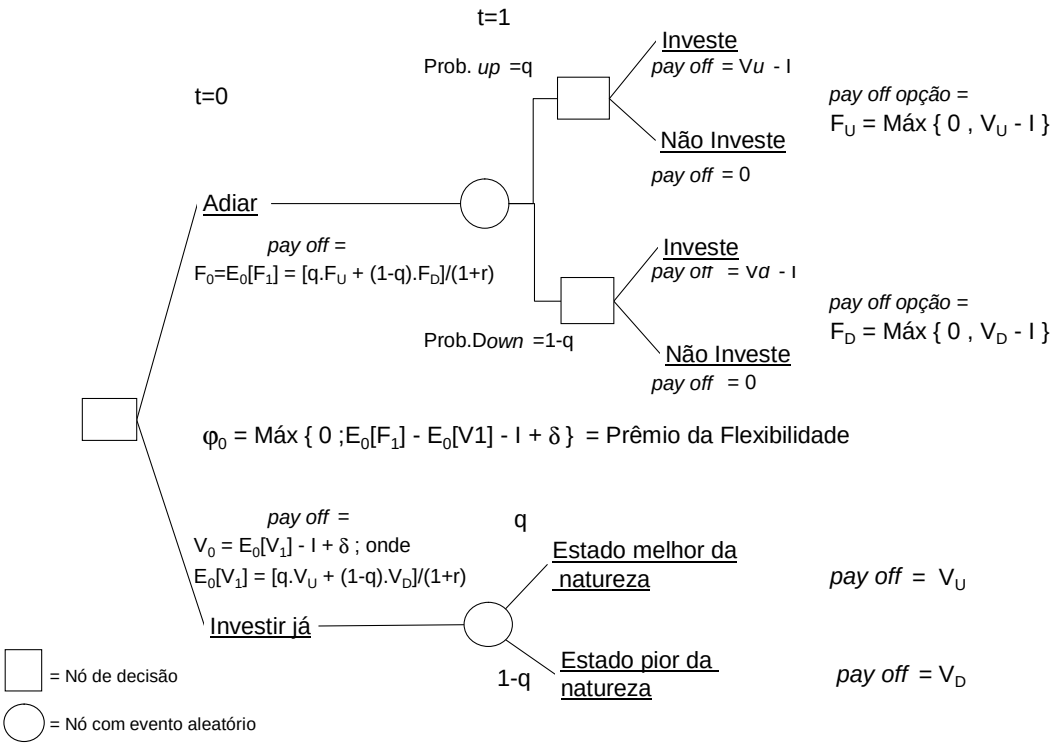

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período.

A regra de decisão será investir se $V_0 > 0$ ou desistir do projeto caso contrário. Mas com a flexibilidade de esperar, o decisor pode postergar a decisão e exercer a opção de investir em t_1 caso o projeto tenha *payoff* positivo ($V_1 - I > 0$). Portanto os *payoffs* da opção (F_1) nos dois estados da natureza possíveis em t_1 são:

$$F_U = Máx[0, V_U - I] \qquad \text{e} \qquad F_D = Máx[0, V_D - I]$$

A regra de decisão é investir se $F_1 > 0$. Nessa condição, diz-se que a opção está *in the money* e caso contrário, *out of the money*. O valor esperado de F_1 em t_0 é:

$$F_0 = E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} \qquad (2)$$

A decisão entre investir imediatamente ou esperar para decidir em t_1 é feita coma a escolha da alternativa de maior valor entre (1) e (2). Portanto, adiar a decisão de investir é mais valioso se:

$$(2) > (1) \Rightarrow (2) - (1) > 0 \Rightarrow E_0(F_1) - V_0 > 0$$

E o valor ou prêmio da flexibilidade de postergar (φ_0) a decisão de t_0 para t_1 será:

$$\varphi_0 = Máx\{0; E_0(F_1) - V_0\} = Máx\{0; \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} - \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + I - \delta\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = Máx\{0; \frac{q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)}{1+r}\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{(1+r)}.Máx\{0; q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)\}$$

A partir dessa equação pode-se explorar em que condição qualquer uma das variáveis torna a flexibilidade de postergar valiosa:

$$\varphi_0 > 0 \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) > 0$$

Pode-se também definir em que condições o decisor torna-se indiferente entre investir em t_0 ou esperar para decidir em t_1:

$$(2) = (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) = 0$$

Ou pelo contrário, definir em que condições investir imediatamente é mais vantajoso:

$$(2) < (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) < 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \quad (3)$$

Quando a relação (3) se verifica, diz-se que a opção está *deep in the money*, ou seja, o VPL (V_0) é de tal forma positivo que não vale a pena esperar. O custo de sacrificar o lucro imediato δ é maior do que o benefício esperar e tomar a decisão ótima após observar o estado da natureza em t_1.

Considerando q, I, r e δ dados, a inequação (3) será verdadeira a depender das relações entre F_U e F_D. Existem 3 situações a considerar: $F_U = F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D > 0$:

i) Supondo que: $F_U = F_D = 0 \Leftrightarrow V_D < V_U < I \Rightarrow E_0(V_1) < I \Rightarrow I - E_0(V_1) > 0$. Ou seja, a flexibilidade de esperar não tem valor, pois o decisor não investiria em t_1 qualquer que fosse o cenário revelado. Então, qual é a condição necessária para investir em t_0? Em (3):

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \Rightarrow q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} > (I-\delta) \Rightarrow \frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} - I + \delta > 0 \Rightarrow E_0(V_1) - I + \delta > 0 \Rightarrow$$

a) $V_0 > 0$ ou b) $\delta > I - E_0(V_1) > 0$

Então se a flexibilidade de esperar não tem valor ($F_U = F_D = 0$), a opção de investir reduz-se à regra tradicional do VPL ($V_0 > 0$) e o dividendo δ deve ser suficientemente positivo: $\delta > I - E_0(V_1) > 0$.

ii) Supondo que : $F_U = V_U - I > 0$ e que $F_D = 0$ ($V_D - I < 0 \Rightarrow I - V_D > 0$). Ou seja, em t_1 a opção está *in the money* no estado melhor da natureza e *out of the money* no estado pior da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \Rightarrow q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) + q.F_U \Rightarrow \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} - I + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.V_U + (1-q).V_D - I.(1+r)}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U - I)}{1+r} + \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > 0$$

$$\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$$

Ou seja, em t_0 a opção está *deep in the money* se a expressão $\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$ for verdadeira. Note que apesar de $F_U > 0$, em última

instância, investir ou não imediatamente não depende do que ocorrer no estado *up* da natureza.

iii) Supondo que $F_U > 0$ e $F_D > 0 \Leftrightarrow F_U = V_U - I$ e $F_D = V_D - I \Rightarrow V_U > I$ e $V_D > I$. Ou seja, em t_1 a opção de investimento está *in the money* qualquer que seja o estado da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I - \delta).(1+r) > 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - V_U + I) + (1-q).(V_D - V_D + I) > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow q.I + (1-q).I > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{I}{(1+r)} > I - \delta \Rightarrow \ \delta > I - \frac{I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Se a opção está *in the money* em qualquer cenário de t_1, estar *deep in the money* em t_0 implica que o dividendo seja maior que o valor presente do benefício da capitalização do investimento à taxa r, que é o custo de oportunidade de não investir imediatamente: $\delta > \frac{I.r}{(1+r)}$. Note que essa condição está inseirda na solução do caso ii).

Portanto, pode-se concluir que na opção de investimento, o VPL positivo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Em qualquer situação, o investimento imediato requer um prêmio maior do que o custo de oportunidade de não investir (esperar), exceto que a flexibilidade de esperar não tenha valor.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43) relata o resultado de *back-testing* (dados a partir de 1970) para uma companhia de petróleo que, hipoteticamente, na aprovação dos investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo, utilizasse opções reais no lugar do tradicional VPL. O teste considerou o cálculo do VPL *ex-post* de dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um Movimento Geométrico Browniano (Seção 3.1.1). Os resultados foram animadores: o VPL *ex-post* dos projetos com VPL >>0 apresentaram-se 16,6% superiores com o critério de OR e os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para um significativamente positivo na regra de OR. Esse resultado decorre da abordagem por OR exigir um prêmio adicional ao

tradicional VPL para o investimento imediato, que é o custo de oportunidade da flexibilidade de esperar. Com isso a probabilidade de um VPL negativo *ex post* considerando OR torna-se menor em relação ao tradicional VPL. É o benefício de se postergar a decisão evitando o investimento caso o estado da natureza revelado não seja favorável.

Exemplo 2: Opção de abandono com a flexibilidade de esperar por um período. Na literatura a opção de abandono é comumente tratada como o direito de vender um ativo por um valor terminal, cabendo ao decisor escolher o momento ótimo em um dado período. Nestes casos o valor da opção é positivo. Neste trabalho interessa especificamente opções de abando em que o decisor tem um custo ao abandonar o ativo, portanto a opção não tem necessariamente um valor positivo. Considere um ativo real operante que apresente um resultado operacional (δ) no primeiro período (t_0) e valor esperado do FCD futuro $E_0(V_1)$. O decisor pode então escolher entre abandonar o ativo imediatamente a um custo ou investimento ($I < 0$), ou postergar a decisão para o segundo período (t_1) - Figura 2, ramos superior e inferior da árvore de decisão respectivamente.

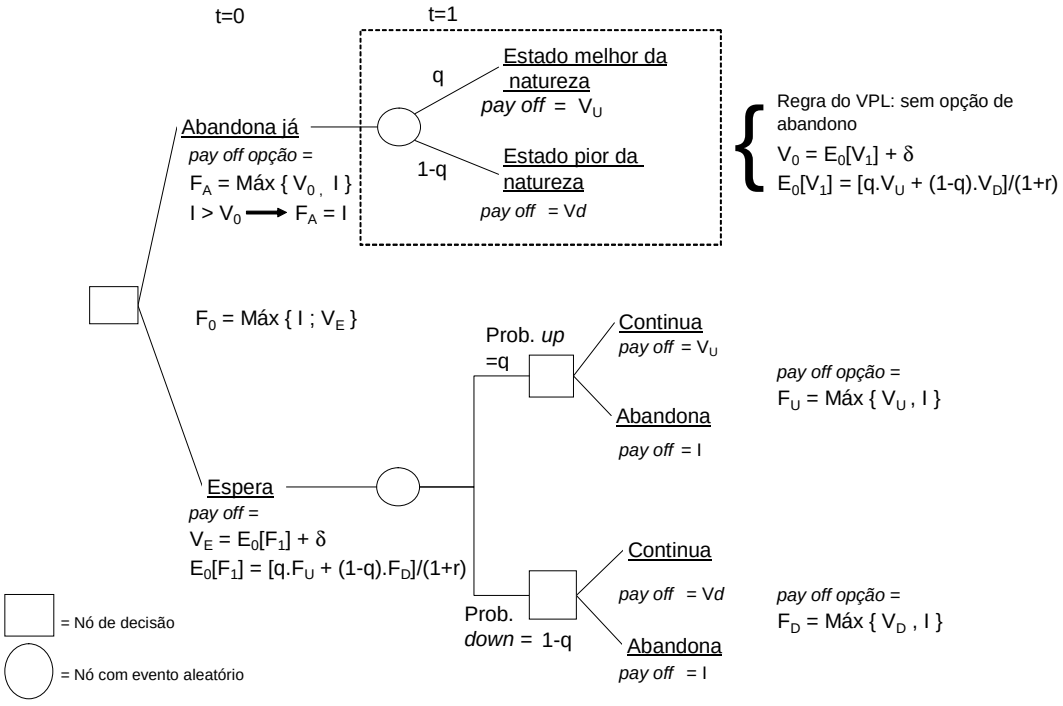

Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período.

O decisor que não tem a opção de abandono observa passivamente o valor de seu ativo real dado pela regra tradicional do VPL, representada dentro do quadro tracejado no ramo superior da árvore. Nesta situação, o VPL (V_0) do ativo é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) + \delta \qquad \text{e} \qquad E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)}$$

Se o decisor tem a opção de abandonar o ativo no primeiro período (o que corresponde a todo o ramo superior da árvore), o payoff F_A desta será:

$$F_A = Máx\{V_0, I\} \Rightarrow F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\}$$

Considerando I como o preço de exercício (constante) e V_0 como o preço do ativo subjacente (variável), observa-se que a opção de abandono equivale a uma opção de venda (*put*) financeira.

O decisor racional que maximiza o lucro da firma escolhe "abandonar já" se $I > V_0$:

$$I > V_0 \Rightarrow I - V_0 > 0 \Rightarrow \ Máx\{0, I - V_0\} = I - V_0 \Leftrightarrow$$

$$F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\} = V_0 + I - V_0 \Rightarrow \boxed{F_A = I}$$

Mas também é verdade que:

$$I > V_0 \therefore I < 0 \Rightarrow \boxed{V_0 < I < 0}$$

Esses dois resultados significam que o decisor só paga para abandonar um ativo se seu VPL for negativo e menor que o custo de abandono.

A flexibilidade de adiar a decisão para o segundo período t_1 é representada pelo ramo inferior da árvore da Figura 2. O decisor tem então a possibilidade de observar o estado da natureza que se revelará com novas estimativas do FCD para o ativo. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*) o FCD do ativo apresenta valor V_U e caso contrário V_D (estado da natureza pior ou *down*) – ou seja: $V_U > V_D$. Após esperar, os *payoffs* da opção de abandono nos dois estados da natureza em t_1 serão:

$$F_U = Máx\{V_U, I\} \text{ e } F_D = Máx\{V_D, I\} \Rightarrow$$

$$F_U = V_U + Máx\{0, I - V_U\} \text{ e } F_D = V_D + Máx\{0, I - V_D\}$$

O valor do ativo com a flexibilidade de abandonar em t_1 será:

$$V_E = E_0(F_1) + \delta \text{ onde } E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}$$

Uma firma que tem a oportunidade de abandonar um fluxo de caixa negativo imediatamente ($F_A = I$) deve comparar o custo I desta decisão com o valor do ativo com o benefício de esperar (V_E). O *payoff* da opção de abandono nos dois períodos (F_0) será:

$$F_0 = Máx\{V_E, I\} \Rightarrow F_0 = V_E + Máx\{0, I - V_E\}$$

Esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow Máx\{0, I - V_E\} = 0 \Rightarrow F_0 = V_E$$

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Este resultado define em que condição a opção de abandono não está *deep in the money* em t_0. Ou seja, interessa aqui definir em que circunstâncias vale mais ao decisor operar um FCD incerto do que pagar para abandoná-lo (inverter a desigualdade em (4) define a situação oposta: a opção de abandono imediato estaria *deep in the money*).

Se na inequação (4) q, r e δ são conhecidos, a escolha por esperar passa a depender das relações entre V_U, V_D e I, já que $F_U = Máx\{V_U, I\}$ e $F_D = Máx\{V_D, I\}$. Por construção $V_U > V_D$, então novamente há 3 situações a se examinar: $I > V_U > V_D$; $V_U > I > V_D$ e $V_U > V_D > I$:

i) $I > V_U > V_D$. Nesta situação, abandona-se o ativo em qualquer cenário de t_1 (e de t_0, pois $V_0 < 0$). Então, em que condições ainda sim é melhor esperar e abandonar em t_1 do que em t_0? Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.I + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{I}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow$$

$$\delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Isso significa que se o fluxo de caixa δ em t_0 for maior do que o valor presente da capitalização do investimento de abandono à taxa r, ainda sim vale a pena adiar o abandono.

ii) $V_U > I > V_D$. O ativo é mantido operante no cenário *up* e abandonado no cenário *down*. Então esperar por t_1 será vantajoso se:

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow q.V_U > (I-\delta).(1+r) - (1-q).I \Rightarrow$$

$$q.V_U > I.(1+r-1+q) - \delta.(1+r) \Rightarrow V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

Este resultado demonstra que se no cenário *up* o ativo não é abandonado, então para adiar o abandono de t_0 para t_1 é necessário que $V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q}$.

iii) $V_U > V_D > I$. O ativo é mantido operante nos cenários *up* e *down*, ou seja, não é abandonado em t_1. Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow V_E = V_0 > I$$

Esse resultado mostra que se esperar é mais valioso do que abandonar imediatamente ($V_E > I$), e que se em t_1 o ativo nunca é abandonado, então a opção de abandono é igual ao VPL em t_0 e o prêmio da flexibilidade de esperar é zero:

$$V_0 > I \Leftrightarrow F_A = Máx(V_0, I) = V_0 .$$

Portanto, pode-se concluir que na presença de uma opção real de abandono cujo preço de exercício seja um desembolso $I < 0$, o VPL negativo é uma condição necessária para a decisão de desinvestir em t_0, mas não suficiente. É preciso que o abandono imediato valha mais do que a flexibilidade de esperar, ou seja, a opção de abandono deve estar *deep in the money.* Esse termo pode parecer desconfortável já

que os FCD são negativos no exemplo. Mas considerando o jargão de opções, ele é adequado.

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias

Na Seção anterior discutiu-se em que termos uma opção de investimento (*call*) e outra de abandono (*put*) deveriam ou não ser exercidas imediatamente. O investimento necessário – um valor fixo (em geral) - corresponde ao preço de exercício da opção e o valor do projeto ou ativo real – variável - corresponde ao preço do ativo subjacente. O valor crítico ou gatilho é o preço do ativo subjacente que leva o decisor a optar pelo imediato investimento no projeto ou no imediato abandono do ativo. Ou seja, o gatilho é o preço que torna a opção *deep in the money*.

Para tornar o conceito mais claro, reconsidere Exemplo 1 da Seção anterior, mas suponha que o número de períodos é um valor N muito grande ($N \to \infty$). Entretanto, a incerteza quanto ao valor do projeto é resolvida de forma equivalente, ou seja, no segundo período. Sendo δ o FCL no primeiro período t_0, este pode evoluir em t_1 para um valor melhor $U.\delta$ caso ocorra o estado da natureza *up* ou para um valor pior $D.\delta$ caso o ocorra o estado *down*. Em qualquer cenário, permanece constante a partir de então (Figura 3).

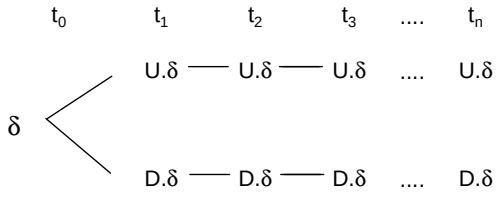

Figura 3 - Evolução do FCL a partir de t_0.

Pode-se escrever então que, se $N \to \infty$, os valores de V_U e V_D em t_1 serão:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{U.\delta}{r} + U.\delta = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \therefore V_D = \sum_{t=1}^{N} \frac{D.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{D.\delta}{r} + D.\delta = \frac{(1+r).D.\delta}{r}$$

Então o valor esperado de V_1 em t_0 será:

$$E_0(V_1) = \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta].(1+r)}{(1+r).r} \Rightarrow E_0(V_1) = \frac{q.U.\delta + (1-q).D.\delta}{r}$$

O VPL do projeto sem a flexibilidade de esperar é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \Rightarrow\ V_0 = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta]}{r} - I + \delta = \frac{q.\delta.(U-D) + D.\delta}{r} - I + \delta \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{\delta}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I \quad (6)$$

Se o decisor escolhe esperar e decidir sobre o projeto em t_1, a opção de investimento é dada por (2):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}, \text{ onde:}$$

$$F_U = Máx[V_U - I, 0] = Máx[\frac{U.\delta}{r}.(1+r) - I, 0] \therefore\ F_D = Máx[V_D - I, 0] = Máx[\frac{D.\delta}{r}.(1+r) - I, 0]$$

Suponha que $F_U > 0$ e $F_D = 0$ por simplicidade (se $F_U = F_D = 0$ não há opção em t_1 e se $F_U > F_D > 0$ a opção seria exercida em qualquer estado em t_1):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).0]}{(1+r)} = \frac{q.[(U.\delta / r).(1+r) - I]}{(1+r)} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{q.U.\delta}{r} - \frac{q.I}{1+r} \quad (7)$$

Então o gatilho será o FCL δ^* que torna a opção de investimento imediato mais valiosa do que a flexibilidade de adiar e decidir em t_1. No limite, o investimento imediato deve ser pelo menos tão valiosa quanto esperar, ou seja, o preço onde o decisor deixa de ser indiferente: (6) = (7):

$$V_0 = E_0(F_1) \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I = \frac{q.U.\delta^*}{r} - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta^*}{r}.(-q.D + r + D) = I - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[(1-q).D + r] = \frac{I.(1+r-q)}{1+r} \Rightarrow$$

$$\delta^* = \frac{r.I.(r + (1-q))}{(1+r).[(1-q).D + r]} \quad (8)$$

Em (8) pode-se observar que o valor do gatilho δ^* só depende do estado pior ou ruim da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho D do movimento para baixo do preço do ativo subjacente e de $(1-q)$. Esse fato é conhecido como Princípio das Más Notícias de Investimentos Irreversíveis (*bad news principle of irreversible investments*), termo foi cunhado por Bernanke (1983,

p.91-93, ver também Dixit e Pindick, 1994, p. 40). De acordo com Bernake esse resultado tem um apelo intuitivo: Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir (ou não) no período seguinte. Essa opção só tem valor caso haja uma probabilidade positiva do investimento não ser feito e da severidade da perda com o investimento irreversível. Ou seja, o valor da opção só depende do lado ruim da incerteza.

Note ainda que um pequeno aumento na probabilidade de um mal resultado não pode ser compensado por um ganho potencial com o lado bom ou positivo da incerteza. Observe também que o impacto do lado ruim sobre o valor de uma opção de investimento não depende das preferências ao risco do decisor. Assim eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. O Apêndice 1 demonstra que o gatilho δ^* que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar é dado por:

$$\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Até este momento discutiu-se o conceito de OR, exploraram-se as vantagens desta abordagem em relação ao VPL e exercitou-se a regra de decisão de um investidor considerando exemplos simples. A teoria de opções reais tem sido construída progressivamente a partir de contribuições de situações particulares, como bem evidencia o histórico da literatura. Com isso, uma taxonomia homogênea para OR ainda não é consenso, embora esforços rescentes apresentem significativos avanços. Na próxima Seção este assunto é discutido.

2.4. Taxonomia de opções reais

A abordagem do problema de decisão de investimento como opções reais tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e de suas interações estratégicas (ver adiante). Esse valor manifesta-se tipicamente através das flexibilidades embutidas nas oportunidades de investimento de capital.

Copeland e Antikarov (2001, p.12-13) classificam as opções reais primariamente pelo tipo de flexibilidade que oferecem. Assim a opção de diferir, esperar ou postergar é uma *call* americana sobre um projeto cujo início pode ser adiado. A opção de abandono de um projeto por um preço fixo é formalmente uma *put* americana, como o é a opção de contração, onde se vende uma parte do ativo por um preço fixo. A opção de expansão é o oposto da contração, e como a opção de extensão (prorrogação de um direito) são *calls* americanas. Opção de mudança de uso (*switch options*) a um preço fixo são *portfolios* de *calls* e *puts* americanas. As opções sobre opções são chamadas de opções compostas e incluem os projetos com investimentos em etapas ou fases, que oferecem a opção de abandonar ou diferir ao final de cada fase. Por fim, as *rainbow options* (opções arco-íris) são aquelas com múltiplas fontes de incerteza. Muitos problemas de decisão reais são opções arco-íris compostas (*compound rainbow options*), como ocorre na área de exploração e produção de petróleo. Essas situações são mais comuns do que parecem, por exemplo, basta considerar a incerteza no preço, na quantidade produzida e na taxa de desconto de qualquer investimento em fases.

Trigeorgis (1996, p.2-4) observa que as OR podem tanto ocorrer naturalmente (como opções de diferir, contratar, desativar, abandonar, etc.) como podem ser construídas a um custo desde o início de um projeto (opções como expansão de capacidade, crescimento, mudança de uso). Este autor também classifica as OR em categorias, destacando os tipos mais comuns, a indústria onde são mais importantes e alguns autores representativos que as analisaram. São elas: Opção de diferir, de investir em etapas (compostas), de mudança de escala (expandir, contrair, desativar ou reiniciar), de abandono, de mudança de uso (insumos, produtos, etc.), de crescimento (quando um investimento pode criar vários outros projetos) e opções múltiplas interagindo.

Dixit e Pindick (1994) por sua vez discutem pelo menos 13 tipos de OR diferentes e variações destas. Em sua maioria já foram citadas ou são variações das apresentadas nos parágrafos anteriores. Dias (1996, p.59-66) descreve os tipos de opções mais comuns observadas na literatura OR aplicadas à indústria do petróleo. Na Seção 4.1 o processo de Exploração e Produção de petróleo é discutido do ponto de vista de OR.

Não existe uma uniformidade absoluta para a taxonomia da OR. Por exemplo, o agrupamento denominado de opção de mudança de escala de Trigeorgis (*op. cit.*) é desmembrado em até quatro tipos pelos outros autores. Isso faz com que um mesmo tipo de opção receba diferentes nomes, por exemplo, opções compostas em geral têm o mesmo significado de opções seqüenciais de Dixit e Pindyck (*op. cit.*). Outro exemplo é a opção de diferir ou esperar em Copeland e Antikarov (op. cit), denominada de opção investir em Dixit e Pindick (op. cit).

A denominação “esperar” de Copeland e Antikarov é particularmente infeliz, pois esperar é um aspecto comum a toda OR até a sua data de expiração. De forma similar, alguém pode então argumentar que investir também é uma característica comum a vários tipos de opções, e com razão, mas na condição de preço de exercício, e não como meio de implantação de um projeto.

Uma outra dimensão do problema de valoração e decisão de investimentos pode ser percebida ao se considerar as interações estratégicas entre competidores (Trigeorgis, 1996, p.133-134). Se o impacto de um competidor restringe-se à captura de parte do valor do mercado de um projeto, então o decisor ainda encontra-se com o problema de maximização do valor da firma discutido nos itens anteriores, embora mais complexo. Neste caso, deve-se incorporar o impacto da competição na decisão de investimento, mas pode-se ignorar qualquer efeito interativo de ação e reação entre os competidores. Entretanto, se a decisão de investimento é sensível e contingente às decisões de outras firmas, então um tratamento mais complexo combinando Teoria de Jogos com Teoria de Opções Reais é necessário.

Trigeorgis (1996, p.142-149) sugere uma classificação para OR considerando as interações estratégicas entre competidores. Essa classificação, de acordo com o autor, visa destacar importantes características das oportunidades de investimento como opções sobre ativos reais. Sugere que três aspectos devem ser considerados

sob o ponto de vista de estratégia competitiva: o primeiro refere-se à exclusividade da propriedade e o efeito da competição sobre a habilidade da firma apropriar para si o valor da opção. Se a firma tem exclusividade sobre se e quando investir, ou seja, não é afetada pelos competidores, a opção é dita Proprietária, caso contrário, a opção é Compartilhada. A segunda questão estratégica refere-se às interações internas à oportunidade de investimento. Se a OR leva a outros investimentos ou outras opções subseqüentes, é então chamada de Composta. Com isso esse tipo de opção pode ter maior impacto estratégico sobre a firma, o que torna sua análise mais complexa. Por outro lado, se o projeto é analisado como um investimento isolado, a OR é dita Simples. A terceira questão estratégica refere-se ao momento e urgência da decisão. Projetos que necessitam de uma decisão imediata do tipo agora ou nunca são ditos em Expiração ou Expirando, mas se a decisão pode ser adiada, então a opção é chamada de Diferível ou Adiável.

A Figura 4 apresenta exemplos com os conceitos da classificação anterior, considerando diferentes estratégias e o valor da OR correspondentes.

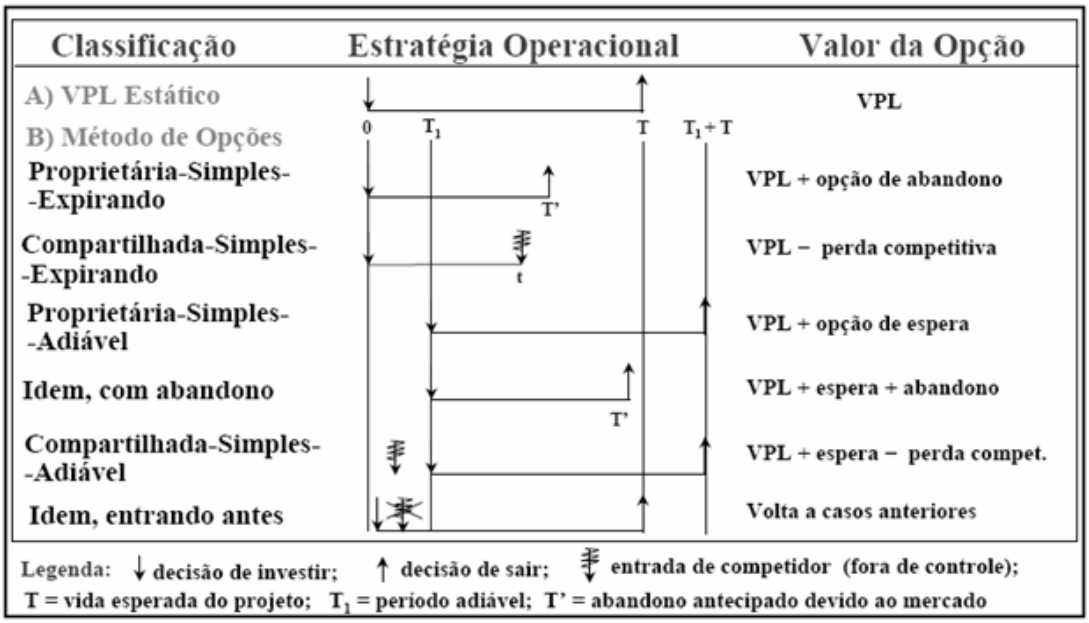

Figura 4 - Classificação das OR, interações estratégicas e valor da opção como a soma do VPL com o valor da "opção" dada pela flexibilidade e o efeito competitivo (adaptado de Trigeorgis, 1996, p.148).

No quadro da Figura 4, o item A representa o problema de capital budgeting tradicional enquanto o item B inclui seis exemplos com OR. Para uma opção proprietária, simples e em expiração com a flexibilidade de abandono em T<T', o

valor da OR é dado pelo VPL somado do valor de abandono. Para uma opção compartilhada, simples e em expiração, o investimento é feito imediatamente, mas a entrada de um competidor pode erodir o valor do projeto. Para uma opção proprietária, simples e adiável, o valor da opção depende da flexibilidade de adiar o investimento e da existência da possibilidade de abandono. Para uma opção compatilhada, simples e adiável, a entrada prévia de um competidor gera uma perda competitiva, mas que pode ser evitada caso a firma invista antes.

Vollert (2003, p.22-39) apresenta talvez a mais completa sistemática para OR, revendo e organizando a contribuição histórica de muitos autores a partir do trabalho pioneiro de Myers (1977, *op. cit.*). Apresenta duas classificações que contemplam a perspectiva gerencial e a perspectiva de valoração econômica. As duas abordagens são complementares na medida em que se propõe a relacionar as flexibilidades gerenciais (de orientação prática) com o instrumental teórico exigido para a valoração com OR, derivado da teoria de apreçamento de opções financeiras.

2.4.1. Classificação gerencial

A classificação gerencial de Vollert (op. cit.) pode ser bem compreendida através da decomposição do valor da firma em seu valor estático (dado pelo VPL tradicional) e o valor das diferentes flexibilidades gerenciais (Figura 5):

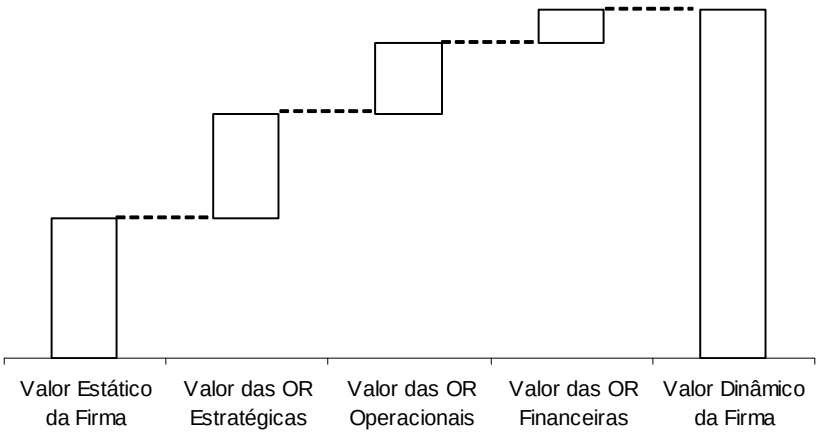

Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003, p.22).

Esta subdivisão é feita exclusivamente com o propósito taxonômico, já que o valor total das OR de um projeto, ativo ou firma é tipicamente não aditivo em decorrência das interações entre as OR**.**

Trigeorgis (1996, p.227-256) avalia a interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto – opções múltiplas (ou compostas na taxonomia de Copeland e Antikarov *op. cit*.). Demonstra que a interação entre duas opções pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo do valor do projeto. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto. Embora os valores das opções não sejam aditivos, em interações pequenas e simples a adição pode ser uma boa aproximação. O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são de tipos opostos (por exemplo, expandir e contrair) e tem uma separação finita, a probabilidade conjunta de exercício será pequena. Mas à medida que aumenta o intervalo cresce o valor da interação. Por outro lado, se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

O valor dinâmico da firma (Figura 5) é então dado pela composição do valor estático da firma com o valor das OR Estratégicas, Operacionais e Financeiras. As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desinvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio. As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. As OR Operacionais podem ser subdivididas em opções de insumo (*input options*), processo, produto (*output options*) e opções de expansão/contração. Há frequentemente uma estreita relação entre OR Estratégicas e Operacionais, pois, havendo alta flexibilidade nos ativos existentes, naturalmente surgem novas e futuras OR Estratégicas. As OR Financeiras, por fim, são aquelas relacionadas à

habilidade de modificar a estrutura de capital durante o curso de um projeto, agregando valor para a firma.

Neste trabalho, a opção de investir é o que na literatura se chama opção de diferir, mas é a mesma designação adotada por Dixit e Pindick (2004), e refere-se a uma OR estratégica. Por sua vez, a opção de abandono refere-se ao abandono irreversível de um ativo real, onde o preço de exercício é um custo.

Percebe-se que a classificação gerencial se preocupa mais em auxiliar o aspecto da nomenclatura de OR como tratado por Copeland e Antikarov (2001), Dixit e Pindick (2004 - que na verdade não se preocupam com este tema) e em parte por Trigeorgis (1996). Por sua vez, a classificação sob a perspectiva da valoração de Vollert tem um papel mais pró-ativo, na medida em que se preocupa em sistematizar os diferentes aspectos que afetam o valor de uma OR.

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração

A classificação com a perspectiva de valoração de Vollert (op. cit., p.26-33, Figuras 2.4 a 2.11) ocupa-se de aspectos específicos de OR a serem considerados para o apreçamento por opções. Dois grandes tópicos são considerados: Parâmetros de entrada para opções reais e as diferenças em relação às financeiras e; Limitações da analogia de OR com opções financeiras.

i - Parâmetros de entrada

Considerando os parâmetros de entrada para a valoração com OR, o primeiro importante aspecto a ser considerado são as fontes de incerteza. Vollert (op. cit.) sumariza as fontes de risco como tecnológico, *timing*, político, social, legal e econômico, sendo este último subdividido em valor do projeto, preço/custo, demanda, processo, taxa de câmbio e risco estratégico. Todos esses riscos afetam a lucratividade de um projeto e muitos deles ocorrem simultaneamente. Em aplicações práticas, as fontes de risco mais importantes são as que afetam seriamente o projeto (em intensidade e freqüência), e por isso devem ser priorizadas na modelagem do valor deste. Especial atenção deve ser dada aos riscos específicos da firma, que não são apreçados pelo mercado. Em seguida é preciso definir o instrumental matemático a ser utilizado para a modelagem do risco do ativo subjacente: se em tempo discreto ou contínuo; o tipo de processo estocástico a ser utilizado (Seção

3.1), e por fim, se o ativo subjacente é ou não transacionado no mercado e como isso pode ser contornado. A estimativa da volatilidade do processo estocástico pode ser feita com o auxílio de séries históricas ou com um modelo de equilíbrio como o CAPM.

A modelagem dos dividendos é igualmente importante, devendo se considerar a taxa, a periodicidade, se estocástico ou não, e o beneficiário dos pagamentos. Em relação a este ponto, em OR é preciso diferenciar entre os dividendos pagos ao detentor do ativo subjacente e os dividendos pagos ao detentor da opção. A taxa de retorno por sua vez, dever refletir a incerteza relacionada aos fluxos de caixa (*timing*, freqüência e intensidade). Esse problema é normalmente resolvido com um desconto na taxa de retorno via taxa de dividendo, explicando o baixo retorno observado em ativos reais em relação aos seus pares financeiros com estruturas de risco semelhantes. No caso de uma *commodiy* essa taxa é conhecida como *convenience yeld* e compensa os dividendos que deveriam ser recebidos pelo proprietário fisicamente detentor desta, mas não pelo detentor de um contrato sobre a mesma. A *convenience yeld* pode ser determinada no mercado de contratos futuro e *foward* ou por uma estrutura a termo desta taxa, caso seja estocástica no modelo de valoração.

Outros dois parâmetros indispensáveis são: o preço de exercício e a taxa livre de risco. Em OR estes parâmetros podem variar durante a vida da opção, podendo ser modelados por processos estocásticos. O último parâmetro a ser considerado é justamente a vida da opção, ou maturidade. Em OR, esse parâmetro pode estar relacionado à vida do ativo subjacente e, em ambos os casos, a maturidade pode ser classificada como perpétua, limitada ou desconhecida.

ii - Limitações da analogia de OR com opções financeiras

Considerando as limitações da analogia de OR com opções financeiras, Vollert (op. cit., p.34-39) destaca cinco aspectos: Urgência na decisão, competitividade da situação (ou do mercado), resolução da incerteza, efeito tempo de atraso e interações inter e intra-projetos.

O aspecto urgência da decisão de Vollert (op. cit., p. 34) corresponde à classificação segundo as interações estratégicas de Trigeorgis (1996, p.133-134)

apresentada anteriormente (ver Figura 4). O aspecto competitividade da situação refere-se ao nível de competição do mercado à que pertence a OR (tanto as exclusivas como as compartilhadas). Se o mercado é competitivo, o impacto da competitividade deve ser modelado exogenamente, por exemplo, com saltos de Poisson (ver Seção 3.1.3). Em situações de oligopólio, ao contrário, a modelagem da competição é endógena e pode considerar modelos dinâmicos de teoria de jogos[2].

O impacto da resolução da incerteza por sua vez, inverte-se se o risco é transacionado no mercado ou se é exclusivo da firma. O aumento do preço do risco transacionado no mercado aumenta o valor da OR, mas o oposto ocorre com o risco privado (por exemplo, a incerteza técnica, ver Seção 2.5). Isso torna importante a separação entre esses dois tipos de risco em modelos de OR. Um segundo aspecto importante é entender como a incerteza é resolvida ao longo da vida de uma OR. Os riscos transacionados no mercado (por exemplo, o preço de uma *commodiy*) em geral resolvem-se naturalmente com o tempo. Mas em relação ao risco privado, frequentemente ocorre o oposto, de forma que o detentor da OR não só não observa a resolução da incerteza como tem que investir para a sua redução. São as denominadas opções de aprendizagem (*learning options*), que representam importantes ferramentas gerencias tanto para limitar o risco de perda como para influenciar a incerteza de forma favorável à firma.

O efeito tempo de atraso ou resposta refere-se à defasagem entre a decisão de investir e o início do fluxo de caixa (*time lags*), o que pode durar de poucos dias até vários anos em OR. Naturalmente, este efeito pode ter um alto impacto na valoração e decisão ótima sobre um projeto. Isso torna valioso para a firma a segmentação do projeto em fases, o que pode trazer várias vantagens como a geração de novas opções (inclusive de aprendizagem) e a redução do efeito tempo de atraso para um primeiro fluxo de caixa.

[2] Em OR compostas, o exercício antecipado de uma ou mais etapas pode gerar valor, enquanto que em OR simples, o exercício antecipado pode ser necessário mesmo destruindo a opção. Jogos de opções têm se tornado um ativo campo de pesquisa com o objetivo de capturar o componente estratégico das OR (ver Vollert, 2003, p.36, Trigeorgis, 1996, p.133-134 e Dias, 2005, p.360-402).

Finalmente, as interações inter e intra-projetos refere-se às opções compostas de um mesmo projeto e às interações entre OR de diferentes projetos. Dada a não aditividade das OR, a modelagem a ser construída deve considerar simultaneamente todos esses aspectos, inclusive eventuais sinergias. Vollert (op. cit, p.39) alerta que a interdependência pode resultar em modelos excessivamente complexos. Sugere então que sejam ignoradas as flexibilidades menos importantes em ordem de um modelo operacional, cujos erros são geralmente pequenos.

A classificação sob a perspectiva de valoração de Vollert é bastante útil na medida em que pode auxiliar na construção de modelos de valoração com OR como uma espécie de guia no mapeamento de aspectos relevantes[3]. Conhecendo-se melhor a OR a valorar, pode-se realizar esta tarefa com a técnica ou abordagem mais adequada, entre as várias disponíveis.

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica

Em finanças, tradicionalmente se diferencia dois tipos de risco, denominados de risco de mercado (ou sistemático ou não diversificável) e de risco específico (ou diversificável). O risco de mercado está relacionado aos movimentos da economia em geral, decorrendo de acontecimentos aleatórios que afetam todos os ativos. O risco específico por sua vez relaciona-se à firma e o tipo de negócio em que está envolvida, podendo ser eliminado através da diversificação.

Os riscos de mercado e específico também geram incerteza sobre o valor econômico de projetos e ativos reais. Nos exemplos apresentados na Seção 2.2, a flexibilidade de esperar e o caráter opcional do investimento ou abandono em t_1 mostraram que essa incerteza possui valor, estimulando ou reduzindo a disposição de investir. A incerteza pode ser subdividida em incerteza econômica e incerteza técnica[4].

---

[3] A preocupação de Vollert com uma boa sistemática se justifica na medida em que seu livro, *A Stochastic Control Framework for Real Options in Strategic Valuation* (2003), concentra-se num modelo geral dedicado a capturar as interações entre OR intra-projetos (*switching options*, reversíveis ou não) e inter-projetos (interações competitivas endógenas e exógenas).

[4] Um terceiro tipo de incerteza tem sido considerado em OR. Denominada de estratégica, contempla a incerteza decorrente da interação estratégica entre competidores e entre projetos. Ver Seção 2.4.2 uma breve discussão, Vollert (2003, Cap.5) ou Dias (2005, Cap.4)

A incerteza econômica é exógena à firma, afetando negativamente as decisões de investimentos na medida em que estimula a espera, postergando projetos com VPL positivo. Quanto maior o horizonte temporal, maior é a incerteza econômica.

A Incerteza técnica é endógena ao processo de decisão da firma e não é correlacionada aos movimentos da economia. Mas conviver com a incerteza técnica pode ser uma escolha gerencial inadequada para a tomada de decisão, pois se contempla cenários desfavoráveis que reduzem o valor esperado do ativo básico da OR, adiando o exercício da opção.

Assim, a incerteza técnica cria um incentivo para o investimento em fases em busca de informação. Por isso, decisões de investimento com incerteza técnica são chamadas de opções de aprendizagem: A empresa aprende com esse tipo de investimento, permitindo, por exemplo, o melhor dimensionamento do projeto (ver Dixit e Pindick, 1994, p.47-48 e p.345-347). Assim, a redução da incerteza técnica cria um benefício adicional denominado de valor-sombra (*shadow value*), que não é diretamente mensurado pelo FCD.

É interessante notar que uma mesma variável pode ter os dois tipos de incerteza. No exemplo dado por Dixit e Pindick (*op. cit.*) o custo de um projeto pode ter tanto incerteza associada ao preço de insumos e facilidades de produção (incerteza econômica, risco específico) quanto à quantidade que será utilizada (incerteza técnica - risco de dimensionamento incorreto).

Dias (1996, p.36) destaca a diferença entre um investidor que detém uma carteira de ativos financeiros e um decisor que detém uma carteira de projetos e ativos reais: “O investidor não pode tomar vantagem da incerteza técnica para maximizar sua riqueza, o melhor que pode fazer é diversificar a sua carteira, de forma a tornar irrelevante esse risco e outros riscos específicos. Já o gerente pode agir, revisando a sua alocação de recursos, de forma a tomar vantagem da incerteza técnica e maximizar o valor da firma”. Por outro lado, o gerente ou decisor não tem a mesma flexibilidade do investidor para diversificar sua carteira e assim poder minimizar ou eliminar o risco específico.

Como a incerteza técnica independe do risco de mercado (é um risco diversificável), sua correlação com o retorno do *portfolio* de mercado é nula. Isso faz

com que o prêmio de risco exigido por este risco seja zero (Dias, 2005, p.135-137). Assim, enquanto que os processos estocásticos relacionados à incerteza econômica devem ter a tendência ajustada pela subtração de um prêmio de risco, as distribuições de probabilidade da incerteza técnica permanecem inalteradas. Por isso, a combinação de incertezas técnicas com incerteza de mercado em modelos de OR pode se dar de uma forma mais simples se for usado um método neutro ao risco. Pode-se usar a taxa livre de risco para descontar processos estocásticos neutros ao risco das variáveis de mercado, combinados com as distribuições de probabilidade das incertezas técnicas, que já são naturalmente neutras ao risco.

Dias (2005, Cap.3) trata a incerteza técnica com Teoria da Informação. A análise de valor da informação (VOI – *value of information*[5]) considera a aquisição de informação para a redução da incerteza (variância) em um processo seqüencial de revelação com expectativas condicionais. Propõe uma medida de aprendizagem probabilística associada ao conceito de distribuição de revelações.

2.6. Introdução à valoração de opções reais

O valor de uma opção real é dado pela soma do valor do projeto sem a opção (VPL tradicional) com o valor (prêmio) da flexibilidade embutida no projeto[6]:

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio da flexibilidade (10)

O apreçamento de OR é baseado no conhecimento sobre seus pares financeiros. Apesar das analogias entre estes dois tipos de opções, há diferenças importantes (Trigeorgis, 1996, p.127-129). Opções e ativos financeiros são negociados em um mercado eficiente a um custo mínimo. Opções e ativos reais podem ser pouco ou não negociáveis, especialmente se as opções são compartilhadas. Opções reais de domínio público são ainda mais complexas considerando as interações estratégicas entre as firmas, envolvendo investimentos preventivos e a criação de barreiras de entrada. Por outro lado, opções proprietárias

[5] O VOI é a diferença entre o valor da decisão informada e o valor da decisão à priori (sem a informação): VOI = VDI − VDP.

[6] Note que aqui se considera apenas uma única opção real associada a um projeto. Como discutido na Seção 2.4, a não aditividade das opções de um mesmo projeto ou quando interagem estando em projetos diferentes, a rigor, exige uma adaptação semântica da expressão (10):

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio líquido resultante das interações das flexibilidades (10).

como patentes podem ser facilmente negociáveis. Outras opções reais só podem ser vendidas se em conjunto com o ativo subjacente. Os custos de transação por sua vez não são desprezíveis, podendo mesmo inviabilizar um negócio. Mas o fato das opções reais não terem um mercado desenvolvido e suas conseqüências, não representa uma barreira para a sua valoração com o instrumental de opções financeiras.

O valor de uma opção real é a soma do VPL tradicional com o prêmio da flexibilidade (equação 10). Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2) discutiu-se em que condições o decisor deveria optar por esperar ou exercer a opção imediatamente, mas não sobre a estimativa das variáveis envolvidas. Por exemplo, como são calculadas as probabilidades dos estados da natureza? Como quantificar o valor do ativo subjacente nos estados *up* e *down* da natureza? Que taxa de desconto deve-se utilizar?

Não é fácil saber a taxa de desconto a ser aplicada sobre os *payoffs* esperados da opção no mundo real. Inicialmente sabe-se que uma opção é mais arriscada do que seu ativo subjacente (possui maior incerteza), exigindo por isso uma taxa de desconto maior. Se a opção for transacionada no mercado, seu valor é conhecido e pode-se obter de forma inversa a taxa de desconto a ser utilizada. Mas existem alternativas mais simples de apreçamento de opções que dispensam esta estimativa e de outras variáveis, como por exemplo, as probabilidades reais dos estados da natureza.

Algumas das estratégias de apreçamento mais conhecidas envolvem a construção de *portfolios* que permitem chegar ao valor da opção. Apresenta-se nesta dissertação a equivalência entre três alternativas desse tipo de valoração: Avaliação neutra ao risco, ativos contingentes (*contigent claims*) e *portfolios* replicantes. Segue-se uma quarta opção de apreçamento com programação dinâmica (há outras alternativas para o apreçamento de OR, ver, por exemplo, Seção 3.5). Embora a demonstração seja feita heuristicamente e a partir de um caso simples, o resultado é perfeitamente geral.

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*)

A valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) é um princípio fundamental para o apreçamento de opções financeiras (Hull, 2003, p.202-204). Este princípio

afirma que o preço de uma opção em um mundo neutro ao risco é correto também para o mundo real. Todos os investidores "tornam-se" indiferentes (neutro) ao risco e com isso não requerem mais prêmio de risco, o que torna o retorno esperado de qualquer ativo financeiro igual à taxa livre de risco[7].

A avaliação neutra ao risco de opções financeiras decorre do argumento de não arbitragem e também é válida para OR. Reconsidere a opção de investimento com a flexibilidade de adiar do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora o projeto paga dividendos δ_1 em t_1. O valor do projeto pode então evoluir de V_0 para $V_U + \delta_U$ ou $V_D + \delta_D$ conforme o estado da natureza. De forma similar o valor da opção pode variar para F_U e F_D - Figura 6.

A Figura 6 equivale ao ramo superior da Figura 1, mas com as probabilidades neutras ao risco p e $1-p$ dos estados da natureza up e down. Na Figura 1, o ramo inferior da árvore representou a decisão imediata, dada pela regra do VPL. Ao compará-lo com o ramo da superior da mesma Figura se explorou a regra de decisão considerando a flexibilidade de adiar. Note que o valor da opção foi dado pelo ramo superior, e a diferença entre os valores presentes dos dois ramos representa o prêmio da flexibilidade da equação (10).

[7] Note que o método não supõe que os investidores sejam neutros ao risco.

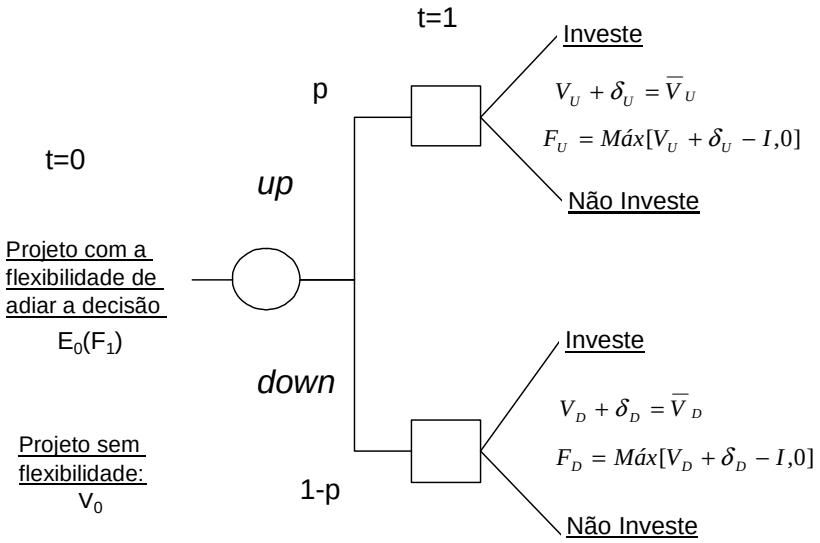

Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar.

Considere um *portfolio* (Φ) composto por uma posição longa na opção de investimento e uma curta em Δ unidades do ativo subjacente[8] (V_0). Para calcular o número Δ de ativos subjacentes que torne o *portfolio* sem risco, o valor deste deve ser o mesmo nos dois estados da natureza *up* e *down*:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D} \quad (11)$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Como o *portfolio* é sem risco o seu valor em t_0 é igual ao seu valor em t_1 descontado à taxa livre de risco (r_f):

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_1}{1+r_f} = \frac{\Phi_U}{1+r_f} \Rightarrow E_0(F_1) - \Delta.V_0 = \frac{F_U - \Delta.\overline{V}_U}{R_f} \Rightarrow$$

[8] A rigor, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. Poderia ser uma ação, um contrato futuro ou um *portfolio* dinâmico de ativos continuamente ajustado, de forma que seja obtida a perfeita correlação com o ativo da OR (Dixit e Pindick, 1994, p.117). A hipótese do *Market Asset Disclaimer* (MAD) propõe que este ativo seja o VPL do próprio projeto da OR – ver Seção 3.3.1. Nesta Seção adota-se o MAD para a demonstração proposta.

$$E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U \quad (12)$$

Onde $R_f = 1 + r_f$. Seja U e D tal que:

$$U = \frac{\overline{V}_U}{V_0} = \frac{V_U + \delta_U}{V_0} \Rightarrow \overline{V}_U = U.V_0 \therefore D = \frac{\overline{V}_D}{V_0} = \frac{V_D + \delta_D}{V_0} \Rightarrow \overline{V_D} = D.V_0$$

Usando (11), U e D em (12), tem-se:

$$E_0(F_1).R_f = \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.V_0.R_f + F_U - \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.U.V_0 \Rightarrow$$

$$E_0(F_1).R_f.(U-D) = R_f.(F_U - F_D). + F_U.(U-D) - U.(F_U - F_D) \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + \frac{(U - R_f)}{(U-D)}.\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + [1 - \frac{(R_f - D)}{(U-D)}].\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \text{ onde:} \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U-D)} \quad (14)$$

O preço da opção com a flexibilidade de esperar é dado por (13). Note que não depende das probabilidades reais q e $1-q$ dos estados da natureza nem do valor esperado do projeto, logo independe do grau de aversão ao risco do decisor. Isso implica que o preço da opção no mundo real é igual ao preço no mundo neutro ao risco. Mas o resultado (13) também sugere que o valor da opção de esperar por t_1 é o valor esperado de seus *payoffs* nos estados *up* e *down* com probabilidades p e $1-p$. Essas probabilidades são denominadas de probabilidades neutras ao risco e tem valor dado por (14). Note que anular o dividendo na demonstração ($\delta_U = \delta_D = 0$) apenas altera U, D e as probabilidades neutra ao risco p e $1-p$, sendo o resultado idêntico ao apresentado por Hull (*op. cit.*). Incluir dividendo em t_0 também não altera o resultado demonstrado, apenas que U e D devem considerar $V_0 + \delta_0$ como denominador.

Também se pode calcular o valor esperado do ativo subjacente $E_1(V_1)$ com as probabilidades neutras ao risco (14) em t_1:

$$E_1(V_1) = p.U.V_0 + (1-p).D.V_0 \Rightarrow E_1(V_1) = p.(U-D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow$$

$$E_1(V_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.(U-D).V_0 + D.V_0 = (R_f - D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow \boxed{E_1(V_1) = (1+r_f).V_0}$$

Este resultado demonstra que, no mundo neutro ao risco, o preço de qualquer ativo cresce à taxa livre de risco.

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*)

A segunda forma que se apresenta para calcular o valor da opção, aqui denominada de *ativos contingentes*, corresponde à adotada extensivamente por Dixit e Pindick em seu livro *Investment Under Uncertainty* (1994). Estes autores a denominam de *Contingent Claims* com o uso de *Spanning Assets***.**

Seja um *portfolio* Φ composto pela opção de investimento (Figura 6) e Δ ativos subjacentes[9], de tal forma que seu valor é constante em qualquer estado da natureza:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}} \quad (11)^{10}$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Sendo o *portfolio* sem risco, o seu valor cresce à taxa livre de risco, de outra forma haveria arbitragem. Então:

$$d\Phi = r_f.\Phi_0.dt\,.$$

Mas a variação de valor de um *portfolio* também é dada pelo ganho de capital e dividendo distribuído, então:

$$d\Phi = [dF - \Delta.(dV + d\delta)].dt$$

Igualando as duas equações e discretizando:

---

[9] A rigor, ver nota de rodapé 7, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. A hipótese do *Market Asset Disclaimer* – ver Seção 3.3.1 – é adotada nesta Seção pelo seu apelo intuitivo.

[10] A equação (11) é conhecida como delta *hedging* por sinalizar ao detentor da posição curta de uma opção a quantidade de ativos subjacentes que deve deter de forma a criar uma estratégia de *hedging* sem risco.

$$[(F_1 - F_0) - \Delta.((V_1 - V_0) + \delta_1)].(t_1 - t_0) = r_f.\Phi_0.(t_1 - t_0) \Rightarrow$$
$$F_1 - F_0 - \Delta.V_1 + \Delta.V_0 - \Delta.\delta_1 = r_f.F_0 - r_f.\Delta.V_0 \Rightarrow$$
$$F_1 - \Delta.(V_1 + \delta_1) + (1 + r_f).\Delta.V_0 = (1 + r_f).F_0 \Rightarrow \Phi_1 + R_f.\Delta.V_0 = R_f.F_0$$

Como o *portfolio* é sem risco, então:

$$\Phi_1 = \Phi_U = F_U - \Delta.\overline{V}_U \Rightarrow \boxed{F_U - \Delta.\overline{V}_U + R_f.\Delta.V_0 = E_0(F_1).R_f}$$

Esta última expressão é novamente a equação (12). Logo, substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14).

$$\boxed{E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f}} \text{ (13) onde: } \boxed{p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)}} \text{ (14)}$$

O apreçamento por *portfolio* replicante e a programação dinâmica levam aos mesmos resultados (13) e (14), e encontram-se demonstrados no Apêndice 2.

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados

Demonstrou-se nas Seções 2.6.1 e 2.6.2 e no Apêndice 2 que a avaliação neutra ao risco, por *contingent claims*, por *portfolios* replicantes e por programação dinâmica são equivalentes na medida em que levam ao mesmo resultado. As três primeiras técnicas consistem em criar *portfolios* com o objetivo de valorar opções considerando a eficiência de mercado e a ausência de arbitragem. Mas as semelhanças param por aí.

As avaliações neutras ao risco e por *contingent claims* consideram *portfolios* formados pela opção e um ativo perfeitamente correlacionado com o projeto. Os *portfolios* são montados de tal forma que apresentam valor constante em qualquer estado da natureza, portanto são sem risco. O *portfolio* replicante é constituído pelo ativo subjacente e títulos livre de risco, tendo como objetivo replicar os *payoffs* da opção, por isso é um *portfolio* com risco.

A avaliação neutra ao risco calcula o valor da opção considerando que o *portfolio* em t_1 descontado à taxa livre de risco é igual ao valor do *portfolio* em t_0. A valoração por *contingent claims* considera que o ganho de capital mais dividendo recebidos entre t_0 e t_1 é igual ao valor do *portfolio* em t_0 capitalizado à taxa livre de

risco. Por fim, o *portfolio* replicante por modelar o comportamento da OR, tem o mesmo valor do que esta em t_0.

A programação dinâmica aparenta ser mais simples, já que não monta nenhum *portfolio*, apenas utiliza o conceito de valor esperado e que a utilidade do decisor seja crescente com o lucro. Mas depende das probabilidades reais e da taxa ajustada ao risco da opção μ, que podem ser verdadeiramente desconhecidas. Alternativamente, a programação dinâmica pode ser aplicada no mundo neutro ao risco, utilizando as probabilidades neutras ao risco e a taxa livre de risco. Neste caso assume indiretamente todas as premissas desta valoração.

Na próxima Seção desenvolve-se a teoria da programação dinâmica para um modelo de vários períodos e seu caso limite em tempo contínuo. Para isso utiliza-se o contexto do Exemplo 1 (Seção 2.2), novamente por sua simplicidade e sem perda de generalidade.

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo

Para ativos financeiros em que informação, negócios e mudanças de preços ocorrem a todo instante, aplicar finanças em tempo contínuo soa natural. Para problemas de *capital budgeting*, a abordagem em tempo contínuo é em muitos casos pelo menos tão razoável quanto considerar fluxos de caixa anuais (Vollert, 2003, p.50), mas com a vantagem de utilizar os resultados da literatura de opções financeiras para valorar OR.

Dixit e Pindick (1994, p.98-106) apresentam uma didática transição do problema de apreçamento de OR de dois para muitos períodos e daí para tempo contínuo. Os pontos mais relevantes são destacados em seguida.

Reconsidere o contexto da decisão do problema de investimento do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora com vários períodos e onde a incerteza segue um processo de Markov, ou seja, não depende de seu histórico passado (ver Seção 3.1). Seja x_t a variável de estado que descreve a situação atual da firma e como esta afeta sua opção de investimento e, seja u_t a variável de controle que descreve as escolhas disponíveis ao decisor: Investir ou esperar. As variáveis x_t e u_t afetam tanto o lucro do período corrente $\pi_t(x_t, u_t)$ (ou dividendo - $\delta_t(x_t, u_t)$), quanto a

distribuição de probabilidade dos futuros estados da natureza. O objetivo do decisor é escolher a seqüência de controles u_t que maximize o valor esperado da firma, ativo ou projeto - $F_t(x_t, u_t)$:

$$F_t(x_t) = \underset{u_t}{Máx}\{\pi_t(x_t, u_t) + E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (15)$$

A equação (15) é denominada de Equação Geral de Bellman e representa o princípio da otimização de Bellman para vários períodos em tempo discreto. O termo $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$ é denominado de valor de continuação (*continuation value*) e representa do ponto de vista do período t, o valor esperado das escolhas ótimas futuras ($u_{t+1}, u_{t+2}, ...$). A variável de controle u_t então é escolhida de forma que $F_t(x_t)$ seja máximo. Isso representa exatamente o *backward induction* da programação dinâmica, iniciada no último período T até $t+1$ ($u_{t+T}, ..., u_{t+2}, u_{t+1}$), e por fim em t com a escolha de u_t.

Se o horizonte de tempo é infinito (mas ainda com intervalos discretos), o decisor enfrenta o mesmo problema em qualquer data e a equação de Bellman é comum a todos os períodos, dependendo somente de x_t:

$$F(x_t) = \underset{u_t}{Máx}\{\pi(x_t, u_t) + E_t[F(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (16)$$

A equação (16) é uma equação funcional não linear (pois é recursiva) que neste caso tem solução única (Dixit e Pindick, 1664, p.102). A boa notícia é que há uma solução prática simples. Iniciando de uma estimativa qualquer para o valor verdadeiro da função - $F^1(x_t)$ - escolhe-se a variável de controle ótima u^1. Retornando u^1 ao lado direito de (16), obtém-se uma segunda estimativa – agora calculada – do valor verdadeiro da função: $F^2(x_t)$. Repetindo-se o processo continuamente converge-se para o verdadeiro valor da função. A convergência é garantida pelo fator de desconto $1/(1+r)$ que é menor do que 1.

Suponha agora que a duração de cada período de tempo Δt tenda a zero. O lucro e o fator de desconto devem ser considerados como taxas, de forma que a equação (15) é reescrita:

$$F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t)|x,u]/(1+r.\Delta t)\}$$

Multiplicando por $1+r.\Delta t$ e rearranjando:

$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - F(x,t)]\} \Rightarrow$$
$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[\Delta F]\}$$

Dividindo por Δt e tomando este tendendo a zero, obtém-se a equação de Bellman para tempo contínuo:

$$r.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t) + E[dF]/dt\} \quad (17)$$

A equação (17) mostra que o retorno do ativo medido sobre uma função de valor ($r.F(x,t)$) é a soma do seu lucro (ou dividendo) imediato com a taxa esperada de ganho de capital. A igualdade reflete a condição de não arbitragem e para isso, o ativo deve ser otimamente gerenciado (o que é dado pela maximização em relação às escolhas disponíveis ao decisor: u).

A equação (17) é uma formulação generalizada do problema de valoração em tempo contínuo. Neste trabalho, essa função é uma OR cujo valor dependente de uma ou mais variáveis de risco (estocásticas) associadas ao ativo subjacente da opção. Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2), a incerteza relacionada ao ativo subjacente foi descrita pelos estados da natureza das árvores binomiais. Entretanto, esse é um tratamento insatisfatório, pois a incerteza vista como cenários discretos não corresponde à realidade de muitos problemas reais. Por outro lado, descrever a incerteza associada ao ativo subjacente (x) com processos estocásticos contínuos (dx) é relativamente simples. Igualmente importante é obter o processo estocástico da OR (dF) derivado do(s) processo(s) estocástico(s) do ativo subjacente, o que se faz usando o de Lema de Ito. Resta então resolver a equação diferencial do valor da OR (dF) de forma satisfatória. Estes são temas tratados no próximo Capítulo.

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos

A abordagem apresentada para processos estocásticos e o Lema de Ito nesta dissertação são heurísticas

3.1. Processos estocásticos em finanças

Um processo estocástico é uma função que dá a probabilidade com que uma variável estará em um estado i e em um instante $t \in [t_o, T]$. Assim o processo estocástico pode descrever a evolução aleatória de uma variável com o tempo (ver Figura 7, Seção 3.1.1). Cada caminho possível da variável aleatória é uma coleção de observações: $X = \{X(t), t \in [t_0, T]\}$, onde $X(t)$ é a observação da variável aleatória X no estado da natureza i vigente no instante t **.**

Essa aleatoriedade é que habilita os processos estocásticos para a modelagem da incerteza sobre a evolução de uma variável como, por exemplo, o preço de um ativo. Assim, um processo estocástico envolve pelo menos uma variável aleatória que, se muda de valor em intervalos de tempo conhecidos ou fixos, caracteriza um processo de tempo discreto. Se a variável muda em qualquer instante t o processo é dito continuo no tempo. Por outro lado, se a variável aleatória assume um conjunto de valores descontínuos, que representam os estados da natureza, o processo é dito de variável discreta. Se ao contrário, a variável pode assumir qualquer valor em um dado intervalo, o processo é dito de variável continua (os estados da natureza são contínuos). Um processo estocástico pode ainda ser classificado (grosseiramente) como estacionário se possui estatísticas constantes por longos períodos de tempo, ou não-estacionário, quando ocorre o contrário. Assim, por exemplo, em todo o Capítulo 2 os exemplos apresentados são processos estocásticos estacionários com variável e tempo discretos.

Uma importante característica para processos estocásticos é a propriedade de Markov**.** Um processo é dito de Markov quando sua distribuição de probabilidade em qualquer instante futuro não depende de seu histórico passado. De outra forma, a única informação relevante para a distribuição de probabilidade futura é a informação do momento presente.

Em seguida são apresentados os principais processos estocásticos contínuos utilizados em opções reais[11] destacados em Dixit e Pindick (1994, Cap. 3) e detalhados por Brandão (Cap. 3). Dentre estes, fundamental é o Processo de Wiener, que por sua simplicidade, funciona como um elemento de construção para outros processos mais realistas e sofisticados.

3.1.1. Movimentos Brownianos

O Processo de Wiener ou movimento Browniano é um processo estocástico em tempo contínuo com três importantes propriedades:

I – É um processo de Markov.

II – As mudanças no processo δz para qualquer intervalo de tempo Δt são normalmente distribuídas e a variância cresce linearmente com o tempo. Por definição:

$$\delta z = \varepsilon.\sqrt{\delta t} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \Rightarrow \delta z \sim N(0, \sqrt{\delta t})$$

Onde ε segue uma Normal padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão um. Assim o valor esperado de z é sempre zero e sua variância é δt.

III – Apresenta variações ou incrementos δz independentes por unidade δt de tempo, ou seja, possui correlação serial nula: $Corr(\delta z_i, \delta z_j) = 0$.

$$Corr(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{Cov(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{Var(\delta z_i)}.\sqrt{Var(\delta z_j)}} \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{\delta t}.\sqrt{\delta t}} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t}, \varepsilon_j.\sqrt{\delta t})}{\delta t} = \frac{E\{[\varepsilon_i.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t})].[\varepsilon_j.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_j.\sqrt{\delta t})]}{\delta t} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\delta t.E\{[\varepsilon_i - 0].[\varepsilon_j - 0]\}}{\delta t} = E[\varepsilon_i].E[\varepsilon_j] = 0.0 \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = 0$$

Onde: $\rho =$ Correlação, $\sigma(\delta z_i, \delta z_j) =$ Covariância e $\sigma^2 =$ Variância.

[11] Conforme comentado ao final da Seção 2.7, os processos de variável discreta são comumente insatisfatórios para a descrição dos fatores de risco do ativo subjacente, motivo pelo qual são preteridos daqui por diante.

Na medida em que se consideram intervalos de tempo progressivamente menores, no limite $\delta t \to 0$, o processo torna-se continuo no tempo, pode-se escrever que:

$$dz = \varepsilon.\sqrt{dt} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \therefore dz \sim N(0,\sqrt{dt})$$

Onde dz é denominado incremento de Wiener. O fato de este processo ter a propriedade de Markov e de $dt \to 0$ (o que em geral torna $|dz| = |\varepsilon.\sqrt{dt}| >> dt$) faz com que o caminho da variável dz seja irregular e "quebradiço" (Figura 7). Por isso, no Processo de Wiener a variável estocástica não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional, o que demanda o uso do cálculo estocástico:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Além disso, duas outras propriedades decorrem (Hull, 2003, p.219):

I – O comprimento esperado do caminho percorrido pela variável z é infinito para qualquer intervalo de tempo;

II – O número esperado de vezes que z iguala qualquer valor em particular em qualquer intervalo de tempo é infinito.

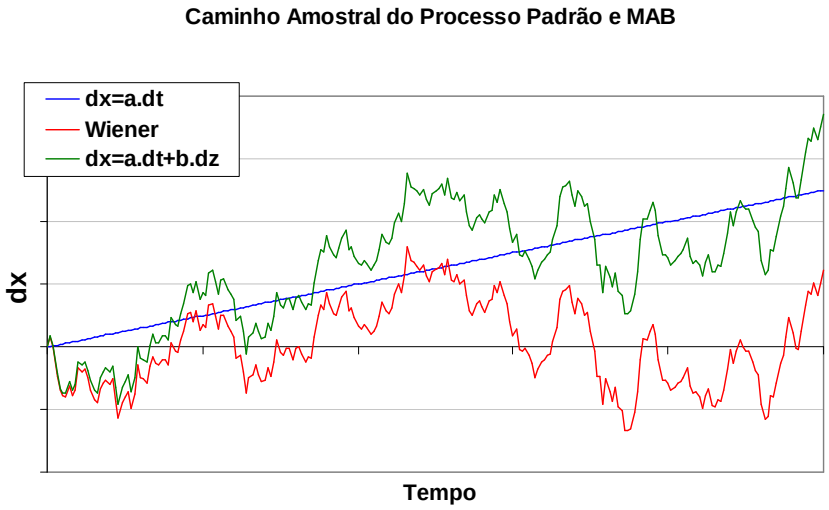

Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. A reta em azul representa a tendência do MAB.

Embora o Processo de Wiener tenha propriedades que pareçam restritivas do ponto de vista prático, trata-se uma ferramenta muito útil na modelagem de muitas

variáveis que mudam de forma continua e estocástica com o tempo. Adaptações podem ser necessárias, como por exemplo, para modelar preços que em geral não podem ser negativos (neste caso assume-se que o logaritmo do preço é normalmente distribuído – ver adiante).

A adaptação mais simples do Processo de Wiener é a inclusão de uma tendência ou *drift*, denominado de Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Aritmético Browniano (MAB) ou Movimento Browniano com D*rift* (Figura 7).

$$dx = \alpha.dt + \sigma.dz \quad (18)$$ sendo α e σ constantes.

Onde α é o *drift*, σ a volatilidade e dz é o incremento de Wiener. O Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, conforme mostrado, por exemplo, por Dixit e Pindick para um MAB (1994, p.68-70).

As variações dx do MAB - (18) - seguem uma distribuição normal com média $\alpha.dt$ e variância $\sigma^2.dt$: $dx \sim N(\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt})$:

$$E(dx) = E(\alpha.dt + \sigma.dz) = E(\alpha.dt) + E(\sigma.dz) = \alpha.dt + \sigma.E(dz) \Rightarrow$$
$$E(dx) = \alpha.dt + \sigma.0 \Rightarrow E(dx) = \alpha.dt$$

$$\sigma^2(dx) = V(dx) = V(\alpha.dt + \sigma.dz) = V(\alpha.dt) + V(\sigma.dz) + 2.Cov(\alpha.dt, \sigma.dz) \Rightarrow$$
$$V(dx) = 0 + \sigma^2.dt + 2.0 = \sigma^2.dt \Rightarrow \sigma(dx) = \sigma.\sqrt{dt}$$

Pode-se observar na Figura 7 que no curto prazo a volatilidade é determinante para o movimento Browniano enquanto que no longo prazo a tendência é que define o processo. Isso se deve ao fato da volatilidade crescer com $\sqrt{dt}$ e a média com dt. Se o dt é pequeno então $\sqrt{dt} >> dt$, mas à medida que dt cresce a relação se inverte: $\sqrt{dt} << dt$.

Um processo mais generalizado denominado de Processo de Ito ou Movimento Browniano Generalizado pode ser definido a partir do MAB, substituindo as constantes α e σ por funções não aleatórias de x e t.

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz$$

O valor esperado do Processo de Ito é dado por $E(dx) = a(x,t).dt$, e a variância é dada por $\sigma^2(dx) = b^2(x,t).dt$, sendo que $a(x,t).dt$ é a taxa instantânea de tendência ou *drift* e $b(x,t).\sqrt{dt}$ é a taxa instantânea de variância.

Um caso particular especialmente importante do Processo de Ito é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), obtido fazendo $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$ (Figura 8), sendo α e σ constantes:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz \quad (19) \quad \text{e} \quad dx \sim N[\alpha.x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

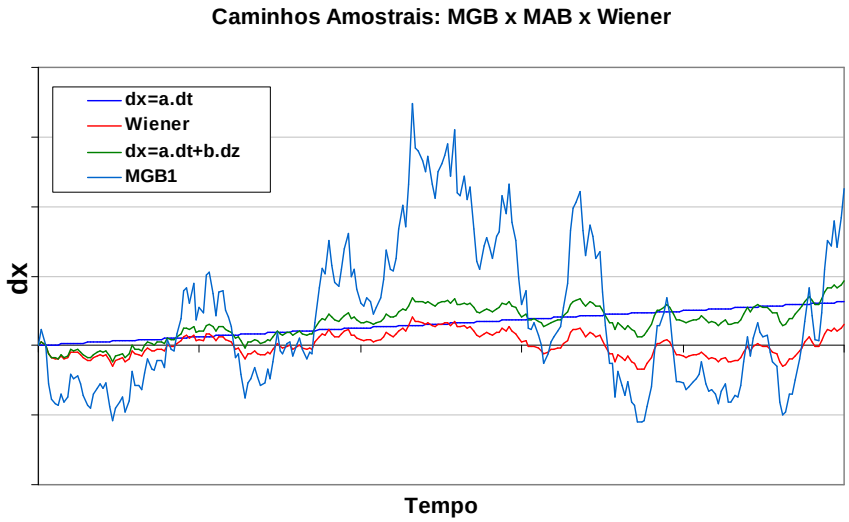

Figura 8 – MGB em relação ao Wiener padrão e ao MAB da Figura 7.

O MGB também é um processo estocástico não estacionário em que o valor esperado de dx depende do valor de x no momento inicial. Considerando que $\sigma = 0$, a equação (19) deixa de ser um processo estocástico e pode-se utilizar o cálculo diferencial convencional, então:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt; \quad \text{Mas: } d\ln x = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow d\ln x = \alpha.dt \Rightarrow$$

$$\int_0^x d\ln x = \int_0^t \alpha.dt \Rightarrow \ln(x_t / x_0) = \alpha.(t-0) \Rightarrow x_t / x_0 = \exp(\alpha.t) \Rightarrow x_t = x_0.\exp(\alpha.t)$$

Se $\sigma \neq 0$ é preciso utilizar o Lema de Ito do cálculo diferencial estocástico para definir o processo estocástico de $d\ln x$. Como se verá adiante (Seção 3.2.1),

$d \ln x$ é normalmente distribuídos e segue um o Processo de Wiener Generalizado dado por:

$$d \ln x = (\alpha - \sigma^2 / 2).dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \text{e} \quad d \ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2 / 2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Considerando um intervalo de tempo Δt, então:

$$\ln x_t \sim N[\ln x_{0+}(\alpha - \sigma^2 / 2).\Delta t, \sigma.\sqrt{\Delta t}] \therefore \text{ Se } Y = \ln x_t \Rightarrow x_t = e^Y \Rightarrow E(x_t) = E(e^Y)$$

E a variância de x_t será: $Var(x_t) = E(x_t)^2 - E^2(x_t) = E(e^{2Y}) - E^2(e^Y)$.

Ou seja, tanto o valor esperado quanto a variância de x_t são funções de $E(e^Y)$. Brandão (Cap.3, p.22-24) demonstra que:

$$E(x_t) = x_0.e^{(\alpha.t)} \quad \text{e} \quad Var(x_t) = x_0^2.e^{(2.\alpha.t)}.(e^{(\sigma^2.t)} - 1)$$

3.1.2. Reversão à média

Processos estocásticos que tendem a divergir do ponto de origem com o passar do tempo podem não ser adequados para algumas variáveis econômicas. O preço de *commodities* como petróleo e cobre, por exemplo, embora possam variar de forma aleatória no curto prazo em resposta a desequilíbrios de mercado, no longo tendem a reverter na direção do custo marginal de produção (Dixit e Pindick, 1994, p.74) ou alguma média que reflita o preço de equilíbrio de mercado. Processos com essa característica são denominados de Modelos de Reversão à Média (MRM).

Essa média no caso de uma *commodity* inclui o custo marginal de produção, a remuneração ao risco e o chamado "custo de utilização" (*user cost*) quando se trata de um recurso não-renovável, crescente com o tempo devido ao efeito da exaustão (Pindyck & Rubinfeld, 1995, p.545-546, apud Dias, 1996, p.109). Quanto mais competitivo for o mercado, maior deve ser a velocidade de reversão à média. No entanto, a velocidade de reversão também depende das restrições tecnológicas[12] do bem a ser produzido. Na indústria do petróleo, tipicamente de capital intensivo, as restrições tecnológicas somadas à existência um cartel atuante (OPEP) implicam

[12] A natureza impõe restrições tecnológicas de forma que apenas algumas combinações de insumos constituem formas viáveis de produzir certa quantidade de produtos. As alternativas viáveis são denominados de conjunto de produção, cuja fronteira ou limite descreve a função de produção (Varian, 2003, p.344).

numa velocidade de reversão à média muito lenta, conforme se observa nas séries históricas de preço do petróleo.

Há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média. Responder a essa pergunta implica na análise de séries históricas de preços. Dixit e Pindick (1994, p.77-78) sugerem e realizam esta análise com o teste de raiz unitária de Dickey e Fuller (1981, apud Dixit e Pindick op.cit) sobre séries históricas longas de preços de petróleo. Considerando uma série de 120 anos, estes autores concluem pela reversão à média. Mas ao considerarem séries de 30 ou 40 anos não conseguem rejeita a hipótese de *random walk*. Essa parece ser a situação de muitas variáveis econômicas, qual seja, é difícil estatisticamente distinguir entre *random walk* e reversão à média com dados de 30 ou 40 anos. Como resultado, estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos. A favor do MGB, porém, conta a simplicidade analítica, motivo pelo qual este processo é o mais adotado na literatura (Dias, 1996, p.106).

Existem vários MRM sendo que, os mais utilizados, podem ser divididos em dois grupos (Dias, 1996, p.116). O primeiro grupo agrega os MRM baseados no Processo de Ornstein-Uhlenbeck, sendo mais utilizado em aplicações econômicas. O segundo grupo, mais utilizado no mercado financeiro, deriva da equação de MRM descrita em Shimko (1992, pg.11).

O processo reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck apresenta algumas variações. O modelo mais simples é denominado de MRM Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck :

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.dz \quad (21) \qquad \text{e} \qquad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde η é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é o nível para que x tende a reverter. O Processo de Ornstein-Uhlenbeck apresenta a propriedade de Markov, embora seus incrementos não sejam independentes. Observe que se $x > \bar{x}$ então dx tende a ser negativo (dz é uma distribuição simétrica) e por isso x caminha na direção de $\bar{x}$. Se ocorrer $x < \bar{x}$, dx tende a ser positivo e novamente x tende a $\bar{x}$.

Note que quanto maior η, maior o efeito da convergência dada por $\bar{x} - x$, por isso η é denominado de "velocidade" de reversão. A média e variância deste processo podem ser obtidas a partir das equações de kolmogorov e são dadas por (ver demonstração em Dixit e Pindick, 1994, p.90-91):

$$E[x] = \bar{x} + (x - \bar{x}).e^{-\eta.t} \quad \text{e} \quad V[x - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2.\eta}.(1 - e^{-2.\eta.t})$$

Observe que se trata de um processo convergente, pois se $t \to \infty$ então $E[x] = \bar{x}$ e a variância converge para um valor constante: $V[x - \bar{x}] = \sigma^2 / 2.\eta$. Caso $\eta \to \infty$ novamente $E[x] = \bar{x}$, mas a variância ao contrário tende para zero. Por fim se $\eta \to 0$ o processo se transforma num Movimento Browniano simples: $E[x] = x$ e $V[x] = \sigma^2.t$.

Dixit e Pindick (1994, p.76) observam que a equação (21) é a versão em tempo contínuo de um processo auto-regressivo de 1ª ordem em tempo discreto – AR(1). Isso significa que seus parâmetros podem então ser estimados a partir de dados históricos em tempo discreto.

O MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck é o modelo mais popular deste grupo por vários motivos, como não gerar preços negativos, por sua similaridade com o MGB e por ter uma solução analítica para o problema da opção de investimento com expiração infinita (Dixit e Pindyck, 1994, p.161-163). A equação deste modelo é dada por:

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz \quad \text{e} \quad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

Note que a diferença para o MGB é que a tendência α é substituída por $\eta.(\bar{x} - x)$, que é justamente o termo de reversão. Com isso, a solução do problema de investimento de Dixit e Pindick (op. cit) com o MGB se estende ao MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck com alguns ajustes.

Metcalf e Hassett (1995) comparam o retorno de um investimento considerando o MGB e MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck para a modelagem do preço de um produto ou o valor de um ativo. Neste sentido apresentam uma

equação que generaliza os processos estocásticos de reversão à média e Browniano:

$$\frac{dx}{x} = \{\alpha + [\eta.(\bar{x}.e^{\alpha.t} - x)]\}.dt + \sigma.dz \quad (22)$$

Note que se $\alpha = 0$ obtém-se o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck dado por (20). Se $\eta = 0$ obtém-se o MGB (19). O termo $e^{\alpha.t}$ é uma inovação em relação aos MRM anteriores refletindo a expectativa de que a média de longo prazo $\bar{x}$ varie com o tempo (crescente se $\alpha > 0$ e vice-versa).

A outra classe de processo de reversão à média, como dito, deriva da equação de Shimko (1992, p.11):

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.x^{\gamma}.dz \quad (23) \qquad \text{e} \qquad dx = N \sim [\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.x^{\gamma}.\sqrt{dt}]$$

Essa classe de processos de MRM possui o mesmo valor esperado de dx, mas a variância cresce com o expoente γ. Note que se γ é nulo, obtém-se o MRM de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético (21).

Trata-se de uma classe de processos também bem difundida na literatura com diferentes aplicações (ver Dias, 1996, p.119-120).

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo o fato de convergir para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado. Preços crescentes estimulam a entrada de novos concorrentes, o que aumenta a oferta e estimula a sua redução. Simetricamente, preços muito baixos eliminam os competidores com maiores custos, reduzindo a oferta, o que estimula a recuperação do nível de preços.

Entretanto, Metcalf e Hassett (1995) mostram numericamente que o nível de investimento agregado obtido com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck no lugar do MGB é estatisticamente o mesmo para um range de parâmetros representativo. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva

de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck, obtido a partir da Equação (22) fazendo a tendência (α) igual à zero: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$. O MGB também é obtido a partir de (22) com tendência (α) e velocidade de reversão (η) nulas: $dx = \sigma.x.dz$. Em outras palavras, em seu estudo estes autores fazem com que tanto o MGB quanto o MRM apresentem a mesma tendência ou *drift*, no caso nula. De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM, intuitivamente espera-se que os preços gerados pelo primeiro irão necessariamente dominar o MRM.

A estabilização da variância com o tempo no MRM geométrico (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com o MGB, limita o valor da flexibilidade de esperar. Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir em relação aos Movimentos Brownianos. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM significa que preços mais altos são alcançados com menor freqüência (Efeito Preços), o que induz a uma redução do nível de investimentos. Os autores mostram que estes dois efeitos se tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, os autores argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza[13].

Dixit e Pindyck, (1994, p.161-167) também discutem os efeitos decorrentes da adoção do MRM. Adicionalmente, argumentam que a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o exercício da opção de investir. Segundo estes autores, o efeito resultante do MRM é menos óbvio do que o do MGB**.**

[13] Este resultado foi obtido em um modelo onde a função de produção apresenta retorno decrescente de escala, o que ocorre, por exemplo, em projetos de produção de petróleo. Entretanto, se o retorno de escala é constante e os custos são convexos, os efeitos preços altos e variância se somam e aumentam o nível de investimentos.

3.1.3. Processos de saltos de Poisson

Choques na oferta de um produto podem causar descontinuidades nos níveis de preços praticados. Por exemplo, a entrada de um novo competidor em um mercado pouco competitivo aumentando a oferta, ou ao contrário, conflitos armados e instabilidades políticas reduzindo a oferta, podem causar respectivamente queda ou aumento brusco nos preços correntes. Assim algumas variáveis econômicas podem apresentar infreqüentes, mas discretos saltos em seu valor, sendo modeladas por um Processo de Poisson (Dixit e Pindick, 1994, p.85).

O Processo de Poisson é um processo que apresenta uma variável dq que modela saltos de tamanho u fixo ou variável, correlacionado a x ou não, onde a probabilidade de ocorrência ($\lambda.dt$) do salto é dada por uma de taxa de chegada λ por unidade de tempo dt com distribuição de Poisson:

$$dq = \begin{cases} u & com\ probabilidade\ \ \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade\ \ 1-\lambda.dt \end{cases} \quad (24) \Rightarrow$$

$$E(dq) = u.\lambda.dt + 0.(1-\lambda).dt \Rightarrow \boxed{E(dq) = u.\lambda.dt} \quad (25)$$

Note que a distribuição de probabilidade, o valor esperado e a variância de dq são contínuos no tempo, mas dq não. Por analogia com o Processo de Ito, dx pode ser escrito como:

$$\boxed{dx = f(x,t).dt + g(x,t).dq}$$

Por exemplo, se o valor do salto depender do valor corrente de x, então poderia se ter $g(x,t) = x$, sendo dq definido como em (24) e $f(x,t)$ representaria uma tendência determinística. Um salto é dito degenerado quando a variável pode somente pular para um valor fixo e então permanece neste para sempre.

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*)

Também denominados de Processos de Poisson-Gaussianos, os processos de difusão com saltos resultam da combinação de um Processo de Poisson com um Processo de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86):

$$\boxed{dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq} \quad (26)$$

Esta associação faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta e não diferenciável no tempo (Poisson). Com isso, determinar o processo de uma função H(x) exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (ver Apêndice 4).

O retorno de um processo de difusão com saltos não é normalmente distribuído. No exemplo acima, o Processo de Poisson provoca uma alteração no valor da média e da variância, e a distribuição torna-se assimétrica**.** Se o tamanho do salto u também for aleatório, as caudas da distribuição também se tornam mais grossas.

A adição de um Processo de Poisson ao Processo de Ito retrata uma maior incerteza sobre a evolução de dx. A possibilidade de saltos aleatórios de tamanho u (positivo ou negativo) aumenta a incerteza sobre a variável modelada. O aumento do risco reduz o valor de um ativo na medida em que aumenta a taxa de desconto exigida pelo investidor. No caso da adição de um Processo de Poisson, esse incremento é dado exatamente pela taxa de chegada do salto λ (ver, por exemplo, Dixit e Pindick, 1994, p.87). Este resultado é bastante geral. A adição do parâmetro λ eleva o valor do gatilho e torna a regra de decisão mais conservadora (Dixit e Pindyck, 1994, p.201).

3.1.5. Reversão à média com saltos

Resultante da combinação de um MRM com um processo de Poisson, a reversão à média com saltos pode ser entendido como um caso particular de um Processo de Poisson-Gaussiano (26) onde $a(x,t) = \eta.(x - \bar{x})$. Por exemplo, considere o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck com saltos, então:

$$dx = \eta.x.(x - \bar{x}).dt + \sigma.x.dz + x.dq \Rightarrow \quad dx / x = \eta.(x - \bar{x}).dt + \sigma.dz + dq \quad (27)$$

Onde $dz\ e\ dq$ usualmente são considerados independentes. Note que, de (25), $E(dq) = u.\lambda.dt$, então ao subtrair-se $u.\lambda$ da tendência em (27), obtém-se um MRM com saltos compensado, cuja tendência não é mais afetada pelo Processo de Poisson:

$$dx / x = [\eta.(x - \bar{x}) - u.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Esse MRM com Saltos de Poisson Compensados, onde $-u.\lambda$ é o termo de compensação, tem vantagens práticas sendo algumas vezes usados na literatura, como por Dias e Rocha (1999) para a simulação do processo estocástico do preço do petróleo.

A reversão à média com saltos é um modelo particularmente importante para simular os preços de algumas *commodities* e taxa de juros. Esse processo combina o conceito de equilíbrio de preços de mercado para *commodities* (reversão à média) com o conceito de oscilação de preços apresentado por Merton (1976, apud Dias e Rocha *op. cit.*), segundo o qual a chegada de informações anormais gera choques estocásticos discretos, modelados pelo processo de Poisson.

Em seu artigo, Dias e Rocha (op.cit) adotam o seguinte MRM com Saltos de Poisson Compensados para o preço do petróleo (P):

$$dP / P = [\eta.(\overline{P} - P) - K.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Onde $K = E(\phi - 1)$ e dq é definido de forma similar a (24):

$$dq = \begin{cases} \phi - 1 & com\ probabilidade \quad \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade \quad 1 - \lambda.dt \end{cases}$$

Os saltos apresentam de tamanho ϕ variável com probabilidade de ocorrência $\lambda.dt$ com distribuição de Poisson. Os saltos ϕ tem uma distribuição de probabilidade especial com média $K + 1$ representada por duas normais truncadas, uma para saltos para cima (*jump up*) e outra com saltos para baixo (*jump down*) – Figura 9:

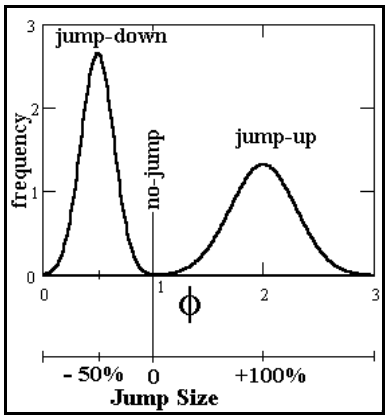

Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999, p.5).

Em caso de salto, há a probabilidade de 50% deste ser para cima e 50% para baixo. No caso de ser para cima, os preços são esperados dobrar e em caso de ser para baixo os preços são esperados reduzir pela metade.

As duas principais desvantagens do processo de reversão com saltos é que, não se pode construir um *portfolio* sem risco quando se considera saltos e a dificuldade em se estimar os vários parâmetros necessários. O primeiro problema conceitualmente é o mais importante, pois não se pode construir um *hedge* perfeito utilizado no apreçamento de opções por *ativos contingentes*, por exemplo**.** Mas existem alternativas para contornar esta situação, como também para superar as dificuldades encontradas nas estimativas dos parâmetros (Dias, p.3-4, www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm).

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras

Processos estocásticos com limites superiores ou inferiores impostos são ditos com barreiras. Estes processos são particularmente importantes para opções financeiras com barreiras (ver Hull, 2003, p.439-441), mas também encontram aplicação em OR.

Sob o ponto de vista econômico, as barreiras podem ser utilizadas para simular mecanismos de equilíbrio de mercado (entrada e saída de competidores), limites regulatórios ou mesmo a atuação de cartéis. Há três tipos de barreiras: refletoras, absorventes e elásticas. As barreiras refletoras são aquelas que, quando atingidas, devolvem a variável para o mesmo nível ou valor do momento anterior ao toque. As barreiras absorventes, ao contrário, quando atingidas absorvem a variável estocástica eliminando sua aleatoriedade. No MGB ($dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$), o limite $x = 0$ funciona como uma barreira absorvente, pois, se atingido em um tempo t', então $dx = 0$ e $x = 0$ para todo $t > t'$. As curvas de gatilho de OR também funcionam como barreiras absorventes, pois uma vez atingidas pela variável aleatória, levam ao exercício da opção. As barreiras elásticas por sua vez, são aquelas que se apresentam parcialmente absorventes ou parcialmente elásticas.

Dixit e Pindick (1994, p. 83-84) demonstram que um MAB com barreiras refletoras (superior e inferior) converge no longo prazo com densidade de

probabilidade exponencial, cujo valor esperado depende do sinal da tendência. Este resultado não se altera se a barreira inferior é relaxada quando a tendência é positiva ou se a barreira superior é relaxada quando a tendência é negativa. Bjerksund e Stensland (1993) propõem uma aproximação analítica para a opção de compra americana utilizando uma barreira absorvente superior, as qual é uma aproximação da curva de gatilho (ver Seção 3.5.1).

3.2. Lema de Ito

Na Seção 3.1.1, ao introduzir o Processo de Wiener, discutiu-se que devido à propriedade de Markov e de $dt \to 0$, o caminho da variável dz é continuo em relação ao tempo, mas não diferenciável no sentido convencional:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Todos os processos estocásticos apresentado até agora que apresentam o incremento de Wiener herdam essa característica. Assim, determinar o processo estocástico de uma função que dependa de um outro processo não diferenciável no sentido convencional demanda o uso do cálculo estocástico.

O Lema de Ito permite diferenciar ou integrar funções desse tipo, sendo mais conhecido na forma que se aplica a um processo estocástico de Ito. Pode ser entendido a partir da expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f^{'}(a).dx + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^{n}(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t. Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:então dF será dado por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e } dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32); \; E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33) \text{ e } V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \; \varepsilon^2.dt \; = dz^2 \; \sim \; N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

O Apêndice 3 apresenta a demonstração de todos os resultados mostrados nesta Seção, da equação (28) à (35). Modificações são necessárias para outros processos estocásticos. O Apêndice 4 mostra a versão que considera um processo de Poisson.

Verifica-se agora verificar o resultado (20). Seja x o preço de um ativo que segue um MGB: $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Para um período de tempo dt suficientemente pequeno, é razoável que a variação percentual do preço do ativo

(taxa de retorno dx/x) independa do seu nível de preço (Hull, 2003, p.223), seguindo portanto um MAB:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt + \sigma.dz \qquad \Rightarrow \frac{dx}{x} \sim N[\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde α e σ são a tendência e volatilidade da taxa de retorno. Para determinar o processo estocástico do logaritmo do preço toma-se o Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz$$

Sendo $F(x,t) = \ln(x)$ e $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Então $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$:

$$d\ln x = [\alpha.x.\frac{1}{x} + 0 - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}.\sigma^2.x^2].dt + \frac{1}{x}.\sigma.x.dz] \Rightarrow$$

$$d\ln x = [\alpha - \frac{1}{2}.\sigma^2].dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \Rightarrow d\ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2/2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Ou seja, embora $d\ln x$ e dx/x sigam distribuições normais com a mesma volatilidade σ, apresentam tendências diferentes tais que $E(dx/x) > E(d\ln x)$. Esse resultado é decorrente da desigualdade de Jensen[14], dada pela presença da segunda derivada parcial de *F(x)* no Lema de Ito. Como $\ln x$ é côncava, então $\partial^2 F/\partial x^2 < 0$, portanto $[\alpha - \sigma^2/2].dt \leq \alpha.dt$.

Os diferentes processos estocásticos apresentados e o Lema de Ito são instrumentos adequados para a representação estocástica do ativo subjacente e da função de valor de uma opção. Mas é preciso detalhar um pouco melhor o que é o ativo subjacente transacionado no mercado de uma opção real e discutir como modelar seu processo estocástico.

---

[14] Se F(x) é uma função convexa então E[F(x)] ≥ F{E(x)], a expectativa existe e é finita. Demonstração: Seja a expansão de Taylor (28) em torno de x e na forma discreta, onde *f(x)* é convexa: *f"(x)>0,* então:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}.(\Delta x)^2 > f'(x).\Delta x \Rightarrow E[f(x+\Delta x)] > E[f(x) + f'(x).\Delta x] \Rightarrow$$

$$E[f(x+\Delta x)] > f(x) + f'(x).E[\Delta x], \text{ fazendo } \Delta x \to 0 \text{ obtém-se: } E[f(x)] > f(x).$$

3.3. Modelando o ativo subjacente

Avaliar opções reais com várias fontes de incerteza pode ser uma tarefa complicada ou impraticável. Mesmo com duas fontes, pode ser difícil resolver solucionar uma modelagem que considere a correlação entre os processos estocásticos envolvidos. Por isso, seria muito proveitoso algum tipo de simplificação que torne possível reduzir várias fontes de incerteza em uma única.

Para evitar este problema, Copeland e Antikarov (2001, p. 219) assumem duas premissas: A primeira, denominada *Marketed Asset Disclaimer,* consiste em utilizar o valor (V) do projeto implantado como se fosse um ativo financeiro transacionado no mercado; A segunda, consiste em utilizar o teorema de que qualquer preço adequadamente antecipado flutua randomicamente (Samuelson, 1965). Isso significa que, independente do padrão de fluxo de caixa que se espere de um projeto, as mudanças em seu VPL irão seguir um passeio aleatório (*random walk*). Esse teorema permite que qualquer conjunto de variáveis com incerteza possa, via Simulação de Monte Carlo, produzir uma estimativa de V estocástico, cujo desvio padrão é então o de um passeio aleatório. Assim, Copeland e Antikarov (op.cit.) utilizam este teorema para dizer que V pode seguir um MGB, aproximadamente.

3.3.1. *Marketed Asset Disclaimer* (MAD)

Na Seção 2.6 se discutiu diferentes abordagens (e sua equivalência) para se calcular o valor de uma OR com o instrumental desenvolvido para opções financeiras. Isso foi possível através da montagem de diferentes *portfolios* que incluíam um ativo subjacente ou um ativo gêmeo do projeto, supostamente transacionados no mercado financeiro. Mas que ativo financeiro teria um fluxo de caixa perfeitamente correlacionado com o de um projeto em todos os estados da natureza?

A resposta é simples: Nenhum, pois isso é praticamente impossível. Inicialmente, as aplicações de OR usaram os preços de *commodities* mundiais como aproximações para o ativo subjacente. Mas assumir que a volatilidade do projeto subjacente sem flexibilidade é a mesma de uma *commodity* é uma premissa um tanto arbitrária. Por outro lado, o que poderia ser mais bem correlacionado com um projeto do que o próprio projeto? Então parece razoável a premissa de que o VPL

tradicional (sem flexibilidades) de um projeto é o melhor estimador não viesado do valor de mercado deste mesmo projeto, caso ele fosse transacionado. Essa premissa é denominada de *Marketed Asset Disclaimer* (MAD) por Copeland e Antikarov (2001, p.94-95) e é bastante utilizada na valoração de OR.

Estes autores destacam que o MAD não faz nenhuma premissa mais forte do que aquelas utilizadas na estimativa do VPL. A premissa mais importante adotada ao utilizar o VPL, tão óbvia que por isso talvez passe despercebida ao decisor, é admitir que a distribuição de retorno do VPL é bem correlacionada com o projeto o suficiente para ser utilizada[15]. Mas isso é o melhor que se pode fazer, e também por isso é razoável assumir que o valor presente de um projeto implantado seria o valor que este assumiria no mercado caso fosse transacionado (Copeland e Antikarov, op. cit.). Portanto, um decisor que utiliza o VPL para valorar seus projetos não faz nenhuma premissa adicional ao utilizar o mesmo VPL como ativo subjacente.

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente

Samuelson (1965, apud Copeland e Antikarov, 2001, p.222-227) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado. Se os investidores têm informação completa sobre o fluxo de caixa e toda a informação já está embutida no preço corrente da ação, então as expectativas serão atingidas e os investidores irão receber exatamente o seu custo de capital, independente do padrão de fluxo de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório[16] (Copeland e Antikarov, 2001,

[15] Note que a rigor, saber o VPL do projeto pressupõe conhecer a distribuição de probabilidade real dos estados da natureza e a taxa de desconto do projeto sem flexibilidade a cada instante *t*.

[16] Conforme citado na Seção 3.1.1, um Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, ver um exemplo em Dixit e Pindick (1994**,** p.68-70).

p.222). Então riscos (de *timing,* políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente. Porém, em alguns casos, pode ser útil ter uma determinada incerteza isolada das demais, individualizando alguma decisão específica, como por exemplo, aquelas relacionadas às incertezas técnicas[17] (Seção 2.5).

Samuelson (op. cit) prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Seja x_t uma variável aleatória de preço tal que seu preço *spot* na data de hoje s_t seja constante: $E(s_0) = x_0$ e $\sigma^2(s_0) = 0$. Suponha que o preço *spot* siga um processo dado por: $s_{t+1} = a.s_t + \sigma.\varepsilon_t$ onde $\varepsilon_t \sim N[0,1]$. Então, o valor esperado será $E(s_{t+1}) = a.s_t$ enquanto que a variância será:

$$V(s_{t+1}) = E(s_{t+1}^2) - E^2(s_{t+1}) = E[a^2.s_t^2 + 2.a.s_t.\sigma.\varepsilon_t + \sigma^2.\varepsilon_t^2] - a^2.s_t^2 = \sigma^2.E(\varepsilon_t^2)$$

Usando o resultado (32): $E(\varepsilon_t^2) = 1$, então: $V(s_{t+1}) = \sigma^2$.

Nos períodos seguintes o valor esperado será:

$$s_{t+2} = a.s_{t+1} + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a.(a.s_t + \sigma.\varepsilon_t) + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \Rightarrow$$
$$E(s_{t+2}) = E(a^2.s_t) + E[\sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})] \Rightarrow \; E(s_{t+2}) = a^2.E(s_t)$$

Observando três períodos à frente:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow E(s_{t+3}) = a^3.E(s_t).$$

E a variância será:

---

[17] Se a incerteza econômica sobre o preço de um ativo segue um movimento Browniano, sua volatilidade cresce com o tempo (ver Seção 4.1.1). O contrário ocorre com a incerteza técnica, maior no início de um projeto, diminui à medida que a firma investe em informação. Uma OR com essa característica é denominada de opção de aprendizagem (*learning option*), um tipo especial de opção composta "arco-íris" (*rainbow compound option*).

$$V(s_{t+2}) = E[s_{t+2} - E(s_{t+2})]^2 = E\{a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) - E[a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})]\}^2.$$

Com o resultado (32), chega-se a: $V(s_{t+2}) = \sigma^2.(a^2 + 1)$.

De forma similar verifica-se que $V(s_{t+3}) = \sigma^2.(a^4 + a^2 + 1)$, e assim por diante. O último termo entre parênteses forma uma série cuja convergência depende de a. Se $a > 1$ a variância diverge aceleradamente; Se $a = 1$, a variância passa a ser $V(s_{t+T}) = \sigma^2.T$ e tem-se um processo de Wiener padrão: $\varepsilon_t \sim N[0, \sigma.\sqrt{t}] = \sigma.\sqrt{t}.N[0,1] = \sigma.dz$; Por fim, se $a < 1$, a variância é convergente: $V(s_{t+T}) = \sigma^2 / (1 - a^2)$ - Copeland e Antikarov (*op. cit.*, p.225).

O preço futuro de $T = 3$ observado em t é o valor esperado em t do preço *spot* para $T = 3$, dado por:

$$F_3^t = E_t(s_{t+3}) = a^3.E_t(s_t) \Rightarrow F_3^t = a^3.s_t$$

No momento seguinte $t+1$: $F_3^{t+1} = E_{t+1}(s_{t+3})$, então:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow$$
$$E_{t+1}(s_{t+3}) = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + 0 + 0 \Rightarrow F_3^{t+1} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1}$$

Note que o termo de aleatório em $t+1$ agora é um valor observável de forma que $E_{t+1}(\varepsilon_{t+1})$ é substituído por ε_{t+1}. Mas o valor esperado da mudança no valor esperado do preço futuro em t é igual a zero:

$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = E_t[a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} - a^3.s_t] = \sigma.a^2.E_t[\varepsilon_{t+1}] = \sigma.a^2.0 \Rightarrow$$
$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = 0$$

Então mesmo que o preço *spot* mude ao longo do tempo, o preço esperado de um contrato futuro não muda. Isto resulta do fato destes contratos serem escritos para refletir a expectativa de um preço em um ponto no tempo, e isso não depende do caminho que o preço segue até lá. Assim, como a informação sobre o preço *spot* na maturidade do contrato é randômico e não viezado ($\varepsilon_t \sim N[0,1]$), o preço de um futuro é um passeio aleatório com tendência zero**.**

Copeland e Antikarov (2001, p.233-236) estudam três indústrias entre 1991 e 1999 em busca de evidências empíricas do teorema de Samuelson. Testam a ciclicidade de medidas de retorno e encontram resultados consistentes com o teorema. Entretanto, referem-se a outros estudos acadêmicos mais sofisticados que verificam dependência temporal, mas argumentam que poucos destes são significantes após dedução de custos de transação e ajustes ao risco. Com isso, se posicionam a favor do uso do teorema de Samuelson com propósitos práticos.

Adicionalmente ao teorema de Samuelson, em favor do MGB há o fato deste ser matematicamente mais simples do que outros processos estocásticos, além de ser estatisticamente equivalente a modelos mais sofisticados como o de reversão à média em intervalos com até 30 ou 40 anos (ver Seção 3.1.2). Por isso o MGB é o modelo estocástico mais empregado para modelar a incerteza não só em projetos, como em toda a literatura de economia e finanças. (Dias, 1996, p.106).

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos

Na Seção 2.7 demonstrou-se para um exemplo simples discreto a equivalência entre diferentes técnicas como ativos contingentes (*contingent claims*) e programação dinâmica. Conforme comentado, essa equivalência é uma propriedade geral válida inclusive com variáveis contínuas, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (1994, p.108-124). Por isso, a partir deste ponto da dissertação, faz-se a opção pela valoração por ativos contingentes (*contingent claims*) pelo seu significado econômico e o uso do argumento de não arbitragem, conceitos consagrados em finanças[18].

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB

A oportunidade gerada por uma OR é um ativo que tem valor. Se esta oportunidade for um ativo transacionado no mercado, seu preço será conhecido.

[18] Existem várias outras alternativas para resolver problemas de otimização sob incerteza. Dois exemplos são o método integral e o método evolucionário. O método integral é particularmente útil para opções perpétuas. Soma integrais estocásticas para apreçar OR em que os limites de integração são os tempos de parada ótima, quando o processo estocástico toca a curva de gatilho (ver exemplo Dixit e Pindick, 1994, Cap.9). O método evolucionário utiliza algoritmos genéticos para evoluir soluções a partir de uma estimativa inicial da curva de gatilho até se aproximar do ótimo, podendo ser combinada com SMC. (ver Dias, 2005, p.450-457 - opções evolucionárias).

Mas mesmo que não seja, seu valor pode ser calculado através de um *portfolio* de ativos transacionados que replique perfeitamente o retorno do projeto em qualquer momento futuro e em qualquer estado da natureza. Então o valor do projeto será o valor deste *portfolio*, caso contrário há uma oportunidade de arbitragem. Está implícita nesta premissa que, a firma gerencia a OR da forma mais eficiente possível, pois, de outra forma, não se elimina a oportunidade de fazer arbitragem.

Seja V o valor de um projeto segue um MGB, então:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (36)^{19}$$

O uso de ativos contingentes (*contingent claims*) requer a premissa de que as mudanças estocásticas em V sejam modeladas por um *portfolio* ou ativo gêmeo transacionado na economia. Esse *portfolio* pode ser composto por ativos financeiros como ações, por *commodities* (transacionadas no mercado à vista e futuro) ou mesmo artigos manufaturados**.**

Seja x o ativo ou *portfolio* perfeitamente correlacionado com V (a correlação de x e V com o *portfolio* de mercado são iguais: $\rho_{xm} = \rho_{vm}$), então seu processo estocástico será dado por:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$$

Note que a volatilidade σ e a tendência α de x e V são exatamente as mesmas, afinal o *portfolio* e o projeto são idênticos por construção. Seja então μ a taxa esperada de retorno do investidor que detém este ativo ou *portfolio* gêmeo. Então μ também é a taxa ajustada ao risco exigida pelo investidor que detém a oportunidade de investimento V. De acordo com o CAPM μ é dado por: $\mu = r_f + \phi.\rho_{xm}.\sigma$ onde $\phi = (r_m - r_f)/\sigma_m$ é o *market price of risk* e $\phi.\rho_{xm}.\sigma$ é o prêmio de risco π, então: $\mu = r_f + \pi$. Mas o retorno do projeto também é dado pela

---

[19] Dixit e Pindick (1994, p136-137) alertam que a equação (36) é uma abstração da realidade para a maioria dos projetos. Seja por exemplo por não contemplar a possibilidade de desativar ou abandonar um projeto, seja por não permitir valores negativos para *V* (o que ocorre na realidade), ou mesmo por não ser o MGB o processo teoricamente mais adequado para modelar *V*. Mas ainda sim o MGB é útil numa série de situações onde a equação (36) reflita a expectativa da firma sobre o valor do projeto, ou pelo menos do preço do bem produzido. Adicionalmente há de se considerar que o MGB estatisticamente não pôde ser rejeitado em favor do MRM para períodos de 30 a 40 anos e a sua simplicidade analítica, fazendo-o um sucesso na literatura (ver Seção 3.1.2).

soma da taxa de ganho de capital α com a taxa de dividendos δ: $\mu = \alpha + \delta$. Igualando as duas equações obtém-se:

$$\mu = \alpha + \delta = r_f + \pi \Rightarrow \qquad \alpha - \pi = r_f - \delta \text{ [20]} \quad (37)$$

A taxa de dividendos δ desempenha um importante papel sobre o exercício de uma opção. Para uma opção de compra financeira, se $\delta = 0$, a opção nunca é exercida antes da maturidade[21]. Isso se deve a dois motivos: Como não há custo em manter a opção de compra ($\delta = 0$), manter a opção viva no lugar do ativo subjacente funciona (até a expiração) como um seguro contra quedas do preço do ativo subjacente abaixo do preço de exercício e; Adiar o exercício permite capitalizar o investimento (preço de exercício) à taxa livre de risco até a expiração. Para a opção de investimento esta propriedade se repete[22]. Se $\delta > 0$, a taxa de retorno do projeto α (equação 43x) é menor do que a taxa de retorno μ (equação 44x) exigida pelo investidor, havendo um custo em manter a opção viva. Assim δ é um custo de oportunidade em adiar o início de um projeto que deve ser descontado do benefício da espera dado pela opção. Por outro lado, se δ é suficientemente grande, o valor da flexibilidade de adiar a decisão de investimento torna-se muito pequeno e a opção real torna-se *deep in the money*.

Para calcular o valor da opção real F considere um *portfolio* Φ dado por uma posição longa na opção e uma posição curta em n unidades do ativo gêmeo ou do projeto V, sob a hipótese do MAD (Seção 3.3.1): $\Phi = F - n.V$.

Seja n escolhido de tal forma que o *portfolio* seja livre de risco. Então num intervalo de tempo infinitesimal dt o retorno exigido pelo investidor será a taxa livre de risco: $r_f.\Phi.dt = r_f.(F - n.V).dt$.

---

[20] Ver expressão equivalente em Dixit e Pindick, 1994, p.118, equações 22 e 23.

[21] Hull (2003, p.175-176) oferece uma demonstração desta propriedade com exemplos numéricos, a qual decorre basicamente de argumentos de não arbitragem.

[22] A taxa de dividendo δ também pode ser interpretada de outras formas. Por exemplo, pode refletir: o custo para a firma da entrada de outros competidores no mercado; o FCL do projeto ou; a *convenience yeld* quando o ativo gêmeo é uma *commodity* – ver Seção 3.4.2. O valor agregado ou médio da *convenience yield* também pode ser medida no mercado *spot* e futuro de uma *commodity*.

O retorno do *portfolio* também é dado pela soma do retorno dos ativos da carteira. O retorno da opção (que não paga dividendos) é dado pelo ganho de capital dF. O retorno do projeto é dado pela soma do ganho de capital com os dividendos ($dV + \delta.V.dt$). Então o retorno da carteira Φ será: $dF - n.(dV + \delta.V.dt)$. Igualando as duas expressões:

$$dF - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \quad (38)$$

Substituindo x pelo ativo subjacente V na equação (31) do Lema de Ito, obtém-se:

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.dV^2 \quad (31)$$

Mas também se viu em (29) que $dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt$ e em (32) que $E(\varepsilon^2) = 1$, então $dx^2 = \sigma^2.x^2.dt$ ou de forma mais genérica:

$$dx^2 = b^2(x,t).dt \quad (39)$$

Considerando que $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ (36), então $dV^2 = \sigma^2.V^2.dt$. Substituindo dV^2 na equação (31) anterior e esta em (38):

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt \Rightarrow$$

$$F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \Rightarrow$$

$$(F_v - n).dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0$$

Como o *portfolio* Φ é sem risco e o primeiro termo da expressão acima com dV tem risco ($dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$), este deve ser nulo, então:

$$(F_v - n).dV = 0 \Rightarrow F_v - n = 0 \Rightarrow n = F_v = \partial F / \partial V$$

Note que este resultado é o mesmo *delta hedging* obtido na Seção 2.7 na forma discreta - equação (11). Retornando este resultado à última equação diferencial, dividindo por dt e rearranjando os termos:

$$0.dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

A equação (40) é a conhecida equação diferencial parcial (EDP) de Black & Scholes & Merton (B&S&M)[23] com dividendos contínuos. Note que na sua dedução, embora tenha sido citada a opção de investimento como exemplo, não foi assumida nenhuma premissa sobre o tipo da opção envolvida, se *call* ou *put*, se americana ou européia. Portanto, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ.

A valoração por ativos contingentes requer a existência de um conjunto de ativos transacionados no mercado diversificados o suficiente, de tal forma que seja possível montar um *portfolio* que não só replique o risco do projeto como também seja perfeitamente correlacionado com este. Esta é uma premissa exigente que não é feita na valoração com programação dinâmica, que simplesmente considera a valoração de risco subjetiva do tomador de decisão (Dixit e Pindick, 1994, p.121).

Apesar desta diferença significativa, a equação diferencial obtida por programação dinâmica correspondente à EDP (40) é dada por:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + \alpha.F_v.V - \mu.F = -F_t$$ [24]

As diferenças entre a EDP da programação dinâmica em relação à EDP de contingentes são duas[25]: A taxa de desconto ajustada o risco μ (exógena) no lugar da taxa livre de risco (decorrente do equilíbrio no mercado de capitais); A tendência α do mundo real no lugar da tendência neutra ao risco $(r_f - \delta)$. Em outras

[23] Originalmente a equação de Black & Scholes não previa dividendos (δ=0), tendo este sido incorporado por Merton (ver, por exemplo, Hull, 2003, p.243).

[24] Ver Dixit e Pindick, 1994, p.109. Considerando π(x,t)=0 , a EDP do valor da firma sem fluxo de caixa imediato é idêntica a de uma oportunidade de investimento.

[25] Ver Seção 3.5.5 para analogia com a forma discreta.

palavras, pode-se avaliar o projeto descontando-o à taxa livre de risco imaginando que este segue um MGB com *drift* $(r_f - \delta)$ neutro ao risco.

Note que, pela equação (45), no mundo real $\alpha - \pi = r_f - \delta$. Mas no mundo neutro ao risco (e também com um *portfolio* Φ livre de risco), o retorno exigido pelo investidor é a taxa livre de risco. Desta forma o processo estocástico do ativo subjacente assume uma nova tendência $\alpha' = r_f - \delta = \alpha - \pi$, como ocorre na equação (40). Da equação (36), o MGB neutro ao risco será dado por:

$$dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz \Rightarrow \qquad dV = (r - \delta).V.dt + \sigma.V.dz \quad (41)$$

Como dito, a equação (40) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ de um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB com dividendos contínuos δ. O que permitirá adaptar a equação (40) para uma *call* ou *put*, americana ou européia, finita ou perpétua e o valor do seu *payoff* são as condições de contorno, necessárias para sua solução.

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica

Nesta Seção descreve-se o modelo apresentado por Dixit e Pindick (1994, p.147-150) para o problema da firma que precisa decidir o momento ótimo para exercer a opção de investir em um projeto cujo prazo de expiração é infinito (*call* americana perpétua).

A oportunidade de investimento possui duas características fundamentais (ver Seção 2.1): O investimento é pelo menos parcialmente irreversível, ou seja, é um custo afundado (*sunk cost*) que não pode ser recuperado; A decisão de investimento pode ser postergada de forma que a firma tem a flexibilidade de esperar e verificar como se comporta a(s) fonte(s) de incerteza(s) de um projeto antes de comprometer recursos irreversivelmente. Considere o custo do investimento I conhecido e fixo, e que o processo estocástico do valor do projeto seja dado pela equação (36): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$. Uma das implicações do MGB é que uma vez que o valor do projeto valha zero, dV e V sempre serão zero (barreira absorvente). Em conseqüência a opção de investir perderá seu valor:

$$V = 0 \Rightarrow dV = \alpha.0.dt + \sigma.0.dz = 0 \Rightarrow V + dV = 0 \Leftrightarrow F(V = 0) = 0 \quad (42)$$

Se o tempo de expiração é infinito e os termos α, σ e V não dependerem explicitamente do tempo, então o valor da opção também não dependerá (Dixit e Pindick, 1994, p.107). Isso significa que $\partial F / \partial t = F_t = 0$, $F_v = F'$ e $F_{vv} = F''$, e a EDP (40) torna-se a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = 0 \quad (43)$$

Como visto na Seção 2.4, para uma opção de investimento a cada instante t há um valor V^* abaixo do qual continuar esperando é a decisão ótima e vice-versa. Com isso é possível definir uma curva de $V = V^*(t)$ - curva de gatilho – a partir da qual a decisão ótima é investir. Nesta curva a opção de investir vale exatamente o VPL do projeto:

$$F^*(V^*(t), t) = V^*(t) - I \quad (44)$$

Essa condição é denominada de *value matching condition* e a curva definida por $V^*(t)$ é denominada de "fronteira" livre (*free boundary).*

A *value matching condition* é necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. A segunda condição necessária, denominada de contato alto ou de contato suave (*smooth pasting condition*), é que na "fronteira" livre o valor da opção e do VPL devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^*:

$$F_v(V^*(t), t) = (V^*(t) - I)_v \Rightarrow F_v(V^*(t), t) = 1 \quad (45)$$

Essa condição não é facilmente percebida, mas pode ser verificada graficamente com certa facilidade, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (2004, p.130-131).

Então o valor de uma opção de investimento americana perpétua é dado pela equação (43) sujeita às condições de contorno dadas pelas equações (42), (44) e (45):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).n.V - r_f.F = 0 \qquad (43)$$

$$F(V=0) = 0 \qquad (42)$$

$$F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I \qquad (44)$$

$$F_v(V^*(t),t) = 1 \qquad (45)$$

A EDO (43) possui solução analítica definida dada por (ver Brandão, Cap.5, p.8-14):

$F(V) = A.V^{\beta_1}$ (46) onde $A = (V^* - I)/(V^*)^{\beta 1}$ (47);

$\beta_1 = 1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2]^2 + 2.r_f/\sigma^2}$ (48) e $V^* = \beta_1.I/(\beta_1 - 1)$ (49)

Note que o valor do gatilho dado por (49) não depende de t pois a opção é perpétua.

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração

Ao contrário da opção de investimento perpétua, o tempo de expiração agora é finito e, embora os termos α e σ possam ser constantes, o valor do projeto e o valor da opção de investir são variáveis com o tempo. Com isso $F_t \neq 0$ e a EDO (40) permanece inalterada. As condições de contorno (42), (44) e (45) continuam válidas, havendo uma quarta condição adicional: Na expiração da OR de investir, vale a regra do VPL tradicional:

Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

A EDP (40) para uma opção americana de compra com $\delta > 0$[26] não apresenta solução analítica. Dixit e Pindick (1994, p.401), entretanto, chamam atenção para o fato de que o valor do gatilho de uma OR é pouco sensível ao tempo de expiração quando este é superior a dois anos. Neste tipo de situação, sugerem que a solução

[26] Opções americanas de compra sem dividendos nunca são exercidas antecipadamente (ver Seção 4.5.1 e nota de rodapé 21). Nesta situação equiparam-se a opções européias e a EDP (40) toma as soluções originalmente apresentadas por Blak e Sholes – ver, por exemplo, Hulll, 2003, p. 246.

analítica para uma opção de compra americana perpétua (equações 54 e 55) pode ser uma aproximação razoável.

Entretanto, existem várias alternativas mais precisas para o problema de valoração de uma OR, aqui genericamente denominadas de soluções não analíticas.

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB

A EDP (49) de Black & Sholes & Merton (B&S&M) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ. Mas soluções analíticas nem sempre existem e, na ausência destas, existem alternativas com métodos numéricos e as aproximações analíticas. Na prática, a solução deve ser escolhida com base nas características do derivativo e na precisão desejada.

Hull (2003, p.392-427) e Trigeorgis (1996, p.305-339) destacam e discutem (os mesmos) três métodos numéricos para aplicações em opções financeiras e reais: Simulação de Monte Carlo (SMC), árvores (binomiais, trinomiais, etc. – métodos gradeados) e diferenças finitas.

A SMC é relativamente simples e flexível, além de permitir o uso da avaliação neutra ao risco. Por funcionar do início para o fim da vida da opção (*foward*), adapta-se bem para opções européias, para derivativos com várias variáveis de estado e com complexidade no cálculo dos *payoffs*. A solução com árvores, extensivamente adotada no livro de Copeland e Antikarov (2001), simula os processos estocásticos subjacentes. Geralmente são mais simples, intuitivas e flexíveis para lidar com diferentes processos estocásticos como difusão, saltos ou reversão à média, sempre a partir dos preços do presente. Mas a valoração sempre é feita a partir da expiração para o início da vida da opção, a exemplo do que ocorre no cálculo por diferenças finitas. Ambos os métodos lidam bem tanto com opções do tipo americanas como européias, mas ficam limitados quando os *payoffs* dependem de alguma forma do histórico passado (por exemplo, opções do tipo *lookback*[27]) ou do valor corrente. Além disso, tornam-se progressivamente mais complicadas à medida que aumenta o

[27] *Look back options* são opções cujo *payoff* depende do valor máximo ou mínimo atingido pelo ativo subjacente durante a vida da opção. Ver Hull (2003, p.441-442).

número de variáveis envolvidas. Os métodos de diferenças finitas (explícito e implícito) resolvem a equação diferencial convertendo-a em uma equação de diferenças. O método explícito é muito parecido com uma árvore trinomial enquanto que o implícito, embora mais complicado, não apresenta os problemas de convergência[28] do primeiro.

As aproximações analíticas têm a vantagem de tornar os cálculos instantâneos e permitir uma interpretação clara da relação entre as variáveis envolvidas. Por esses motivos essa é a técnica adotada nesta dissertação. Consiste em adaptar o problema de apreçamento de derivativos e obter uma expressão analítica que se aproxima satisfatoriamente da solução verdadeira da EDP (49) e suas condições de contorno. Existem várias aproximações analíticas para opções americanas. A mais conhecida delas (Hull, 2003, p.427) é a aproximação quadrática de MacMillan (1986), estendida por Barone-Adesi e Whaley (1987), que pode ser utilizada para *calls* e *puts* sobre diversos ativos financeiros e OR. Esta aproximação se baseia na premissa de que o preço de uma opção americana é dado pelo preço de uma européia adicionado de um prêmio pela possibilidade do exercício antecipado. Como essas duas opções satisfazem a mesma equação diferencial (49), este prêmio ou diferença também deve satisfazê-la. Hull (2003, p. 433-434) apresenta resumidamente esta aproximação, que pode também ser vista com um pouco mais de detalhe em Dias (1996, p.217-220).

Broadie e Detemple (1996) desenvolvem limites inferiores e superiores para o preço de opções americanas e apresentam duas aproximações (LBA e LUBA) para o valor destas com base nestes limites. O *Lower Bound Approximationa* (LBA) apresenta Raiz do erro Quadrático Médio (RQM – ver adiante) de 0,1% para um range grande de parâmetros, considerando uma amostra de 2271 opções. O *Lower and Upper Bound Approximation* (LUBA) apresenta RQM de 0,02%. Esses erros foram medidos em relação à estimativa do método binomial com 15000 nós, assumido como o valor verdadeiro da opção por sua convergência.

O RQM é uma medida de erro definida como:

---

[28] Uma solução é estável se é finita e é convergente se tende para as condições de contorno adequadamente. Uma solução estável e convergente é dita consistente se ela é realmente uma aproximação do problema original (Trigeorgis, 1996, op cit).

$$RQM = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \quad (51) \quad \text{com} \quad e_i = \frac{C_i}{C} - 1$$

Onde e_i é o erro relativo *i*-ésimo valor estimado C_i da opção em relação ao seu valor "real" C e n é o número de estimativas. Para tornar o erro relativo significativo, os valores da opção C_i inferiores a 0,5 são desconsiderados.

Broadie e Detemple (op. cit.) também comparam a precisão e velocidade de cálculo de suas duas estimativas com diversos métodos conhecidos, inclusive o de Barone-Adesi e Whaley. Apesar de sistematicamente apresentarem-se mais rápidos que os demais, o LBA e o LUBA são relativamente complicados de implementar, o que segundo os autores, favoreceria binomiais com desempenho similar. A aproximação de Baroni-Adesi e Whaley apresentou um RQM de 0,6% para opções com maturidade inferior a um ano, e de cerca de 2% para maturidades superiores.

O erro crescente da aproximação de Barone-Adesi e Whaley desfavorece o seu uso para OR em que o tempo de expiração é de vários anos. Bjerksund e Stensland (1993) propuseram uma alternativa de aproximação analítica mais acurada para opções americanas (Haug, 1998). Baseia-se na imposição de uma estratégia de exercício factível, porém não ótima, através de um preço de exercício antecipado único e constante, aqui denominado de modelo de um período.

Bjerksund e Stensland (2002) apresentam uma generalização do seu modelo inicial dividindo o tempo até a maturidade em dois períodos, cada qual com um preço constante de exercício. O segundo período apresenta duração e preço de exercício menor do que o primeiro, refletindo a perda de valor da opção até sua expiração. Os autores comparam os seus modelos de um e dois períodos com o valor calculado por uma binomial com 3201 pontos, a qual é assumida como o valor verdadeiro da opção. Os resultados indicam que os dois modelos calculam valores muito próximos ou idênticos, entretanto o modelo de dois períodos apresenta uma estimativa mais acurada do valor verdadeiro de opções americanas.

Este teste numérico foi realizado com os mesmos parâmetros adotados no artigo de Barone-Adesi e Whaley (1987), o que permite comparar o desempenho das duas aproximações para várias opções de compra e de venda com expiração inferior a 6 meses. O resultado desta análise não favorece nenhuma das duas

aproximações, já que uma ou outra aproximação apresenta menor ou maior RQM a depender do valor verdadeiro da opção adotado: Diferenças finitas no artigo de Baroni-Adesi e Whaley ou binomial no de Bjerksund e Stensland. Os RQM observados variam entre 0,52% e 0,82% para opções de compra e entre 0,92% e 1,14% para opções de venda.

Bjerksund e Stensland (2002) também utilizam os mesmos parâmetros para opções com expiração de 3 anos (ver Tabela 401). Calculado o RQM para o modelo de um período (de menor precisão), se encontrou valores de 0,62% e 0,73% para *call e puts* respectivamente. Estes números são bem inferiores ao RQM de 2% reportados por Broadie e Detemple (op. cit.) em sua análise com a aproximação de Baroni-Adesi e Whaley para opções com expiração superior a um ano.

Esses resultados revelam que, para o conjunto de dados considerados, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período[29] apresentam uma performance superior em relação ao de Baroni-Adesi e Whaley ao não divergir o RQM com o aumento do prazo de expiração para 3 anos, o que está de acordo com os resultados obtidos por Haug (1998),

Adicionalmente, deve-se ter em mente que as aproximações de Bjerksund e Stensland representam limites inferiores (acurados) para o valor verdadeiro da opção americana, o que se por um lado tem a desvantagem de antecipar de forma insignificante o exercício ótimo, por outro tem a vantagem de revelar o sinal do erro da estimativa do valor da opção.

Embora a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período apresente performance melhor do que a de Baroni-Adesei e Whaley, também possui limitações. Testes de sensibilidade mostram que, quando a taxa de dividendos é menor ou igual à taxa livre de risco ($\delta \leq r_f$), o valor crítico e o valor da opção convergem para os valores da opção perpétua à medida que se aumenta o prazo de expiração. Entretanto, à medida que cresce a diferença entre a taxa de dividendos e a taxa livre de risco, há uma perda progressiva de precisão com o aumento do tempo de expiração da opção.

[29] Naturalmente o mesmo vale para o modelo de Bjerksund e Stensland com dois subperíodos, que é mais preciso do que o de um período.

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor "verdadeiro" estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%.

			Call Americana			Put Americana		
Parâmetros da opção		Preço Ativo Base	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = (B&S/ Binomial - 1	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = B&S/ Binomial – 1
K =	100	80	2,34	2,30	-1,71%	25,66	25,61	-0,19%
r_f =	0,08	90	4,75	4,71	-0,84%	20,08	20,04	-0,20%
σ =	0,2	100	8,49	8,44	-0,59%	15,50	15,47	-0,19%
T =	3	110	13,79	13,74	-0,36%	11,80	11,78	-0,17%
δ =	0,12	120	20,88	20,85	-0,14%	8,89	8,87	-0,22%
K =	100	80	3,98	3,95	-0,75%	22,21	22,12	-0,41%
r_f =	0,08	90	7,25	7,20	-0,69%	16,21	16,14	-0,43%
σ =	0,2	100	11,70	11,64	-0,51%	11,70	11,64	-0,51%
T =	3	110	17,31	17,24	-0,40%	8,37	8,31	-0,72%
δ =	0,8	120	24,01	23,93	-0,33%	5,93	5,89	-0,67%
K =	100	80	6,88	6,88	0,00%	20,35	20,32	-0,15%
r_f =	0,08	90	11,49	11,49	0,00%	13,50	13,43	-0,52%
σ =	0,4	100	17,21	17,21	0,00%	8,94	8,86	-0,89%
T =	3	110	23,84	23,84	0,00%	5,91	5,83	-1,35%
δ =	0,4	120	31,17	31,16	-0,03%	3,90	3,83	-1,79%
K =	100	80						
r_f =	0,08	90				11,70	11,67	-0,26%
σ =	0,2	100	Sem exercício antecipado			6,93	6,90	-0,43%
T =	3	110				4,16	4,12	-0,96%
δ =	0	120				2,51	2,48	-1,20%
- Média do erro relativo				-0,42%			-0,56%	
- Desvio Padrão do erro relativo				0,46%			0,47%	
- Raiz do erro Quadrático Médio (RQM)				0,62%			0,73%	

A precisão satisfatória da aproximação analítica de Bjerksund e Stensland para OR, a sua superioridade em relação à aproximação de Barone-Adesi e Whaley, somados à maior simplicidade analítica do modelo de um período (em relação ao modelo de dois períodos), são os motivos da opção por esta aproximação nesta dissertação.

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993)

Bjerksund e Stensland assumem o modelo de Black & Sholes & Merton com uma taxa livre de risco positiva, onde o preço do ativo subjacente V segue um MGB ($dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz$) em relação à medida equivalente de Martingale (mundo neutro ao risco - $\alpha' = r_f - \delta$). Considere I como o preço de exercício (investimento) e X o nível de preço (gatilho) antecipado (estratégia não ótima) em que o decisor opta por exercer a OR ($X > I$).

Dada esta estratégia factível e não ótima, o preço de uma opção americana de compra fica reduzido a dois componentes: (i) Uma opção de compra européia do tipo *up-and-out*[30] (para cima e para fora) com uma barreira de nocaute[31] (*knock-out barrier*) dada por X, *strike* I e maturidade T; (ii) Um *payoff* $X - I$ que é recebido se a opção é exercida antes da maturidade. Então, o valor aproximado da opção americana ($\bar{c}$) é dado por:

$$\bar{c}(V,I,T,r_f,\alpha,\sigma,X) = \nu(X).V^{\beta_1} - \nu(X).\varphi(V,T|\beta_1,X,X) + \varphi(V,T|1,X,X) - \varphi(V,T|\beta_1,I,X) - I.\varphi(V,T|0,X,X) + I.\varphi(V,T|0,I,X) \quad (52)$$

Onde os dois primeiros termos do lado direito da igualdade representam o *payoff* $X - I$ e os quatro últimos o valor da *call* européia *up-and-out*. Os termos $\nu(X), \beta_1$ e $\varphi(V,T|\gamma,H,X)$ são dados por:

$$\nu(X) = (X - I).X^{-\beta_1}$$

$$\beta_1 = (1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2) + \sqrt{((r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2.r_f/\sigma^2} \quad (48)$$

30 Uma call do tipo *up-and-out* (c_{uo}) é uma opção com barreira que deixa de existir quando o preço do ativo subjacente aumenta até um nível pré-estabelecido, superior ao preço inicial. Reciprocamente, a *call* do tipo *up-and-in* (c_{ui}) é aquela que passa a existir quando o preço pré-estabelecido do ativo subjacente é atingido. Note que $c = c_{uo+} c_{ui}$. (Ver Hull 2003, p.438-441).

31 Nível de preço que se atingido pelo ativo subjacente, implica no exercício imediato da opção, ou seja, no qual o decisor "mata" a OR.

$$\varphi(V,T|\gamma,H,X)=\exp(\lambda.T).\{N[\frac{-\ln(V/H)+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]-$$
$$(X/S)^{\kappa}.N[\frac{-\ln(X^2/(V.H))+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]$$

Note que as variáveis γ e H de acordo com a equação (52) podem assumir os seguintes valores: $\gamma \in \{\beta_1,0,1\}$ e $H \in \{X,I\}$. Os termos λ e κ são dados por:

$$\lambda=-r_f+\gamma.(r_f-\delta)+1/2.\gamma.(\gamma-1).\sigma^2$$ [32] e $$\kappa=2.(r_f-\delta)/\sigma^2+(2\gamma-1)$$

Com a estratégia não ótima de adotar um preço de exercício antecipado (gatilho) X, o valor obtido para a opção representa um limite inferior para o verdadeiro valor. As investigações numéricas apresentadas pelos autores (Bjerksund e Stensland, 2002, op. cit.) mostram que essa estimativa pode servir como uma aproximação acurada do verdadeiro valor (como se observa nas diversas tabelas comparativas apresentadas no artigo, tanto para *calls* como *puts*). Bjerksund e Stensland (2002, op. cit.) apresentam uma nova estimativa para o valor do gatilho antecipado X, ligeiramente modificada em relação ao trabalho de 1993:

$$X_t=B_0+(B_\infty-B_0).\{1-\exp[h(t)]\} \quad (53)$$

$$h(t)=-((r_f-\delta).t+2.\sigma\sqrt{t}).\frac{I^2}{(B_\infty-B_0).B_0} \quad \text{com:}$$

$$B_\infty=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}.I \text{ e } B_0=Máx\{I,\frac{r_f}{\delta}.I\} \quad (54)$$

Onde B_∞ representa o gatilho da opção de compra americana perpétua, equações (49) - Seção 3.4.2. A equação (53) tem papel destacado nesta dissertação, pois será com ela que serão construídas as curvas de gatilho apresentadas no Capítulo 5.

A curva de gatilho da opção de investimento americana é contínua no intervalo [0,T), mas pode ser descontínua em T quando $r_f > \delta$ - ver (54). Assim o

[32] O valor de λ adotado, a exemplo do que fazem Bjerksund e Stensland é o apresentado no artigo de 2002, em detrimento do original apresentado em 1993.

limite perto da expiração é dado por $\lim_{t \to T-}(X_t) = Máx[I, (r_f / \delta).I]$ e na expiração é igual a I.

Os resultados obtidos até aqui para opções de compra americana, perpétuas ou com expiração finita, também podem ser aplicadas para opções de venda. Esse desdobramento torna-se relativamente simples considerando a simetria entre *calls* e *puts* americanas.

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas

A simetria entre opções de compra e venda (PCS – *Put-call syimetry*) é uma propriedade de opções americanas segundo a qual, o preço de uma opção de venda pode ser obtido a partir da troca entre parâmetros da opção de compra correspondente. De acordo com Detemple (2006, Cap.3, p.67-104), que apresenta e aprofunda os resultados mais recentes das pesquisas sobre o assunto, esta simetria foi originalmente demonstrada por McDonald e Schroder (1990) e Bjerksund e Stensland (1993b) em tempo discreto e contínuo respectivamente.

Trata-se de uma importante propriedade das opções, pois permite que o mesmo algoritmo possa ser utilizado para apreçar e determinar as regras ótimas de exercício para opções de compra e de venda, mesmo na ausência de simetria no preço do ativo subjacente ou na presença de descontinuidades (Geman et al, 1995, apud Detemple *op. cit.*). Em alguns casos, a PCS reduz o número de variáveis necessárias para o apreçamento de opções, além de permitir *insights* sobre o relacionamento econômico entre contratos,

A homogeneidade de grau 1 da função de *payoff* de uma opção (em relação ao preço do ativo subjacente e ao preço de exercício) faz com que a PCS decorra da simples troca de numerário. Com o novo numerário, o apreçamento também pode ser feito por *contingent claims* com os mesmos *portfolios* replicantes. Isso significa que a opção simétrica também pode ser avaliada em uma economia auxiliar com o novo numerário e uma taxa de juros ajustada, na qual o apreçamento da opção satisfaz as mesmas equações de apreçamento. Essas características também permitem a extensão da PCS para contratos mais complexos sobre um ou mais ativos. Para o propósito desta dissertação, será suficiente a discussão do modelo sobre um MGB.

Considere uma opção de compra americana sobre um MGB neutro ao risco, como na Equação (41): $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$, com r_f, δ e σ constantes. Na Seção 3.5 discutiu-se brevemente que o preço deste derivativo pode ser visto como o preço de uma *call* européia $c(V_t, I, r_f, \delta, t)$ definido por Black e Sholes (1973) e Merton (1973) somado por um prêmio pela possibilidade de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$:

$$C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = c(V_t, I, r_f, \delta, t) + \Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (55)$$

Onde $C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é o preço de uma *call* americana e $B^c(\cdot)$ é a "fronteira" livre (*free boundary)* da opção de compra que soluciona a seguinte integral recursiva:

$$B_\tau^c - I = C(B_t^c, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (56), \text{ sujeito a: } B_T^c - I = Máx(I, I.r_f / \delta) \quad (57)$$

Seja $B^c(I, r_f, \delta, t)$ a solução da equação (56).

O prêmio de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é definido como:

$$\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = \int_t^T \Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c).d\tau \quad (58), \text{ onde:}$$

$$\Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c) = \delta.V_t.\exp[-\delta.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t)] - r_f.I.\exp[-r_f.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) - \sigma.\sqrt{\tau - t}] \quad (59).$$

Onde $N[\cdot]$ é a probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão e:

$$d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) = \frac{\ln(V_t / B_\tau^c) + (r_f - \delta + 0{,}5.\sigma^2).(\tau - t)}{\sigma.\sqrt{(\tau - t)}} \quad (60)$$

A equação (58) não tem solução analítica, motivo pelo qual a opção americana de compra também não tem. De acordo com McDonald e Schroder (apud Detemple, *op. cit.*) as equações correspondentes para uma opção de venda americana podem ser obtidas a partir do conjunto de equações (55) a (60), fazendo uma simples troca de variáveis. Este resultado é enunciado pelo seguinte teorema (Detemple, *op. cit.*, p.72):

Teorema: Considere opções de venda e compra americanas com preço de exercício I e expiração T idênticos, escritos sobre um ativo V_t que segue um MGB neutro ao risco $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$. Sejam $P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(\cdot))$ e $C(V, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ as respectivas funções de preço e $B^P(I, r_f, \delta, \cdot)$ e $B^C(V, r_f, \delta, \cdot)$ os correspondentes preços críticos. Então:

$$P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(I, r_f, \delta, \cdot)) = C(I, V, \delta, r_f, t, B^c(V, \delta, r_f, \cdot)) \quad (61)$$

E para todo $t \in \{0, T\}$:

$$B^P(I, r_f, \delta, t) = \frac{V.I}{B^c(V, \delta, r_f, t)} \quad (62)$$

Assim, o valor de uma *put* americana é o mesmo de uma *call* também americana com preço de exercício V e expiração T, numa economia com taxa de juros livre de risco δ, na qual o ativo subjacente, sob medida neutra ao risco, segue um MGB com dividendos r_f, volatilidade σ e valor inicial I. Além disso, a curva de gatilho da *put* americana é dada pelo inverso da curva de gatilho da *call* multiplicado pelo produto $V.I$ - Equação (62).

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção

Em situações de planejamento de investimentos duas informações são preciosas para projetos que não se encontram *deep in the money*: Quando se espera que a opção de investimento se torne apta ao exercício e; Qual é a probabilidade deste exercício ocorrer.

O tempo esperado de toque é o tempo esperado para que uma variável que segue um processo estocástico alcance um certo valor, no caso a curva de gatilho, quando então a opção deve ser exercida (Dias, p.1-2, http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html). O tempo esperado de toque é matematicamente definido como:

$$T^* = \inf\{t \geq 0; V \geq V^*\}$$

Ao contrário do que ocorre no apreçamento de opções, o tempo esperado de toque depende da tendência real (α) do processo estocástico. Como visto na Seção 3.5.1, a curva de gatilho real pode ser calculada com o processo estocástico neutro ao risco (*drift* $\alpha - \pi = r - \delta$), mas utilizar este mesmo processo implica em erro na resposta às duas questões. O tempo esperado de toque calculado com o processo neutro ao risco seria maior do que o verdadeiro valor e a probabilidade de exercício seria menor do que a verdadeira. Com um menor *drift*, o processo estocástico demora mais tempo para tocar a barreira da curva de gatilho pela primeira vez, e no caso de uma OR finita, toca menos vezes a barreira até a expiração.

A exemplo do que ocorre com as opções de investimento (Seções 3.4.2 e 3.5), o tempo esperado de toque possui uma solução analítica para opções perpétuas, mas não para as opções com expiração finita. Métodos numéricos podem resolver este problema. Dias (op.cit.) sugere a adoção de Simulação de Monte Carlo por ser mais simples dado que, a curva de gatilho pode ser determinada com antecedência e precisão satisfatória utilizando-se aproximações analíticas (Seção 3.5.1, no caso do MGB).

Para isso basta simular o processo estocástico real um número grande de vezes e observar quantas vezes a opção é exercida. A razão entre o número de exercícios e o número de simulações fornece uma estimativa amostral da probabilidade de exercício da opção. Dado o exercício, a média condicional dos tempos de toque é uma estimativa amostral do tempo esperado de toque. Este é o procedimento adotado na Seção 5. 3.

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P

A indústria de petróleo consiste de uma cadeia de atividades de produção, transformação e comercialização de hidrocarbonetos líquidos e gasosos em uma variedade de produtos de tecnologia. De forma simplificada, as atividades neste setor envolvem ativos reais de exploração e produção de petróleo, transporte, refino, distribuição, comercialização, petroquímica, fertilizantes, geração de energia elétrica, etc. As empresas atuam em um ou vários elos (segmentos) da cadeia simultaneamente, tornando-se progressivamente integradas. As grandes corporações têm se diversificado ainda mais, rompendo os limites tradicionais da indústria petrolífera e adotando o conceito de empresas de energia.

Na ausência de um mercado suficientemente desenvolvido para os ativos reais da indústria do petróleo, a otimização dinâmica e contínua de um *portfolio* de ativos reais revela-se onerosa e limitada em relação ao que ocorre com os ativos financeiros. Por esses motivos os investimentos em projetos e vendas de ativos reais devem ser bem fundamentados, de um lado avaliando-se o impacto sobre o *portfolio* da companhia e de outro, certificando-se sobre o valor das flexibilidades embutidas nos ativos. Do ponto de vista de gestão de *portfolio*, as principais OR a serem consideradas são opções de investimento, desinvestimento e abandono.

No contexto do *portfolio* de uma empresa de petróleo com ativos reais de diversos segmentos, modelos de OR mais gerais e simples tornam-se valiosos: Se por um lado estes modelos podem ser adaptados com facilidade diferente ativos do *portfolio,* por outro facilitam a sua implementação dentro da organização.

São discutidos em seguida modelos de OR simples e compostas de ativos de exploração e produção de petróleo, que por serem os ativos básicos das grandes corporações do setor, apresentam uma literatura mais desenvolvida.

Na Seção 4.1 são discutidos os principais tipos de OR na área de exploração e produção de petróleo. Na Seção 4.2 são revistos os principais argumentos que justificam a adoção do MGB para o preço do ativo subjacente. Considerando a hipótese de *Marketed Asset Disclaimer* (Seção 3.3.1), as OR serão modeladas tendo como ativo subjacente os próprios projetos de investimento ou ativos reais já em operação. Na Seção 4.3 são discutidos alguns modelos de OR da área de E&P. O

Anexo I apresenta um pequeno glossário de termos técnicos da área de petróleo citados neste texto.

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo

A Exploração e Produção (E&P) de petróleo é a base ou o primeiro elo da cadeia de atividades da indústria do petróleo[33]. A Exploração é o conjunto de atividades de pesquisa que visam identificar e testar situações geológicas favoráveis à acumulação de petróleo. Uma vez confirmada a existência de petróleo em uma área, segue-se um conjunto de atividades denominadas de delimitação (*appraisal*) que visam diminuir a incerteza sobre o volume de hidrocarboneto descoberto e sua produtividade. Obtidos novamente resultados favoráveis, executa-se outro conjunto de atividades que visam permitir a produção comercial de petróleo, denominada de desenvolvimento da produção (*development*). Ao longo ou ao final desta fase, o campo de petróleo passa a produzir em escala e de forma contínua, iniciando a fase de produção. Durante a fase de produção, podem surgir vários novos projetos de investimento que visam aumentar o volume recuperável de petróleo, sua produtividade ou o retorno do ativo em produção com a redução de custos operacionais. A Figura 10 mostra de forma esquemática as principais OR em projeto típico de E&P de petróleo.

Dias (1996, p.64-65) descreve as principais OR relacionadas ao processo E&P de petróleo, transcritos a seguir:

Quando se tem apenas uma área potencialmente petrolífera (bloco), eventualmente com mapas de sísmica 2D, existe apenas uma probabilidade "p" de se descobrir petróleo, e em caso de haver a descoberta, a reserva esperada é "B". Aqui se poderia subdividir essa opção em duas: opção de explorar (investir em um poço pioneiro) e opção de delimitar (em caso de descoberta, investir em poços delimitadores e em sísmica de detalhe e/ou 3D). O direito de explorar esse bloco pode ser oriundo de um monopólio estatal (opção perpétua) ou de uma concessão governamental obtido por licitação (lease). Em ambos os casos, esse direito é uma opção de exploração, que se exercida (através do pagamento do investimento em exploração) pode levar à descoberta (ou não) de petróleo e à delimitação do campo,

[33] No Anexo 1 encontra-se um pequeno glossário de termos da indústria de petróleo utilizados nesta dissertação.

obtendo-se as chamadas "reservas não-desenvolvidas", além de obter uma outra opção, a de explotar (produzir) o campo. Uma característica dessa fase é que a incerteza técnica é mais relevante que a incerteza econômica.

Uma vez descoberto e delimitado o campo, o gerente tem a opção de explotar (ou de produzir, ou de desenvolver o campo). Através do exercício dessa opção (pagando o custo de investimento no desenvolvimento do campo), o gerente transforma o ativo "reserva não-desenvolvida" em "reserva desenvolvida" (jazida produzindo ou pronta para tal). Além disso, com o exercício dessa opção se obtém novas opções: as opções de expandir a produção (ex.: projetos de desenvolvimento complementar, ou de adensamento de malha, ou de recuperação secundária/métodos especiais), além das opções de interromper provisoriamente a produção e até de abandonar o campo.

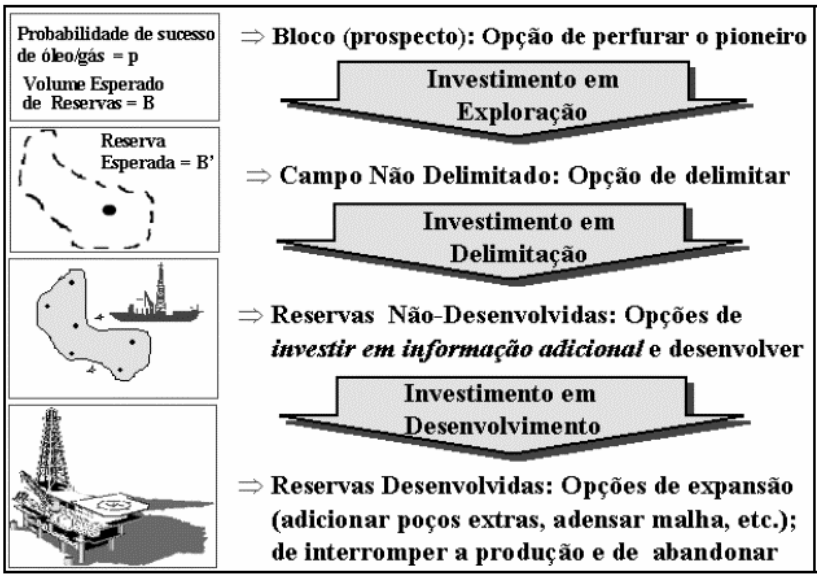

Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005, p.45).

As opções de exploração, delimitação e desenvolvimento da produção são OR estratégicas[34] de investimentos seqüenciais que podem ser avaliadas em conjunto ou isoladamente. Se uma concessão encontra-se na fase exploratória ou de delimitação, a decisão de investimento é uma opção de compra composta (o

[34] As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desenvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio (ver Seção 2.4.1).

sucesso na exploração cria a opção de delimitação e o sucesso desta cria a opção de desenvolvimento). Então o decisor somente deve exercer a primeira opção de investimento se as opções subseqüentes também estiverem *deep in the money*. De outra forma, se a OR de exploração estiver *deep in the money*, mas as OR de delimitação ou de produção não estiverem, é mais vantajoso para a empresa aplicar o recurso deste investimento no mercado financeiro e esperar do que exercer a primeira opção imediatamente e ficar aguardando o *timing* do exercício da segunda.

Deste ponto de vista, a OR de exploração é uma opção americana de compra composta sobre uma opção americana simples de delimitação (*call on call*). A opção de delimitação também é uma americana de compra composta sobre a opção de desenvolvimento, que por sua vez é uma *call* americana simples. Na Seção 4.3.3 é discutido um modelo para opções de exploração compostas**.**

Opções de expandir, interromper (parada temporária) ou abandonar a produção são OR operacionais[35]. Uma opção de expandir a produção ou qualquer outra que aumente a lucratividade de um campo de petróleo já em produção pode ser tratada como uma *call* americana simples, cuja expiração ocorre dentro do período de produção (no Brasil, 27 anos). Opções de interromper provisoriamente a produção (parada temporária) podem ocorrer se há a esperança de se voltar a produzir economicamente[36]. Por fim, as opções de abandonar ou vender um campo de petróleo são *puts* americanas, podendo ser avaliadas por um mesmo modelo. A diferença básica entre elas será o preço de exercício. No abandono este preço é um custo, exceto que haja algum valor residual suficientemente alto (ver Exemplo 2 da Seção 2.2 para a discussão da regra de decisão). Já opção de venda o preço de exercício é uma receita, portanto um valor positivo.

Em projetos de E&P ocorre a estreita relação entre OR estratégicas e operacionais descrita por Trigeorgis (1996, p.227-256, ver Seção 2.6.1). As várias flexibilidades que podem ocorrer em um campo de petróleo fazem com que surjam

---

[35] As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. Ver Seção 3.4.1.

[36] O custo de desmobilização temporária, preservação, e retomada da produção são determinantes nessa decisão. Em campos pouco atrativos pode ser preferível produzir com máxima terceirização e contratos de curto prazo de forma a ter um valor atraente para a opção de parada temporária (Dias, 1996, p.61).

novas e futuras OR. Naturalmente, diversas combinações entre elas são factíveis, criando opções múltiplas ou compostas. A interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto.

O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

Bjerksund e Ekern (1990, p.77-79) avaliam através de um exemplo numérico o impacto adicional da opção de abandono e parada temporária sobre uma opção de desenvolvimento perpétua. O efeito dessas opções adicionais é reduzir o valor crítico (gatilho) para se iniciar o projeto de investimento, sendo pouco maior para a opção de parada temporária. Porém, destacam que o efeito dessas flexibilidades adicionais na redução do preço de petróleo crítico foi pequeno: 1,8% ou de US$ 20,00/bbl para US$ 19.64/bbl.

O maior impacto sobre o projeto foi justamente a introdução da flexibilidade de adiar a decisão de investimento. Então o viés introduzido ao se ignorar as opções adicionais seria desprezível. Parâmetros como a volatilidade σ e a taxa de dividendos δ podem ser mais importantes do que complicar modelos com opções adicionais. Mesmo sob o risco de generalizar um caso particular, Bjerksund e Ekern (*op. cit.*) destacam que o exemplo sugere que maior foco na opção de investimento é melhor do que a adição de novas flexibilidades. Dias (2005, p.77) destaca que a opção de abandono se torna mais valiosa em opções de investimento quando os preços estão baixos.

Laughton (1998, apud Dias 2004) avaliando opções de exploração revela que embora o valor destas aumente tanto com a incerteza sobre o preço do petróleo quanto com a incerteza sobre o volume a ser descoberto, elas tem efeito diferentes sobre o investimento. A incerteza do preço tem efeito de adiar o exercício das

opções enquanto que a incerteza do volume tem efeito de incentivar o investimento em informação, isto é, o exercício de opções de aprendizagem (ver Seção 2.5).

Do ponto de vista desta dissertação, está-se mais interessado em OR estratégicas. Qualquer que seja o tipo de opção considerada, o processo estocástico escolhido para modelar o valor do ativo subjacente é o MGB. Os argumentos que justificam esta adoção são revistos a seguir.

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*

Sob a hipótese do MAD, o ativo subjacente de um projeto de E&P é o preço de uma reserva de petróleo desenvolvida, que por sua vez é muito dependente do preço do petróleo. Sobre este tema, há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média.

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo a convergência para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado.

Independente de qual seja a resposta final a essa questão, o MGB encontra na literatura diversos argumentos teóricos e empíricos que justificam sua adoção, tanto para modelar o preço do ativo subjacente quanto para modelar o preço do petróleo. Estes argumentos foram apresentados ao longo do Capítulo 3 e são reapresentados em conjunto a seguir.

O efeito do uso do MRM sobre a decisão de investimento é duplo. Como modelo estacionário, a convergência da variância com o tempo limita o valor da flexibilidade de esperar (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com os movimentos Brownianos**.** Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM faz com que preços mais altos sejam atingidos menos vezes (Efeito Preços), o que reduz o nível de investimentos. Além disso, a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o

exercício da opção de investir (ver Dixit e Pindyck, 1994, p.161-167). O efeito resultante do MRM é, portanto, menos óbvio do que o do MGB**.**

Metcalf e Hassett (1995, ver Seção 3.1.2) testam numericamente se o nível de investimento agregado obtido com o MGB se altera com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$, enquanto que o MGB é dado por: $dx = \sigma.x.dz$. Ou seja, em seu estudo os autores consideram o MRM e o MGB com mesma tendência α nula (ver equação (22)). De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM os preços gerados pelo primeiro tendem a dominar o MRM com o passar do tempo.

Os autores mostram que os Efeitos Variância e Preços tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza.

Dixit e Pindick (1994, p.77-78, ver Seção 3.1.2) realizam a análise de séries históricas longas de preços de petróleo. Concluem pela reversão à média ao considerar séries de preços com 120 anos, mas não conseguem rejeitar a hipótese de *random walk* ao considerarem séries de 30 ou 40 anos. Estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos.

Samuelson (1965, ver Seção 3.3.2) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado, na medida em que os investidores têm informação completa sobre estes fluxos de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas

como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos. Samuelson prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório (Copeland e Antikarov, 2001, p.222). Então riscos (de timing, políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente.

Dias (2005, p61-70) discute o impacto da utilização do MGB em OR no lugar de MRM para o processo estocástico do preço do petróleo. Inicialmente repete o teste de Dixit e Pindick (1994, *op. cit.*) para os preços real e nominal do petróleo no período 1970-2004, e também não consegue rejeitar o MGB. Em seguida discute dois artigos importantes sobre o assunto (Pindikc, 1999 e Schwartz, 1997) e conclui que o MGB é uma boa aproximação em muitos casos, mas pode ser inadequado quando o preço à vista estiver longe do nível de equilíbrio de longo prazo. Por fim faz duas recomendações: Em OR em que se precisa considerar tanto o curto quanto o longo prazo, modelos mais realistas são mais adequados, mas para análises de longo prazo ou em estudos onde apenas um mapeamento razoável do preço do petróleo é necessário, o MGB pode ser adotado.

A análise do conjunto de argumentos expostos permite concluir que o MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente, a depender dos parâmetros considerados. O efeito da estabilização da variância no MRM incentivando o investimento pode ser compensado pelo efeito da maior volatilidade do MGB. Por fim, resta o teorema de Samuelson (1965) que estimula a adoção do MGB quando o ativo subjacente possui fontes múltiplas de incerteza.

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P

Existem diversos modelos na literatura para apreçamento de OR em projetos de exploração e produção de petróleo. Esses modelos dependem do valor presente da reserva desenvolvida V, que sob a hipótese do MAD é o ativo subjacente. Uma função que calcule V pode então ser utilizada e explicitar as variáveis das incertezas econômicas e técnicas.

Dias (2005, p. 73-75) destaca três alternativas para o cálculo de V com complexidade crescente: Usar uma função simples que considere as variáveis chaves; Utilizar SMC para as variáveis de risco em planilhas de fluxo de caixa e; Combinar planilhas com outros sistemas como simuladores de reservatório que tratam a incerteza técnica mais adequadamente.

Os modelos para apreçamento de OR em projetos de E&P têm sido desenvolvidos para resolver problemas específicos destes projetos, em geral com gradual complexidade. Dias (2004, p.99-102 e 2005, p.83-132), apresenta um resumo da literatura de OR em petróleo. A seguir são apresentados três modelos simples que envolvem decisões de investimento e abandono de ativos reais.

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão

O Modelo de Negócios (*Business Model,* ver Dias, 2004, p.96-98) é uma aproximação para o valor de uma reserva desenvolvida de petróleo sob regimes de contratos de concessão. Trata-se de uma aproximação útil e adequada para o apreçamento de opções de investimento simples, especialmente se o VPL do projeto é previamente conhecido.

O valor do exercício ou *payoff* de uma opção real de investimento simples sobre o desenvolvimento de uma acumulação de petróleo é dado pela diferença entre o valor presente da reserva desenvolvida V e o investimento de desenvolvimento I :

$$VPL = V - I \quad (63)$$

O investimento I é o valor atualizado do fluxo de investimentos líquidos de benefícios fiscais como depreciação. O valor atualizado da reserva desenvolvida V para contratos de concessão de E&P pode ser aproximado por uma função linear do preço do petróleo P (isso é facilmente verificável com uma análise de sensibilidade).

Uma aproximação muito razoável e simples é considerar que V é proporcional ao volume recuperável de hidrocarbonetos (B) existente na acumulação, à qualidade econômica da reserva (q) e ao preço de petróleo:

$$V = q.B.P \quad (64)$$

A qualidade econômica da reserva q depende de uma série de parâmetros geológicos que afetam a produtividade da rocha reservatório, das propriedades físicas do petróleo a ser produzido, da carga de impostos, custos operacionais e da taxa de desconto apropriada para a atualização monetária. A aproximação definida na equação (64) é denominada por Dias (2004) de Modelo de Negócios (*Business Model*). Essa designação é uma alusão ao fato de que a relação $q.P$ corresponder ao valor do barril de petróleo (na cabeça do poço) negociado no mercado de reservas desenvolvidas nos Estados Unidos, onde assume um valor médio de 1/3 (ou seja, $q = 1/3$, também conhecida como regra do 1/3 - Gruy et al, 1982, apud Dias, 2004).

Um segundo e simples modelo também apresentado por Dias (op. cit.), denominado de Fluxo de Caixa Rígido (*Rigid Cash Flow Model*) considera uma parte do custo operacional atualizado como fixo:

$$V = q'.B.P - C$$

Em ambos os modelos, os valores de q' e q'' são obtidos a partir dos VPL calculados em planilhas eletrônicas. A diferença básica entre eles é sintetizada pela inclinação da reta do VPL em função do preço do petróleo (Figura 11):

O Modelo de Negócios é menos sensível ao preço do petróleo e implica que há uma correlação perfeita entre este último e os custos operacionais. Na prática é um modelo que gera valores conservadores para OR, o que poderia levar ao exercício prematuro de opções. Tem sido utilizado em algumas circunstâncias por diversos autores, embora não seja exatamente um consenso na literatura. Mas é inegável que sua simplicidade gera algumas vantagens: Pode ser utilizado como uma primeira aproximação para o valor da OR; Pode ser facilmente empregado em escala para problemas simples com OR e; Pode ser útil no sentido de difundir o uso de OR dentro de uma empresa. Naturalmente que, não é um modelo adequado para

a tomada de decisão em investimentos relevantes ou para problemas mais complexos que envolvam mais de uma variável estocástica, incertezas técnicas e estratégicas ou diversas OR interagindo.

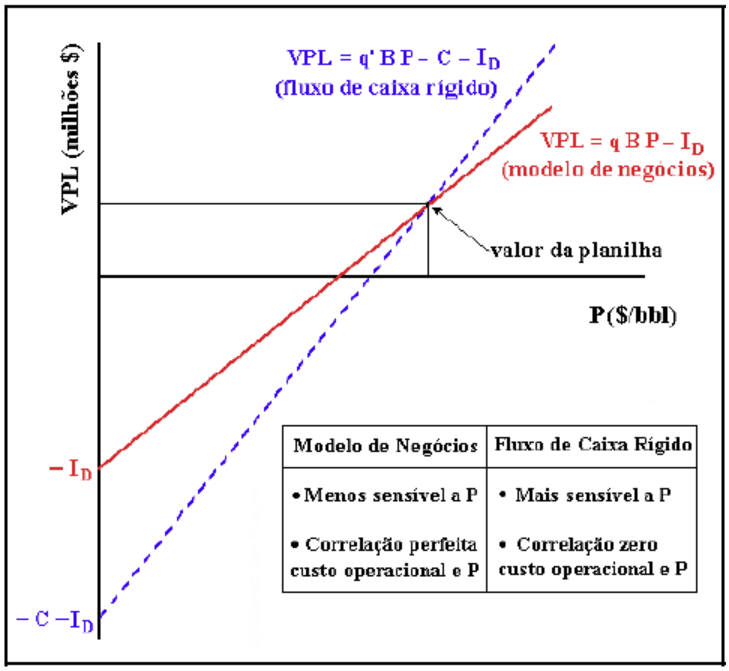

Figura 11 – Comparação entre os Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Fonte: Dias, 2005, p.79).

Se o preço do petróleo segue um MGB (19), então $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Considerando o Modelo de Negócios (64), o processo estocástico do valor presente da reserva desenvolvida V pode ser calculado com o Lema de Ito (35):

$$V = q.B.P \quad \therefore \quad dV = [\alpha.P.\frac{\partial V}{\partial P} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}.P.\sigma^2].dt + \frac{\partial V}{\partial P}.\sigma.P.dz.$$ Então:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = q.B; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow dV = \alpha.q.B.P.dt + \sigma.q.B.P.dz \Leftrightarrow$$

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \quad (66)$$

Então a EDP de B&S&M para uma opção F qualquer sobre o valor da reserva desenvolvida que segue um MGB será a equação (40) - ver Seção 3.4.1 – com $V = q.B.P$, então:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida $V = q.B.P$ que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção é de desenvolvimento de um campo de petróleo é perpétua, vale então a solução analítica da Seção 3.4.2. Se ao contrário tem expiração finita, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Por fim, em se tratando de opções de venda, as soluções permanecem válidas sendo suficiente inverter as variáveis V com I e r com δ (Seção 3.6).

O Modelo de Negócios também pode ser facilmente adaptado para opções compostas de exploração (Seção 4.3.3). Uma alternativa mais elaborada a este primeiro modelo é o clássico trabalho de Paddock, Siegel e Smith (1998), apresentado a seguir.

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S)

O modelo de Paddock, Siegel e Smith - PS&S (1988)[37] é uma aproximação um pouco mais elaborada (em relação ao modelo anterior) para opções de desenvolvimento de reservas de petróleo, porém sem perder simplicidade e a semelhança com a EDP (40) de Black & Sholes & Merton. Basicamente trata algumas variáveis por unidade de volume e considera o efeito da exaustão de uma reserva.

PS&S argumentam que para uma opção de E&P não é suficiente conhecer o processo estocástico do valor de uma reserva desenvolvida, é preciso também conhecer o equilíbrio de mercado deste ativo. Para isso caracterizam o comportamento dos preços de reservas desenvolvidas e demonstram como integrar este modelo com técnicas de apreçamento de opções, valorando a opção de desenvolvimento e depois a de exploração.

[37] Ver também Dixit e Pindick, 1994, p.396-403 e Dias, 1996, p.211-222.

Em equilíbrio, o retorno esperado de uma reserva desenvolvida (dividendos e ganho de capital) deve compensar o custo de oportunidade de investir em tal reserva. Seja B_t o volume de petróleo, V_t o valor de uma unidade de volume de reserva desenvolvida (US$/bbl) e R_t o *payoff* instantâneo por unidade de tempo, então os autores assumem que:

$$\frac{R_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \quad (67)$$

Onde μ_v é a taxa ajustada ao risco requerida por um mercado de capitais em equilíbrio sobre uma *security* que replique perfeitamente a reserva desenvolvida. O *payoff* R_t é dado pela soma dos lucros da produção de petróleo $\pi_t.(-dB_t)$ com o ganho de capital da reserva ainda não produzida $d(B_t.V_t)$. O sinal negativo deve-se à variação de reserva ser negativa com a produção, mas o lucro não.

$$R_t.dt = \pi_t.(-dB_t) + d(B_t.V_t) \quad (68)$$

Onde π_t é a taxa de lucro por unidade de volume. A reserva não produzida de um campo de petróleo em produção pode ser bem representada por uma função exponencial decrescente com o tempo de produção, então:

$$B_t = B_{t-1}.\exp(-\gamma.\Delta t) \Rightarrow \ln B_t = \ln B_{t-1} - \gamma.\Delta t \Rightarrow \Delta \ln B_t = -\gamma.\Delta t$$

Na forma diferencial, quando $\Delta t \to 0$:

$$d\ln B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t / B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t = -\gamma.B_t.dt \quad (69)$$

Onde γ é a taxa de caimento da reserva B_t de petróleo por unidade de tempo (não estocástico). Substituindo (69) em (68) e considerando que $d(B_t.V_t) = B_t.dV_t + V_t.dB_t$:

$$R_t.dt = \gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt \quad (70)$$

Substituindo o resultado (70) em (67), obtém-se:

$$\frac{\gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$\frac{dV_t}{V_t} + \frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} - \gamma.dt = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow \frac{dV_t}{V_t} = -\frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} + \gamma.dt + \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = (-\gamma.\pi_t + \gamma.V_t + \mu_v.V_t).dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = [\mu_v - \gamma.(\pi_t / V_t - 1)].V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$dV_t = (\mu_v - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz$ (71) e $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$ (72)

Onde δ_t é a taxa de *payout* ou dividendos da produção de uma unidade de reserva de petróleo desenvolvida, cujo valor segue o MGB da equação (71), supondo μ_v, δ_t *e* σ_v constantes. A tendência deste MGB é a taxa de ganho de capital da reserva desenvolvida: $\alpha_v = \mu_v - \delta_t$. Em equilíbrio, nenhum agente manterá uma reserva desenvolvida sem produção, pois neste caso a taxa de retorno será a taxa de ganho de capital ($\mu_v - \delta_t$), que é menor do que a taxa requerida pelo mercado sobre o ativo (μ_v).

Considerando a equação (71), o valor da opção de desenvolvimento de uma unidade de reserva e a regra ótima de decisão podem ser determinados. Para isso monta-se um *portfolio* sem risco, composto pela opção de desenvolvimento F e n partes do ativo gêmeo (reserva desenvolvida V). Como o valor da reserva segue um MGB, seguindo-se os mesmos passos da Seção 3.4.1, chega-se à EDP (40) de B&S&M:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente a equação é genérica e serve para qualquer opção sobre o ativo básico (uma unidade de reserva desenvolvida). As condições de contorno é que definirão o tipo de OR:

$F(V=0) = 0$ (42) $\qquad F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I$ (44)

$F_v(V^*(t),t) = 1$ (45) $\qquad$ Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

As três primeiras condições de contorno são para opções de compra americanas perpétuas (adicionalmente em (40) F_t=0). As quatro condições em conjunto definem são para opções de compra americanas com expiração finita. A

condição (42) é um limite econômico que funciona como uma barreira absorvente para o MGB de V - equação (71), ver Seção 3.1.6. A condição (44) define o *payoff* do exercício da opção no valor crítico V^* enquanto que (45) é a condição de otimização de contato suave (*smooth paste condition* – ver Seção 3.4.2). Por fim, a condição (50) indica que, na expiração do direito de desenvolvimento, vale a regra do VPL. As soluções obtidas nas Seções 3.4.2 e 3.5.1 também continuam válidas, com algumas diferenças.

O valor da opção e o valor crítico serão obtidos em unidades monetárias por unidade de reserva desenvolvida. O investimento também deve ser considerado por unidade de volume. A taxa de dividendos δ_t tem uma expressão particular dada pela equação (72) ($\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$). Note que δ_t varia com o tempo (depende da taxa de lucro π_t e do valor de uma unidade de reserva desenvolvida V_t) enquanto que na EDP (40) é constante. Será necessário então estimar uma taxa de dividendos média e assumi-la constante.

O modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para um projeto não implantado. Isso significa que o processo neutro ao risco da reserva não desenvolvida poderá ter uma tendência neutra ao risco ($\alpha_v^{'} = r_f - \delta$) negativa. Em princípio, esse resultado é plausível, pois o custo de oportunidade δ de se adiar a produção pode realmente ser maior que a taxa livre de risco. Mas uma tendência muito negativa pode não ser conveniente, pois pode significar também que o processo estocástico real tem uma tendência real negativa: $\alpha_v < 0$ (ver Seção 5.1).

Se isso ocorrer, significa que o preço da reserva desenvolvida cai com o tempo. Isso só é plausível para uma opção de desenvolvimento se há uma expectativa de redução contínua no preço futuro do petróleo ou se os custos de produção estiverem aumentando continuamente. De uma outra forma, é questionável depreciar a opção de desenvolvimento pela perda de volume que ocorreria se ela estivesse em produção, por que simplesmente o volume da reserva ainda é constante.

PS&S (*op. cit.*) também discutem a opção de exploração. Os autores assumem que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, evitando complicações como o momento ótimo para exercer a opção de desenvolvimento, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única. Isso seria equivalente a fazer os investimentos de exploração e de desenvolvimento esperados ($\bar{I}_E$ e $\bar{I}_D$) em conjunto e receber o valor presente da reserva desenvolvida $\bar{B}$ esperada:

$$VPL_{Exp} = \bar{B}.V - (\bar{I}_E + \bar{I}_D) \quad (73) \text{ com: } \quad \bar{B} = \int B.df(B) \quad \text{e } \bar{I}_D = \int B.I_D.df(B)$$

Onde VPL_{Exp} [38] é o VPL esperado de uma oportunidade exploratória sem risco geológico, V é o valor de uma unidade de reserva desenvolvida e $f(B)$ é a distribuição de probabilidade do volume aleatório de petróleo B a ser descoberto[39].

Considerando que o volume esperado $\bar{B}$ é constante e que a opção de exploração é homogênea de grau 1, então o seu valor pode ser representado como:

$$\bar{B}.E(V, T-t, S) \quad \text{com} \quad S = (\bar{I}_E + \bar{I}_D)/\bar{B} = E + D$$

Sendo que $E(V, T-t, S)$ é o valor corrente para uma opção de exploração sobre uma unidade de reserva desenvolvida com investimento unitário combinado de exploração e desenvolvimento S. A opção de exploração pode então ser resolvida como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento de PS&S.

Se a curva do valor crítico de uma opção de investimento em função do tempo para a expiração $T-t$ for normalizada, ou seja, definida pela relação entre o valor do projeto implantado e o investimento necessário ($\delta, \sigma \; e \; r_f$ são constantes), então ela será única (Merton, 1973, apud PS&S, *op. cit.*, p.489). Assim, toda vez que

---

[38] O VPL_{Exp} é uma aproximação grosseira do VME, Valor Monetário Esperado, um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração, estando para os projetos de exploração como está o VPL para projetos de desenvolvimento. A regra de decisão é investir se VME>0.

[39] PS&S não usam o termo VPL_{Exp}, apenas dizem que exercer a opção de exploração pode ser vista como o lado direito da equação (73), esclarecendo na página 491 que seu modelo é válido somente na ausência de incerteza geológica.

a opção exploração estiver *deep in the money* ($V/S \geq V^*/S$), também estará a opção de desenvolvimento pois $V/D > V/S$ (onde $D = \overline{I}_D / \overline{B}$).

A técnica de PS&S para opções exploratórias fornece um valor elevado para a opção, mas qualitativamente inferior. Isso se deve tanto por desconsiderar a incerteza geológica sobre a existência de petróleo, como por suprimir flexibilidades ao colapsar as opções de exploração com a de desenvolvimento. Este assunto será retomado na Seção 5.2, quando se compara os modelos de opção de exploração simples e composta.

Por fim é preciso notar que o Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios podem ser adotados em conjunto. Enquanto o primeiro se preocupa e capturar o efeito da depleção natural de um campo de petróleo através da taxa de dividendos do ativo subjacente, o segundo propõe que o valor de uma reserva seja função linear do preço do petróleo, e por isso segue um MGB derivado a partir deste.

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração

Na Seção 4.1, discutiu-se que a OR de exploração é uma opção americana composta, pois se trata de uma opção de investimento sobre uma opção de desenvolvimento de um campo de petróleo (*call on call*). Até a primeira data de exercício T_1, se o detentor da opção de exploração realizar o investimento exploratório I_E e confirmar a existência do campo de petróleo, ele adquire a opção de desenvolvimento com expiração T_2 ($T_2 \geq T_1$ - medidos em relação à mesma data) e preço de exercício igual ao investimento de desenvolvimento I_D.

Porém, um decisor racional que maximiza o lucro da firma só exercerá a primeira opção da exploração antes da expiração se, além desta estar *deep in the money*, a opção de desenvolvimento também estiver. Dias (2006) argumenta que se a opção de desenvolvimento não estiver *deep in the money,* ao exercer a primeira opção, o decisor obtém na melhor das hipóteses a opção de desenvolvimento, que não será exercida até estar madura. Neste caso, o decisor obtém um melhor retorno ao postergar o primeiro investimento exploratório I_E por um intervalo dt e aplicar o capital exploratório à taxa livre de risco r_f antes que a segunda opção fique

madura. Desta forma, aufere o retorno $I_E.r_f.dt$ sem perder qualquer benefício (dividendo) da opção de desenvolvimento por manter viva a primeira opção. De outra forma, o decisor pode arbitrar postergando o exercício da primeira opção e aplicando o capital exploratório à taxa livre de risco até que ambas as opções estejam maduras. Esta característica também é valida para uma *call on call* financeira americana.

Mas há uma diferença fundamental da OR composta de exploração em relação a uma *call on call* financeira: O fato de se exercer a primeira opção não garante a aquisição da segunda, pois há o risco de não se descobrir o campo de petróleo, ou como se diz com o jargão de E&P, o poço pode ser "seco" (*dry hole*). Na opção composta financeira este risco não existe, ou seja, ao exercer a primeira opção o investidor necessariamente adquire a segunda. A forma tradicional com que a indústria de E&P lida com este risco na tomada de decisão é considerar o valor do campo de petróleo desenvolvido e os investimentos necessários ponderados pelas probabilidades de sucesso e fracasso exploratório.

Dixit e Pindick (1994, p.319-328) discutem o problema de investimentos seqüenciais contínuos ou discretos, que podem ser interrompidos ou suspensos, temporariamente ou definitivamente, como equivalente ao problema de opções compostas. Para o investimento em fases discretas, dado o processo estocástico do preço, os autores derivam o valor do projeto, da opção e do preço crítico para a última fase como uma opção simples. Em seguida demonstram que o valor da opção da fase anterior e o novo preço crítico apresentam equação diferencial e condições de contorno similares à última fase, mas com a diferença de que o *payoff* da fase mais nova depende do valor da opção na fase subseqüente. Esta técnica deve ser repetida sequencialmente até a primeira fase (*backward*), obtendo-se o valor da opção composta.

Os autores então argumentam que o preço de exercício é decrescente da primeira para a última fase, em decorrência da redução progressiva do investimento a ser afundado. Com isso, se o primeiro estágio estiver *deep in the money*, o segundo estágio também estará. Entretanto não mencionam que esta regra é inequívoca se, e somente se, os investimentos seqüenciais tiverem a mesma expiração ou forem perpétuas. No exemplo apresentado no livro, todas as opções de

investimento são consideradas perpétuas e apresentam solução analítica. Mas este não é o caso de uma opção exploratória, onde as fases podem ter expiração diferenciada e as opções não tem solução analítica.

Então, percebe-se que o problema de uma opção composta de exploração, por sua natureza, deve e pode ser tratado de uma forma diferenciada em relação ao seu par financeiro. A solução que se apresenta adiante preserva a natureza do problema de decisão da exploração como uma opção composta, ao contrário do Modelo de PS&S.

O Modelo de PS&S (Seção 5.3.2) para opções exploratórias assume que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única com a mesma expiração. Também considera o volume esperado $\overline{B}$ constante (sem incerteza) e ignora o risco geológico (probabilidade de sucesso)[40], resolvendo a opção de exploração como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento. Por esses motivos, essa técnica fornece um valor qualitativamente inferior para a opção de exploração, como será visto na Seção 5.2. Assim, um modelo que resgate algumas das simplificações acima sem perder praticidade é propício. Uma alternativa é apresentada a seguir, sendo denominado de Modelo de Exploração (MDE).

As principais diferenças do MDE serão reconsiderar o problema de exploração como opção composta de duas fases (exploração e desenvolvimento), observar os diferentes períodos de expiração e ponderar o risco geológico. Entretanto, a incerteza técnica sobre o volume descoberto será desconsiderada, de forma que o volume a descobrir esperado será considerado constante. Por simplicidade, o investimento de delimitação é considerado como parte do desenvolvimento.

[40] O risco e a incerteza geológica representam, respectivamente, a possibilidade de existir ou não petróleo em um prospecto exploratório e, em caso afirmativo, a quantidade de petróleo existente. O risco geológico é estimado através da probabilidade de sucesso geológico. A incerteza sobre o volume pode ser obtida por SMC a partir das distribuições dos parâmetros que definem o volume da acumulação (volume de rocha da trapa, porosidade, preenchimento, saturação de óleo, fator de recuperação, etc.). O produto destes fatores gera a distribuição do volume recuperável, cuja média é o volume esperado a descobrir.

O MDE é elaborado considerando o conceito do Valor Monetário Esperado (VME), um indicador que considera o risco geológico de um projeto exploratório – ver Figura 12.

O Valor Monetário Esperado (VME) é um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração de petróleo, cuja regra de decisão é investir se VME>0. Desempenha um papel equivalente ao do VPL para projetos de desenvolvimento. O VME é um valor esperado por ponderar o valor econômico de um projeto exploratório pelo risco geológico, considerando os cenários de sucesso e de fracasso:

$$VME = Ps.(V - I_E - I_D) - (1 - Ps).I_E = Ps.V - Ps.I_D - I_E \Rightarrow .$$

$$VME = Ps.V - (I_E + Ps.I_D) \quad \text{ou} \quad VME = Ps.(V - I_D) - I_E \quad (74)$$

Onde Ps é a probabilidade de sucesso ($0 < Ps < 1$), $1 - Ps$ a probabilidade de fracasso, V o valor presente da "reserva"[41] desenvolvida, I_E o investimento atualizado em exploração do primeiro estágio e I_D o investimento atualizado do desenvolvimento no segundo estágio. Os investimentos e a probabilidade de sucesso são considerados constantes. Seja então:

$$V_E = Ps.(V - I_D) \quad (75) \qquad \Rightarrow VME = V_E - I_E \quad (76)$$

Onde V_E é definido como o valor esperado atualizado do projeto exploratório perfurado ("explorado"). Note a semelhança da equação (76) com a equação (63): $VPL = V - I$. Assim o problema da decisão com o VME é similar ao problema da decisão com o VPL, mas com a vantagem de preservar e ponderar a decisão pelo risco geológico, indissociável do investimento em exploração.

[41] A rigor, para prospectos exploratórios, o termo V é o valor presente do volume a descobrir desenvolvido, já que o termo reserva é tecnicamente inadequado neste caso.

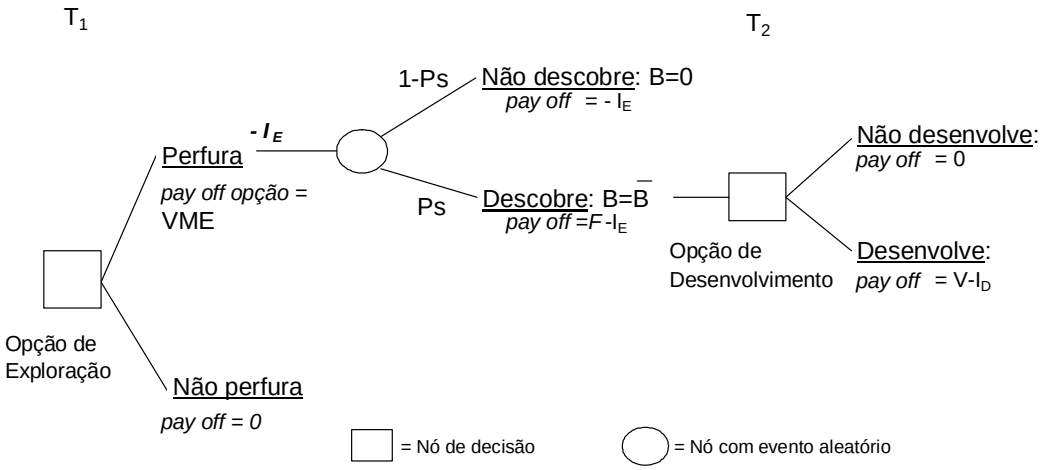

Figura 12 – Árvore de decisão de uma opção de exploração com duas etapas: exploração e desenvolvimento.

Suponha que o processo estocástico do valor da reserva desenvolvida seja um MGB:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (77)$$

No Modelo de Negócios essa relação – Equação (66) - depende do MGB do preço do petróleo ($dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$) e é obtida aplicando-se o Lema de Ito à equação (64): $V = q.B.P$. Em favor de uma maior generalidade, no MDE apenas admite-se que o preço da reserva desenvolvida siga um MGB[42]. Considerando que $V_E = Ps.(V - I_D)$ (75), o valor esperado atualizado do prospecto exploratório perfurado e desenvolvido será dado pelo Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \Rightarrow$$

$$dV_E = [\alpha.V.\frac{\partial V_E}{\partial V} + \frac{\partial V_E}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2}.V.\sigma^2].dt + \frac{\partial V_E}{\partial V}.\sigma.V.dz$$. Então, de (75):

$$\frac{\partial V_E}{\partial V} = Ps \;;\; \frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V_E}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \; dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \qquad (78)$$

[42] Esta premissa é fortalecida pelo teorema de Samuelson (1965) apresentado na Seção 4.3.2. Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório.

Ou, de forma equivalente:

$$\Rightarrow\ dV_E = Ps.(\alpha.V.dt + \sigma.V.dz) \Rightarrow .\ dV_E = Ps.dV \quad (79).$$

A equação (79) revela que o processo estocástico de V_E também é um MGB, múltiplo do MGB da "reserva" desenvolvida. Então, no problema da opção composta de exploração, as duas opções dependem de um mesmo processo estocástico dV [43].

A estratégia de valoração da opção composta de investimento de Dixit e Pindick (*op. cit.*) pode agora ser aplicada, pois as duas opções dependem do mesmo processo estocástico da "reserva" desenvolvida. A solução inicia pelo segundo estágio, ou seja, a opção simples de desenvolvimento. A EDP é exatamente a mesma obtida na Seção 3.4.1, a exemplo do que ocorreu para a opção de desenvolvimento no Modelo de Negócios (Seção 4.3.1), mas com a ressalva que o MGB é dado pela equação (77) e não necessariamente o do preço do petróleo, conforme já discutido. As condições de contorno são as mesmas apresentadas em detalhe nas Seções 3.4.2 e 3.4.3 para uma opção de investimento simples e revisitadas na Seção 4.3.2 com o Modelo de PS&S.

Como visto (Seção 3.4.1), a EDP é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida V que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção de desenvolvimento do campo de petróleo tem expiração T_2, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Com isso o valor da opção de desenvolvimento (F) e o seu valor crítico (V^*) podem ser calculados.

O passo seguinte é montar a EDP de B&S&M (40) do primeiro estágio da opção de investimento sobre o MGB da equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$. Adequando as variáveis para a opção de exploração (E), tem-se:

---

[43] No modelo de Negócios, em última instância, as duas opções dependem do processo estocástico do preço do petróleo: $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Combinando as equações (64) $V = q.\overline{B}.P$ ($B = \overline{B}$) com a equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.(\alpha.P.dt + \sigma.P.dz) \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.dP$.

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 E}{\partial V_E^2}.\sigma^2.{V_E}^2.dt + (r_f - \delta).\frac{\partial E}{\partial V_E}.V_E - r_f.E = -\frac{\partial E}{\partial t} \quad (80)$$

Como visto, a equação é genérica e vale para qualquer derivativo $E(V_E,t)$ que não pague dividendos, escrito sobre V_E, que segue o MGB $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. As condições de contorno são as similares às vistas nas Seções 3.4.2 e 3.4.3, mas com algumas diferenças.

A primeira condição de contorno decorre do fato de $V = 0$ continuar sendo uma barreira absorvente:

$$E(V = 0) = 0$$

A segunda condição afirma que na curva de gatilho do primeiro estágio (V^{**}), a opção de investir vale o VME do projeto ($VME = Ps.(V - I_D) - I_E$ - (74)), onde o valor da "reserva" não desenvolvida $(V - I_D)$ é dada pela opção de desenvolvimento (*value matching condition*):

$$E(V^{**}) = Ps.F(V^{**}) - I_E$$

A terceira condição denominada de contato alto ou suave (*smooth pasting condition*) define que no valor de gatilho o valor das duas opções devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^{**}.

$$E_v(V^{**}) = Ps.F_v(V^{**})$$

A quarta condição afirma que na expiração do primeiro estágio, vale a regra do VME tradicional, com o valor da reserva desenvolvida dado pela opção de desenvolver. Para $t = T_1$:

$$E(V) = Máx[Ps.F(V) - I_E;0]$$

A EDP (80) e condições de contorno do MDE tratam a opção de exploração como composta e preservam o risco geológico na decisão de investimento, mas não

possui solução analítica. Para contornar este problema sugere-se uma aproximação simples, ao se considerar sempre que $F = V - I_D$.

Essa aproximação só não é a solução verdadeira quando $V < V^*$, ou seja, o segundo estágio não está *deep in the money* e portanto, o primeiro não deve ser exercido imediatamente. Essa regra de decisão é inequívoca e para uma opção de exploração, é mais importante do que o valor calculado desta ser exato ou não. Por isso utilizar $F = V - I_D$ como uma aproximação inferior do valor verdadeiro da opção (pois: $V < V^* \Rightarrow F > V - I_D$). A taxa de dividendos (δ) e a volatilidade (σ) para apreçar $E(V)$ serão as mesmas do ativo subjacente.

Com esta simplificação, os dois estágios da opção de exploração passam a depender de vários parâmetros comuns ($r_f, \delta, \sigma \; e \; dV$), diferenciando-se quanto ao ativo subjacente e preço de exercício: $V_E \; x \, V$ e $(I_E + Ps.I_D) \; x \, I_D$. Quanto à expiração, os dois estágios podem ter prazos iguais ou diferentes[44]: $T_1 = T_2$ ou $T_1 < T_2$.

Se os dois estágios da opção tiverem mesma expiração ($T_1 = T_2$) e a probabilidade de sucesso for um, a curva do valor crítico normalizado (V^* / I) será única, já que todos demais parâmetros para sua definição ($r_f, \delta, e \; \sigma$) são iguais (Merton, 1973, apud PS&S, 1998, p.489). Então, como a opção de desenvolvimento apresenta maior relação V / I do que o primeiro estágio da opção de exploração, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a opção de desenvolvimento será a primeira a tornar-se *deep in the money,* independente do valor da probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*):

---

[44] Embora para uma opção de compra composta financeira T1<T2 seja uma premissa óbvia, este não é o caso de uma opção de exploração. Um contrato de exploração cede o direito explorar uma área para uma firma por um período limitado, ao final do qual a firma pode declarar a comercialidade de eventuais descobertas. Desta forma pode-se considerar que na opção de exploração T1=T2. Em outras situações, o contrato de exploração é dividido em etapas, ao final das quais, a empresa é obrigada a devolver uma parte da área. Isso cria incentivos para sejam perfurados poços que auxiliem na definição da área que se deseja reter, fazendo com que a opção de perfuração do pioneiro (exploração propriamente dita) apresente expiração menor do que a da opção de desenvolvimento: T1<T2. Em outras situações, o investimento em poços pioneiros é obrigatório, o que reduz o problema do primeiro estágio à regra do VME e preserva a opção de desenvolvimento, caso haja uma descoberta.

$$\frac{V}{I_D} > \frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Então se $T_1 = T_2$ a condição ótima de exercício $V > V^{**} > V^{*}$ está garantida e a simplificação proposta $F = V - I_D$ é a solução verdadeira.

Se $T_1 < T_2$, cada uma das opções terá sua própria curva de gatilho (V^* / I) e a opção que apresentar maior relação V / I não será necessariamente a primeira a tornar-se *deep in the money*. O primeiro toque irá depender da relação entre os valores dos investimentos de exploração, desenvolvimento, da probabilidade de sucesso e da magnitude da relação $T_1 < T_2$.

Quatro combinações de resultados em relação às maturidades são possíveis para as opções do primeiro e segundo estágio da opção de exploração: *deep x deep; out x deep; deep x out* e; *out x out.* Novamente, se o segundo estágio estiver maduro (*deep x deep* e *out x deep*) a aproximação $F = V - I_D$ é o valor exato, e em caso contrário (*deep x out* e *out x out*), é um valor inferior ao verdadeiro F.

A regra de decisão será a seguinte:

- Se ocorrer o 1º caso (*deep x deep*), a opção deve ser exercida imediatamente;
- Se ocorrer um dos demais casos (*out x deep, out x out* ou *deep x out*) o decisor deve aguardar que os dois estágios estejam *deep* simultaneamente. Caso isso não ocorra*,* na data de expiração do primeiro estágio, o decisor dever então decidir sobre o exercício da opção com a regra do VME.

Então, a opção de composta E de exploração pode ser agora valorada com o instrumental de uma opção simples sobre uma opção de desenvolvimento F_D, preço de exercício $I_E + Ps.I_D$, gatilho $.V^{**}$ e expiração T_1. A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1 continua válida.

O exercício é necessariamente ótimo para a firma maximizadora do lucro se os dois estágios da opção de exploração estiverem *deep in the money* simultaneamente*.* Se os dois estágios têm a mesma data de expiração, essa condição ocorrerá necessariamente toda vez que a o primeiro estágio estiver

maduro. Caso o primeiro estágio da opção expire antes do segundo, o decisor deve verificar se as duas opções estão *deep in the money* para o exercício, em caso contrário deve aguardar. Por fim, nas expirações do primeiro e segundo estágios, o decisor decide com base na regra do VME e VPL respectivamente.

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P)

Este Capítulo tem como objetivo discutir os conceitos e modelos abordados ao longo da dissertação através de exemplos numéricos. Na Seção 5.1 são comparados e discutidos os resultados obtidos para uma opção de desenvolvimento com os Modelos de Negócio e Paddock, Siegel e Smith (PS&S). Na Seção 5.2 são comparados e discutidos os resultados obtidos com o Modelo de Exploração e com o Modelo de PS&S para um projeto exploratório. Na Seção 5.3 segue uma discussão sobre um problema de *portfolio*: Priorização de investimentos com OR.

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo

Nesta Seção aborda-se em detalhe o caso de um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo terrestre sob regime de concessão. Considere uma descoberta de acumulação de petróleo já delimitada denominada de ID-1, com 13,8 milhões de bbl de petróleo recuperáveis em 11 anos de produção. A oportunidade de investimento pode ser declarada comercial pela empresa a qualquer momento, em um prazo máximo de 1 ano. O órgão regulador então, avalia o projeto de desenvolvimento do campo e o cronograma proposto pela empresa. Caso seja aprovado, a empresa recebe a autorização para implantar o projeto e o direito de produzir na área por 20 anos. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O investimento atualizado necessário para o desenvolvimento da reserva (I_D) é de US$ 62,5 milhões (MM), e o valor presente da reserva desenvolvida (V) calculado em planilha eletrônica é US$ 69,2 MM. Com isso, o projeto ID-1 apresenta VPL de US$ 6,7 MM, o que de acordo com a regra clássica do VPL, é o suficiente para o investimento imediato. Mas a empresa ainda conta com a flexibilidade de adiar por até 1 ano a tomada de decisão, e observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida. De acordo com a teoria de OR, o decisor deve apenas investir imediatamente se o projeto estiver *deep in the money*, ou com um valor suficientemente alto (maior ou igual do que o gatilho) que torne desvantajosa a espera.

O valor a OR e do gatilho serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1, considerando inicialmente o Modelo de PS&S, e em seguida com o Modelo de Negócios. Para isso será necessário estimar os demais parâmetros necessários ao apreçamento da OR: σ, r_f e δ.

PS&S (1988, p.496-497) sugerem que a volatilidade (σ) do preço de uma reserva desenvolvida poderia ser estimada a partir de séries históricas, mas que infelizmente não são satisfatórias nem mesmo para os Estados Unidos, onde há um mercado mais desenvolvido. Apontam como solução utilizar o resultado de Gruy et al. (1982) que sugerem uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Com isso utilizam a volatilidade da taxa de variação do preço do petróleo como uma estimativa para a volatilidade da taxa de variação do preço de uma unidade de reserva desenvolvida. De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.400), a volatilidade do preço do petróleo entre os anos 60 e início dos 90 teria sido na ordem de 15%, mas estimativas da indústria podem ser maiores. Consideram que um range razoável seria entre 15% e 25%, por isso adota-se a média de 20% como caso base nesta dissertação. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%[45].

A taxa de dividendos do Modelo de PS&S é dada pela equação (72): $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$, tendo sido estimada de forma semelhante à descrita por Dixit e Pindick (1994, p.399). A taxa de declínio exponencial da reserva γ foi estimada ajustando-se uma curva exponencial à curva de produção do projeto ID-1. A reserva é recuperada de forma acelerada (são apenas 11 anos de produção) e com forte depleção, gerando uma taxa de declínio de 29% ao ano. O lucro π_t foi estimado a partir do fluxo de caixa, deduzidos custos operacionais (53%), *royalties* (13,4%) e impostos (18%, líquido de benefícios fiscais e depreciação). Todos estes percentuais são sobre a receita bruta:

$$\pi_t = (1 - Royalty - Opex).(1 - Tax) = (1 - 13{,}4\% - 53\%).(1 - 18\%) = 27{,}7\%$$

[45] A taxa livre de risco estimada foi a do país onde se encontra o projeto ID-1, pois a empresa detentora da OR também é sediada neste país, tomando e aplicando recursos no mercado interno.

O valor da reserva desenvolvida V_t considerada por PS&S (*op. cit.*) e Dixit e Pindick (*op. cit.*) foi a regra do 1/3 de Gruy et al (*op. cit.*). Considerando que o projeto ID-1 encontra-se em um mercado não desenvolvido como o americano e sujeito a um regime fiscal e regulatório diferente, é mais adequado estimar V_t a partir da equação (64): $V = q.B.P \Rightarrow q = V/(B.P) = 21{,}3\%$. Retornando à equação (72):

$$\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1) = 0{,}29.(0{,}277.P / 0{,}213.P - 1) \Rightarrow \delta_t = 10{,}4\%\ a.a.$$

O MGB neutro ao risco do preço de um barril de reserva desenvolvida do projeto ID-1 será então dado por:

$$dV_t = (r - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow dV_t = -0{,}044.V.dt + 0{,}2.V.dz$$

Este MGB apresenta uma tendência neutra ao risco bastante negativa, decorrente da elevada taxa de dividendos encontrada com o Modelo de PS&S. No mundo real, a tendência irá depender da relação entre a taxa ajustada ao risco μ exigida por um investidor que detivesse a oportunidade de desenvolvimento e a taxa de dividendos δ. De acordo com a equação (37):

$$\alpha - \pi = r_f - \delta \Rightarrow \alpha = r_f + \pi - \delta \Rightarrow \alpha = \mu - \delta$$

No caso do prospecto ID-1, se a taxa ajustada ao risco for de, por exemplo, 9%, significa que a tendência real é negativa: $\alpha = \mu - \delta = 9\% - 10{,}4\% \Rightarrow \alpha = -1{,}4\%$. Então, se $\mu < \delta$, o preço no mundo real de uma unidade de reserva desenvolvida tenderá a decrescer com o tempo. Mas isso só faz sentido se, de fato, a reserva estiver em depleção (com custos crescentes) ou se o preço do petróleo for decrescente, demais parâmetros constantes. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo de PS&S sobre o preço de petróleo ou sobre custos, não faz sentido que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a tendência de preço de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

Com este contra exemplo, argumenta-se que o Modelo de PS&S deve ser utilizado com cuidado para opções de desenvolvimento de campos de petróleo quando $\mu < \delta$.

Todos os parâmetros determinados, o valor da opção com expiração de 1 ano é de US$ 7,7 milhões, portanto, maior do que o VPL de 6,7 milhões. Isso significa

que, ao contrário da regra de decisão com o VPL, o projeto ID-1 não deve ser declarado comercial imediatamente. O prêmio da flexibilidade de diferir a decisão e observar como evolui o valor da reserva desenvolvida do projeto vale US$ 1 milhão. Se a expiração para a declaração de comercialidade fosse igual a 9 anos, o valor da opção de desenvolvimento sobe para US$ 9,7 MM e o prêmio da flexibilidade vale US$ 3 MM. Esse exercício dá a dimensão da sensibilidade do valor da OR de desenvolvimento ao tempo de expiração. A Figura 13 apresenta o valor da opção em função do valor presente da reserva desenvolvida do projeto com expiração de 1 ano, e a sensibilidade para a expiração de 9 anos.

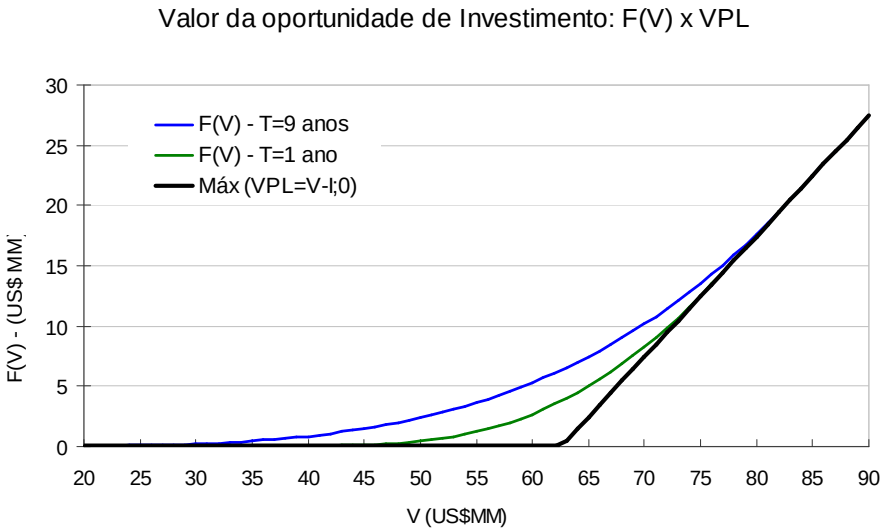

Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1 em função do valor presente da reserva desenvolvida.

Note que o valor da OR domina a regra de decisão do VPL até o ponto em que a curva da opção toca e se funde com a reta do VPL. Este ponto representa o valor crítico da reserva desenvolvida, situação em que o investimento deve ser imediato. Naturalmente que, se o decisor tivesse, por exemplo, 9 anos para decidir sobre o investimento, sua flexibilidade seria maior implicando num valor maior para a opção e seu valor crítico.

O valor crítico do projeto ID-1 é dado pelas equações (53) e (54), visto na Seção 3.5.1. Com o prazo de 1 ano para a expiração da opção de declaração da comercialidade, o valor crítico é de US$ 76,3 MM. Reduzindo progressivamente o prazo da expiração até que se torne zero, pode-se calcular como evolui o valor do

gatilho ao longo do tempo, todos os demais parâmetros constantes. A curva gerada é denominada de curva de gatilho (Figura 14). Observa-se que o valor crítico diminui progressivamente até a data de expiração, quando se torna igual ao valor preço de exercício (ou investimento, de US$ 62,5 MM).

Com esse conjunto de resultados, o decisor deve adiar a declaração de comercialidade do projeto ID-1 até que essa opção se torne *deep in the money* no prazo de 1 ano. Este exemplo deixa de forma clara a superioridade da valoração e decisão com OR.

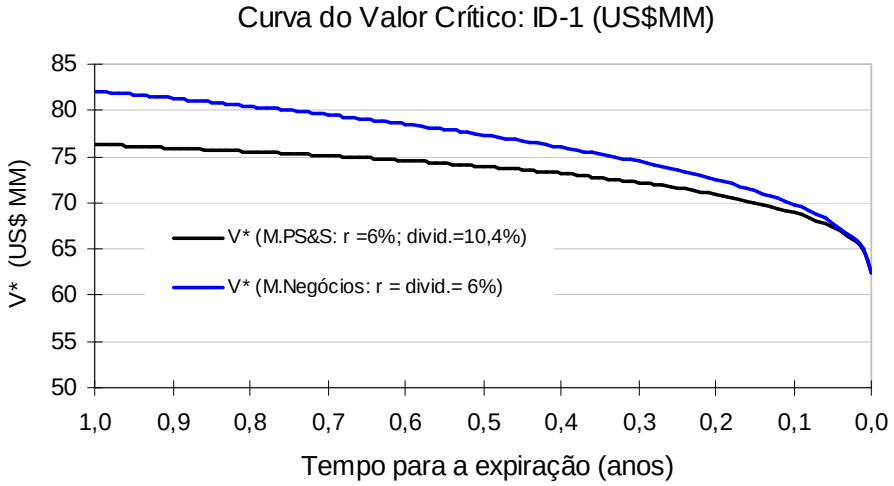

Figura 14 - Curva do valor crítico em função da expiração do Modelo de PS&S. Observa-se o efeito da redução da taxa de dividendos, obtida para o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (1993).

O exercício com o projeto ID-1 demonstrou a necessidade de uma quantidade significativa de informação e premissas na estimativa dos parâmetros para o cálculo da taxa de dividendos. Desta forma, outras alternativas mais simples para a estimativa de δ podem ser necessárias e/ou convenientes.

Dias (2004, p.101) destaca duas alternativas para estimar a taxa de dividendos. Como o preço de uma reserva desenvolvida é proporcional ao preço do óleo na boca do poço, a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.4.2):

$$Spot = Futuro(t).\exp(-(r_f - \delta).\Delta t)$$

Onde $Spot$ é o preço spot do óleo em t_0 e $Futuro(t)$ é o preço futuro do óleo para entrega na data t. A segunda alternativa é uma regra útil e prática para OR proposta por Pickles e Smith (1993). Estes autores concluem que, se ignorada a volatilidade de curto prazo, a taxa de conveniência δ em situações "normais" de mercado é equivalente à taxa livre de risco. Em situações de choques, esta taxa pode variar significativamente no curto prazo, mas tendem a um nível de equilíbrio no longo prazo, sendo portanto estável para projetos de longa duração como os de E&P. Assim os autores sugerem que, em OR, inicialmente se adote como valor "normal" da taxa de conveniência o valor da taxa livre de risco.

Adotar a sugestão de Pickles e Simith (*op. cit.*) desfigura o Modelo de PS&S. Adota-se então o Modelo de negócios onde o valor presente da reserva desenvolvida V é função linear do preço do petróleo e segue o MGB dado pela equação (66): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$, onde $V = q.B.P$ (64).

Reconsidere a opção de desenvolvimento do projeto ID-1, mas assumindo que a taxa livre de risco e a taxa de dividendo são iguais a 6%. O valor da opção de desenvolvimento com expiração de um ano sobe de US$ 7,7MM para US$ 8,9 MM, elevando o prêmio da flexibilidade de US$ 1 MM para US$ 2,2 MM. O valor do gatilho também aumenta, de US$ 76,3 para 82,0 MM, diminuindo a probabilidade de exercício de 75% para 70% e aumentando o tempo esperado de 5 para 7 meses.

Todos estes resultados são consistentes com a redução da taxa de dividendos, que aumenta o valor da opção, o prêmio da flexibilidade e o valor de gatilho, mas diminui a probabilidade do exercício. As Figuras 14 e 15 apresentam a comparação entre os resultados obtidos com PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (op.cit).

Os resultados obtidos são particulares da opção sobre o projeto ID-1, mas as relações descritas são gerais. Os dois critérios de avaliação da opção de desenvolvimento são válidos e consistentes, especialmente no que diz respeito à superioridade com OR sobre a técnica do VPL. A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. O Modelo de Negócios tem a vantagem de evitar o efeito indesejado da perda de valor do projeto não implantado quando a taxa de caimento da reserva é

muito elevada. No caso do projeto ID-1, gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto, o que é adequado dado a baixa relação entre o VPL e o investimento atualizado (10,7%). Entretanto, esse conservadorismo não altera o resultado da decisão no momento da expiração da opção, quando volta a valer a regra do VPL, mas exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

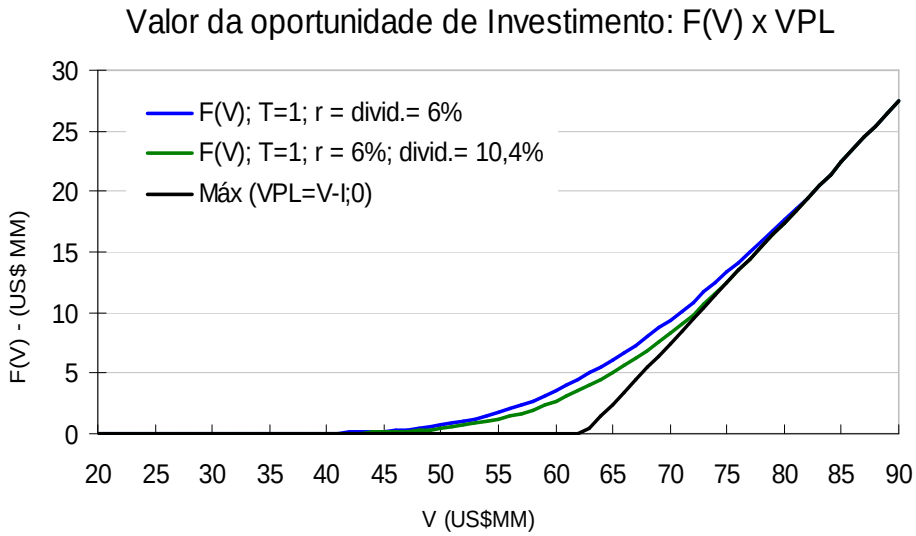

Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação do valor das opções do Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (*op. cit.*).

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S

Nesta Seção se aplica o Modelo de Exploração (MDE) elaborado na Seção 4.3.3 para o problema de decisão em um projeto de exploração. Os resultados são então comparados com a abordagem do Modelo de PS&S para exploração. Diferente do que foi feito na Seção anterior, as opções também são avaliadas na forma sugerida por Merton (1973, apud PS&S, 1988, p.489), ou seja, considerando o valor do ativo subjacente dividido pelo respectivo investimento.

Considere um prospecto exploratório terrestre denominado de IE-2 com um volume de petróleo a descobrir de 25 milhões de bbl recuperáveis. A oportunidade de investimento encontra-se sob um contrato de concessão dividido em dois períodos. Ao final do primeiro período que encerra em 1 ano, a empresa é obrigada a devolver 50% da área sob concessão e para isso, pretende perfurar o prospecto IE-2 para auxiliar a definição da área que irá reter. O segundo período de concessão

expira em 4 anos, ao final do qual, a empresa deve definir sobre o desenvolvimento de uma eventual descoberta e devolver ao órgão regulador o restante da área exploratória. Isso significa que a empresa tem duas decisões a tomar: Primeiro decidir no prazo de 1 ano se exercerá ou não a opção de perfuração do prospecto exploratório, e em seguida deve definir entre os anos 2 e 4 se irá exercer a opção de desenvolver, em caso de sucesso exploratório. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O poço exploratório (I_E) irá custar US$ 3,4 milhões (MM) e tem probabilidade de sucesso (Ps) de 20%. Em caso de um resultado positivo, o investimento de desenvolvimento (I_D) do novo campo é de US$ 82,3 MM, e o valor da reserva desenvolvida (V) é de US$ 126,4 MM. O indicador tradicional de decisão de investimento em um projeto de exploração é o VME, dado pela equação (74) $VME = Ps.(V - I_D) - I_E$, que apresenta valor de US$ 5,4 MM. Isso significa que, do ponto de vista tradicional, o prospecto exploratório pode ser perfurado imediatamente já que é positivo.

Do ponto de vista de OR, a decisão é uma opção composta de exploração. Como visto na Seção 4.3.3, o decisor apenas deve investir imediatamente se ambos os estágios da opção estiverem *deep in the money*. Nesta situação, caso ocorra a descoberta, o campo deve ser desenvolvido imediatamente, e em caso de fracasso exploratório, encerra-se o projeto. Caso um dos estágios não esteja *deep in the money* o decisor deve observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida e aguardar a condição necessária. Se até a expiração da primeira fase esta não ocorrer, a empresa deve decidir com a regra do VME. Em caso de descoberta, o decisor adquire a opção de desenvolvimento com nova expiração, que novamente só deve se deve ser exercida quando estiver *deep in the money*. Caso isto não ocorra até o final do novo período, na expiração volta a valer a regra do VPL.

O valor a OR e do valor crítico (gatilho) serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1. Os demais parâmetros necessários ao apreçamento das OR (σ, r_f e δ) são estimados de forma idêntica à Seção anterior (5.4.1). PS&S (1988, p.496-497) sugerem utilizar o resultado de Gruy

et al. (1982), os quais apontam uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Dixit e Pindick (1994, p.400) consideram o range de 15% a 25% como razoável para a volatilidade do preço do petróleo, por isso adota-se a média de 20%. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%. Dias (2004, p.101) destaca que a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.6.2). Pickles e Smith (1993) sugerem que em OR se use, inicialmente, a taxa livre de risco como o valor da *convenience yeld.* Segundo os autores, esta estimativa é razoável como equilíbrio de longo prazo.

A análise do prospecto IE-2 é realizada na forma *backward*, iniciando pela opção simples de desenvolvimento, que apresenta valor de US$ 44,1 MM e gatilho (V^*) de US$ 123,2 MM. Como o gatilho está abaixo do valor atual da reserva desenvolvida de US$ 126,4 MM, significa que a opção já se encontra *deep in the money*. Já a opção composta de exploração apresenta valor de US$ 5,5 MM com gatilho (V^{**}) de US$ 130,3 MM. Como o gatilho está acima do valor atual da reserva desenvolvida (US$ 126,4 MM), significa que não está madura. Neste cenário, a regra de decisão recomenda que a empresa não invista imediatamente, ao contrário, aguarde até que o primeiro estágio também esteja *deep in the money*.

A Figura 16 compara o valor das opções de desenvolvimento e de exploração em relação à regra de decisão dos seus pares VPL e VME. A diferença entre os valores das duas opções deve-se ao efeito de achatamento dos valores provocado pela ponderação do valor da “reserva” exploratória perfurada e desenvolvida com a probabilidade de sucesso. A Figura 17 apresenta o mesmo gráfico, mas com os valores das opções normalizados pelo investimento. Note que as curvas do VPL e do VME são graficamente coincidentes em decorrência da normalização. A Figura 18 apresenta as curvas de gatilho dos dois estágios em valores absolutos. Note que as duas curvas se cruzam em torno do tempo de 0,5 anos, separando duas regiões do gráfico. À esquerda deste ponto, a curva de gatilho do primeiro estágio (exploração *strictu sensu*) é maior do que a da curva do segundo estágio (desenvolvimento), enquanto que à direita ocorre o contrário. Isso significa que até 0,5 anos, toda vez que a exploração estiver *deep in the money*, o desenvolvimento também estará, podendo a opção composta ser exercida imediatamente. A partir de

então, o fato do primeiro estágio estar *deep in the money* já não é suficiente para o exercício imediato.

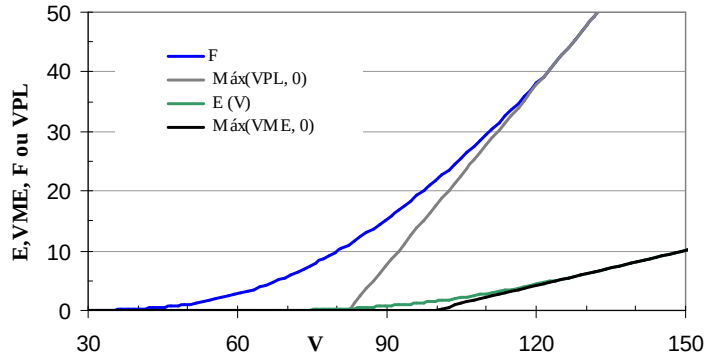

Figura 16 – Valor em US$ Milhões dos dois estágios da opção de exploração IE-2.

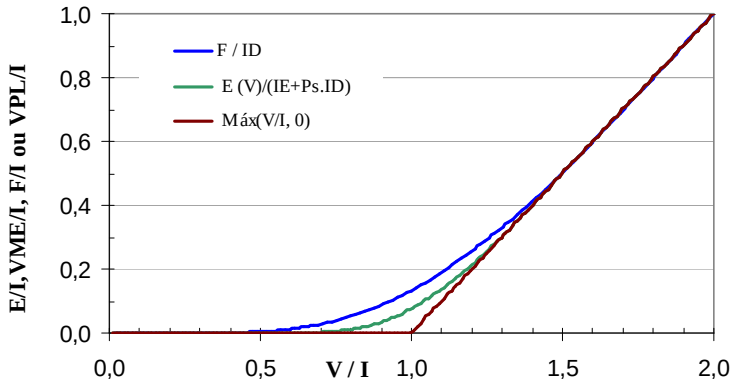

Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2, primeiro e segundo estágios.

Conforme discutido na Seção 4.3.3, o MDE se diferencia do Modelo de PS&S para exploração por tratar esta opção como composta, preservar o risco geológico e observar expirações diferentes para os dois estágios da opção, quando houver. Para permitir a comparação, admitiu-se que as taxas de dividendos são iguais nos dois modelos (6%), enquanto que os valores em US$/bbl de PS&S já estão convertidos para US$ MM nos gráficos. Assim o valor da opção com a abordagem de PS&S é obtido sobre o valor da reserva desenvolvida considerando como preço de exercício a soma dos investimentos em exploração e desenvolvimento. A opção de exploração apresenta valor de US$ 40,7 MM com gatilho de US$ 112,4 MM, estando desde já *deep in the money*.

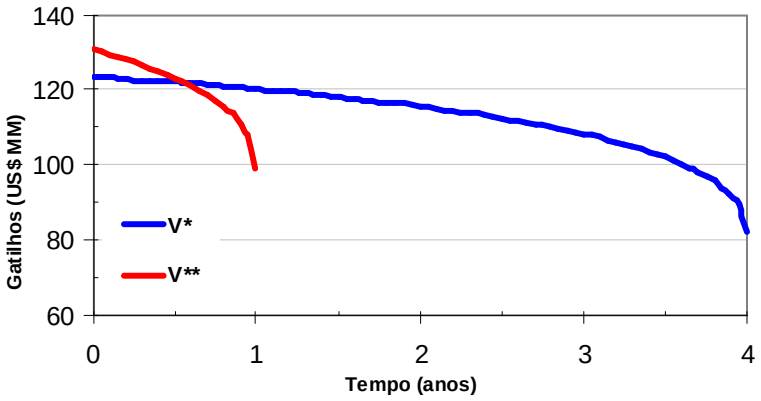

Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE.

A Figura 19 compara o gráfico do valor da opção de exploração do prospecto IE-2 calculado pelo MDE com a abordagem de PS&S. O fato do Modelo de PS&S não considerar a probabilidade de sucesso faz com que a opção exploratória tenha um valor exageradamente alto em relação ao MDE, mas com preço de exercício muito inferior (US$ 112,4 contra US$ 130,3 milhões do MDE), já que apresenta uma relação V/I mais elevada.

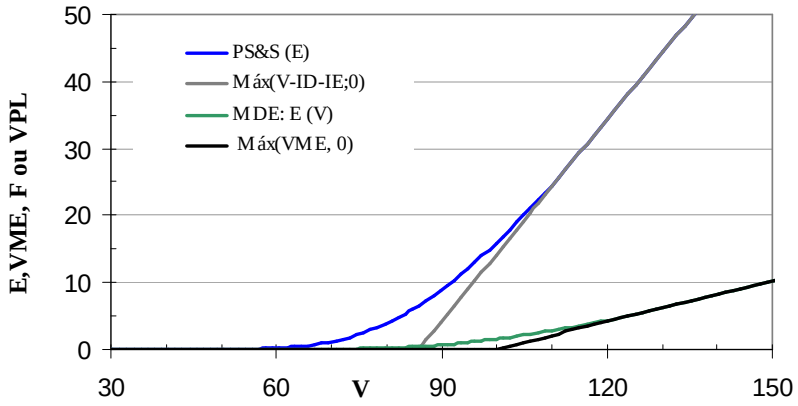

Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE.

A Figura 20 apresenta as curvas de gatilho geradas com os dois modelos. As curvas são paralelas pelo fato dos modelos estarem avaliando um único projeto, ou seja, todos parâmetros são iguais (r_f, σ, δ e T_1), exceto o preço de exercício.

Se o valor da opção é considerado normalizado, a curva do valor crítico normalizado (V^*/I) será única (Figura 21), conforme discutido na Seção 4.3.3 (Merton, 1973, apud PS&S, 1988, p.489). Então, como o modelo de PS&S apresenta maior relação V/I do que o MDE, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a abordagem de PS&S para a opção de exploração será a primeira a tornar-se *deep in the money*, independente do valor da probabilidade de sucesso ($Ps \in [0,1)$):

$$\frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Isso significa que no MDE o valor crítico da opção será sempre maior do que na abordagem de PS&S, portanto apresenta sua curva de valor crítico também sempre maior (Figura 20).

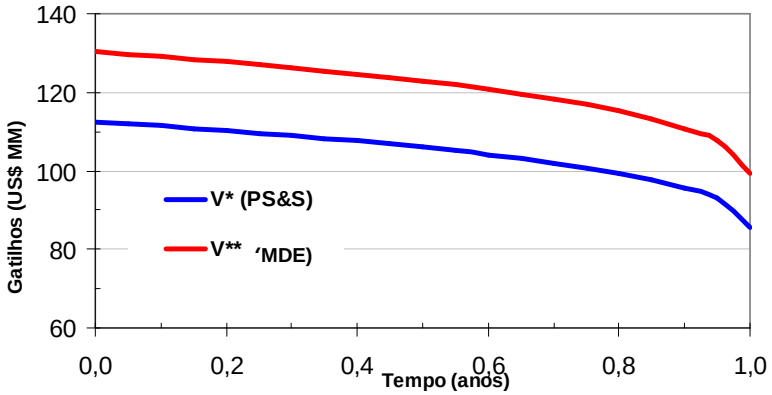

Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE.

A análise deste exemplo demonstrou vários aspectos teóricos discutidos na Seção 4.3.3. Em particular observou-se que o valor da opção exploratória quando tratada como opção simples é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. Também se verificou que ignorar a probabilidade de sucesso geológico implica em um valor crítico menor. Por fim, a diferenciação das expirações dos dois estágios

demonstrou que o exercício do segundo estágio não implica necessariamente no exercício do primeiro, gerando uma regra de decisão mais elaborada do que a de uma opção simples ou composta com uma única expiração. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

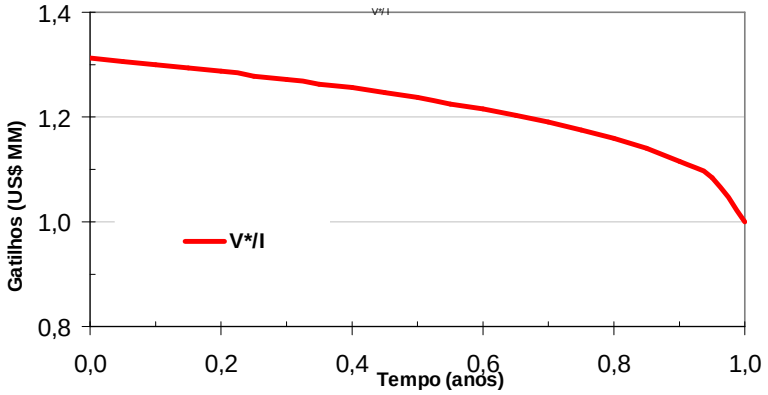

Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2.

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples

No processo de planejamento, uma empresa se depara periodicamente com o problema da priorização de investimentos em um *portfolio* de projetos. São muitos os critérios disponíveis ao decisor para a escolha do conjunto adequado de projetos (ver, por exemplo, Ross *et al*, 2002, Cap.6). Em geral envolvem indicadores tradicionais como o VPL, o *payback*, a TIR, o EVA (*Expected Value Added*), índices de rentabilidade como o VPL/IA (Investimentos Atualizados), etc. Estes indicadores são frequentemente utilizados de forma isolada ou em conjunto, compondo um *ranking* ou alguma função a qual o decisor deseja maximizar, sujeita a uma ou mais restrições como financeiras, de insumos, de equipamentos, etc. Mas por mais sofisticado que se torne este processo, pesa o fato de estar fundamentado em um fluxo de caixa, descontado ou não, que ignora as flexibilidades embutidas em um projeto, capturadas com OR.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43, ver Seção 2.2) relata o exemplo de uma companhia que tradicionalmente utiliza o VPL na aprovação dos

investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo. Realizou um teste *ex-post* da regra de decisão do VPL contra a regra de decisão de OR considerando dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um MGB. Os resultados revelam que o critério de OR apresenta um VPL *ex-post* para os projetos com VPL>>0 16,6% superior, enquanto que os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para significativamente positivo. Este resultado indica que um critério de priorização que considere a valoração com OR deve ser superior àqueles que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades.

Dias (1996, p.247) sugere a adoção de OR para a priorização de investimentos em uma carteira de projetos. Inicialmente, a empresa deve investir apenas naqueles projetos que já estão *deep in the money*. Caso seja necessário reduzir ainda mais investimentos devido a alguma restrição, recomenda que se utilize a volatilidade do preço do petróleo (comum a todos os projetos) como variável de priorização da carteira. Para isso basta aumentar progressivamente a volatilidade até que haja um subconjunto de projetos *deep in the money* que se enquadre na restrição[46].

Nesta Seção testa-se este critério para a priorização de projetos de um *portfolio* de oportunidades de investimentos em projetos de produção de petróleo, avaliados como OR simples – *call* americanas – e sujeitos a restrições orçamentárias. Adota-se o Modelo de Negócios (valor da reserva desenvolvida é função linear do preço do petróleo - Seção 4.3.1) combinado com o Modelo de PS&S para a estimativa da taxa de dividendos (Seção 4.3.2). A volatilidade será a do preço do petróleo, que segue um MGB.

Considere uma carteira com 27 de projetos de investimento em campos de petróleo sob regime de concessão. A Tabela 2 na sua metade esquerda lista o valor do projeto desenvolvido (V), o investimento atualizado (IA ou I), o VPL e a

[46] O ajuste da volatilidade pode ser feito de forma diferenciada. Por exemplo, poderia afetar apenas os projetos que estejam em um determinado país onde haja uma maior instabilidade regulatória. Também pode ser motivado por outras razões como, por exemplo, a expectativa do gerente, acionista ou *debitholder* sobre o comportamento dos preços futuros, o que afetaria o resultado da firma, seu valor de mercado e até sua capacidade de honrar seus financiamentos.

expiração para cada uma das oportunidades de investimento. De acordo com a regra clássica do VPL, dos 27 projetos, 23 apresentam-se positivos e por isso estariam aptos a serem implementados imediatamente.

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado.

Projetos		*V* em 2006	Invest. ou Preço Exercício	VPL (payoff)	Tempo de expiração	Gatilho V* em 2006	Valor da OR (F) (σ=20%)	Prêmio da flexibilid. (F-V) (σ=20%)	Deep in the money? (σ=20%)	Data esperada Exercício (σ=20%)	Probab. de Exercício (σ=20%)
		US$MM	US$MM	US$MM	Anos	US$MM	US$MM	US$MM		Ano	
1	P01	1083,2	450,4	632,9	3	629,6	632,9	0,0	Sim	2006	100%
2	P02	875,4	742,6	132,8	2	1006,6	149,8	17,0	Não	2007	75%
3	P03	243,0	215,6	27,4	2	292,2	35,5	8,0	Não	2007	66%
4	P04	1364,2	900,2	464,0	4	1285,3	464,0	0,0	Sim	2006	100%
5	P05	477,1	783,3	-306,2	4	1118,4	6,8	312,9	Não	2009	10%
6	P06	994,7	799,1	195,5	2	1083,2	203,5	7,9	Não	2007	84%
7	P07	1687,7	957,9	729,9	2	1298,4	729,9	0,0	Sim	2006	100%
8	P08	2995,7	1252,9	1742,7	5	1816,9	1742,7	0,0	Sim	2006	100%
9	P09	2302,0	892,8	1409,2	4	1274,7	1409,2	0,0	Sim	2006	100%
10	P10	492,3	258,5	233,8	3	361,4	233,8	0,0	Sim	2006	100%
11	P11	847,9	875,4	-27,5	3	1223,8	78,1	105,6	Não	2008	43%
12	P12	1102,9	260,2	842,8	3	371,5	842,8	0,0	Sim	2006	100%
13	P21	484,2	124,2	360,0	2	168,4	360,0	0,0	Sim	2006	100%
14	P22	38,4	78,9	-40,6	1	101,4	0,0	40,6	Não	2007	0%
15	P23	1105,6	285,1	820,5	3	398,6	820,5	0,0	Sim	2006	100%
16	P24	105,6	213,1	-107,4	3	297,9	0,2	107,7	Não	2009	2%
17	P25	55,3	39,2	16,1	2	53,2	16,1	0,0	Sim	2006	100%
18	P26	597,9	504,7	93,2	8	753,9	123,9	30,7	Não	2009	66%
19	P27	3059,7	485,2	2574,5	7	719,1	2574,5	0,0	Sim	2006	100%
20	P28	1906,0	795,6	1110,4	6	1167,7	1110,4	0,0	Sim	2006	100%
21	P29	241,6	85,7	155,9	7	127,0	155,9	0,0	Sim	2006	100%
22	P30	301,5	78,1	223,4	8	116,7	223,4	0,0	Sim	2006	100%
23	P31	29,5	28,9	0,6	3	40,4	3,3	2,7	Não	2008	49%
24	P32	37,6	36,7	0,9	3	51,3	4,3	3,4	Não	2008	50%
25	P33	59,2	13,9	45,3	2	18,8	45,3	0,0	Sim	2006	100%
26	P34	37,6	15,6	22,0	2	21,2	22,0	0,0	Sim	2006	100%
27	P35	17,6	3,5	14,1	4	5,0	14,1	0,0	Sim	2006	100%
	Total	22.543,4	11.177,3	11.366,1							

Mas se tratadas as oportunidades de investimento como OR, os resultados são bem diferentes. O valor do projeto desenvolvido é o preço do ativo subjacente (hipótese do MAD, Seção 3.3.1) e o VPL é o *payoff* do exercício da opção. Para o cálculo do valor da OR foi considerada a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993, Seção 3.5.1). A taxa de dividendos considerada foi de 4% a.a. (única para todos os projetos), tendo sido calculada de acordo com a equação (72)

do modelo de Paddock, Siegel e Smith (Seção 4.3.2). Foi considerada uma taxa de declínio de reserva 10%, custo de 30% e impostos de 34%. As datas e probabilidades esperadas de exercício forma calculadas de acordo com a Seção 3.7.

A volatilidade considerada é novamente a média do intervalo sugerido Dixit e Pindick (1994, p.400): 20%. Com estes dados foram calculados o preço de exercício antecipado (gatilho), o valor da OR, o prêmio da flexibilidade de adiar o investimento e a data provável de exercício de cada uma das OR. Os resultados obtidos estão dispostos na metade direita da Tabela 2. Observa-se que apenas 17 projetos encontram-se *deep in the money*, o que reduz o montante de investimento requerido pela regra do VPL em 25% , de US$ 9226,6 MM para US$ 6899,0 MM.

A Tabela 3 compara o efeito do aumento da volatilidade sobre o *portfolio* em análise em dois cenários distintos: 30% e 40%. Os dois cenários de volatilidade foram escolhidos somente com o objetivo de avaliar a eficácia desta estratégia de seleção de projetos.

O que se observa é que com volatilidade de 30% e 40% o numero de projetos *deep in the money* reduz de 17 para 15 e 13 projetos respectivamente. Então, no *portfolio* em questão, dobrar a volatilidade reduz a carteira em 4 projetos. O número de projetos cortados depende do perfil dos projetos da carteira e da intensidade da redução necessária. No caso em questão, a redução foi eficaz na medida em que elevar a volatilidade para 30% e 40% reduziu o investimento para 65% e 51% em relação ao requerido pela regra do VPL (100%) - Tabela 4.

A Tabela 4 permite uma avaliação clara da eficácia da estratégia de aumentar a volatilidade do preço do petróleo para a seleção de um *portfolio* de projetos de investimento. A partir da regra do VPL>0, compara a redução de investimento e VPL obtidos com os projetos selecionados com volatilidades de 20%, 30% e 40%. A terceira e quintas colunas revelam respectivamente a redução dos investimentos e do VPL da carteira com a priorização com OR. Com volatilidade de 40%, o *portfolio* selecionado manteve 84% do VPL>0 inicial gastando metade do investimento.

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo.

Projetos		Deep in the money ? σ=20%	Data esperada Exercício σ=20%	Probab. de Exercício σ=20%	Deep in the money ? σ=30%	Data esperada Exercício σ=30%	Probab. de Exercício σ=30%	Deep in the money? σ=40%	Data esperada Exercício σ=40%	Probab. de Exercício σ=40%
			(ano)			(ano)			(ano)	
1	P01	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
4	P04	**Sim**	2006	100%	Não	2007	100%	Não	2008	67%
7	P07	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	Não	2006	93%
8	P08	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	1%	**Sim**	2006	100%
9	P09	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
10	P10	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	6%	Não	2006	91%
12	P12	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	52%	**Sim**	2006	100%
13	P21	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
15	P23	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
17	P25	**Sim**	2006	100%	Não	2007	46%	Não	2007	72%
19	P27	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
20	P28	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
21	P29	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
22	P30	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
25	P33	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
26	P34	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
27	P35	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
6	P06	Não	2007	84%	Não	2007	100%	Não	2007	60%
2	P02	Não	2007	75%	Não	2007	100%	Não	2007	54%
3	P03	Não	2007	66%	Não	2007	100%	Não	2007	51%
14	P22	Não	2007	0%	Não	2007	100%	Não	2007	2%
24	P32	Não	2008	50%	Não	2008	0%	Não	2008	42%
23	P31	Não	2008	49%	Não	2008	0%	Não	2008	40%
11	P11	Não	2008	43%	Não	2008	83%	Não	2008	38%
18	P26	Não	2009	66%	Não	2010	45%	Não	2010	45%
5	P05	Não	2009	10%	Não	2009	39%	Não	2009	16%
16	P24	Não	2009	2%	Não	2009	100%	Não	2009	8%
	Total Sim	17			15			13		

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.

Critério de corte de projetos:	Investimento		VPL da carteira		VPL/IA
VPL >0	9226,6	100%	11847,7	100%	1,28
OR deep (σ=20%)	6899,0	75%	11397,2	96%	1,65
OR deep (σ=30%)	5959,6	65%	10917,1	92%	1,83
OR deep (σ=40%)	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
OR (σ=20%) com VPL	4929,7	53%	9229,9	78%	1,87
VPL/IA=1,39	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
VPL/IA=0,9	5001,8	54%	10187,3	86%	2,04

Na quinta linha da Tabela 4, apresentam-se os resultados de um critério misto: OR com volatilidade de 20% seguida da priorização com o VPL. A estratégia de combinar OR com o *V** também permitiu reduzir o investimento ao nível desejado (53%), entretanto se obteve um nível inferior de VPL: 78% do VPL>0, revelando-se como uma estratégia inferior.

Os resultados obtidos estão de acordo com o esperado. Utilizar OR como filtro para a seleção de projetos é um procedimento valoroso. Embora possa requerer cenários de volatilidade exagerados, o procedimento tem a vantagem de ser conservador na medida em que seleciona os projetos mais robustos ou mais *deep in the money*. Isso fica muito claro ao se analisar a coluna de VPL/IA da Tabela 4, onde a melhor relação é obtida com a máxima volatilidade.

Dixit e Pindick (1994, p.155, Figura 5.4) caracterizam graficamente a relação do valor crítico ou gatilho com a volatilidade: $\partial V^* / \partial \sigma > 0$. Então, se o investimento for considerado constante, aumentar o gatilho através do aumento da volatilidade implica num aumento proporcional na relação V^* / I. Admitindo que o investimento seja o valor atualizado ($I = IA$) e que o projeto esteja *deep in the money* ($V \geq V^*$), então:

$$VPL = V - I \Rightarrow V = VPL + I \therefore V \geq V^* \Rightarrow VPL + I \geq V^* \Rightarrow VPL \geq V^* - I \Rightarrow$$
$$\frac{VPL}{I} \geq \frac{V^* - I}{I} \Rightarrow \qquad \frac{VPL}{IA} \geq \frac{V^*}{I} - 1 \qquad (81)$$

Esse resultado significa que elevar o gatilho para selecionar projetos previamente *deep in the money,* implica no aumento da relação VPL / IA da carteira selecionada.

Este resultado é ainda um pouco mais geral: Dado um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica, os investimentos são constantes e o valor crítico normalizado V^* / I é desconhecido, selecionar projetos com VPL/IA tem efeito similar ao aumento da volatilidade na priorização com OR. Este critério é limitado, pois não se sabe se os projetos estão *deep in the money* ou não. Mas na ausência de uma valoração com OR, a seleção de projetos com o VPL/IA é uma aproximação inicial melhor do que, por exemplo, o VPL. No *portfolio* analisado com volatilidade de 20%, a razão VPL/IA

crítica ou de corte encontra-se entre 0,9 e 1,39, pois, o projeto P10 (VPL/IA=0,9) não está *deep in the money* enquanto que o P08 sim (VPL/IA=1,39).

As Figuras 22 e 23 exemplificam o efeito da priorização dos projetos com OR sobre a previsão de produção e investimentos com a elevação da volatilidade, observando-se as datas prováveis de exercício e a expiração das OR.

A regra do VPL positivo implica num cronograma de produção e investimento mais agressivos do que aqueles obtidos com OR, que são abrandados pelo gatilho da regra de decisão. Assim, se a firma deseja gerenciar seu planejamento minimizando a probabilidade de perda, deve investir considerando as datas de exercício apresentadas na Tabela 2. No caso de se desejar atender à demanda de um mercado (Figura 22) pode adequar seu cronograma adiando os projetos com menor probabilidade de exercício (com menor razão V^* / I) até as respectivas datas de expiração, gerando uma curva de produção ajustada à demanda projetada.

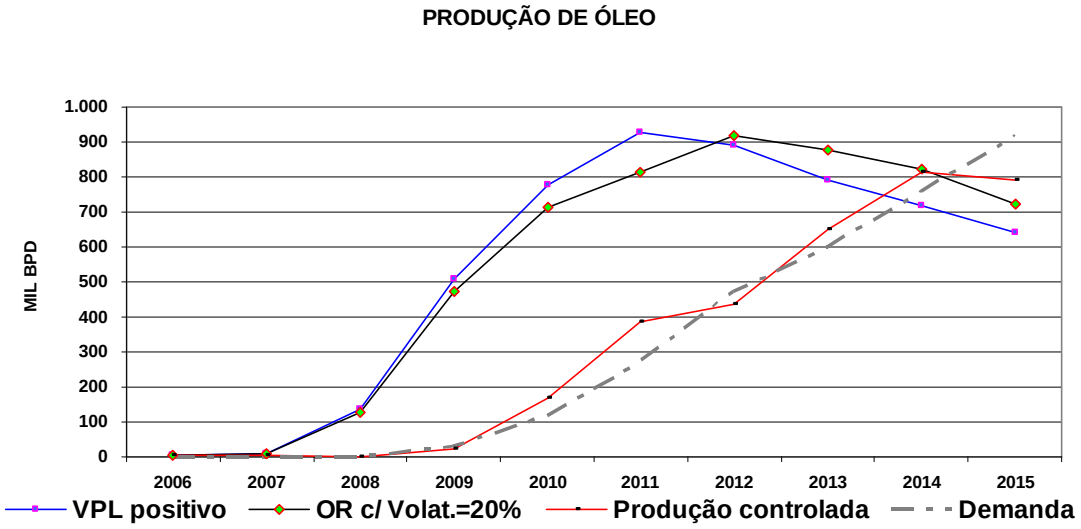

Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento.

A Figura 23 apresenta os investimentos dos projetos como fluxos e em valores nominais, ao contrário da Tabela 2 que apresenta os mesmos dados de forma pontual e atualizados para 2006. Uma observação mais cuidadosa revela que o efeito da priorização sobre o cronograma de investimentos se dilui quando os investimentos são visto como fluxos, mas esse é um efeito presente qualquer que seja o critério de priorização adotado. O perfil das curvas de investimento denota a

implantação dos projetos de desenvolvimento. Tipicamente, há um pico no dispêndio dos recursos durante a perfuração de poços e implantação das facilidades de produção, que então diminuem gradativamente com o início e declínio da produção, quando os investimentos visam amenizar o efeito da depleção das jazidas.

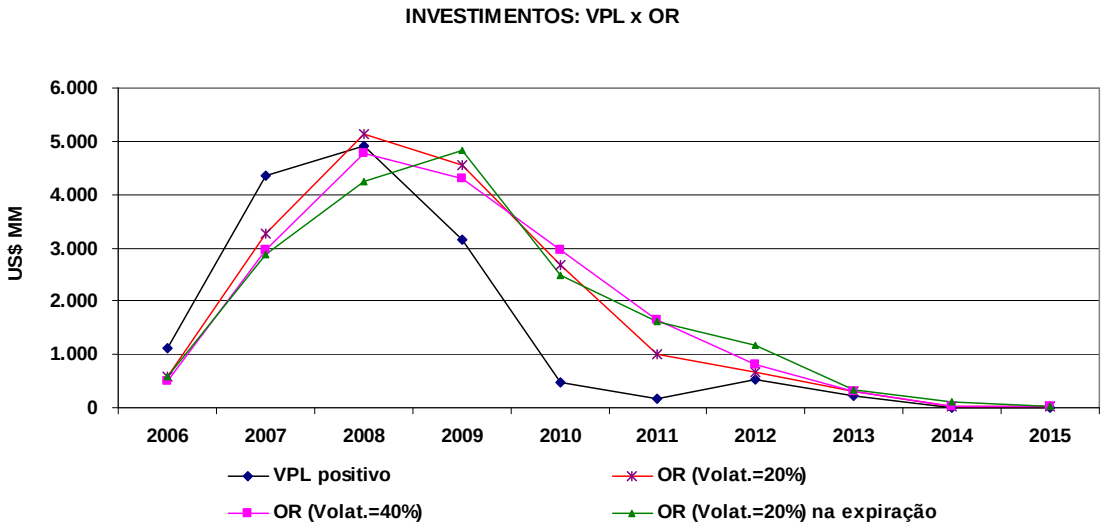

Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado.

Assim, aumentar a volatilidade de um *portfolio* de OR que dependem de uma variável estocástica comum é um procedimento mais eficaz do que o VPL ou o VPL/IA na priorização de projetos à medida que aumenta a robustez da carteira selecionada. Este procedimento também deve ser melhor do qualquer outro critério que se baseie unicamente em um fluxo de caixa positivo devido ao prêmio exigido para o exercício antecipado das opções. Não sendo possível a avaliação por OR, o decisor pode utilizar o *ranking* com VPL/IA como uma primeira aproximação do resultado com OR, embora isso possa levar a investimentos em projetos imaturos.

Por fim cabe ressaltar que, embora o resultado obtido com OR na priorização de investimentos seja animador, apresenta eficácia restrita. Priorizar investimentos da forma descrita, embora aumente o valor esperado do VPL *ex-post* do *portfolio*, considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) pode ser uma solução mais acertada.

6. Conclusões

A dissertação deixou clara a superioridade da Teoria de Opções Reais como ferramenta de decisão sobre investimentos em relação ao tradicional VPL e o VME.

Em uma opção de investimento/abandono, o VPL positivo/negativo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Na presença de incerteza e flexibilidades, o investimento/abandono imediato requer um prêmio maior do que o valor da espera pela evolução da incerteza.

Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir em um momento seguinte. Adiar só tem valor caso haja uma probabilidade positiva de uma perda irreversível, situação em que o investimento não deve ser feito imediatamente. Eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

O MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente a depender dos parâmetros considerados.

A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) apresenta-se como um limite inferior acurado para o valor verdadeiro de uma opção americana de compra com expiração finita, onde o ativo básico segue um MGB. A comparação desta aproximação analítica com a de Baroni-Adesi e Whaley (1987) para opções com expiração superior a um ano revelou que, para o conjunto de dados considerados pelos autores, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland apresentam uma performance superior ao não divergir a Raiz do erro Quadrático Médio - RQM.

A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. Os Modelos de Negócios e de Paddock, Siegel e Smith (1988) para opções de desenvolvimento são válidos e consistentes. Mas o modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para uma reserva não desenvolvida. Isso significa que até mesmo o processo real da reserva não desenvolvida pode ter tendência negativas: $\mu < \delta$. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo sobre o preço

de petróleo ou sobre custos, é questionável que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a depreciação de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

O Modelo de Negócios tem o mérito de ser de fácil aplicação, o que pode contribuir muito para a implantação da cultura de tomada de decisões com OR. Essa facilidade operacional ainda agrega outras vantagens: Permite lidar com facilidade com um grande número de projetos simultaneamente, oferecendo uma resposta rápida ao decisor. Entretanto seu uso deve ser limitado a decisões mais simples.

No caso do projeto ID-1, o Modelo de Negócios gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto. Esse conservadorismo exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

O valor normalizado da opção exploratória quando tratada como opção simples e sem o risco geológico (Modelo de PS&S) é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. A diferenciação das expirações dos dois estágios demonstrou que o exercício da opção requer uma regra de decisão mais elaborada. O fato de o primeiro estágio estar *deep in the money* não implica necessariamente no exercício imediato da opção de exploração, como ocorre quando a opção composta tem expiração única. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo mais apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

A priorização de investimentos com a elevação da volatilidade em um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica é um critério superior em relação aos critérios que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades. A elevação da volatilidade implica em selecionar os projetos mais robustos economicamente, em decorrência da elevação do gatilho para o investimento imediato.

Elevar o gatilho para selecionar projetos implica no aumento da relação VPL/IA da carteira selecionada. Assim, selecionar projetos com VPL/IA gera um resultado mais coerente com a teoria de opções reais sem garantir, obviamente, que os projetos selecionados estão *deep in the money.*

Entretanto, priorizar investimentos com o auxílio de OR conforme descrito é uma ferramenta limitada, pois considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) parece ser uma solução mais acertada.

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. Viu-se que esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Considerando a solução ii $V_U > I > V_D$ por simplicidade (note que $I > V_U > V_D$ o ativo é abandonado em qualquer cenário e que se $V_U > V_D > I$ o ativo não seria abandonado nunca) chegou-se a:

$$V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

A inequação (5) mostra em que situação ainda vale a pena não abandonar. Considerando o aumento do número de períodos e a modelagem da incerteza representados na Figura 3, então:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \Rightarrow \text{em (5)}$$

$$\frac{(1+r).U.\delta}{r} > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \Rightarrow (1+r).U.\delta.q > [I.(r+q) - \delta.(1+r)].r \Rightarrow$$

$$\delta.(1+r).(U.q - r) > I.(r+q).r \Rightarrow \boxed{\delta > \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}}$$

Então se δ é maior do que o termo à direita na última desigualdade, o decisor deve esperar pelo período seguinte para tomar a decisão de abandono. Para que δ represente a situação em que o abandono imediato é a melhor opção deve-se inverter o sinal da desigualdade. Então, seja δ^* gatilho que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar, a partir da última desigualdade pode-se escrever:

$$\boxed{\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua

probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica

Portfolio replicante (r*eplicating portfolio approach*)

Uma terceira forma de calcular o valor da opção de investir em t_1 (por exemplo, em Copeland e Antikarov, 2001, p.90-95 e Trigeorgis, 1996, p.72-77) é montar um *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção com Δ ações de um ativo gêmeo (*twin security*) e B títulos livres de risco (*bonds*). O ativo gêmeo seria um ativo financeiro que replicasse perfeitamente os *payoffs* do projeto de investimento.

Então na Figura 6 o *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção é formado por Δ ações do ativo gêmeo e B títulos livres de risco:

$$\Phi_0 = \Delta.V_o + B \therefore \Phi_1 = \Delta.V_1 + B.(1 + r_f)$$

Como o *portfolio* Φ replica os *payoffs* da opção, pode-se escrever:

(i) $\Delta.\overline{V}_U + B.(1 + r_f) = F_U$

(ii) $\underline{\Delta.\overline{V}_D + B.(1 + r_f) = F_D}$

(i) - (ii) $\Delta.(\overline{V}_U - \overline{V}_D) = F_U - F_D \Rightarrow \Delta = \dfrac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}$

Que é o resultado (11) obtido anteriormente. A quantidade de ativo livre de risco B pode ser obtida a partir das equações (i) ou (ii) acima:

$$B = \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} = \frac{F_D - \overline{V}_D.\Delta}{R_f}$$

Sejam U e D como definido anteriormente: $\overline{V}_U = U.V_0$ e $\overline{V_D} = D.V_0$. Considerando que o *portfolio* Φ replica a opção, então pelo argumento de não arbitragem, o preço da opção em t_0 é o mesmo preço do *portfolio* Φ em t_0:

$$E_0(F_1) = \Phi_0 = \Delta.V_0 + B \Rightarrow E_0(F_1) = \Delta.V_0 + \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U$$

Este último resultado é a equação (12), obtida por avaliação neutra ao risco. Logo substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14):

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)} \quad (14)$$

Programação dinâmica

A programação dinâmica é uma ferramenta geral de otimização dinâmica particularmente útil para lidar com incerteza. Consiste em reduzir uma seqüência de decisões em duas alternativas mutuamente excludentes: o valor da decisão imediata e a função de valor que contempla todas as decisões subseqüentes (Dixit e Pindick, p.93-94). Assim, em cada o período, o decisor simplesmente escolhe a estratégia de maior valor: exercer a opção (decisão imediata) ou esperar pela decisão subseqüente. Foi exatamente este o processo utilizado nos Exemplos 1 e 2 da Seção 2.2, escolhido por seu apelo intuitivo.

Se o horizonte de tempo é finito, essa ferramenta pode ser aplicada no penúltimo período, revelando o valor da opção neste momento. De posse destes dados, agora a mesma técnica pode ser aplicado no período imediatamente anterior, e assim retroceder-se até o presente, num processo denominado de *backward induction*. Se ao contrário, o horizonte de tempo é infinito, a situação fica relativamente simplificada por sua natureza recursiva que, a cada momento, leva a um problema idêntico ao original. Isso permite a caracterização teórica da solução e em alguns casos, soluções analíticas.

Reconsidere a Figura 6. O primeiro passo consiste em calcular o valor da opção de investir no segundo período é dado por $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e por $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$ nos estados *up* e *down* da natureza, onde $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$ e $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$. Retrocedendo para o primeiro período, o valor esperado de todos os cenários futuros possíveis é dado por $E_0(F_1) = [q.F_U + (1-q).F_D]/R$, onde q e $1-q$ são as probabilidades reais e R é a taxa de desconto apropriada, ajustada ao risco da OR. Cabe ao decisor então decidir entre o investimento imediato ou esperar pelo

segundo período: $Max[V_0, E_0(F_1)]$. Esta valoração foi feita considerando o mundo real, mas poderia ter sido elaborada no mundo neutro ao risco, utilizando-se então as probabilidades neutras ao risco q e $1-q$ dadas por (14) e a taxa livre de risco R_f. Então o valor da opção será dado por $Max[V_0, E_0(F_1)]$ onde $E_0(F_1) = [p.F_U + (1-p).F_D]/R_f$ (13), resultado idêntico aos anteriores.

A Programação Dinâmica é a segunda técnica extensivamente utilizada no livro de Dixit e pindick (1994) para valorar OR, alternativamente a ativos contingentes. Dixit (op.cit, p.120-121) discute o relacionamento entre as duas abordagens, vantagens e desvantagens, argumentando que os dois métodos juntos podem lidar com uma grande variedade de aplicações, embora uma ou outra possa em algum caso ser mais adequada.

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito

Seja $f(x)$ uma função e uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ que convirja para $f(x)$ num certo intervalo de convergência, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...$$

Derivando membro a membro verifica-se que as séries das derivadas de ordem n convergem no mesmo intervalo, então se pode calcular a_n para qualquer n em torno de $x = a$. Por exemplo, para $n = 3$:

$$f'''(x) = (a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...)''' \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (0 + 0 + 0 + 3.2.1.a_3.(x-a)^0 + ... + n.(n-1).(n-2).a_n.(a-a)^{n-3} + ... \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (3.2.1.a_3.1 + ... + 0 + ...) \Rightarrow f'''(a) = 3!.a_3 \Rightarrow a_3 = f'''(a)/3!$$

Generalizando escreve-se: $a_n = f^n(a)/n!$, onde f^n é a *n-ésima* derivada de $f(x)$, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$\Delta f(x) = \frac{f'(a)}{1!}.\Delta x + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(\Delta x)^n + ...$$

Fazendo com que $x \to a$, se obtém a expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f'(a).dx + \frac{f''(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t, então:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt$$

Aplicando a regra da cadeia e admitindo que as diferenciais parciais mistas sejam iguais (Teorema de Young), obtém-se:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 \qquad \text{já que} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}.dt.dx$$

Considerando a Expansão de Talyor (28), dF será dado por:

$$dF = [\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt] + \frac{1}{2!}.[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt] + \frac{1}{3!}.[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 ...$$

Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \Rightarrow dx^2 = a^2(x,t).dt^2 + 2.a(x,t).dt.b(x,t).dz + b^2(x,t).dz^2$$
$$dx^2 = 0 + 2.a(\cdot).b(\cdot).dt.\varepsilon.\sqrt{dt} + b^2(\cdot).(\varepsilon.\sqrt{dt})^2 \Rightarrow dx^2 = 2.a(\cdot).b(\cdot).\varepsilon.dt^{3/2} + b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt$$
$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e:}$$

$$dx^3 = dx^2.dx = b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt.(a(\cdot).dt + b(\cdot).\varepsilon.\sqrt{dt}) \Rightarrow$$
$$dx^3 == a(\cdot).b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt^2 + b^3(\cdot).\varepsilon^3.dt^{3/2} \Rightarrow \; dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - E^2(\varepsilon) = 1 \Rightarrow V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - (0)^2 = 1 \Rightarrow \; E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32)$$

Logo:

$$E(dz^2) = E(\varepsilon^2.dt) = E(\varepsilon^2).dt = 1.dt \Rightarrow E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33)$$ e:

$$V(dz^2) = V(\varepsilon^2.dt) = V(\varepsilon^2).dt^2 \therefore dt^2 = 0 \Rightarrow V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2.dt = dz^2 \sim N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).dt] \Rightarrow$$

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson

Na Seção 3.1.4 abordou-se a associação do Processo de Poisson ao Processo de Ito, o que faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta (Poisson) - (26): $dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq$.

Com isso, determinar o processo de uma função $H(x)$ exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86). Inicialmente, observa-se que a partir de (26) pode-se escrever (Brandão, Cap.3, Seção 2.7, p. 3-4):

$$dH = dH_{continuo} + dH_{discreto} \quad (83)$$

A parte continua pode ser obtida com o Lema de Ito apresentado anteriormente (35):

$$dH_{continuo} = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz]$$

Quanto à parte discreta $(dH_{discreto})$, suponha que o evento de Poisson ocorra em um intervalo $(t, t+dt)$, então $x_{t+dt} = x_t + u.g(x,t)$, onde u é o tamanho do salto que também pode ser aleatório. Com isso, $dH_{discreto}$ será:

$$dH_{discreto} = H(x_t + u.g(x,t), t) - H(x_t, t)$$

Retornado os dois resultados anteriores a (83):

$$dH = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz] + H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)$$

Aplicando o valor esperado, obtém-se:

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)] \Rightarrow$$

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E_u\{\lambda.dt.[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)]\} \quad (84)$$

Onde E_u é o valor esperado do tamanho do salto *u*, dado pela diferença do valor de $H(x,t)$ em pontos discretos diferentes.

Referências Bibliográficas

BARONI-ADESI, G; WHALEY, R.E. Efficient Analitic Approximation of American Option Value. **Journal of Finance**, 42, p.301-320. June 1987.

BERNANKE, B.S. Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment. **Quarterly Journal of Economics**, 98, p.85-106. February 1983.

BJERKSUND, P; EKERN, S. Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: From "Last Chance" to "Wait and See" Strategies. **Financial Management**, 19, p. 65-83. Autun 1990.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. Closed-Form Approximation of American Options. **Scandinavian Journal of Management**. 9, p.87-99, 1993.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. American exchange options and a put-call transformation: a note. **Journal of Business, Finance and Accounting**. 20, p.761-764. 1993b.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. **Closed Form valuation of American Options**. Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, Department of Finance and Management Science, Bergen, Norway. April 2002, 17p. Disponível em: http://www.nhh.no/for/seminars/previous/2002-fall/251002.pdf, acesso em 18/08/2006.

BLACK, F; SCHOLES,M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy.** 81, p. 637-654. 1973.

BRANDÃO, L. Tradução livre do Cap. 3 e 5 do livro Investment under Uncertainty, DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **,** 3rd ed, 1994, disponível em http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/, acesso em 03/04/2006.

BROADIE, M; DETEMPLE, J. American Options Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods. **Review of Financial Studies**. 9, n. 4, Winter, 1996, p.1211-1250.

COPELAND, T; ANTIKAROV. V. **Real Options: a practioner's guide**. 1st ed. USA: Texere, 2001, 372p

DETEMPLE, J. **American-Style Derivatives – Valuation and Computation** Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton (USA), 2006, 232p.

DIAS, M.A.G. **Investimento sob incerteza em Exploração e Produção de Petróleo.** 1996. 470p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. **Journal of Petroleum Science & Engineering**. 44, p.93-114. 2004.

DIAS, M.A.G. **Opções Reais Hibridas com Aplicações em Petróleo**. 2005. 509p. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. e ROCHA, K.M.C. Petroleum Concessions with Extendible. Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, Wassenaar-Leiden (Holanda), June 1999. Disponível versão revisada de janeiro de 2001 em: http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/. Acesso em: 17/04/2005.

DIAS, M.A.G. **Mean Reversion with Jumps Models**, p.3-4. Disponível em: http://www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm/. Acesso em: 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **First Hitting Time and Expected Discount Factor**. Disponível em: http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html. Acesso em : 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **Real Option Theory for Real Assets Portfolios: the Oil Exploration Case.** Working Paper, Depart. of Industrial Engineering, PUC-Rio, presented at the 10th Annual International Conference on Real Options, New York, June 2006, 37 p.

DICKEY, D.A., FULLER, W.A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with Unit Root. **Econometrica**, 49, 1057-1072. 1981.

DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **Investment under Uncertainty**. 3rd ed. USA: Princenton University Press, 1994, 468p.

GEMAN, E; EL KAROUI, N; ROBERT, J.C. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing. **Journal of Applied Probability**. 32, p.443-458. 1995.

GRUY, H.J; GRAB,F.A; WOOD, J.W. Determining the value of oil and gas in the ground. **World Oil CXCIV**. p.105-108. 1982.

HAUG, E.G. **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**. McGraw-Hill, 1998, 232 p.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. 5th ed. USA: Prentice Hall, 2003, 744p.

LAUGHTON, D.G., The management of flexibility in the upstream petroleum industry. **Energy Journal**. 19, p.83-114. January 1990.

MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**. 7, p.77-91. 1952.

MACMILLAN, L.W. Analytic Approximation for the American Put Option. **Advances in Futures and Options Research**. 1, p.119-139. 1986.

MCDONALD, R; SIEGEL, D. The Value of Waiting to Invest. **Quarterly Journal of Economics**, p.707-727. November 1986.

MCDONALD, R; SCHRODER, M. A parity result for American options. **Journal of Computational Finance.** Working paper, Northwestern University, 1990.

MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science.** 4, p.141-183. 1973.

MERTON, R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. **Journal of Financial Economics**. 3, p.125-144. 1976.

MERTON, R.C. (1990). **Continuous-Time Finance**. Blackwell Publishers Inc, Cambridge, MA, 1990 (revised edition, 1992), 734 pgs.

METCALF, G.E; K.A. HASSET (1995). Investment under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walks and Mean Reversion. **Journal of Economic Dynamics and Control**. 19, p.1471-1488. November 1995.

MOSZKOWICZ, V.N. **Validação do Critério de Avaliação de Projetos Utilizando a Teoria das Opções Reais**. 2003. 157p. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

MYERS, S.C. Determinants of Corporate Borrowing. **Journal of Financial Economics**. n. 5, p.147-175. November 1977.

PADDOCK, J.L; SIEGEL, D.R; SMITH, J.L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. **Quarterly Journal of Economics**. 103, p.479-508. August, 1988.

PICKLES, E., SMITH, J.L. Petroleum property evaluation: a binomial lattice implementation of option pricing theory. **Energy Journal**. 14 (2), p.1-26. 1993.

PINDYCK, R.S.; D.L. RUBINFELD. 1995. p.545-546. **Microeconomics**. Prentice-Hall, Inc., third edition, 1995, 700 p.

PINDYCK, R.S. The Long-Run Evolution of Energy Prices. **Energy Journal.** 20(2), p.1-27. 1999.

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JAFFE, J.F. **Finanças Corporativas**. 2ª ed. Editora Atlas, 2002, 776p.

SAMUELSON, P. Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuates Randomly. **Industrial Management Review**. p.41-49. Spring, 1965.

SCHWARTZ, E.S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **Journal of Finance.** 52(3), p.923-973. July, 1997.

SHIMKO, D.C. **Finance in Continuous Time. A Primer**. 1st ed. **Local** Kolb Publishing Company, 1992, 110 p.

TRIGEORGIS, L. **Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. 1st ed. 5th printing. USA: The MIT Press, 1996, 427p.

VARIAN, Hal R. **Microeconomia**. 6a ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003, 778p.

VOLLERT, Alexander. **A stochastic control framework for real options in strategic valuation**. 1st ed. USA: Birkhauser Boston, 2003, 266p.

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo

Os seguintes termos foram adotados nessa dissertação com o significado que se segue. Definições formais ou completas devem ser buscadas em literatura específica.

Acumulação de petróleo: Qualquer volume de petróleo acumulado em subsuperfície, independente de ser recuperável técnico ou economicamente.

Adensamento de malha: Programa de desenvolvimento complementar de um campo de petróleo, onde novos poços são perfurados entre os pré-existentes com a finalidade de aumentar o volume de petróleo a ser recuperado.

Bloco: Área delimitada geograficamente por um órgão regulador onde uma companhia de petróleo tem o direito de desenvolver atividades de exploração e produção. Objeto de um contrato de cessão de direitos de exploração ou produção.

Cabeça do poço: Local onde se encontra os equipamentos de superfície instaldos em um poço.

Campo de petróleo: Acumulação de petróleo em produção.

Contrato de concessão: Instrumento legal pelo qual um órgão regulador cede e define as condições de uso de uma área para exploração e produção em um regime de concessão.

Delimitação: Conjunto de atividades que se seguem ao descobrimento de uma acumulação de petróleo cujo objetivo é definir o volume de petróleo descoberto e sua produção.

Depleção: Perda de pressão em um reservatório em decorrência da produção.

Desenvolvimento: Conjunto de atividades que se seguem à delimitação, cujo objetivo é instalar a infra-estrutura necessária para a produção de uma acumulação de petróleo.

Desenvolvimento complementar: conjunto de atividades complementares ao desenvolvimento de um campo cujo objetivo é aumentar o volume de petróleo recuperado. O adensamento de malha é um exemplo.

Exploração: Conjunto de atividades responsáveis pela identificação e teste de situações geológicas que podem revelar a existência de uma acumulação de petróleo. A exploração num sentido mais amplo engloba a fase de exploração propriamente dita e a fase de delimitação.

Explotação ou Produção: Fase operacional de um campo de petróleo, ou seja, em que ocorre a produção contínua de petróleo. Durante a fase de produção podem ser realizados projetos de desenvolvimento complementar.

Fator de recuperação: Percentual do volume de petróleo acumulado em subsuperfície que pode ser recuperado de forma econômica.

Poços: Obra de engenharia resultante da perfuração de uma situação geológica de interesse. Há diferentes tipos de poços, por exemplo: Pioneiro ou exploratório, de delimitação, de produção, de injeção de fluidos ou gás, etc.

Poço seco: Qualquer poço de exploração, delimitação ou produção perfurado na expectativa de se tornar produtor de petróleo, mas cujo resultado foi negativo.

Porosidade: Volume de espaço vazio em uma rocha reservatório preenchido por petróleo, água ou gás.

Preenchimento, fator de: Proporção de uma rocha trapa preenchida por petróleo;

Prospecto exploratório: Situação geológica não perfurada cujo estudo indica a possibilidade de acumular petróleo. Todo prospecto visa testar uma ou mais trapas.

Recuperação primária e secundária, fator de: Representa o percentual do volume de petróleo existente em uma acumulação de petróleo que pode ser recuperado do reservatório. A recuperação primária é aquela que pode ser obtida sem técnicas especiais como a pressurização do reservatório. A secundária refere-se ao volume adicional que pode ser recuperado com o auxílio de tais técnicas.

Regime de concessão: Regime regulatório para a atividade de exploração e produção de petróleo onde uma das principais características é a participação governamental (*royalty*) como uma fração constante da receita bruta ou produção.

Reserva: Há vários tipos de reservas, de uma forma genérica, refere-se a um volume de petróleo cuja existência já é comprovada e cuja recuperação é economicamente viável.

Reserva não desenvolvida: Reserva cujo desenvolvimento ainda não foi realizado, ou seja, sem a infra-estrutura necessária à sua produção.

Rocha reservatório: Rocha cuja porosidade permite a acumulação de petróleo.

Saturação de óleo: Refere-se ao percentual da porosidade de uma rocha que é ocupado por óleo. A saturação de óleo, gás e água de um reservatório soma 100%.

Sísmica 2D e 3D: A sísmica refere-se a um conjunto de atividades cujo objeto é o imageamento da disposição e relação das rochas em subsuperfície. A sísmica 2D refere-se à técnica de imageamento em duas dimensões, enquanto que a 3D refere-se ao imageamento em três dimensões.

Sonda: Nesta dissertação, refere-se ao equipamento responsável pela perfuração de poços. A sonda pode ser terrestre ou estar instalada em uma plataforma ou navio. Também

Trapa: Refere-se a uma situação geológica favorável à acumulação de petróleo. Trata-se de uma armadilha natural capaz de aprisionar o petróleo que migra em subsuperfície. A trapa associadas a outros fatores como, por exemplo, a existência de reservatório, a existência de petróleo em uma área, etc., pode constituir-se em um prospecto exploratório.

Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE
Fundação Getúlio Vargas

Opções Reais em Decisões de Investimento em Exploração e Produção

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Finanças e Economia Empresarial

Aluno: André Avila Scartezini

Banca Examinadora:
Marco Antonio Guimarães Dias (Orientador; PUC-RIO/DEI)
Marco Bonomo (EPGE/FGV)
José Paulo Teixeira (PUC-RIO/DEI)

Rio de Janeiro
2006

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, afetadas pela minha ausência parcial durante os últimos três anos, colaboraram com seu desprendimento, tolerância e compreensão para a conclusão do meu curso de mestrado em finanças e economia empresarial.

Em especial, agradeço a Silvana Pedroni por seu apoio e companheirismo.

A Marco Antonio Guimarães Dias pela orientação.

A Marco Bonomo pela atenção despendida.

A Adauto Carneiro Pereira, pela oportunidade e incentivo.

A Adelson Antônio da Silva, por viabilizar a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores, minha admiração.

Dedico este trabalho à Petrobras.

Rio de Janeiro, julho de 2006.

Resumo

Este trabalho faz uma revisão dos principais conceitos que definem a Teoria de Opções Reais. Tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob incerteza aplicado a problemas de Exploração e Produção de petróleo (E&P). Foram priorizados modelos simples que podem ser facilmente implantados no dia a dia de uma empresa, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Os modelos discutidos são elaborados com Movimento Geométrico Browniano, que pode ser uma aproximação razoável para a modelagem de preços, a depender dos parâmetros considerados. Em particular, é apresentado um modelo de opção composta para exploração, que se revela mais apropriado por considerar o risco geológico e os estágios da opção com expiração diferenciada. A priorização de investimentos com auxílio de OR para uma carteira representativa de um *portfolio* de projetos de Produção também é testada, resultando numa maior relação VPL / Investimento da carteira selecionada.

Abstract

This work reviews the main concepts of real option theory. It intends to discuss the investment decision problem under uncertainty in petroleum Exploration and Production (E&P). Simple models including the classic Padock, Siegel and Smith (1998) were focused because they may be easily implemented in petroleum companies. All the models discussed consider the Geometric Brownian Motion (GBM) which may be a reasonable approach to modeling prices since appropriated parameters are considered. In particular, a compound option model to exploration and development is presented. It reveals to be more appropriated, mainly when considering both the geologic risk and stages with distinct expiration dates. The selection of projects with real options is also tested in a representative portfolio of development projects, which results in an increasing NPV-investment ratio of selected portfolio.

Sumário

Agradecimentos 3

Resumo 5

Abstract 6

Símbolos, Abreviaturas e Siglas 10

Lista de Figuras 12

Lista de Tabelas 13

1. Introdução 14

2. Conceitos Básicos de Opções Reais 18

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza 18

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money* 20

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias 30

2.4. Taxonomia de opções reais 33

2.4.1. Classificação gerencial 36

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração 38

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica 41

2.6. Introdução à valoração de opções reais 43

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) 44

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*) 48

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados 49

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo 50

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos 53

3.1. Processos estocásticos em finanças 53

3.1.1. Movimentos Brownianos 54

3.1.2. Reversão à média 58

3.1.3. Processos de saltos de Poisson 63

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*).....63

3.1.5. Reversão à média com saltos.....64

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras.....66

3.2. Lema de Ito.....67

3.3. Modelando o ativo subjacente.....70

3.3.1. Marketed Asset Disclaimer (MAD).....70

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente.....71

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos.....74

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB.....74

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica.....79

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração.....81

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB.....82

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993).....87

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas.....89

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção.....91

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P.....93

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo.....94

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*.....98

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P.....101

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão.101

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S).....104

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração.....109

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P).....119

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo 119

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S 125

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples ..131

6. Conclusões 139

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono 142

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica 144

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito 147

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson.....150

Referências Bibliográficas.....151

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo 156

Símbolos, Abreviaturas e Siglas

$a.a.$ = ao ano

B = Volume ou reserva de petróleo

bbl = unidade de volume de um barril, corresponde a cerca de 160,5 litros.

Cov = Operador de covariância

δ = Dividendo ou fluxo de caixa de um período t qualquer.

dz = Incremento de Wiener

$E\ (x)$ = Valor esperado.

FCD = Fluxo de Caixa Livre Descontado ou simplesmente Fluxo de Caixa Descontado.

FCL = Fluxo de Caixa Livre, não descontado.

I = Investimento.

IA = Investimento Atualizado.

μ = Taxa de desconto ajustada ao risco, dada, por exemplo, pelo CAPM.

MAB = Movimento Aritmético Browniano

MAD = *Market Asset Disclaimer*

MGB = Movimento Geométrico Browniano

MM = Abreviatura para milhão.

MRM = Movimento de Reversão à Média

$N(\mu,\sigma)$ = Distribuição normal de média μ e desvio padrão σ

OR = Opção Real ou Opções Reais

p = probabilidade neutra ao risco

q = probabilidade real ou objetiva

π_t = lucro (ou *payout*) no período t

π = prêmio de risco

r = Taxa de desconto não especificada.

$R = 1 + r$

r_f = Taxa de juros livre de risco (*risk free*).

$R_f = 1 + r_f$

$\rho_{AB} ou\ \rho(AB)$ = correlação de A com B

$\sigma_A\ ou\ \sigma(A)$ = desvio padrão de A

$\sigma_{AB} ou\ \sigma(AB)$ = covariância de A com B

$\sigma_A^2\ ou\ \sigma^2(A)$ = variância de A.

US$ = uma unidade de dólar americano.

VPL = Valor Presente Líquido.

$V(x)$ = Operador de variância

Lista de Figuras

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período. 22
Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período. 26
Figura 3 - Evolução do FCL 30
Figura 4 - Classificação das OR (adaptado de Trigeorgis, 1996). 35
Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003). 36
Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar. 46
Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. 55
Figura 8 – MGB. 57
Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999). 65
Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005). 95
Figura 11 – Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Dias, 2005). 103
Figura 12 – Opção de exploração com duas etapas. 113
Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1. 122
Figura 14 - Curva do valor crítico. 123
Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação dos Modelos. 125
Figura 16 – Valor dos dois estágios da opção de exploração IE-2. 128
Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2. 128
Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE. 129
Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE. 129
Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE. 130
Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2. 131
Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento. 137
Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado. 138

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor “verdadeiro” estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%. 86

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado. 133

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo. 135

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.135

1. Introdução

A valoração econômica para a tomada de decisão sobre projetos de investimento é afetada por incertezas econômicas, técnicas e pelas flexibilidades embutidas nos projetos. A incerteza econômica é exógena ao projeto afetando, por exemplo, a demanda, o preço do produto, os custos operacionais, a tributação, etc. A incerteza técnica é endógena ao projeto, relacionando-se a temas como tecnologia, capacidade de produção, desempenho, etc. As flexibilidades embutidas nos projetos por sua vez, criam a faculdade gerencial sobre o empreendimento, permitindo escolhas como o momento adequado (*timing)* para a decisão sobre o investimento, a alternativa de produção, a expansão, a parada temporária, a mudança de escopo, o abandono, o desinvestimento, etc. São escolhas disponíveis ao decisor na gerência de seus projetos e ativos reais, sendo por isso denominadas de opções reais (OR).

O termo opção real foi sugerido por Myers (1977) ao destacar que oportunidades de crescimento de uma empresa podiam ser vistas como opções dependentes de futuros investimentos discricionários da firma[1]. A abordagem de valoração econômica que contempla esses aspectos é denominada de teoria das opções reais e recentemente de análise de investimento sob incerteza.

A teoria de opções reais pode ser vista como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real (VPL) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência e quantidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos em toda a dissertação.

Assim, uma opção real é um direito, por isso uma opção e não uma obrigação, de realizar uma ação sobre um ativo real ou projeto, a um custo chamado preço de exercício, por um período de tempo pré-determinado, denominado de vida da opção. O preço de exercício é o custo do investimento, pois ocorre na expectativa

[1] O trabalho de Myers denominado “Determinants of Corporate Borrowing” tem o mérito de destacar que a visão de investimentos como opções poderia ter como a mais importante contribuição, a valoração de ativos reais (p.170). E estava certo.

de uma recompensa futura, seja pela geração de lucro ou pela redução de uma perda corrente no fluxo de caixa.

A maioria das decisões de investimentos possui características em comum, mas que ocorrem em diferentes intensidades. Destacam-se: O fato do investimento ser totalmente ou parcialmente irreversível; a incerteza sobre o retorno do investimento e a flexibilidade de se adiar a decisão em troca de se obter mais informações.

A teoria ortodoxa de decisão de investimento através do VPL (Valor Presente Líquido) não contempla as implicações decorrentes da interação entre essas três características que afetam a decisão ótima do investidor. O VPL não captura as flexibilidades disponíveis ao tomador de decisão, e por isso sistematicamente subestima o valor dos projetos (Copeland e Antikarov, 2001**,** p. 4-5). Além disso, o VPL ignora a possibilidade de perda, isso significa que o decisor que o utiliza ou é indiferente a este risco (neutro ao risco) ou realmente crê que pode se desfazer do investimento pelo seu valor original atualizado. A avaliação por opções reais se propõe a corrigir estas distorções.

Dixit e Pindick (1993, p. 6-7) discutem sobre a sub-avaliação implícita no VPL. Argumentam que o VPL assume que o investimento é reversível (de alguma forma poderia ser desfeito e recuperado) e representa uma decisão do tipo agora ou nunca. Embora muitas decisões de investimento tenham essas características, a maioria é pelo menos parcialmente irreversível e pode ser postergada, o que afeta profundamente a decisão de investir. Quando a firma exerce sua opção de investir, elimina de forma irreversível a possibilidade de esperar por novas informações que afetam o resultado do investimento e o momento ótimo para o investimento.

O valor da flexibilidade perdida é um custo de oportunidade que deve ser incluído no custo do investimento. Esse custo de oportunidade é muito sensível à incerteza associada ao futuro valor do projeto. Talvez isso ajude a explicar por que a teoria neoclássica de investimento falha empiricamente ao descrever o comportamento de investimento da firma. Seja por superestimar o efeito da taxa de juros e da política tributária sobre o nível de investimento, seja pelas empresas somente aprovarem seus projetos com VPL positivo descontando-os a taxas muito superiores ao seu custo de capital (*hurdle rates*) ou em cenários de *stress.* Essa

mesma incerteza também explica por que as firmas permanecem em seus negócios por longos períodos de prejuízo.

A faculdade gerencial de adaptar as decisões futuras às condições de mercado e às ações dos competidores aumenta o valor das oportunidades de investimento da firma, tanto por aproveitar o potencial de melhora dos projetos quanto por limitar perdas em relação às expectativas inicias de um gerenciamento passivo. Trigeorgis (1996, p.4) argumenta que a assimetria resultante da adaptabilidade gerencial revela um critério de investimento expandido ou estratégico com dois componentes: o tradicional VPL (estático, passivo) e o valor criado pela flexibilidade e interações estratégicas.

A abordagem por opções para o problema de valoração tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e das interações estratégicas. Esse valor manifesta-se tipicamente através das opções reais inerentes às oportunidades de investimento de capital, tendo como ativo subjacente o valor esperado descontado dos fluxos de caixa operacionais (Trigeorgis, 1996, p.4).

Assim uma oportunidade de investimento equivale a uma opção de compra financeira (*call*). De forma semelhante às financeiras, o valor das opções reais depende de pelo menos seis importantes variáveis: O valor do ativo de risco subjacente (projeto ou ativo real), o desvio padrão e os dividendos que podem ser obtidos através deste, o preço de exercício (valor do investimento ou desinvestimento), o tempo de expiração da opção e a taxa livre de risco (sob a hipótese de não arbitragem).

Essa dissertação tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob o ponto de vista teórico da ótica de opções reais, aplicados a problemas de Exploração e Produção de petróleo. Foi priorizado o foco em modelos simples que possam ser amplamente utilizados e facilmente implantados no dia a dia de uma empresa de petróleo. Para isso, o trabalho foi dividido em cinco partes. No Capítulo 2 são revistos os principais conceitos de opções reais em tempo discreto, incluindo o valor da redução da incerteza, a nova regra de decisao, taxonomia, valoração e a transição para tempo continuo. No Capítulo 3 amplia-se a discussão sobre opções reais para tempo e estados contínuos, incluindo processos estocásticos, Lema de Ito, modelagem do ativo subjacente, equações diferencias de

valoração, soluções analíticas, não analíticas e a aproximação de Bjerksund e Stensland (1993), além da simetria *call put*. No Capítulo 4 são discutidos dois modelos de valoração de opções simples de investimento em Exploração e Produção de petróleo, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Também é desenvolvido um modelo de opção composta, denominado de Modelo de Exploração. Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se alguns estudos de caso onde os modelos discutidos no capítulo anterior são comparados, além da discussão de priorização de investimentos com opções reais a partir de uma sugestão de Dias (1996). No Capítulo 6 são revistas e discutidas as conclusões.

A abordagem dessa dissertação é heurística. Eventuais erros são de responsabilidade do autor. Referências sobre todos os assuntos abordados são citadas ao longo de todo o texto.

Dias (2005, p.26-43) apresenta um bom resumo sobre a evolução bibliográfica do conhecimento na área de opções reais desde seus precursores na década de 70, passando pelos principais artigos das décadas de 80 e 90 bem como importantes livros textos e coletâneas de artigos publicados até a atualidade. Em seguida passa em revista ao crescente uso de opções reais em empresas e outras instituições, discutindo inclusive procedimentos para sua difusão e consolidação como ferramenta de trabalho. Vários exemplos verídicos disponíveis na literatura são apresentados, abordando tanto o uso de opções reais internamente às empresas como externamente nas negociações entre companhias e, por exemplo, com órgãos reguladores.

2. Conceitos Básicos de Opções Reais

A teoria de opções reais pode ser visto como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real dado pelo VPL (função objetivo) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência, quantidade e qualidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos neste capítulo.

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza

De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.8-9), investimentos são custos afundados quando são específicos da firma ou da indústria, como por exemplo, campanhas de publicidade ou equipamentos industriais especializados. No último caso, embora possa haver um valor de revenda, assim como ocorre com os equipamentos não específicos (veículos, computadores, etc.), os investimentos estão sujeitos à depreciação e outras forças de mercado que os tornam pelo menos parcialmente irreversíveis. De forma similar, ativos que possuem a opção de serem abandonados ou suspensos, incorrem em custos e ou investimentos irreversíveis caso essas opções sejam executadas.

Considerando a irreversibilidade dos investimentos e a incerteza relacionada aos fluxos de caixa futuros, a flexibilidade de esperar pela redução da incerteza pode gerar valor. A proposta de valoração pela teoria de opções reais é justamente capturar e quantificar este valor**.** Uma firma que tem uma oportunidade de gerar fluxos de caixa positivos ou, ao contrário abandonar fluxos de caixa negativos operantes, deve comparar os custos destas decisões com os possíveis benefícios de se esperar pela revelação de novas informações que reduzem ou eliminam as incertezas existentes no presente. Esse é o valor da espera pela redução da incerteza, permitindo a escolha ótima do decisor.

Copeland e Antikarov (2001**,** p.73-74) chamam a atenção para o fato de que o VPL poderia representar uma opção real particular, aquela que assume a inexistência de flexibilidade na tomada de decisão. Uma expressão usual para o VPL de um projeto em tempo discreto é dada por:

$$VPL = -I + \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$$

Na identidade acima I é o investimento, FCL é o fluxo de caixa livre e r a taxa de desconto. Nota-se que apenas um dos muitos caminhos possíveis ao FCL entre o início e o fim de um projeto é explicitamente considerado. A abordagem clássica do VPL usa somente a informação disponível no presente ignorando qualquer incerteza existente, recomendando o investimento caso seu valor seja positivo:

Regra de decisão do VPL: $Máx_{t=0}[0, E_0(V_T) - I]$ onde $E_0(V_T) = \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$.

O VPL ignora a incerteza, portanto desconsidera a possibilidade de perda em qualquer outro cenário que não seja o seu mundo determinístico. Isso significa que decidir com o VPL é ser indiferente ao risco (neutro ao risco), ou realmente crer que se pode desfazer do investimento pelo seu valor atualizado. A primeira alternativa seria considerar diferentes cenários para o projeto, cada qual com probabilidade P_j e valor presente $V_{T,j}$, sendo o valor esperado do projeto dado por: $E_0(V_T) = \sum_j P_j . V_{T,j}$. Essa técnica equivale a considerar uma árvore de decisão com a mesma regra do VPL, ou seja, que a decisão de investir é do tipo agora ou nunca e é feita com base em um valor esperado. Isso significa pressupor que o decisor ainda é neutro ao risco, pois embora possa reconhecer e quantificar a incerteza de um projeto através de cenários, ele se mostra indiferente ou passivo ao decidir com o valor monetário esperado (VME). Somente um novo paradigma pode levar o decisor à uma escolha que contemple o risco em suas decisões: Esperar pela redução da incerteza até que esta se torne equivalente à decisão imediata.

A abordagem por opções reais considera que a decisão é tomada quando a informação sobre o estado da natureza é revelada. Entre todas as alternativas mutuamente excludentes, escolhe-se a melhor. Assim, por exemplo, o valor do exercício (*payoff*) de uma de uma opção de investimento (*call* européia) é dado pelo valor esperado dos máximos (e não o máximo entre os valores esperados):

Regra de decisão de uma *call* européia: $E_0[Máx_{t=T}(0, V_T - I)]$

O valor das três abordagens na presença da flexibilidade de esperar somente será o mesmo se $E_0(V_T) = V_T$. Ou seja, na ausência de incerteza, o valor esperado em t_0 do valor futuro é igual ao valor futuro atualizado. De outra forma, decidir antecipadamente com o VPL equivale a supor que o investimento é reversível, ou seja, na medida em que um cenário desfavorável se concretize, o decisor sairia do negócio recuperando seu capital, o que não é real (Dixit e Pindick, 1994, p.28).

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money*

Como visto, a escolha ótima do decisor consiste em optar entre a decisão imediata ou esperar pela redução da incerteza, quando possível. Se nesta análise o decisor conclui que agir imediatamente é mais valioso do que esperar, diz-se que a opção real está madura ou *deep in the money*, e ele "mata" a opção ao agir. Se há maior valor na espera, o decisor deve adiar a decisão e manter a opção real ativa ou "viva".

Para se entender em que condições (regra de decisão) exercer ou manter uma opção real é mais vantajoso para a firma, são apresentados dois exemplos de decisão simples em tempo discreto: Em que condição a firma deve investir em um novo projeto e; Em que condição não deve abandonar um ativo real que apresenta VPL negativo.

Os exemplos são apresentados com a abordagem de valor esperado em árvores binomiais com nós de decisão e nós aleatórios. A utilização do valor esperado requer taxas de descontos adequadas ao ativo que está sendo descontado. Então para descontar o ativo subjacente usa-se uma taxa e ao descontar a opção outra. Além disso, a taxa de desconto de cada ativo deve variar ao longo da árvore com a incerteza ou estados da natureza. Este é um problema que não ocorre nos exemplos, pois são considerados apenas dois períodos e dois estados da natureza. Além disso, a taxa de desconto para a opção e para o ativo subjacente é considerada a mesma, mas essa premissa só é correta no mundo neutro ao risco, discutido na Seção 2.6.1. Portanto a taxa de desconto r utilizada nos dois exemplos é a rigor a taxa livre de risco (*risk free* - r_f) e probabilidade real q

é a rigor a probabilidade neutra ao risco p . Como os exemplos visam explorar as regras de decisão e o mundo neutro ao risco é discutido somente na Seção 2.6.1, preservou-se a notação r e q.

Exemplo 1: Opção de investimento com a flexibilidade de esperar por um período. Considere um projeto de investimento postergável por 1 período, cujo investimento I gera um fluxo de caixa V. No primeiro período t_0, o decisor pode escolher entre investir imediatamente e gerar um *payoff* positivo ou postergar a decisão para o segundo período (ver árvore de decisão - Figura 1). Se o decisor não tem a flexibilidade de adiar a decisão de investimento, ele encontra-se no ramo inferior da árvore e sua decisão de investir é com base na regra tradicional do VPL. Mas se o decisor dispõe da flexibilidade esperar e decidir sobre o investimento em t_1, ele pode escolher adiar a decisão para o segundo período (ramo superior da árvore). Em t_1 pode então observar o estado da natureza que se revela com as novas estimativas de Fluxo de Caixa Livre Descontado (FCD) do projeto. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*), o FCD do projeto apresenta valor V_U e caso contrário, V_D (estado da natureza pior ou *down*). Note que os estados da natureza V_U e V_D são os mesmos em qualquer ramo da árvore e que $V_U > V_D$. Após esperar, qualquer que seja o estado da natureza, a decisão de investir também é feita com base na regra do VPL. Demonstra-se em seguida em que condições o decisor racional que maximiza a riqueza da firma escolhe esperar por t_1 ou investir imediatamente.

Quando o decisor não dispõe da flexibilidade de esperar, sua decisão é do tipo investir agora ou nunca (ramo inferior). Considerando as probabilidades (reais) q e 1-q dos estados da natureza *up* e *down*, o VPL do projeto (V_0) em t_0 é dado pelo valor esperado do fluxo de caixa de t_1 ($E_0(V_1)$) descontado a uma taxa r apropriada, subtraído do investimento e somado do fluxo de caixa livre δ (dividendo) em t_0:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \text{, onde } E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} - I + \delta \qquad (1)$$

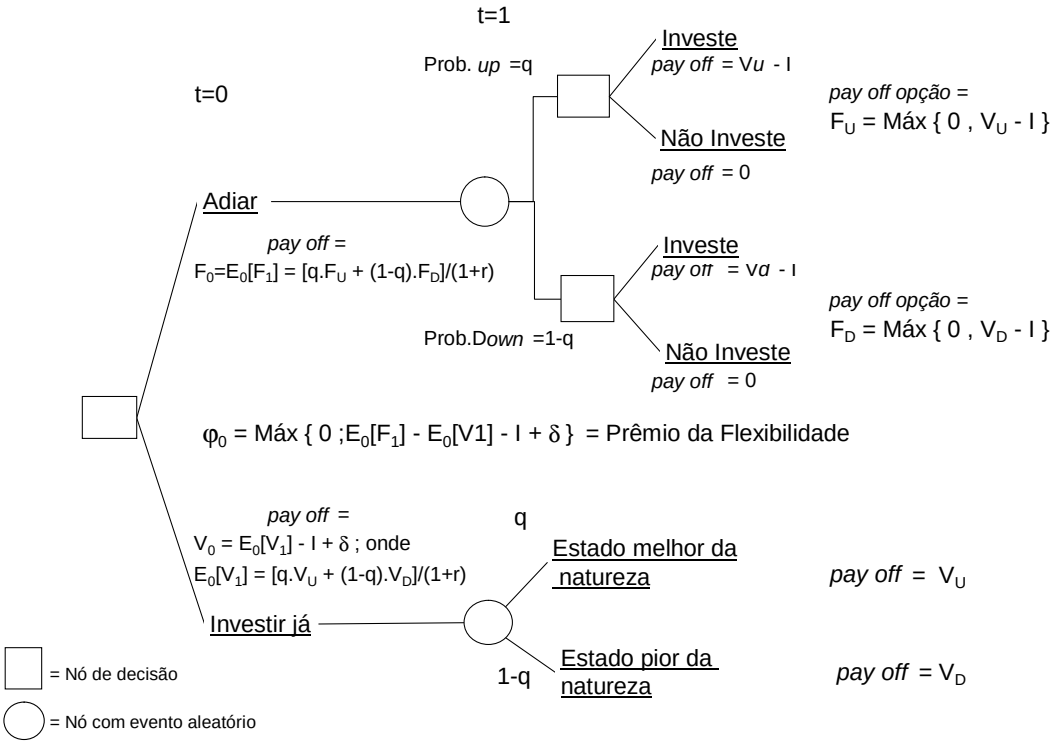

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período.

A regra de decisão será investir se $V_0 > 0$ ou desistir do projeto caso contrário. Mas com a flexibilidade de esperar, o decisor pode postergar a decisão e exercer a opção de investir em t_1 caso o projeto tenha *payoff* positivo ($V_1 - I > 0$). Portanto os *payoffs* da opção (F_1) nos dois estados da natureza possíveis em t_1 são:

$$F_U = Máx[0, V_U - I] \qquad \text{e} \qquad F_D = Máx[0, V_D - I]$$

A regra de decisão é investir se $F_1 > 0$. Nessa condição, diz-se que a opção está *in the money* e caso contrário, *out of the money*. O valor esperado de F_1 em t_0 é:

$$F_0 = E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} \qquad (2)$$

A decisão entre investir imediatamente ou esperar para decidir em t_1 é feita coma a escolha da alternativa de maior valor entre (1) e (2). Portanto, adiar a decisão de investir é mais valioso se:

$$(2) > (1) \Rightarrow (2) - (1) > 0 \Rightarrow E_0(F_1) - V_0 > 0$$

E o valor ou prêmio da flexibilidade de postergar (φ_0) a decisão de t_0 para t_1 será:

$$\varphi_0 = Máx\{0; E_0(F_1) - V_0\} = Máx\{0; \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} - \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + I - \delta\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = Máx\{0; \frac{q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)}{1+r}\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{(1+r)}.Máx\{0; q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)\}$$

A partir dessa equação pode-se explorar em que condição qualquer uma das variáveis torna a flexibilidade de postergar valiosa:

$$\varphi_0 > 0 \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) > 0$$

Pode-se também definir em que condições o decisor torna-se indiferente entre investir em t_0 ou esperar para decidir em t_1:

$$(2) = (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) = 0$$

Ou pelo contrário, definir em que condições investir imediatamente é mais vantajoso:

$$(2) < (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) < 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \quad (3)$$

Quando a relação (3) se verifica, diz-se que a opção está *deep in the money*, ou seja, o VPL (V_0) é de tal forma positivo que não vale a pena esperar. O custo de sacrificar o lucro imediato δ é maior do que o benefício esperar e tomar a decisão ótima após observar o estado da natureza em t_1.

Considerando q, I, r e δ dados, a inequação (3) será verdadeira a depender das relações entre F_U e F_D. Existem 3 situações a considerar: $F_U = F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D > 0$:

i) Supondo que: $F_U = F_D = 0 \Leftrightarrow V_D < V_U < I \Rightarrow E_0(V_1) < I \Rightarrow I - E_0(V_1) > 0$. Ou seja, a flexibilidade de esperar não tem valor, pois o decisor não investiria em t_1 qualquer que fosse o cenário revelado. Então, qual é a condição necessária para investir em t_0? Em (3):

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \;\Rightarrow\; q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} > (I-\delta) \Rightarrow \frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} - I + \delta > 0 \;\Rightarrow E_0(V_1) - I + \delta > 0 \Rightarrow$$

a) $V_0 > 0$ ou b) $\delta > I - E_0(V_1) > 0$

Então se a flexibilidade de esperar não tem valor ($F_U = F_D = 0$), a opção de investir reduz-se à regra tradicional do VPL ($V_0 > 0$) e o dividendo δ deve ser suficientemente positivo: $\delta > I - E_0(V_1) > 0$.

ii) Supondo que : $F_U = V_U - I > 0$ e que $F_D = 0$ ($V_D - I < 0 \Rightarrow I - V_D > 0$). Ou seja, em t_1 a opção está *in the money* no estado melhor da natureza e *out of the money* no estado pior da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \Rightarrow q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) + q.F_U \Rightarrow \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} - I + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.V_U + (1-q).V_D - I.(1+r)}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U - I)}{1+r} + \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > 0$$

$$\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$$

Ou seja, em t_0 a opção está *deep in the money* se a expressão $\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$ for verdadeira. Note que apesar de $F_U > 0$, em última

instância, investir ou não imediatamente não depende do que ocorrer no estado *up* da natureza.

iii) Supondo que $F_U > 0$ e $F_D > 0 \Leftrightarrow F_U = V_U - I$ e $F_D = V_D - I \Rightarrow V_U > I$ e $V_D > I$. Ou seja, em t_1 a opção de investimento está *in the money* qualquer que seja o estado da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I - \delta).(1+r) > 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - V_U + I) + (1-q).(V_D - V_D + I) > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow q.I + (1-q).I > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{I}{(1+r)} > I - \delta \Rightarrow \ \delta > I - \frac{I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Se a opção está *in the money* em qualquer cenário de t_1, estar *deep in the money* em t_0 implica que o dividendo seja maior que o valor presente do benefício da capitalização do investimento à taxa r, que é o custo de oportunidade de não investir imediatamente: $\delta > \frac{I.r}{(1+r)}$. Note que essa condição está inseirda na solução do caso ii).

Portanto, pode-se concluir que na opção de investimento, o VPL positivo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Em qualquer situação, o investimento imediato requer um prêmio maior do que o custo de oportunidade de não investir (esperar), exceto que a flexibilidade de esperar não tenha valor.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43) relata o resultado de *back-testing* (dados a partir de 1970) para uma companhia de petróleo que, hipoteticamente, na aprovação dos investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo, utilizasse opções reais no lugar do tradicional VPL. O teste considerou o cálculo do VPL *ex-post* de dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um Movimento Geométrico Browniano (Seção 3.1.1). Os resultados foram animadores: o VPL *ex-post* dos projetos com VPL >>0 apresentaram-se 16,6% superiores com o critério de OR e os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para um significativamente positivo na regra de OR. Esse resultado decorre da abordagem por OR exigir um prêmio adicional ao

tradicional VPL para o investimento imediato, que é o custo de oportunidade da flexibilidade de esperar. Com isso a probabilidade de um VPL negativo *ex post* considerando OR torna-se menor em relação ao tradicional VPL. É o benefício de se postergar a decisão evitando o investimento caso o estado da natureza revelado não seja favorável.

Exemplo 2: Opção de abandono com a flexibilidade de esperar por um período. Na literatura a opção de abandono é comumente tratada como o direito de vender um ativo por um valor terminal, cabendo ao decisor escolher o momento ótimo em um dado período. Nestes casos o valor da opção é positivo. Neste trabalho interessa especificamente opções de abando em que o decisor tem um custo ao abandonar o ativo, portanto a opção não tem necessariamente um valor positivo. Considere um ativo real operante que apresente um resultado operacional (δ) no primeiro período (t_0) e valor esperado do FCD futuro $E_0(V_1)$. O decisor pode então escolher entre abandonar o ativo imediatamente a um custo ou investimento ($I < 0$), ou postergar a decisão para o segundo período (t_1) - Figura 2, ramos superior e inferior da árvore de decisão respectivamente.

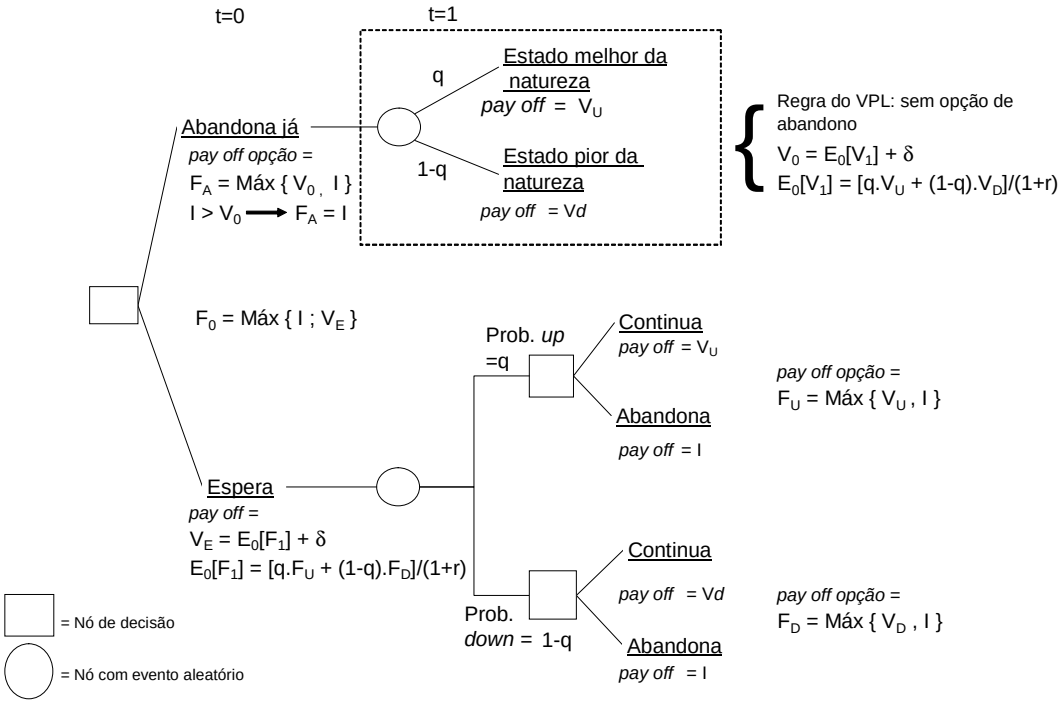

Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período.

O decisor que não tem a opção de abandono observa passivamente o valor de seu ativo real dado pela regra tradicional do VPL, representada dentro do quadro tracejado no ramo superior da árvore. Nesta situação, o VPL (V_0) do ativo é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) + \delta \qquad \text{e} \qquad E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)}$$

Se o decisor tem a opção de abandonar o ativo no primeiro período (o que corresponde a todo o ramo superior da árvore), o payoff F_A desta será:

$$F_A = Máx\{V_0, I\} \Rightarrow F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\}$$

Considerando I como o preço de exercício (constante) e V_0 como o preço do ativo subjacente (variável), observa-se que a opção de abandono equivale a uma opção de venda (*put*) financeira.

O decisor racional que maximiza o lucro da firma escolhe "abandonar já" se $I > V_0$:

$$I > V_0 \Rightarrow I - V_0 > 0 \Rightarrow \ Máx\{0, I - V_0\} = I - V_0 \Leftrightarrow$$

$$F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\} = V_0 + I - V_0 \Rightarrow \boxed{F_A = I}$$

Mas também é verdade que:

$$I > V_0 \therefore I < 0 \Rightarrow \boxed{V_0 < I < 0}$$

Esses dois resultados significam que o decisor só paga para abandonar um ativo se seu VPL for negativo e menor que o custo de abandono.

A flexibilidade de adiar a decisão para o segundo período t_1 é representada pelo ramo inferior da árvore da Figura 2. O decisor tem então a possibilidade de observar o estado da natureza que se revelará com novas estimativas do FCD para o ativo. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*) o FCD do ativo apresenta valor V_U e caso contrário V_D (estado da natureza pior ou *down*) – ou seja: $V_U > V_D$. Após esperar, os *payoffs* da opção de abandono nos dois estados da natureza em t_1 serão:

$$F_U = Máx\{V_U, I\} \text{ e } F_D = Máx\{V_D, I\} \Rightarrow$$

$$F_U = V_U + Máx\{0, I - V_U\} \text{ e } F_D = V_D + Máx\{0, I - V_D\}$$

O valor do ativo com a flexibilidade de abandonar em t_1 será:

$$V_E = E_0(F_1) + \delta \text{ onde } E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}$$

Uma firma que tem a oportunidade de abandonar um fluxo de caixa negativo imediatamente ($F_A = I$) deve comparar o custo I desta decisão com o valor do ativo com o benefício de esperar (V_E). O *payoff* da opção de abandono nos dois períodos (F_0) será:

$$F_0 = Máx\{V_E, I\} \Rightarrow F_0 = V_E + Máx\{0, I - V_E\}$$

Esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow Máx\{0, I - V_E\} = 0 \Rightarrow F_0 = V_E$$

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Este resultado define em que condição a opção de abandono não está *deep in the money* em t_0. Ou seja, interessa aqui definir em que circunstâncias vale mais ao decisor operar um FCD incerto do que pagar para abandoná-lo (inverter a desigualdade em (4) define a situação oposta: a opção de abandono imediato estaria *deep in the money*).

Se na inequação (4) q, r e δ são conhecidos, a escolha por esperar passa a depender das relações entre V_U, V_D e I, já que $F_U = Máx\{V_U, I\}$ e $F_D = Máx\{V_D, I\}$. Por construção $V_U > V_D$, então novamente há 3 situações a se examinar: $I > V_U > V_D$; $V_U > I > V_D$ e $V_U > V_D > I$:

i) $I > V_U > V_D$. Nesta situação, abandona-se o ativo em qualquer cenário de t_1 (e de t_0, pois $V_0 < 0$). Então, em que condições ainda sim é melhor esperar e abandonar em t_1 do que em t_0? Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.I + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{I}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow$$

$$\delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Isso significa que se o fluxo de caixa δ em t_0 for maior do que o valor presente da capitalização do investimento de abandono à taxa r, ainda sim vale a pena adiar o abandono.

ii) $V_U > I > V_D$. O ativo é mantido operante no cenário *up* e abandonado no cenário *down*. Então esperar por t_1 será vantajoso se:

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow q.V_U > (I-\delta).(1+r) - (1-q).I \Rightarrow$$

$$q.V_U > I.(1+r-1+q) - \delta.(1+r) \Rightarrow V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

Este resultado demonstra que se no cenário *up* o ativo não é abandonado, então para adiar o abandono de t_0 para t_1 é necessário que $V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q}$.

iii) $V_U > V_D > I$. O ativo é mantido operante nos cenários *up* e *down*, ou seja, não é abandonado em t_1. Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow V_E = V_0 > I$$

Esse resultado mostra que se esperar é mais valioso do que abandonar imediatamente ($V_E > I$), e que se em t_1 o ativo nunca é abandonado, então a opção de abandono é igual ao VPL em t_0 e o prêmio da flexibilidade de esperar é zero:

$$V_0 > I \Leftrightarrow F_A = Máx(V_0, I) = V_0 .$$

Portanto, pode-se concluir que na presença de uma opção real de abandono cujo preço de exercício seja um desembolso $I < 0$, o VPL negativo é uma condição necessária para a decisão de desinvestir em t_0, mas não suficiente. É preciso que o abandono imediato valha mais do que a flexibilidade de esperar, ou seja, a opção de abandono deve estar *deep in the money.* Esse termo pode parecer desconfortável já

que os FCD são negativos no exemplo. Mas considerando o jargão de opções, ele é adequado.

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias

Na Seção anterior discutiu-se em que termos uma opção de investimento (*call*) e outra de abandono (*put*) deveriam ou não ser exercidas imediatamente. O investimento necessário – um valor fixo (em geral) - corresponde ao preço de exercício da opção e o valor do projeto ou ativo real – variável - corresponde ao preço do ativo subjacente. O valor crítico ou gatilho é o preço do ativo subjacente que leva o decisor a optar pelo imediato investimento no projeto ou no imediato abandono do ativo. Ou seja, o gatilho é o preço que torna a opção *deep in the money*.

Para tornar o conceito mais claro, reconsidere Exemplo 1 da Seção anterior, mas suponha que o número de períodos é um valor N muito grande ($N \to \infty$). Entretanto, a incerteza quanto ao valor do projeto é resolvida de forma equivalente, ou seja, no segundo período. Sendo δ o FCL no primeiro período t_0, este pode evoluir em t_1 para um valor melhor $U.\delta$ caso ocorra o estado da natureza *up* ou para um valor pior $D.\delta$ caso o ocorra o estado *down*. Em qualquer cenário, permanece constante a partir de então (Figura 3).

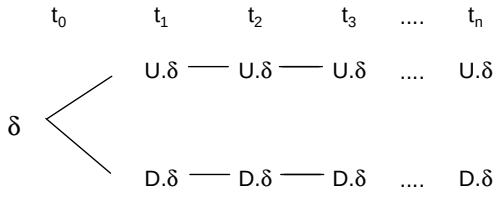

Figura 3 - Evolução do FCL a partir de t_0.

Pode-se escrever então que, se $N \to \infty$, os valores de V_U e V_D em t_1 serão:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{U.\delta}{r} + U.\delta = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \therefore V_D = \sum_{t=1}^{N} \frac{D.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{D.\delta}{r} + D.\delta = \frac{(1+r).D.\delta}{r}$$

Então o valor esperado de V_1 em t_0 será:

$$E_0(V_1) = \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta].(1+r)}{(1+r).r} \Rightarrow E_0(V_1) = \frac{q.U.\delta + (1-q).D.\delta}{r}$$

O VPL do projeto sem a flexibilidade de esperar é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \Rightarrow\ V_0 = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta]}{r} - I + \delta = \frac{q.\delta.(U-D) + D.\delta}{r} - I + \delta \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{\delta}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I \quad (6)$$

Se o decisor escolhe esperar e decidir sobre o projeto em t_1, a opção de investimento é dada por (2):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}, \text{ onde:}$$

$$F_U = Máx[V_U - I, 0] = Máx[\frac{U.\delta}{r}.(1+r) - I, 0] \therefore\ F_D = Máx[V_D - I, 0] = Máx[\frac{D.\delta}{r}.(1+r) - I, 0]$$

Suponha que $F_U > 0$ e $F_D = 0$ por simplicidade (se $F_U = F_D = 0$ não há opção em t_1 e se $F_U > F_D > 0$ a opção seria exercida em qualquer estado em t_1):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).0]}{(1+r)} = \frac{q.[(U.\delta / r).(1+r) - I]}{(1+r)} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{q.U.\delta}{r} - \frac{q.I}{1+r} \quad (7)$$

Então o gatilho será o FCL δ^* que torna a opção de investimento imediato mais valiosa do que a flexibilidade de adiar e decidir em t_1. No limite, o investimento imediato deve ser pelo menos tão valiosa quanto esperar, ou seja, o preço onde o decisor deixa de ser indiferente: (6) = (7):

$$V_0 = E_0(F_1) \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I = \frac{q.U.\delta^*}{r} - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta^*}{r}.(-q.D + r + D) = I - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[(1-q).D + r] = \frac{I.(1+r-q)}{1+r} \Rightarrow$$

$$\delta^* = \frac{r.I.(r + (1-q))}{(1+r).[(1-q).D + r]} \quad (8)$$

Em (8) pode-se observar que o valor do gatilho δ^* só depende do estado pior ou ruim da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho D do movimento para baixo do preço do ativo subjacente e de $(1-q)$. Esse fato é conhecido como Princípio das Más Notícias de Investimentos Irreversíveis (*bad news principle of irreversible investments*), termo foi cunhado por Bernanke (1983,

p.91-93, ver também Dixit e Pindick, 1994, p. 40). De acordo com Bernake esse resultado tem um apelo intuitivo: Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir (ou não) no período seguinte. Essa opção só tem valor caso haja uma probabilidade positiva do investimento não ser feito e da severidade da perda com o investimento irreversível. Ou seja, o valor da opção só depende do lado ruim da incerteza.

Note ainda que um pequeno aumento na probabilidade de um mal resultado não pode ser compensado por um ganho potencial com o lado bom ou positivo da incerteza. Observe também que o impacto do lado ruim sobre o valor de uma opção de investimento não depende das preferências ao risco do decisor. Assim eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. O Apêndice 1 demonstra que o gatilho δ^* que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar é dado por:

$$\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Até este momento discutiu-se o conceito de OR, exploraram-se as vantagens desta abordagem em relação ao VPL e exercitou-se a regra de decisão de um investidor considerando exemplos simples. A teoria de opções reais tem sido construída progressivamente a partir de contribuições de situações particulares, como bem evidencia o histórico da literatura. Com isso, uma taxonomia homogênea para OR ainda não é consenso, embora esforços rescentes apresentem significativos avanços. Na próxima Seção este assunto é discutido.

2.4. Taxonomia de opções reais

A abordagem do problema de decisão de investimento como opções reais tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e de suas interações estratégicas (ver adiante). Esse valor manifesta-se tipicamente através das flexibilidades embutidas nas oportunidades de investimento de capital.

Copeland e Antikarov (2001, p.12-13) classificam as opções reais primariamente pelo tipo de flexibilidade que oferecem. Assim a opção de diferir, esperar ou postergar é uma *call* americana sobre um projeto cujo início pode ser adiado. A opção de abandono de um projeto por um preço fixo é formalmente uma *put* americana, como o é a opção de contração, onde se vende uma parte do ativo por um preço fixo. A opção de expansão é o oposto da contração, e como a opção de extensão (prorrogação de um direito) são *calls* americanas. Opção de mudança de uso (*switch options*) a um preço fixo são *portfolios* de *calls* e *puts* americanas. As opções sobre opções são chamadas de opções compostas e incluem os projetos com investimentos em etapas ou fases, que oferecem a opção de abandonar ou diferir ao final de cada fase. Por fim, as *rainbow options* (opções arco-íris) são aquelas com múltiplas fontes de incerteza. Muitos problemas de decisão reais são opções arco-íris compostas (*compound rainbow options*), como ocorre na área de exploração e produção de petróleo. Essas situações são mais comuns do que parecem, por exemplo, basta considerar a incerteza no preço, na quantidade produzida e na taxa de desconto de qualquer investimento em fases.

Trigeorgis (1996, p.2-4) observa que as OR podem tanto ocorrer naturalmente (como opções de diferir, contratar, desativar, abandonar, etc.) como podem ser construídas a um custo desde o início de um projeto (opções como expansão de capacidade, crescimento, mudança de uso). Este autor também classifica as OR em categorias, destacando os tipos mais comuns, a indústria onde são mais importantes e alguns autores representativos que as analisaram. São elas: Opção de diferir, de investir em etapas (compostas), de mudança de escala (expandir, contrair, desativar ou reiniciar), de abandono, de mudança de uso (insumos, produtos, etc.), de crescimento (quando um investimento pode criar vários outros projetos) e opções múltiplas interagindo.

Dixit e Pindick (1994) por sua vez discutem pelo menos 13 tipos de OR diferentes e variações destas. Em sua maioria já foram citadas ou são variações das apresentadas nos parágrafos anteriores. Dias (1996, p.59-66) descreve os tipos de opções mais comuns observadas na literatura OR aplicadas à indústria do petróleo. Na Seção 4.1 o processo de Exploração e Produção de petróleo é discutido do ponto de vista de OR.

Não existe uma uniformidade absoluta para a taxonomia da OR. Por exemplo, o agrupamento denominado de opção de mudança de escala de Trigeorgis (*op. cit.*) é desmembrado em até quatro tipos pelos outros autores. Isso faz com que um mesmo tipo de opção receba diferentes nomes, por exemplo, opções compostas em geral têm o mesmo significado de opções seqüenciais de Dixit e Pindyck (*op. cit.*). Outro exemplo é a opção de diferir ou esperar em Copeland e Antikarov (op. cit), denominada de opção investir em Dixit e Pindick (op. cit).

A denominação “esperar” de Copeland e Antikarov é particularmente infeliz, pois esperar é um aspecto comum a toda OR até a sua data de expiração. De forma similar, alguém pode então argumentar que investir também é uma característica comum a vários tipos de opções, e com razão, mas na condição de preço de exercício, e não como meio de implantação de um projeto.

Uma outra dimensão do problema de valoração e decisão de investimentos pode ser percebida ao se considerar as interações estratégicas entre competidores (Trigeorgis, 1996, p.133-134). Se o impacto de um competidor restringe-se à captura de parte do valor do mercado de um projeto, então o decisor ainda encontra-se com o problema de maximização do valor da firma discutido nos itens anteriores, embora mais complexo. Neste caso, deve-se incorporar o impacto da competição na decisão de investimento, mas pode-se ignorar qualquer efeito interativo de ação e reação entre os competidores. Entretanto, se a decisão de investimento é sensível e contingente às decisões de outras firmas, então um tratamento mais complexo combinando Teoria de Jogos com Teoria de Opções Reais é necessário.

Trigeorgis (1996, p.142-149) sugere uma classificação para OR considerando as interações estratégicas entre competidores. Essa classificação, de acordo com o autor, visa destacar importantes características das oportunidades de investimento como opções sobre ativos reais. Sugere que três aspectos devem ser considerados

sob o ponto de vista de estratégia competitiva: o primeiro refere-se à exclusividade da propriedade e o efeito da competição sobre a habilidade da firma apropriar para si o valor da opção. Se a firma tem exclusividade sobre se e quando investir, ou seja, não é afetada pelos competidores, a opção é dita Proprietária, caso contrário, a opção é Compartilhada. A segunda questão estratégica refere-se às interações internas à oportunidade de investimento. Se a OR leva a outros investimentos ou outras opções subseqüentes, é então chamada de Composta. Com isso esse tipo de opção pode ter maior impacto estratégico sobre a firma, o que torna sua análise mais complexa. Por outro lado, se o projeto é analisado como um investimento isolado, a OR é dita Simples. A terceira questão estratégica refere-se ao momento e urgência da decisão. Projetos que necessitam de uma decisão imediata do tipo agora ou nunca são ditos em Expiração ou Expirando, mas se a decisão pode ser adiada, então a opção é chamada de Diferível ou Adiável.

A Figura 4 apresenta exemplos com os conceitos da classificação anterior, considerando diferentes estratégias e o valor da OR correspondentes.

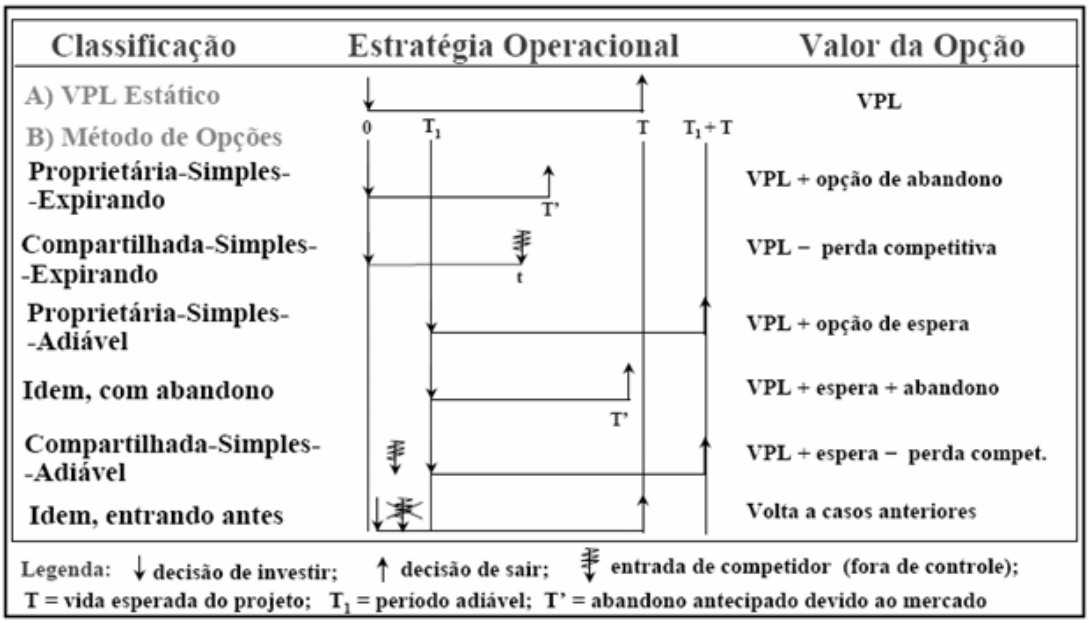

Figura 4 - Classificação das OR, interações estratégicas e valor da opção como a soma do VPL com o valor da "opção" dada pela flexibilidade e o efeito competitivo (adaptado de Trigeorgis, 1996, p.148).

No quadro da Figura 4, o item A representa o problema de capital budgeting tradicional enquanto o item B inclui seis exemplos com OR. Para uma opção proprietária, simples e em expiração com a flexibilidade de abandono em T<T', o

valor da OR é dado pelo VPL somado do valor de abandono. Para uma opção compartilhada, simples e em expiração, o investimento é feito imediatamente, mas a entrada de um competidor pode erodir o valor do projeto. Para uma opção proprietária, simples e adiável, o valor da opção depende da flexibilidade de adiar o investimento e da existência da possibilidade de abandono. Para uma opção compatilhada, simples e adiável, a entrada prévia de um competidor gera uma perda competitiva, mas que pode ser evitada caso a firma invista antes.

Vollert (2003, p.22-39) apresenta talvez a mais completa sistemática para OR, revendo e organizando a contribuição histórica de muitos autores a partir do trabalho pioneiro de Myers (1977, *op. cit.*). Apresenta duas classificações que contemplam a perspectiva gerencial e a perspectiva de valoração econômica. As duas abordagens são complementares na medida em que se propõe a relacionar as flexibilidades gerenciais (de orientação prática) com o instrumental teórico exigido para a valoração com OR, derivado da teoria de apreçamento de opções financeiras.

2.4.1. Classificação gerencial

A classificação gerencial de Vollert (op. cit.) pode ser bem compreendida através da decomposição do valor da firma em seu valor estático (dado pelo VPL tradicional) e o valor das diferentes flexibilidades gerenciais (Figura 5):

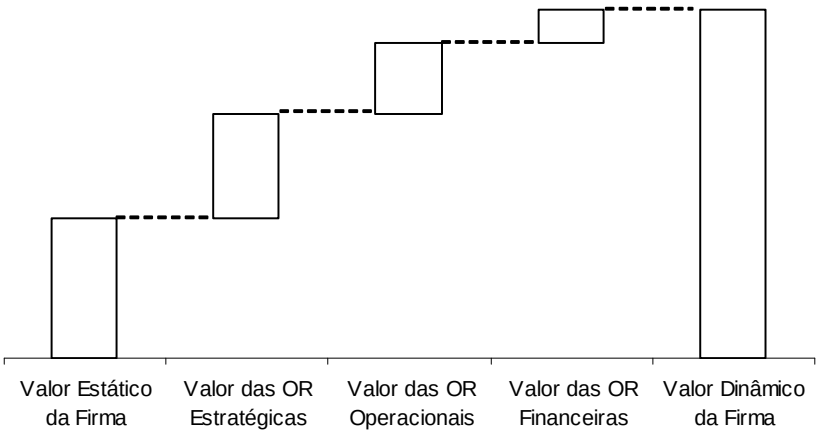

Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003, p.22).

Esta subdivisão é feita exclusivamente com o propósito taxonômico, já que o valor total das OR de um projeto, ativo ou firma é tipicamente não aditivo em decorrência das interações entre as OR**.**

Trigeorgis (1996, p.227-256) avalia a interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto – opções múltiplas (ou compostas na taxonomia de Copeland e Antikarov *op. cit*.). Demonstra que a interação entre duas opções pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo do valor do projeto. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto. Embora os valores das opções não sejam aditivos, em interações pequenas e simples a adição pode ser uma boa aproximação. O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são de tipos opostos (por exemplo, expandir e contrair) e tem uma separação finita, a probabilidade conjunta de exercício será pequena. Mas à medida que aumenta o intervalo cresce o valor da interação. Por outro lado, se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

O valor dinâmico da firma (Figura 5) é então dado pela composição do valor estático da firma com o valor das OR Estratégicas, Operacionais e Financeiras. As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desinvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio. As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. As OR Operacionais podem ser subdivididas em opções de insumo (*input options*), processo, produto (*output options*) e opções de expansão/contração. Há frequentemente uma estreita relação entre OR Estratégicas e Operacionais, pois, havendo alta flexibilidade nos ativos existentes, naturalmente surgem novas e futuras OR Estratégicas. As OR Financeiras, por fim, são aquelas relacionadas à

habilidade de modificar a estrutura de capital durante o curso de um projeto, agregando valor para a firma.

Neste trabalho, a opção de investir é o que na literatura se chama opção de diferir, mas é a mesma designação adotada por Dixit e Pindick (2004), e refere-se a uma OR estratégica. Por sua vez, a opção de abandono refere-se ao abandono irreversível de um ativo real, onde o preço de exercício é um custo.

Percebe-se que a classificação gerencial se preocupa mais em auxiliar o aspecto da nomenclatura de OR como tratado por Copeland e Antikarov (2001), Dixit e Pindick (2004 - que na verdade não se preocupam com este tema) e em parte por Trigeorgis (1996). Por sua vez, a classificação sob a perspectiva da valoração de Vollert tem um papel mais pró-ativo, na medida em que se preocupa em sistematizar os diferentes aspectos que afetam o valor de uma OR.

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração

A classificação com a perspectiva de valoração de Vollert (op. cit., p.26-33, Figuras 2.4 a 2.11) ocupa-se de aspectos específicos de OR a serem considerados para o apreçamento por opções. Dois grandes tópicos são considerados: Parâmetros de entrada para opções reais e as diferenças em relação às financeiras e; Limitações da analogia de OR com opções financeiras.

i - Parâmetros de entrada

Considerando os parâmetros de entrada para a valoração com OR, o primeiro importante aspecto a ser considerado são as fontes de incerteza. Vollert (op. cit.) sumariza as fontes de risco como tecnológico, *timing*, político, social, legal e econômico, sendo este último subdividido em valor do projeto, preço/custo, demanda, processo, taxa de câmbio e risco estratégico. Todos esses riscos afetam a lucratividade de um projeto e muitos deles ocorrem simultaneamente. Em aplicações práticas, as fontes de risco mais importantes são as que afetam seriamente o projeto (em intensidade e freqüência), e por isso devem ser priorizadas na modelagem do valor deste. Especial atenção deve ser dada aos riscos específicos da firma, que não são apreçados pelo mercado. Em seguida é preciso definir o instrumental matemático a ser utilizado para a modelagem do risco do ativo subjacente: se em tempo discreto ou contínuo; o tipo de processo estocástico a ser utilizado (Seção

3.1), e por fim, se o ativo subjacente é ou não transacionado no mercado e como isso pode ser contornado. A estimativa da volatilidade do processo estocástico pode ser feita com o auxílio de séries históricas ou com um modelo de equilíbrio como o CAPM.

A modelagem dos dividendos é igualmente importante, devendo se considerar a taxa, a periodicidade, se estocástico ou não, e o beneficiário dos pagamentos. Em relação a este ponto, em OR é preciso diferenciar entre os dividendos pagos ao detentor do ativo subjacente e os dividendos pagos ao detentor da opção. A taxa de retorno por sua vez, dever refletir a incerteza relacionada aos fluxos de caixa (*timing*, freqüência e intensidade). Esse problema é normalmente resolvido com um desconto na taxa de retorno via taxa de dividendo, explicando o baixo retorno observado em ativos reais em relação aos seus pares financeiros com estruturas de risco semelhantes. No caso de uma *commodiy* essa taxa é conhecida como *convenience yeld* e compensa os dividendos que deveriam ser recebidos pelo proprietário fisicamente detentor desta, mas não pelo detentor de um contrato sobre a mesma. A *convenience yeld* pode ser determinada no mercado de contratos futuro e *foward* ou por uma estrutura a termo desta taxa, caso seja estocástica no modelo de valoração.

Outros dois parâmetros indispensáveis são: o preço de exercício e a taxa livre de risco. Em OR estes parâmetros podem variar durante a vida da opção, podendo ser modelados por processos estocásticos. O último parâmetro a ser considerado é justamente a vida da opção, ou maturidade. Em OR, esse parâmetro pode estar relacionado à vida do ativo subjacente e, em ambos os casos, a maturidade pode ser classificada como perpétua, limitada ou desconhecida.

ii - Limitações da analogia de OR com opções financeiras

Considerando as limitações da analogia de OR com opções financeiras, Vollert (op. cit., p.34-39) destaca cinco aspectos: Urgência na decisão, competitividade da situação (ou do mercado), resolução da incerteza, efeito tempo de atraso e interações inter e intra-projetos.

O aspecto urgência da decisão de Vollert (op. cit., p. 34) corresponde à classificação segundo as interações estratégicas de Trigeorgis (1996, p.133-134)

apresentada anteriormente (ver Figura 4). O aspecto competitividade da situação refere-se ao nível de competição do mercado à que pertence a OR (tanto as exclusivas como as compartilhadas). Se o mercado é competitivo, o impacto da competitividade deve ser modelado exogenamente, por exemplo, com saltos de Poisson (ver Seção 3.1.3). Em situações de oligopólio, ao contrário, a modelagem da competição é endógena e pode considerar modelos dinâmicos de teoria de jogos[2].

O impacto da resolução da incerteza por sua vez, inverte-se se o risco é transacionado no mercado ou se é exclusivo da firma. O aumento do preço do risco transacionado no mercado aumenta o valor da OR, mas o oposto ocorre com o risco privado (por exemplo, a incerteza técnica, ver Seção 2.5). Isso torna importante a separação entre esses dois tipos de risco em modelos de OR. Um segundo aspecto importante é entender como a incerteza é resolvida ao longo da vida de uma OR. Os riscos transacionados no mercado (por exemplo, o preço de uma *commodiy*) em geral resolvem-se naturalmente com o tempo. Mas em relação ao risco privado, frequentemente ocorre o oposto, de forma que o detentor da OR não só não observa a resolução da incerteza como tem que investir para a sua redução. São as denominadas opções de aprendizagem (*learning options*), que representam importantes ferramentas gerencias tanto para limitar o risco de perda como para influenciar a incerteza de forma favorável à firma.

O efeito tempo de atraso ou resposta refere-se à defasagem entre a decisão de investir e o início do fluxo de caixa (*time lags*), o que pode durar de poucos dias até vários anos em OR. Naturalmente, este efeito pode ter um alto impacto na valoração e decisão ótima sobre um projeto. Isso torna valioso para a firma a segmentação do projeto em fases, o que pode trazer várias vantagens como a geração de novas opções (inclusive de aprendizagem) e a redução do efeito tempo de atraso para um primeiro fluxo de caixa.

[2] Em OR compostas, o exercício antecipado de uma ou mais etapas pode gerar valor, enquanto que em OR simples, o exercício antecipado pode ser necessário mesmo destruindo a opção. Jogos de opções têm se tornado um ativo campo de pesquisa com o objetivo de capturar o componente estratégico das OR (ver Vollert, 2003, p.36, Trigeorgis, 1996, p.133-134 e Dias, 2005, p.360-402).

Finalmente, as interações inter e intra-projetos refere-se às opções compostas de um mesmo projeto e às interações entre OR de diferentes projetos. Dada a não aditividade das OR, a modelagem a ser construída deve considerar simultaneamente todos esses aspectos, inclusive eventuais sinergias. Vollert (op. cit, p.39) alerta que a interdependência pode resultar em modelos excessivamente complexos. Sugere então que sejam ignoradas as flexibilidades menos importantes em ordem de um modelo operacional, cujos erros são geralmente pequenos.

A classificação sob a perspectiva de valoração de Vollert é bastante útil na medida em que pode auxiliar na construção de modelos de valoração com OR como uma espécie de guia no mapeamento de aspectos relevantes[3]. Conhecendo-se melhor a OR a valorar, pode-se realizar esta tarefa com a técnica ou abordagem mais adequada, entre as várias disponíveis.

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica

Em finanças, tradicionalmente se diferencia dois tipos de risco, denominados de risco de mercado (ou sistemático ou não diversificável) e de risco específico (ou diversificável). O risco de mercado está relacionado aos movimentos da economia em geral, decorrendo de acontecimentos aleatórios que afetam todos os ativos. O risco específico por sua vez relaciona-se à firma e o tipo de negócio em que está envolvida, podendo ser eliminado através da diversificação.

Os riscos de mercado e específico também geram incerteza sobre o valor econômico de projetos e ativos reais. Nos exemplos apresentados na Seção 2.2, a flexibilidade de esperar e o caráter opcional do investimento ou abandono em t_1 mostraram que essa incerteza possui valor, estimulando ou reduzindo a disposição de investir. A incerteza pode ser subdividida em incerteza econômica e incerteza técnica[4].

---

[3] A preocupação de Vollert com uma boa sistemática se justifica na medida em que seu livro, *A Stochastic Control Framework for Real Options in Strategic Valuation* (2003), concentra-se num modelo geral dedicado a capturar as interações entre OR intra-projetos (*switching options*, reversíveis ou não) e inter-projetos (interações competitivas endógenas e exógenas).

[4] Um terceiro tipo de incerteza tem sido considerado em OR. Denominada de estratégica, contempla a incerteza decorrente da interação estratégica entre competidores e entre projetos. Ver Seção 2.4.2 uma breve discussão, Vollert (2003, Cap.5) ou Dias (2005, Cap.4)

A incerteza econômica é exógena à firma, afetando negativamente as decisões de investimentos na medida em que estimula a espera, postergando projetos com VPL positivo. Quanto maior o horizonte temporal, maior é a incerteza econômica.

A Incerteza técnica é endógena ao processo de decisão da firma e não é correlacionada aos movimentos da economia. Mas conviver com a incerteza técnica pode ser uma escolha gerencial inadequada para a tomada de decisão, pois se contempla cenários desfavoráveis que reduzem o valor esperado do ativo básico da OR, adiando o exercício da opção.

Assim, a incerteza técnica cria um incentivo para o investimento em fases em busca de informação. Por isso, decisões de investimento com incerteza técnica são chamadas de opções de aprendizagem: A empresa aprende com esse tipo de investimento, permitindo, por exemplo, o melhor dimensionamento do projeto (ver Dixit e Pindick, 1994, p.47-48 e p.345-347). Assim, a redução da incerteza técnica cria um benefício adicional denominado de valor-sombra (*shadow value*), que não é diretamente mensurado pelo FCD.

É interessante notar que uma mesma variável pode ter os dois tipos de incerteza. No exemplo dado por Dixit e Pindick (*op. cit.*) o custo de um projeto pode ter tanto incerteza associada ao preço de insumos e facilidades de produção (incerteza econômica, risco específico) quanto à quantidade que será utilizada (incerteza técnica - risco de dimensionamento incorreto).

Dias (1996, p.36) destaca a diferença entre um investidor que detém uma carteira de ativos financeiros e um decisor que detém uma carteira de projetos e ativos reais: “O investidor não pode tomar vantagem da incerteza técnica para maximizar sua riqueza, o melhor que pode fazer é diversificar a sua carteira, de forma a tornar irrelevante esse risco e outros riscos específicos. Já o gerente pode agir, revisando a sua alocação de recursos, de forma a tomar vantagem da incerteza técnica e maximizar o valor da firma”. Por outro lado, o gerente ou decisor não tem a mesma flexibilidade do investidor para diversificar sua carteira e assim poder minimizar ou eliminar o risco específico.

Como a incerteza técnica independe do risco de mercado (é um risco diversificável), sua correlação com o retorno do *portfolio* de mercado é nula. Isso faz

com que o prêmio de risco exigido por este risco seja zero (Dias, 2005, p.135-137). Assim, enquanto que os processos estocásticos relacionados à incerteza econômica devem ter a tendência ajustada pela subtração de um prêmio de risco, as distribuições de probabilidade da incerteza técnica permanecem inalteradas. Por isso, a combinação de incertezas técnicas com incerteza de mercado em modelos de OR pode se dar de uma forma mais simples se for usado um método neutro ao risco. Pode-se usar a taxa livre de risco para descontar processos estocásticos neutros ao risco das variáveis de mercado, combinados com as distribuições de probabilidade das incertezas técnicas, que já são naturalmente neutras ao risco.

Dias (2005, Cap.3) trata a incerteza técnica com Teoria da Informação. A análise de valor da informação (VOI – *value of information*[5]) considera a aquisição de informação para a redução da incerteza (variância) em um processo seqüencial de revelação com expectativas condicionais. Propõe uma medida de aprendizagem probabilística associada ao conceito de distribuição de revelações.

2.6. Introdução à valoração de opções reais

O valor de uma opção real é dado pela soma do valor do projeto sem a opção (VPL tradicional) com o valor (prêmio) da flexibilidade embutida no projeto[6]:

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio da flexibilidade (10)

O apreçamento de OR é baseado no conhecimento sobre seus pares financeiros. Apesar das analogias entre estes dois tipos de opções, há diferenças importantes (Trigeorgis, 1996, p.127-129). Opções e ativos financeiros são negociados em um mercado eficiente a um custo mínimo. Opções e ativos reais podem ser pouco ou não negociáveis, especialmente se as opções são compartilhadas. Opções reais de domínio público são ainda mais complexas considerando as interações estratégicas entre as firmas, envolvendo investimentos preventivos e a criação de barreiras de entrada. Por outro lado, opções proprietárias

[5] O VOI é a diferença entre o valor da decisão informada e o valor da decisão à priori (sem a informação): VOI = VDI − VDP.

[6] Note que aqui se considera apenas uma única opção real associada a um projeto. Como discutido na Seção 2.4, a não aditividade das opções de um mesmo projeto ou quando interagem estando em projetos diferentes, a rigor, exige uma adaptação semântica da expressão (10):

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio líquido resultante das interações das flexibilidades (10).

como patentes podem ser facilmente negociáveis. Outras opções reais só podem ser vendidas se em conjunto com o ativo subjacente. Os custos de transação por sua vez não são desprezíveis, podendo mesmo inviabilizar um negócio. Mas o fato das opções reais não terem um mercado desenvolvido e suas conseqüências, não representa uma barreira para a sua valoração com o instrumental de opções financeiras.

O valor de uma opção real é a soma do VPL tradicional com o prêmio da flexibilidade (equação 10). Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2) discutiu-se em que condições o decisor deveria optar por esperar ou exercer a opção imediatamente, mas não sobre a estimativa das variáveis envolvidas. Por exemplo, como são calculadas as probabilidades dos estados da natureza? Como quantificar o valor do ativo subjacente nos estados *up* e *down* da natureza? Que taxa de desconto deve-se utilizar?

Não é fácil saber a taxa de desconto a ser aplicada sobre os *payoffs* esperados da opção no mundo real. Inicialmente sabe-se que uma opção é mais arriscada do que seu ativo subjacente (possui maior incerteza), exigindo por isso uma taxa de desconto maior. Se a opção for transacionada no mercado, seu valor é conhecido e pode-se obter de forma inversa a taxa de desconto a ser utilizada. Mas existem alternativas mais simples de apreçamento de opções que dispensam esta estimativa e de outras variáveis, como por exemplo, as probabilidades reais dos estados da natureza.

Algumas das estratégias de apreçamento mais conhecidas envolvem a construção de *portfolios* que permitem chegar ao valor da opção. Apresenta-se nesta dissertação a equivalência entre três alternativas desse tipo de valoração: Avaliação neutra ao risco, ativos contingentes (*contigent claims*) e *portfolios* replicantes. Segue-se uma quarta opção de apreçamento com programação dinâmica (há outras alternativas para o apreçamento de OR, ver, por exemplo, Seção 3.5). Embora a demonstração seja feita heuristicamente e a partir de um caso simples, o resultado é perfeitamente geral.

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*)

A valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) é um princípio fundamental para o apreçamento de opções financeiras (Hull, 2003, p.202-204). Este princípio

afirma que o preço de uma opção em um mundo neutro ao risco é correto também para o mundo real. Todos os investidores "tornam-se" indiferentes (neutro) ao risco e com isso não requerem mais prêmio de risco, o que torna o retorno esperado de qualquer ativo financeiro igual à taxa livre de risco[7].

A avaliação neutra ao risco de opções financeiras decorre do argumento de não arbitragem e também é válida para OR. Reconsidere a opção de investimento com a flexibilidade de adiar do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora o projeto paga dividendos δ_1 em t_1. O valor do projeto pode então evoluir de V_0 para $V_U + \delta_U$ ou $V_D + \delta_D$ conforme o estado da natureza. De forma similar o valor da opção pode variar para F_U e F_D - Figura 6.

A Figura 6 equivale ao ramo superior da Figura 1, mas com as probabilidades neutras ao risco p e $1-p$ dos estados da natureza up e down. Na Figura 1, o ramo inferior da árvore representou a decisão imediata, dada pela regra do VPL. Ao compará-lo com o ramo da superior da mesma Figura se explorou a regra de decisão considerando a flexibilidade de adiar. Note que o valor da opção foi dado pelo ramo superior, e a diferença entre os valores presentes dos dois ramos representa o prêmio da flexibilidade da equação (10).

[7] Note que o método não supõe que os investidores sejam neutros ao risco.

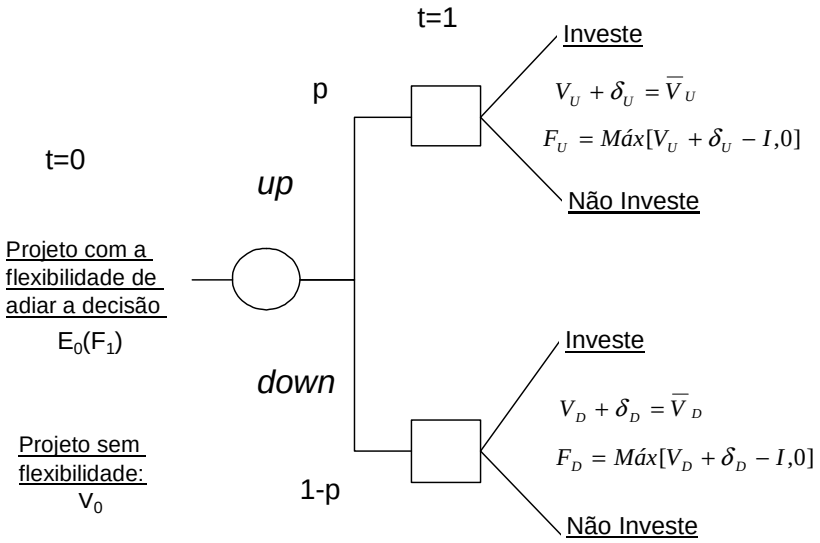

Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar.

Considere um *portfolio* (Φ) composto por uma posição longa na opção de investimento e uma curta em Δ unidades do ativo subjacente[8] (V_0). Para calcular o número Δ de ativos subjacentes que torne o *portfolio* sem risco, o valor deste deve ser o mesmo nos dois estados da natureza *up* e *down*:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D} \quad (11)$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Como o *portfolio* é sem risco o seu valor em t_0 é igual ao seu valor em t_1 descontado à taxa livre de risco (r_f):

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_1}{1+r_f} = \frac{\Phi_U}{1+r_f} \Rightarrow E_0(F_1) - \Delta.V_0 = \frac{F_U - \Delta.\overline{V}_U}{R_f} \Rightarrow$$

[8] A rigor, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. Poderia ser uma ação, um contrato futuro ou um *portfolio* dinâmico de ativos continuamente ajustado, de forma que seja obtida a perfeita correlação com o ativo da OR (Dixit e Pindick, 1994, p.117). A hipótese do *Market Asset Disclaimer* (MAD) propõe que este ativo seja o VPL do próprio projeto da OR – ver Seção 3.3.1. Nesta Seção adota-se o MAD para a demonstração proposta.

$$E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U \quad (12)$$

Onde $R_f = 1 + r_f$. Seja U e D tal que:

$$U = \frac{\overline{V}_U}{V_0} = \frac{V_U + \delta_U}{V_0} \Rightarrow \overline{V}_U = U.V_0 \therefore D = \frac{\overline{V}_D}{V_0} = \frac{V_D + \delta_D}{V_0} \Rightarrow \overline{V_D} = D.V_0$$

Usando (11), U e D em (12), tem-se:

$$E_0(F_1).R_f = \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.V_0.R_f + F_U - \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.U.V_0 \Rightarrow$$

$$E_0(F_1).R_f.(U-D) = R_f.(F_U - F_D). + F_U.(U-D) - U.(F_U - F_D) \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + \frac{(U - R_f)}{(U-D)}.\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + [1 - \frac{(R_f - D)}{(U-D)}].\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \text{ onde:} \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U-D)} \quad (14)$$

O preço da opção com a flexibilidade de esperar é dado por (13). Note que não depende das probabilidades reais q e $1-q$ dos estados da natureza nem do valor esperado do projeto, logo independe do grau de aversão ao risco do decisor. Isso implica que o preço da opção no mundo real é igual ao preço no mundo neutro ao risco. Mas o resultado (13) também sugere que o valor da opção de esperar por t_1 é o valor esperado de seus *payoffs* nos estados *up* e *down* com probabilidades p e $1-p$. Essas probabilidades são denominadas de probabilidades neutras ao risco e tem valor dado por (14). Note que anular o dividendo na demonstração ($\delta_U = \delta_D = 0$) apenas altera U, D e as probabilidades neutra ao risco p e $1-p$, sendo o resultado idêntico ao apresentado por Hull (*op. cit.*). Incluir dividendo em t_0 também não altera o resultado demonstrado, apenas que U e D devem considerar $V_0 + \delta_0$ como denominador.

Também se pode calcular o valor esperado do ativo subjacente $E_1(V_1)$ com as probabilidades neutras ao risco (14) em t_1:

$$E_1(V_1) = p.U.V_0 + (1-p).D.V_0 \Rightarrow E_1(V_1) = p.(U-D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow$$

$$E_1(V_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.(U-D).V_0 + D.V_0 = (R_f - D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow \boxed{E_1(V_1) = (1+r_f).V_0}$$

Este resultado demonstra que, no mundo neutro ao risco, o preço de qualquer ativo cresce à taxa livre de risco.

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*)

A segunda forma que se apresenta para calcular o valor da opção, aqui denominada de *ativos contingentes*, corresponde à adotada extensivamente por Dixit e Pindick em seu livro *Investment Under Uncertainty* (1994). Estes autores a denominam de *Contingent Claims* com o uso de *Spanning Assets***.**

Seja um *portfolio* Φ composto pela opção de investimento (Figura 6) e Δ ativos subjacentes[9], de tal forma que seu valor é constante em qualquer estado da natureza:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}} \quad (11)^{10}$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Sendo o *portfolio* sem risco, o seu valor cresce à taxa livre de risco, de outra forma haveria arbitragem. Então:

$$d\Phi = r_f.\Phi_0.dt\,.$$

Mas a variação de valor de um *portfolio* também é dada pelo ganho de capital e dividendo distribuído, então:

$$d\Phi = [dF - \Delta.(dV + d\delta)].dt$$

Igualando as duas equações e discretizando:

---

[9] A rigor, ver nota de rodapé 7, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. A hipótese do *Market Asset Disclaimer* – ver Seção 3.3.1 – é adotada nesta Seção pelo seu apelo intuitivo.

[10] A equação (11) é conhecida como delta *hedging* por sinalizar ao detentor da posição curta de uma opção a quantidade de ativos subjacentes que deve deter de forma a criar uma estratégia de *hedging* sem risco.

$$[(F_1 - F_0) - \Delta.((V_1 - V_0) + \delta_1)].(t_1 - t_0) = r_f.\Phi_0.(t_1 - t_0) \Rightarrow$$
$$F_1 - F_0 - \Delta.V_1 + \Delta.V_0 - \Delta.\delta_1 = r_f.F_0 - r_f.\Delta.V_0 \Rightarrow$$
$$F_1 - \Delta.(V_1 + \delta_1) + (1 + r_f).\Delta.V_0 = (1 + r_f).F_0 \Rightarrow \Phi_1 + R_f.\Delta.V_0 = R_f.F_0$$

Como o *portfolio* é sem risco, então:

$$\Phi_1 = \Phi_U = F_U - \Delta.\overline{V}_U \Rightarrow \boxed{F_U - \Delta.\overline{V}_U + R_f.\Delta.V_0 = E_0(F_1).R_f}$$

Esta última expressão é novamente a equação (12). Logo, substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14).

$$\boxed{E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f}} \text{ (13) onde: } \boxed{p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)}} \text{ (14)}$$

O apreçamento por *portfolio* replicante e a programação dinâmica levam aos mesmos resultados (13) e (14), e encontram-se demonstrados no Apêndice 2.

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados

Demonstrou-se nas Seções 2.6.1 e 2.6.2 e no Apêndice 2 que a avaliação neutra ao risco, por *contingent claims*, por *portfolios* replicantes e por programação dinâmica são equivalentes na medida em que levam ao mesmo resultado. As três primeiras técnicas consistem em criar *portfolios* com o objetivo de valorar opções considerando a eficiência de mercado e a ausência de arbitragem. Mas as semelhanças param por aí.

As avaliações neutras ao risco e por *contingent claims* consideram *portfolios* formados pela opção e um ativo perfeitamente correlacionado com o projeto. Os *portfolios* são montados de tal forma que apresentam valor constante em qualquer estado da natureza, portanto são sem risco. O *portfolio* replicante é constituído pelo ativo subjacente e títulos livre de risco, tendo como objetivo replicar os *payoffs* da opção, por isso é um *portfolio* com risco.

A avaliação neutra ao risco calcula o valor da opção considerando que o *portfolio* em t_1 descontado à taxa livre de risco é igual ao valor do *portfolio* em t_0. A valoração por *contingent claims* considera que o ganho de capital mais dividendo recebidos entre t_0 e t_1 é igual ao valor do *portfolio* em t_0 capitalizado à taxa livre de

risco. Por fim, o *portfolio* replicante por modelar o comportamento da OR, tem o mesmo valor do que esta em t_0.

A programação dinâmica aparenta ser mais simples, já que não monta nenhum *portfolio*, apenas utiliza o conceito de valor esperado e que a utilidade do decisor seja crescente com o lucro. Mas depende das probabilidades reais e da taxa ajustada ao risco da opção μ, que podem ser verdadeiramente desconhecidas. Alternativamente, a programação dinâmica pode ser aplicada no mundo neutro ao risco, utilizando as probabilidades neutras ao risco e a taxa livre de risco. Neste caso assume indiretamente todas as premissas desta valoração.

Na próxima Seção desenvolve-se a teoria da programação dinâmica para um modelo de vários períodos e seu caso limite em tempo contínuo. Para isso utiliza-se o contexto do Exemplo 1 (Seção 2.2), novamente por sua simplicidade e sem perda de generalidade.

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo

Para ativos financeiros em que informação, negócios e mudanças de preços ocorrem a todo instante, aplicar finanças em tempo contínuo soa natural. Para problemas de *capital budgeting*, a abordagem em tempo contínuo é em muitos casos pelo menos tão razoável quanto considerar fluxos de caixa anuais (Vollert, 2003, p.50), mas com a vantagem de utilizar os resultados da literatura de opções financeiras para valorar OR.

Dixit e Pindick (1994, p.98-106) apresentam uma didática transição do problema de apreçamento de OR de dois para muitos períodos e daí para tempo contínuo. Os pontos mais relevantes são destacados em seguida.

Reconsidere o contexto da decisão do problema de investimento do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora com vários períodos e onde a incerteza segue um processo de Markov, ou seja, não depende de seu histórico passado (ver Seção 3.1). Seja x_t a variável de estado que descreve a situação atual da firma e como esta afeta sua opção de investimento e, seja u_t a variável de controle que descreve as escolhas disponíveis ao decisor: Investir ou esperar. As variáveis x_t e u_t afetam tanto o lucro do período corrente $\pi_t(x_t, u_t)$ (ou dividendo - $\delta_t(x_t, u_t)$), quanto a

distribuição de probabilidade dos futuros estados da natureza. O objetivo do decisor é escolher a seqüência de controles u_t que maximize o valor esperado da firma, ativo ou projeto - $F_t(x_t, u_t)$:

$$F_t(x_t) = \underset{u_t}{Máx} \{\pi_t(x_t, u_t) + E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (15)$$

A equação (15) é denominada de Equação Geral de Bellman e representa o princípio da otimização de Bellman para vários períodos em tempo discreto. O termo $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$ é denominado de valor de continuação (*continuation value*) e representa do ponto de vista do período t, o valor esperado das escolhas ótimas futuras ($u_{t+1}, u_{t+2}, ...$). A variável de controle u_t então é escolhida de forma que $F_t(x_t)$ seja máximo. Isso representa exatamente o *backward induction* da programação dinâmica, iniciada no último período T até $t+1$ ($u_{t+T}, ..., u_{t+2}, u_{t+1}$), e por fim em t com a escolha de u_t.

Se o horizonte de tempo é infinito (mas ainda com intervalos discretos), o decisor enfrenta o mesmo problema em qualquer data e a equação de Bellman é comum a todos os períodos, dependendo somente de x_t:

$$F(x_t) = \underset{u_t}{Máx}\{\pi(x_t, u_t) + E_t[F(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (16)$$

A equação (16) é uma equação funcional não linear (pois é recursiva) que neste caso tem solução única (Dixit e Pindick, 1664, p.102). A boa notícia é que há uma solução prática simples. Iniciando de uma estimativa qualquer para o valor verdadeiro da função - $F^1(x_t)$ - escolhe-se a variável de controle ótima u^1. Retornando u^1 ao lado direito de (16), obtém-se uma segunda estimativa – agora calculada – do valor verdadeiro da função: $F^2(x_t)$. Repetindo-se o processo continuamente converge-se para o verdadeiro valor da função. A convergência é garantida pelo fator de desconto $1/(1+r)$ que é menor do que 1.

Suponha agora que a duração de cada período de tempo Δt tenda a zero. O lucro e o fator de desconto devem ser considerados como taxas, de forma que a equação (15) é reescrita:

$$F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t)|x,u]/(1+r.\Delta t)\}$$

Multiplicando por $1+r.\Delta t$ e rearranjando:

$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - F(x,t)]\} \Rightarrow$$
$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[\Delta F]\}$$

Dividindo por Δt e tomando este tendendo a zero, obtém-se a equação de Bellman para tempo contínuo:

$$r.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t) + E[dF]/dt\} \quad (17)$$

A equação (17) mostra que o retorno do ativo medido sobre uma função de valor ($r.F(x,t)$) é a soma do seu lucro (ou dividendo) imediato com a taxa esperada de ganho de capital. A igualdade reflete a condição de não arbitragem e para isso, o ativo deve ser otimamente gerenciado (o que é dado pela maximização em relação às escolhas disponíveis ao decisor: u).

A equação (17) é uma formulação generalizada do problema de valoração em tempo contínuo. Neste trabalho, essa função é uma OR cujo valor dependente de uma ou mais variáveis de risco (estocásticas) associadas ao ativo subjacente da opção. Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2), a incerteza relacionada ao ativo subjacente foi descrita pelos estados da natureza das árvores binomiais. Entretanto, esse é um tratamento insatisfatório, pois a incerteza vista como cenários discretos não corresponde à realidade de muitos problemas reais. Por outro lado, descrever a incerteza associada ao ativo subjacente (x) com processos estocásticos contínuos (dx) é relativamente simples. Igualmente importante é obter o processo estocástico da OR (dF) derivado do(s) processo(s) estocástico(s) do ativo subjacente, o que se faz usando o de Lema de Ito. Resta então resolver a equação diferencial do valor da OR (dF) de forma satisfatória. Estes são temas tratados no próximo Capítulo.

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos

A abordagem apresentada para processos estocásticos e o Lema de Ito nesta dissertação são heurísticas

3.1. Processos estocásticos em finanças

Um processo estocástico é uma função que dá a probabilidade com que uma variável estará em um estado i e em um instante $t \in [t_o, T]$. Assim o processo estocástico pode descrever a evolução aleatória de uma variável com o tempo (ver Figura 7, Seção 3.1.1). Cada caminho possível da variável aleatória é uma coleção de observações: $X = \{X(t), t \in [t_0, T]\}$, onde $X(t)$ é a observação da variável aleatória X no estado da natureza i vigente no instante t **.**

Essa aleatoriedade é que habilita os processos estocásticos para a modelagem da incerteza sobre a evolução de uma variável como, por exemplo, o preço de um ativo. Assim, um processo estocástico envolve pelo menos uma variável aleatória que, se muda de valor em intervalos de tempo conhecidos ou fixos, caracteriza um processo de tempo discreto. Se a variável muda em qualquer instante t o processo é dito continuo no tempo. Por outro lado, se a variável aleatória assume um conjunto de valores descontínuos, que representam os estados da natureza, o processo é dito de variável discreta. Se ao contrário, a variável pode assumir qualquer valor em um dado intervalo, o processo é dito de variável continua (os estados da natureza são contínuos). Um processo estocástico pode ainda ser classificado (grosseiramente) como estacionário se possui estatísticas constantes por longos períodos de tempo, ou não-estacionário, quando ocorre o contrário. Assim, por exemplo, em todo o Capítulo 2 os exemplos apresentados são processos estocásticos estacionários com variável e tempo discretos.

Uma importante característica para processos estocásticos é a propriedade de Markov**.** Um processo é dito de Markov quando sua distribuição de probabilidade em qualquer instante futuro não depende de seu histórico passado. De outra forma, a única informação relevante para a distribuição de probabilidade futura é a informação do momento presente.

Em seguida são apresentados os principais processos estocásticos contínuos utilizados em opções reais[11] destacados em Dixit e Pindick (1994, Cap. 3) e detalhados por Brandão (Cap. 3). Dentre estes, fundamental é o Processo de Wiener, que por sua simplicidade, funciona como um elemento de construção para outros processos mais realistas e sofisticados.

3.1.1. Movimentos Brownianos

O Processo de Wiener ou movimento Browniano é um processo estocástico em tempo contínuo com três importantes propriedades:

I – É um processo de Markov.

II – As mudanças no processo δz para qualquer intervalo de tempo Δt são normalmente distribuídas e a variância cresce linearmente com o tempo. Por definição:

$$\delta z = \varepsilon.\sqrt{\delta t} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \;\Rightarrow \delta z \sim N(0,\sqrt{\delta t})$$

Onde ε segue uma Normal padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão um. Assim o valor esperado de z é sempre zero e sua variância é δt.

III – Apresenta variações ou incrementos δz independentes por unidade δt de tempo, ou seja, possui correlação serial nula: $Corr(\delta z_i, \delta z_j) = 0$.

$$Corr(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{Cov(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{Var(\delta z_i)}.\sqrt{Var(\delta z_j)}} \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{\delta t}.\sqrt{\delta t}} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t}, \varepsilon_j.\sqrt{\delta t})}{\delta t} = \frac{E\{[\varepsilon_i.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t})].[\varepsilon_j.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_j.\sqrt{\delta t})]}{\delta t} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\delta t.E\{[\varepsilon_i - 0].[\varepsilon_j - 0]\}}{\delta t} = E[\varepsilon_i].E[\varepsilon_j] = 0.0 \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = 0$$

Onde: $\rho =$ Correlação, $\sigma(\delta z_i, \delta z_j) =$ Covariância e $\sigma^2 =$ Variância.

[11] Conforme comentado ao final da Seção 2.7, os processos de variável discreta são comumente insatisfatórios para a descrição dos fatores de risco do ativo subjacente, motivo pelo qual são preteridos daqui por diante.

Na medida em que se consideram intervalos de tempo progressivamente menores, no limite $\delta t \to 0$, o processo torna-se continuo no tempo, pode-se escrever que:

$$dz = \varepsilon.\sqrt{dt} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \therefore dz \sim N(0,\sqrt{dt})$$

Onde dz é denominado incremento de Wiener. O fato de este processo ter a propriedade de Markov e de $dt \to 0$ (o que em geral torna $|dz| = |\varepsilon.\sqrt{dt}| >> dt$) faz com que o caminho da variável dz seja irregular e "quebradiço" (Figura 7). Por isso, no Processo de Wiener a variável estocástica não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional, o que demanda o uso do cálculo estocástico:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Além disso, duas outras propriedades decorrem (Hull, 2003, p.219):

I – O comprimento esperado do caminho percorrido pela variável z é infinito para qualquer intervalo de tempo;

II – O número esperado de vezes que z iguala qualquer valor em particular em qualquer intervalo de tempo é infinito.

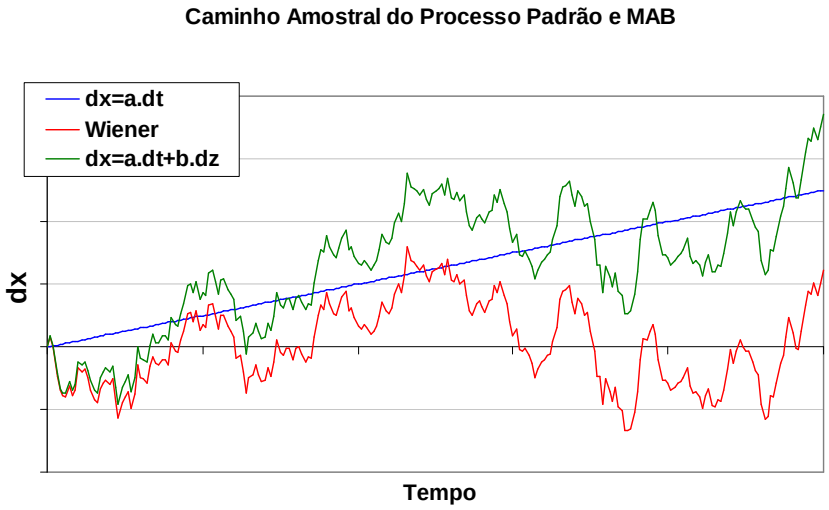

Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. A reta em azul representa a tendência do MAB.

Embora o Processo de Wiener tenha propriedades que pareçam restritivas do ponto de vista prático, trata-se uma ferramenta muito útil na modelagem de muitas

variáveis que mudam de forma continua e estocástica com o tempo. Adaptações podem ser necessárias, como por exemplo, para modelar preços que em geral não podem ser negativos (neste caso assume-se que o logaritmo do preço é normalmente distribuído – ver adiante).

A adaptação mais simples do Processo de Wiener é a inclusão de uma tendência ou *drift*, denominado de Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Aritmético Browniano (MAB) ou Movimento Browniano com D*rift* (Figura 7).

$$dx = \alpha.dt + \sigma.dz \quad (18)$$ sendo α e σ constantes.

Onde α é o *drift*, σ a volatilidade e dz é o incremento de Wiener. O Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, conforme mostrado, por exemplo, por Dixit e Pindick para um MAB (1994, p.68-70).

As variações dx do MAB - (18) - seguem uma distribuição normal com média $\alpha.dt$ e variância $\sigma^2.dt$: $dx \sim N(\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt})$:

$$E(dx) = E(\alpha.dt + \sigma.dz) = E(\alpha.dt) + E(\sigma.dz) = \alpha.dt + \sigma.E(dz) \Rightarrow$$
$$E(dx) = \alpha.dt + \sigma.0 \Rightarrow E(dx) = \alpha.dt$$

$$\sigma^2(dx) = V(dx) = V(\alpha.dt + \sigma.dz) = V(\alpha.dt) + V(\sigma.dz) + 2.Cov(\alpha.dt, \sigma.dz) \Rightarrow$$
$$V(dx) = 0 + \sigma^2.dt + 2.0 = \sigma^2.dt \Rightarrow \sigma(dx) = \sigma.\sqrt{dt}$$

Pode-se observar na Figura 7 que no curto prazo a volatilidade é determinante para o movimento Browniano enquanto que no longo prazo a tendência é que define o processo. Isso se deve ao fato da volatilidade crescer com $\sqrt{dt}$ e a média com dt. Se o dt é pequeno então $\sqrt{dt} >> dt$, mas à medida que dt cresce a relação se inverte: $\sqrt{dt} << dt$.

Um processo mais generalizado denominado de Processo de Ito ou Movimento Browniano Generalizado pode ser definido a partir do MAB, substituindo as constantes α e σ por funções não aleatórias de x e t.

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz$$

O valor esperado do Processo de Ito é dado por $E(dx) = a(x,t).dt$, e a variância é dada por $\sigma^2(dx) = b^2(x,t).dt$, sendo que $a(x,t).dt$ é a taxa instantânea de tendência ou *drift* e $b(x,t).\sqrt{dt}$ é a taxa instantânea de variância.

Um caso particular especialmente importante do Processo de Ito é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), obtido fazendo $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$ (Figura 8), sendo α e σ constantes:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz \quad (19) \quad \text{e} \quad dx \sim N[\alpha.x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

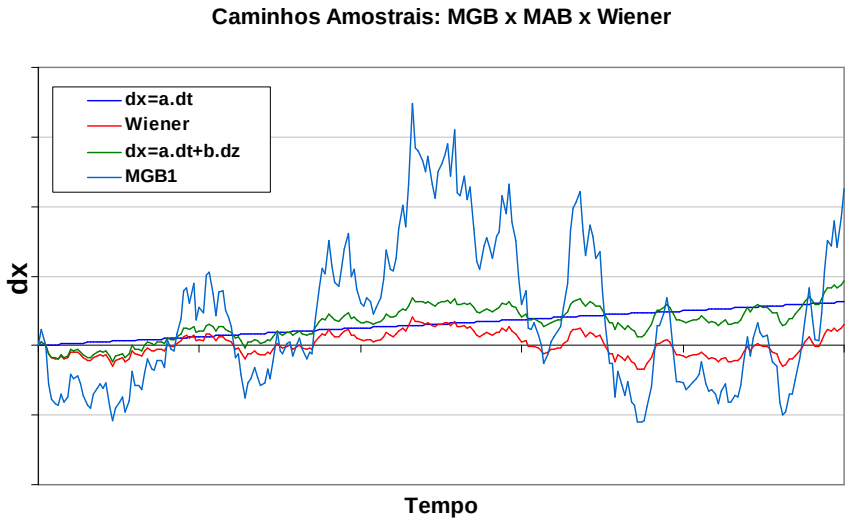

Figura 8 – MGB em relação ao Wiener padrão e ao MAB da Figura 7.

O MGB também é um processo estocástico não estacionário em que o valor esperado de dx depende do valor de x no momento inicial. Considerando que $\sigma = 0$, a equação (19) deixa de ser um processo estocástico e pode-se utilizar o cálculo diferencial convencional, então:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt; \quad \text{Mas: } d\ln x = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow d\ln x = \alpha.dt \Rightarrow$$

$$\int_0^x d\ln x = \int_0^t \alpha.dt \Rightarrow \ln(x_t / x_0) = \alpha.(t-0) \Rightarrow x_t / x_0 = \exp(\alpha.t) \Rightarrow x_t = x_0.\exp(\alpha.t)$$

Se $\sigma \neq 0$ é preciso utilizar o Lema de Ito do cálculo diferencial estocástico para definir o processo estocástico de $d\ln x$. Como se verá adiante (Seção 3.2.1),

$d \ln x$ é normalmente distribuídos e segue um o Processo de Wiener Generalizado dado por:

$$d \ln x = (\alpha - \sigma^2 / 2).dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \text{e} \quad d \ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2 / 2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Considerando um intervalo de tempo Δt, então:

$$\ln x_t \sim N[\ln x_{0+}(\alpha - \sigma^2 / 2).\Delta t, \sigma.\sqrt{\Delta t}] \therefore \text{ Se } Y = \ln x_t \Rightarrow x_t = e^Y \Rightarrow E(x_t) = E(e^Y)$$

E a variância de x_t será: $Var(x_t) = E(x_t)^2 - E^2(x_t) = E(e^{2Y}) - E^2(e^Y)$.

Ou seja, tanto o valor esperado quanto a variância de x_t são funções de $E(e^Y)$. Brandão (Cap.3, p.22-24) demonstra que:

$$E(x_t) = x_0.e^{(\alpha.t)} \quad \text{e} \quad Var(x_t) = x_0^2.e^{(2.\alpha.t)}.(e^{(\sigma^2.t)} - 1)$$

3.1.2. Reversão à média

Processos estocásticos que tendem a divergir do ponto de origem com o passar do tempo podem não ser adequados para algumas variáveis econômicas. O preço de *commodities* como petróleo e cobre, por exemplo, embora possam variar de forma aleatória no curto prazo em resposta a desequilíbrios de mercado, no longo tendem a reverter na direção do custo marginal de produção (Dixit e Pindick, 1994, p.74) ou alguma média que reflita o preço de equilíbrio de mercado. Processos com essa característica são denominados de Modelos de Reversão à Média (MRM).

Essa média no caso de uma *commodity* inclui o custo marginal de produção, a remuneração ao risco e o chamado "custo de utilização" (*user cost*) quando se trata de um recurso não-renovável, crescente com o tempo devido ao efeito da exaustão (Pindyck & Rubinfeld, 1995, p.545-546, apud Dias, 1996, p.109). Quanto mais competitivo for o mercado, maior deve ser a velocidade de reversão à média. No entanto, a velocidade de reversão também depende das restrições tecnológicas[12] do bem a ser produzido. Na indústria do petróleo, tipicamente de capital intensivo, as restrições tecnológicas somadas à existência um cartel atuante (OPEP) implicam

[12] A natureza impõe restrições tecnológicas de forma que apenas algumas combinações de insumos constituem formas viáveis de produzir certa quantidade de produtos. As alternativas viáveis são denominados de conjunto de produção, cuja fronteira ou limite descreve a função de produção (Varian, 2003, p.344).

numa velocidade de reversão à média muito lenta, conforme se observa nas séries históricas de preço do petróleo.

Há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média. Responder a essa pergunta implica na análise de séries históricas de preços. Dixit e Pindick (1994, p.77-78) sugerem e realizam esta análise com o teste de raiz unitária de Dickey e Fuller (1981, apud Dixit e Pindick op.cit) sobre séries históricas longas de preços de petróleo. Considerando uma série de 120 anos, estes autores concluem pela reversão à média. Mas ao considerarem séries de 30 ou 40 anos não conseguem rejeita a hipótese de *random walk*. Essa parece ser a situação de muitas variáveis econômicas, qual seja, é difícil estatisticamente distinguir entre *random walk* e reversão à média com dados de 30 ou 40 anos. Como resultado, estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos. A favor do MGB, porém, conta a simplicidade analítica, motivo pelo qual este processo é o mais adotado na literatura (Dias, 1996, p.106).

Existem vários MRM sendo que, os mais utilizados, podem ser divididos em dois grupos (Dias, 1996, p.116). O primeiro grupo agrega os MRM baseados no Processo de Ornstein-Uhlenbeck, sendo mais utilizado em aplicações econômicas. O segundo grupo, mais utilizado no mercado financeiro, deriva da equação de MRM descrita em Shimko (1992, pg.11).

O processo reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck apresenta algumas variações. O modelo mais simples é denominado de MRM Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck :

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.dz \quad (21) \qquad \text{e} \qquad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde η é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é o nível para que x tende a reverter. O Processo de Ornstein-Uhlenbeck apresenta a propriedade de Markov, embora seus incrementos não sejam independentes. Observe que se $x > \bar{x}$ então dx tende a ser negativo (dz é uma distribuição simétrica) e por isso x caminha na direção de $\bar{x}$. Se ocorrer $x < \bar{x}$, dx tende a ser positivo e novamente x tende a $\bar{x}$.

Note que quanto maior η, maior o efeito da convergência dada por $\bar{x} - x$, por isso η é denominado de "velocidade" de reversão. A média e variância deste processo podem ser obtidas a partir das equações de kolmogorov e são dadas por (ver demonstração em Dixit e Pindick, 1994, p.90-91):

$$E[x] = \bar{x} + (x - \bar{x}).e^{-\eta.t} \quad \text{e} \quad V[x - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2.\eta}.(1 - e^{-2.\eta.t})$$

Observe que se trata de um processo convergente, pois se $t \to \infty$ então $E[x] = \bar{x}$ e a variância converge para um valor constante: $V[x - \bar{x}] = \sigma^2 / 2.\eta$. Caso $\eta \to \infty$ novamente $E[x] = \bar{x}$, mas a variância ao contrário tende para zero. Por fim se $\eta \to 0$ o processo se transforma num Movimento Browniano simples: $E[x] = x$ e $V[x] = \sigma^2.t$.

Dixit e Pindick (1994, p.76) observam que a equação (21) é a versão em tempo contínuo de um processo auto-regressivo de 1ª ordem em tempo discreto – AR(1). Isso significa que seus parâmetros podem então ser estimados a partir de dados históricos em tempo discreto.

O MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck é o modelo mais popular deste grupo por vários motivos, como não gerar preços negativos, por sua similaridade com o MGB e por ter uma solução analítica para o problema da opção de investimento com expiração infinita (Dixit e Pindyck, 1994, p.161-163). A equação deste modelo é dada por:

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz \quad \text{e} \quad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

Note que a diferença para o MGB é que a tendência α é substituída por $\eta.(\bar{x} - x)$, que é justamente o termo de reversão. Com isso, a solução do problema de investimento de Dixit e Pindick (op. cit) com o MGB se estende ao MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck com alguns ajustes.

Metcalf e Hassett (1995) comparam o retorno de um investimento considerando o MGB e MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck para a modelagem do preço de um produto ou o valor de um ativo. Neste sentido apresentam uma

equação que generaliza os processos estocásticos de reversão à média e Browniano:

$$\frac{dx}{x} = \{\alpha + [\eta.(\bar{x}.e^{\alpha.t} - x)]\}.dt + \sigma.dz \quad (22)$$

Note que se $\alpha = 0$ obtém-se o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck dado por (20). Se $\eta = 0$ obtém-se o MGB (19). O termo $e^{\alpha.t}$ é uma inovação em relação aos MRM anteriores refletindo a expectativa de que a média de longo prazo $\bar{x}$ varie com o tempo (crescente se $\alpha > 0$ e vice-versa).

A outra classe de processo de reversão à média, como dito, deriva da equação de Shimko (1992, p.11):

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.x^{\gamma}.dz \quad (23) \qquad \text{e} \qquad dx = N \sim [\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.x^{\gamma}.\sqrt{dt}]$$

Essa classe de processos de MRM possui o mesmo valor esperado de dx, mas a variância cresce com o expoente γ. Note que se γ é nulo, obtém-se o MRM de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético (21).

Trata-se de uma classe de processos também bem difundida na literatura com diferentes aplicações (ver Dias, 1996, p.119-120).

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo o fato de convergir para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado. Preços crescentes estimulam a entrada de novos concorrentes, o que aumenta a oferta e estimula a sua redução. Simetricamente, preços muito baixos eliminam os competidores com maiores custos, reduzindo a oferta, o que estimula a recuperação do nível de preços.

Entretanto, Metcalf e Hassett (1995) mostram numericamente que o nível de investimento agregado obtido com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck no lugar do MGB é estatisticamente o mesmo para um range de parâmetros representativo. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva

de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck, obtido a partir da Equação (22) fazendo a tendência (α) igual à zero: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$. O MGB também é obtido a partir de (22) com tendência (α) e velocidade de reversão (η) nulas: $dx = \sigma.x.dz$. Em outras palavras, em seu estudo estes autores fazem com que tanto o MGB quanto o MRM apresentem a mesma tendência ou *drift*, no caso nula. De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM, intuitivamente espera-se que os preços gerados pelo primeiro irão necessariamente dominar o MRM.

A estabilização da variância com o tempo no MRM geométrico (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com o MGB, limita o valor da flexibilidade de esperar. Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir em relação aos Movimentos Brownianos. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM significa que preços mais altos são alcançados com menor freqüência (Efeito Preços), o que induz a uma redução do nível de investimentos. Os autores mostram que estes dois efeitos se tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, os autores argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza[13].

Dixit e Pindyck, (1994, p.161-167) também discutem os efeitos decorrentes da adoção do MRM. Adicionalmente, argumentam que a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o exercício da opção de investir. Segundo estes autores, o efeito resultante do MRM é menos óbvio do que o do MGB**.**

[13] Este resultado foi obtido em um modelo onde a função de produção apresenta retorno decrescente de escala, o que ocorre, por exemplo, em projetos de produção de petróleo. Entretanto, se o retorno de escala é constante e os custos são convexos, os efeitos preços altos e variância se somam e aumentam o nível de investimentos.

3.1.3. Processos de saltos de Poisson

Choques na oferta de um produto podem causar descontinuidades nos níveis de preços praticados. Por exemplo, a entrada de um novo competidor em um mercado pouco competitivo aumentando a oferta, ou ao contrário, conflitos armados e instabilidades políticas reduzindo a oferta, podem causar respectivamente queda ou aumento brusco nos preços correntes. Assim algumas variáveis econômicas podem apresentar infreqüentes, mas discretos saltos em seu valor, sendo modeladas por um Processo de Poisson (Dixit e Pindick, 1994, p.85).

O Processo de Poisson é um processo que apresenta uma variável dq que modela saltos de tamanho u fixo ou variável, correlacionado a x ou não, onde a probabilidade de ocorrência ($\lambda.dt$) do salto é dada por uma de taxa de chegada λ por unidade de tempo dt com distribuição de Poisson:

$$dq = \begin{cases} u & com\ probabilidade\ \ \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade\ \ 1-\lambda.dt \end{cases} \quad (24) \Rightarrow$$

$$E(dq) = u.\lambda.dt + 0.(1-\lambda).dt \Rightarrow \boxed{E(dq) = u.\lambda.dt} \quad (25)$$

Note que a distribuição de probabilidade, o valor esperado e a variância de dq são contínuos no tempo, mas dq não. Por analogia com o Processo de Ito, dx pode ser escrito como:

$$\boxed{dx = f(x,t).dt + g(x,t).dq}$$

Por exemplo, se o valor do salto depender do valor corrente de x, então poderia se ter $g(x,t) = x$, sendo dq definido como em (24) e $f(x,t)$ representaria uma tendência determinística. Um salto é dito degenerado quando a variável pode somente pular para um valor fixo e então permanece neste para sempre.

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*)

Também denominados de Processos de Poisson-Gaussianos, os processos de difusão com saltos resultam da combinação de um Processo de Poisson com um Processo de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86):

$$\boxed{dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq} \quad (26)$$

Esta associação faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta e não diferenciável no tempo (Poisson). Com isso, determinar o processo de uma função H(x) exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (ver Apêndice 4).

O retorno de um processo de difusão com saltos não é normalmente distribuído. No exemplo acima, o Processo de Poisson provoca uma alteração no valor da média e da variância, e a distribuição torna-se assimétrica**.** Se o tamanho do salto u também for aleatório, as caudas da distribuição também se tornam mais grossas.

A adição de um Processo de Poisson ao Processo de Ito retrata uma maior incerteza sobre a evolução de dx. A possibilidade de saltos aleatórios de tamanho u (positivo ou negativo) aumenta a incerteza sobre a variável modelada. O aumento do risco reduz o valor de um ativo na medida em que aumenta a taxa de desconto exigida pelo investidor. No caso da adição de um Processo de Poisson, esse incremento é dado exatamente pela taxa de chegada do salto λ (ver, por exemplo, Dixit e Pindick, 1994, p.87). Este resultado é bastante geral. A adição do parâmetro λ eleva o valor do gatilho e torna a regra de decisão mais conservadora (Dixit e Pindyck, 1994, p.201).

3.1.5. Reversão à média com saltos

Resultante da combinação de um MRM com um processo de Poisson, a reversão à média com saltos pode ser entendido como um caso particular de um Processo de Poisson-Gaussiano (26) onde $a(x,t) = \eta.(x - \bar{x})$. Por exemplo, considere o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck com saltos, então:

$$dx = \eta.x.(x - \bar{x}).dt + \sigma.x.dz + x.dq \Rightarrow \quad dx / x = \eta.(x - \bar{x}).dt + \sigma.dz + dq \quad (27)$$

Onde $dz\ e\ dq$ usualmente são considerados independentes. Note que, de (25), $E(dq) = u.\lambda.dt$, então ao subtrair-se $u.\lambda$ da tendência em (27), obtém-se um MRM com saltos compensado, cuja tendência não é mais afetada pelo Processo de Poisson:

$$dx / x = [\eta.(x - \bar{x}) - u.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Esse MRM com Saltos de Poisson Compensados, onde $-u.\lambda$ é o termo de compensação, tem vantagens práticas sendo algumas vezes usados na literatura, como por Dias e Rocha (1999) para a simulação do processo estocástico do preço do petróleo.

A reversão à média com saltos é um modelo particularmente importante para simular os preços de algumas *commodities* e taxa de juros. Esse processo combina o conceito de equilíbrio de preços de mercado para *commodities* (reversão à média) com o conceito de oscilação de preços apresentado por Merton (1976, apud Dias e Rocha *op. cit.*), segundo o qual a chegada de informações anormais gera choques estocásticos discretos, modelados pelo processo de Poisson.

Em seu artigo, Dias e Rocha (op.cit) adotam o seguinte MRM com Saltos de Poisson Compensados para o preço do petróleo (P):

$$dP / P = [\eta.(\overline{P} - P) - K.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Onde $K = E(\phi - 1)$ e dq é definido de forma similar a (24):

$$dq = \begin{cases} \phi - 1 & com\ probabilidade \quad \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade \quad 1 - \lambda.dt \end{cases}$$

Os saltos apresentam de tamanho ϕ variável com probabilidade de ocorrência $\lambda.dt$ com distribuição de Poisson. Os saltos ϕ tem uma distribuição de probabilidade especial com média $K + 1$ representada por duas normais truncadas, uma para saltos para cima (*jump up*) e outra com saltos para baixo (*jump down*) – Figura 9:

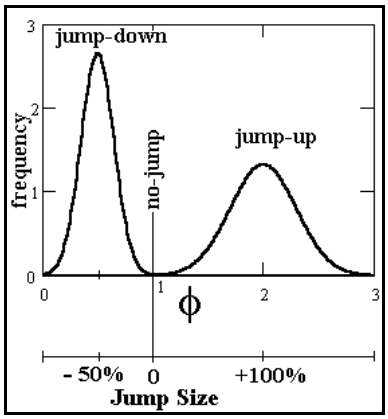

Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999, p.5).

Em caso de salto, há a probabilidade de 50% deste ser para cima e 50% para baixo. No caso de ser para cima, os preços são esperados dobrar e em caso de ser para baixo os preços são esperados reduzir pela metade.

As duas principais desvantagens do processo de reversão com saltos é que, não se pode construir um *portfolio* sem risco quando se considera saltos e a dificuldade em se estimar os vários parâmetros necessários. O primeiro problema conceitualmente é o mais importante, pois não se pode construir um *hedge* perfeito utilizado no apreçamento de opções por *ativos contingentes*, por exemplo**.** Mas existem alternativas para contornar esta situação, como também para superar as dificuldades encontradas nas estimativas dos parâmetros (Dias, p.3-4, www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm).

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras

Processos estocásticos com limites superiores ou inferiores impostos são ditos com barreiras. Estes processos são particularmente importantes para opções financeiras com barreiras (ver Hull, 2003, p.439-441), mas também encontram aplicação em OR.

Sob o ponto de vista econômico, as barreiras podem ser utilizadas para simular mecanismos de equilíbrio de mercado (entrada e saída de competidores), limites regulatórios ou mesmo a atuação de cartéis. Há três tipos de barreiras: refletoras, absorventes e elásticas. As barreiras refletoras são aquelas que, quando atingidas, devolvem a variável para o mesmo nível ou valor do momento anterior ao toque. As barreiras absorventes, ao contrário, quando atingidas absorvem a variável estocástica eliminando sua aleatoriedade. No MGB ($dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$), o limite $x = 0$ funciona como uma barreira absorvente, pois, se atingido em um tempo t', então $dx = 0$ e $x = 0$ para todo $t > t'$. As curvas de gatilho de OR também funcionam como barreiras absorventes, pois uma vez atingidas pela variável aleatória, levam ao exercício da opção. As barreiras elásticas por sua vez, são aquelas que se apresentam parcialmente absorventes ou parcialmente elásticas.

Dixit e Pindick (1994, p. 83-84) demonstram que um MAB com barreiras refletoras (superior e inferior) converge no longo prazo com densidade de

probabilidade exponencial, cujo valor esperado depende do sinal da tendência. Este resultado não se altera se a barreira inferior é relaxada quando a tendência é positiva ou se a barreira superior é relaxada quando a tendência é negativa. Bjerksund e Stensland (1993) propõem uma aproximação analítica para a opção de compra americana utilizando uma barreira absorvente superior, as qual é uma aproximação da curva de gatilho (ver Seção 3.5.1).

3.2. Lema de Ito

Na Seção 3.1.1, ao introduzir o Processo de Wiener, discutiu-se que devido à propriedade de Markov e de $dt \to 0$, o caminho da variável dz é continuo em relação ao tempo, mas não diferenciável no sentido convencional:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Todos os processos estocásticos apresentado até agora que apresentam o incremento de Wiener herdam essa característica. Assim, determinar o processo estocástico de uma função que dependa de um outro processo não diferenciável no sentido convencional demanda o uso do cálculo estocástico.

O Lema de Ito permite diferenciar ou integrar funções desse tipo, sendo mais conhecido na forma que se aplica a um processo estocástico de Ito. Pode ser entendido a partir da expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f^{'}(a).dx + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^{n}(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t. Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:então dF será dado por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e } \quad dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32); \; E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33) \text{ e } V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \; \varepsilon^2.dt \; = dz^2 \; \sim \; N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

O Apêndice 3 apresenta a demonstração de todos os resultados mostrados nesta Seção, da equação (28) à (35). Modificações são necessárias para outros processos estocásticos. O Apêndice 4 mostra a versão que considera um processo de Poisson.

Verifica-se agora verificar o resultado (20). Seja x o preço de um ativo que segue um MGB: $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Para um período de tempo dt suficientemente pequeno, é razoável que a variação percentual do preço do ativo

(taxa de retorno dx/x) independa do seu nível de preço (Hull, 2003, p.223), seguindo portanto um MAB:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt + \sigma.dz \qquad \Rightarrow \frac{dx}{x} \sim N[\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde α e σ são a tendência e volatilidade da taxa de retorno. Para determinar o processo estocástico do logaritmo do preço toma-se o Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz$$

Sendo $F(x,t) = \ln(x)$ e $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Então $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$:

$$d\ln x = [\alpha.x.\frac{1}{x} + 0 - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}.\sigma^2.x^2].dt + \frac{1}{x}.\sigma.x.dz] \Rightarrow$$

$$d\ln x = [\alpha - \frac{1}{2}.\sigma^2].dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \Rightarrow d\ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2/2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Ou seja, embora $d\ln x$ e dx/x sigam distribuições normais com a mesma volatilidade σ, apresentam tendências diferentes tais que $E(dx/x) > E(d\ln x)$. Esse resultado é decorrente da desigualdade de Jensen[14], dada pela presença da segunda derivada parcial de *F(x)* no Lema de Ito. Como $\ln x$ é côncava, então $\partial^2 F/\partial x^2 < 0$, portanto $[\alpha - \sigma^2/2].dt \leq \alpha.dt$.

Os diferentes processos estocásticos apresentados e o Lema de Ito são instrumentos adequados para a representação estocástica do ativo subjacente e da função de valor de uma opção. Mas é preciso detalhar um pouco melhor o que é o ativo subjacente transacionado no mercado de uma opção real e discutir como modelar seu processo estocástico.

---

[14] Se F(x) é uma função convexa então E[F(x)] ≥ F{E(x)], a expectativa existe e é finita. Demonstração: Seja a expansão de Taylor (28) em torno de x e na forma discreta, onde *f(x)* é convexa: *f"(x)>0,* então:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}.(\Delta x)^2 > f'(x).\Delta x \Rightarrow E[f(x+\Delta x)] > E[f(x) + f'(x).\Delta x] \Rightarrow$$

$$E[f(x+\Delta x)] > f(x) + f'(x).E[\Delta x], \text{ fazendo } \Delta x \to 0 \text{ obtém-se: } E[f(x)] > f(x).$$

3.3. Modelando o ativo subjacente

Avaliar opções reais com várias fontes de incerteza pode ser uma tarefa complicada ou impraticável. Mesmo com duas fontes, pode ser difícil resolver solucionar uma modelagem que considere a correlação entre os processos estocásticos envolvidos. Por isso, seria muito proveitoso algum tipo de simplificação que torne possível reduzir várias fontes de incerteza em uma única.

Para evitar este problema, Copeland e Antikarov (2001, p. 219) assumem duas premissas: A primeira, denominada *Marketed Asset Disclaimer,* consiste em utilizar o valor (V) do projeto implantado como se fosse um ativo financeiro transacionado no mercado; A segunda, consiste em utilizar o teorema de que qualquer preço adequadamente antecipado flutua randomicamente (Samuelson, 1965). Isso significa que, independente do padrão de fluxo de caixa que se espere de um projeto, as mudanças em seu VPL irão seguir um passeio aleatório (*random walk*). Esse teorema permite que qualquer conjunto de variáveis com incerteza possa, via Simulação de Monte Carlo, produzir uma estimativa de V estocástico, cujo desvio padrão é então o de um passeio aleatório. Assim, Copeland e Antikarov (op.cit.) utilizam este teorema para dizer que V pode seguir um MGB, aproximadamente.

3.3.1. *Marketed Asset Disclaimer* (MAD)

Na Seção 2.6 se discutiu diferentes abordagens (e sua equivalência) para se calcular o valor de uma OR com o instrumental desenvolvido para opções financeiras. Isso foi possível através da montagem de diferentes *portfolios* que incluíam um ativo subjacente ou um ativo gêmeo do projeto, supostamente transacionados no mercado financeiro. Mas que ativo financeiro teria um fluxo de caixa perfeitamente correlacionado com o de um projeto em todos os estados da natureza?

A resposta é simples: Nenhum, pois isso é praticamente impossível. Inicialmente, as aplicações de OR usaram os preços de *commodities* mundiais como aproximações para o ativo subjacente. Mas assumir que a volatilidade do projeto subjacente sem flexibilidade é a mesma de uma *commodity* é uma premissa um tanto arbitrária. Por outro lado, o que poderia ser mais bem correlacionado com um projeto do que o próprio projeto? Então parece razoável a premissa de que o VPL

tradicional (sem flexibilidades) de um projeto é o melhor estimador não viesado do valor de mercado deste mesmo projeto, caso ele fosse transacionado. Essa premissa é denominada de *Marketed Asset Disclaimer* (MAD) por Copeland e Antikarov (2001, p.94-95) e é bastante utilizada na valoração de OR.

Estes autores destacam que o MAD não faz nenhuma premissa mais forte do que aquelas utilizadas na estimativa do VPL. A premissa mais importante adotada ao utilizar o VPL, tão óbvia que por isso talvez passe despercebida ao decisor, é admitir que a distribuição de retorno do VPL é bem correlacionada com o projeto o suficiente para ser utilizada[15]. Mas isso é o melhor que se pode fazer, e também por isso é razoável assumir que o valor presente de um projeto implantado seria o valor que este assumiria no mercado caso fosse transacionado (Copeland e Antikarov, op. cit.). Portanto, um decisor que utiliza o VPL para valorar seus projetos não faz nenhuma premissa adicional ao utilizar o mesmo VPL como ativo subjacente.

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente

Samuelson (1965, apud Copeland e Antikarov, 2001, p.222-227) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado. Se os investidores têm informação completa sobre o fluxo de caixa e toda a informação já está embutida no preço corrente da ação, então as expectativas serão atingidas e os investidores irão receber exatamente o seu custo de capital, independente do padrão de fluxo de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório[16] (Copeland e Antikarov, 2001,

[15] Note que a rigor, saber o VPL do projeto pressupõe conhecer a distribuição de probabilidade real dos estados da natureza e a taxa de desconto do projeto sem flexibilidade a cada instante *t*.

[16] Conforme citado na Seção 3.1.1, um Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, ver um exemplo em Dixit e Pindick (1994**,** p.68-70).

p.222). Então riscos (de *timing,* políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente. Porém, em alguns casos, pode ser útil ter uma determinada incerteza isolada das demais, individualizando alguma decisão específica, como por exemplo, aquelas relacionadas às incertezas técnicas[17] (Seção 2.5).

Samuelson (op. cit) prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Seja x_t uma variável aleatória de preço tal que seu preço *spot* na data de hoje s_t seja constante: $E(s_0) = x_0$ e $\sigma^2(s_0) = 0$. Suponha que o preço *spot* siga um processo dado por: $s_{t+1} = a.s_t + \sigma.\varepsilon_t$ onde $\varepsilon_t \sim N[0,1]$. Então, o valor esperado será $E(s_{t+1}) = a.s_t$ enquanto que a variância será:

$$V(s_{t+1}) = E(s_{t+1}^2) - E^2(s_{t+1}) = E[a^2.s_t^2 + 2.a.s_t.\sigma.\varepsilon_t + \sigma^2.\varepsilon_t^2] - a^2.s_t^2 = \sigma^2.E(\varepsilon_t^2)$$

Usando o resultado (32): $E(\varepsilon_t^2) = 1$, então: $V(s_{t+1}) = \sigma^2$.

Nos períodos seguintes o valor esperado será:

$$s_{t+2} = a.s_{t+1} + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a.(a.s_t + \sigma.\varepsilon_t) + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \Rightarrow$$
$$E(s_{t+2}) = E(a^2.s_t) + E[\sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})] \Rightarrow \; E(s_{t+2}) = a^2.E(s_t)$$

Observando três períodos à frente:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow E(s_{t+3}) = a^3.E(s_t).$$

E a variância será:

---

[17] Se a incerteza econômica sobre o preço de um ativo segue um movimento Browniano, sua volatilidade cresce com o tempo (ver Seção 4.1.1). O contrário ocorre com a incerteza técnica, maior no início de um projeto, diminui à medida que a firma investe em informação. Uma OR com essa característica é denominada de opção de aprendizagem (*learning option*), um tipo especial de opção composta "arco-íris" (*rainbow compound option*).

$$V(s_{t+2}) = E[s_{t+2} - E(s_{t+2})]^2 = E\{a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) - E[a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})]\}^2.$$

Com o resultado (32), chega-se a: $V(s_{t+2}) = \sigma^2.(a^2 + 1)$.

De forma similar verifica-se que $V(s_{t+3}) = \sigma^2.(a^4 + a^2 + 1)$, e assim por diante. O último termo entre parênteses forma uma série cuja convergência depende de a. Se $a > 1$ a variância diverge aceleradamente; Se $a = 1$, a variância passa a ser $V(s_{t+T}) = \sigma^2.T$ e tem-se um processo de Wiener padrão: $\varepsilon_t \sim N[0, \sigma.\sqrt{t}] = \sigma.\sqrt{t}.N[0,1] = \sigma.dz$; Por fim, se $a < 1$, a variância é convergente: $V(s_{t+T}) = \sigma^2 / (1 - a^2)$ - Copeland e Antikarov (*op. cit.*, p.225).

O preço futuro de $T = 3$ observado em t é o valor esperado em t do preço *spot* para $T = 3$, dado por:

$$F_3^t = E_t(s_{t+3}) = a^3.E_t(s_t) \Rightarrow F_3^t = a^3.s_t$$

No momento seguinte $t+1$: $F_3^{t+1} = E_{t+1}(s_{t+3})$, então:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow$$
$$E_{t+1}(s_{t+3}) = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + 0 + 0 \Rightarrow F_3^{t+1} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1}$$

Note que o termo de aleatório em $t+1$ agora é um valor observável de forma que $E_{t+1}(\varepsilon_{t+1})$ é substituído por ε_{t+1}. Mas o valor esperado da mudança no valor esperado do preço futuro em t é igual a zero:

$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = E_t[a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} - a^3.s_t] = \sigma.a^2.E_t[\varepsilon_{t+1}] = \sigma.a^2.0 \Rightarrow$$
$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = 0$$

Então mesmo que o preço *spot* mude ao longo do tempo, o preço esperado de um contrato futuro não muda. Isto resulta do fato destes contratos serem escritos para refletir a expectativa de um preço em um ponto no tempo, e isso não depende do caminho que o preço segue até lá. Assim, como a informação sobre o preço *spot* na maturidade do contrato é randômico e não viezado ($\varepsilon_t \sim N[0,1]$), o preço de um futuro é um passeio aleatório com tendência zero**.**

Copeland e Antikarov (2001, p.233-236) estudam três indústrias entre 1991 e 1999 em busca de evidências empíricas do teorema de Samuelson. Testam a ciclicidade de medidas de retorno e encontram resultados consistentes com o teorema. Entretanto, referem-se a outros estudos acadêmicos mais sofisticados que verificam dependência temporal, mas argumentam que poucos destes são significantes após dedução de custos de transação e ajustes ao risco. Com isso, se posicionam a favor do uso do teorema de Samuelson com propósitos práticos.

Adicionalmente ao teorema de Samuelson, em favor do MGB há o fato deste ser matematicamente mais simples do que outros processos estocásticos, além de ser estatisticamente equivalente a modelos mais sofisticados como o de reversão à média em intervalos com até 30 ou 40 anos (ver Seção 3.1.2). Por isso o MGB é o modelo estocástico mais empregado para modelar a incerteza não só em projetos, como em toda a literatura de economia e finanças. (Dias, 1996, p.106).

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos

Na Seção 2.7 demonstrou-se para um exemplo simples discreto a equivalência entre diferentes técnicas como ativos contingentes (*contingent claims*) e programação dinâmica. Conforme comentado, essa equivalência é uma propriedade geral válida inclusive com variáveis contínuas, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (1994, p.108-124). Por isso, a partir deste ponto da dissertação, faz-se a opção pela valoração por ativos contingentes (*contingent claims*) pelo seu significado econômico e o uso do argumento de não arbitragem, conceitos consagrados em finanças[18].

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB

A oportunidade gerada por uma OR é um ativo que tem valor. Se esta oportunidade for um ativo transacionado no mercado, seu preço será conhecido.

[18] Existem várias outras alternativas para resolver problemas de otimização sob incerteza. Dois exemplos são o método integral e o método evolucionário. O método integral é particularmente útil para opções perpétuas. Soma integrais estocásticas para apreçar OR em que os limites de integração são os tempos de parada ótima, quando o processo estocástico toca a curva de gatilho (ver exemplo Dixit e Pindick, 1994, Cap.9). O método evolucionário utiliza algoritmos genéticos para evoluir soluções a partir de uma estimativa inicial da curva de gatilho até se aproximar do ótimo, podendo ser combinada com SMC. (ver Dias, 2005, p.450-457 - opções evolucionárias).

Mas mesmo que não seja, seu valor pode ser calculado através de um *portfolio* de ativos transacionados que replique perfeitamente o retorno do projeto em qualquer momento futuro e em qualquer estado da natureza. Então o valor do projeto será o valor deste *portfolio*, caso contrário há uma oportunidade de arbitragem. Está implícita nesta premissa que, a firma gerencia a OR da forma mais eficiente possível, pois, de outra forma, não se elimina a oportunidade de fazer arbitragem.

Seja V o valor de um projeto segue um MGB, então:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (36)^{19}$$

O uso de ativos contingentes (*contingent claims*) requer a premissa de que as mudanças estocásticas em V sejam modeladas por um *portfolio* ou ativo gêmeo transacionado na economia. Esse *portfolio* pode ser composto por ativos financeiros como ações, por *commodities* (transacionadas no mercado à vista e futuro) ou mesmo artigos manufaturados**.**

Seja x o ativo ou *portfolio* perfeitamente correlacionado com V (a correlação de x e V com o *portfolio* de mercado são iguais: $\rho_{xm} = \rho_{vm}$), então seu processo estocástico será dado por:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$$

Note que a volatilidade σ e a tendência α de x e V são exatamente as mesmas, afinal o *portfolio* e o projeto são idênticos por construção. Seja então μ a taxa esperada de retorno do investidor que detém este ativo ou *portfolio* gêmeo. Então μ também é a taxa ajustada ao risco exigida pelo investidor que detém a oportunidade de investimento V. De acordo com o CAPM μ é dado por: $\mu = r_f + \phi.\rho_{xm}.\sigma$ onde $\phi = (r_m - r_f)/\sigma_m$ é o *market price of risk* e $\phi.\rho_{xm}.\sigma$ é o prêmio de risco π, então: $\mu = r_f + \pi$. Mas o retorno do projeto também é dado pela

---

[19] Dixit e Pindick (1994, p136-137) alertam que a equação (36) é uma abstração da realidade para a maioria dos projetos. Seja por exemplo por não contemplar a possibilidade de desativar ou abandonar um projeto, seja por não permitir valores negativos para *V* (o que ocorre na realidade), ou mesmo por não ser o MGB o processo teoricamente mais adequado para modelar *V*. Mas ainda sim o MGB é útil numa série de situações onde a equação (36) reflita a expectativa da firma sobre o valor do projeto, ou pelo menos do preço do bem produzido. Adicionalmente há de se considerar que o MGB estatisticamente não pôde ser rejeitado em favor do MRM para períodos de 30 a 40 anos e a sua simplicidade analítica, fazendo-o um sucesso na literatura (ver Seção 3.1.2).

soma da taxa de ganho de capital α com a taxa de dividendos δ: $\mu = \alpha + \delta$. Igualando as duas equações obtém-se:

$$\mu = \alpha + \delta = r_f + \pi \Rightarrow \qquad \alpha - \pi = r_f - \delta \text{ [20]} \quad (37)$$

A taxa de dividendos δ desempenha um importante papel sobre o exercício de uma opção. Para uma opção de compra financeira, se $\delta = 0$, a opção nunca é exercida antes da maturidade[21]. Isso se deve a dois motivos: Como não há custo em manter a opção de compra ($\delta = 0$), manter a opção viva no lugar do ativo subjacente funciona (até a expiração) como um seguro contra quedas do preço do ativo subjacente abaixo do preço de exercício e; Adiar o exercício permite capitalizar o investimento (preço de exercício) à taxa livre de risco até a expiração. Para a opção de investimento esta propriedade se repete[22]. Se $\delta > 0$, a taxa de retorno do projeto α (equação 43x) é menor do que a taxa de retorno μ (equação 44x) exigida pelo investidor, havendo um custo em manter a opção viva. Assim δ é um custo de oportunidade em adiar o início de um projeto que deve ser descontado do benefício da espera dado pela opção. Por outro lado, se δ é suficientemente grande, o valor da flexibilidade de adiar a decisão de investimento torna-se muito pequeno e a opção real torna-se *deep in the money*.

Para calcular o valor da opção real F considere um *portfolio* Φ dado por uma posição longa na opção e uma posição curta em n unidades do ativo gêmeo ou do projeto V, sob a hipótese do MAD (Seção 3.3.1): $\Phi = F - n.V$.

Seja n escolhido de tal forma que o *portfolio* seja livre de risco. Então num intervalo de tempo infinitesimal dt o retorno exigido pelo investidor será a taxa livre de risco: $r_f.\Phi.dt = r_f.(F - n.V).dt$.

---

[20] Ver expressão equivalente em Dixit e Pindick, 1994, p.118, equações 22 e 23.

[21] Hull (2003, p.175-176) oferece uma demonstração desta propriedade com exemplos numéricos, a qual decorre basicamente de argumentos de não arbitragem.

[22] A taxa de dividendo δ também pode ser interpretada de outras formas. Por exemplo, pode refletir: o custo para a firma da entrada de outros competidores no mercado; o FCL do projeto ou; a *convenience yeld* quando o ativo gêmeo é uma *commodity* – ver Seção 3.4.2. O valor agregado ou médio da *convenience yield* também pode ser medida no mercado *spot* e futuro de uma *commodity*.

O retorno do *portfolio* também é dado pela soma do retorno dos ativos da carteira. O retorno da opção (que não paga dividendos) é dado pelo ganho de capital dF. O retorno do projeto é dado pela soma do ganho de capital com os dividendos ($dV + \delta.V.dt$). Então o retorno da carteira Φ será: $dF - n.(dV + \delta.V.dt)$. Igualando as duas expressões:

$$dF - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \quad (38)$$

Substituindo x pelo ativo subjacente V na equação (31) do Lema de Ito, obtém-se:

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.dV^2 \quad (31)$$

Mas também se viu em (29) que $dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt$ e em (32) que $E(\varepsilon^2) = 1$, então $dx^2 = \sigma^2.x^2.dt$ ou de forma mais genérica:

$$dx^2 = b^2(x,t).dt \quad (39)$$

Considerando que $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ (36), então $dV^2 = \sigma^2.V^2.dt$. Substituindo dV^2 na equação (31) anterior e esta em (38):

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt \Rightarrow$$

$$F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \Rightarrow$$

$$(F_v - n).dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0$$

Como o *portfolio* Φ é sem risco e o primeiro termo da expressão acima com dV tem risco ($dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$), este deve ser nulo, então:

$$(F_v - n).dV = 0 \Rightarrow F_v - n = 0 \Rightarrow n = F_v = \partial F / \partial V$$

Note que este resultado é o mesmo *delta hedging* obtido na Seção 2.7 na forma discreta - equação (11). Retornando este resultado à última equação diferencial, dividindo por dt e rearranjando os termos:

$$0.dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

A equação (40) é a conhecida equação diferencial parcial (EDP) de Black & Scholes & Merton (B&S&M)[23] com dividendos contínuos. Note que na sua dedução, embora tenha sido citada a opção de investimento como exemplo, não foi assumida nenhuma premissa sobre o tipo da opção envolvida, se *call* ou *put*, se americana ou européia. Portanto, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ.

A valoração por ativos contingentes requer a existência de um conjunto de ativos transacionados no mercado diversificados o suficiente, de tal forma que seja possível montar um *portfolio* que não só replique o risco do projeto como também seja perfeitamente correlacionado com este. Esta é uma premissa exigente que não é feita na valoração com programação dinâmica, que simplesmente considera a valoração de risco subjetiva do tomador de decisão (Dixit e Pindick, 1994, p.121).

Apesar desta diferença significativa, a equação diferencial obtida por programação dinâmica correspondente à EDP (40) é dada por:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + \alpha.F_v.V - \mu.F = -F_t$$ [24]

As diferenças entre a EDP da programação dinâmica em relação à EDP de contingentes são duas[25]: A taxa de desconto ajustada o risco μ (exógena) no lugar da taxa livre de risco (decorrente do equilíbrio no mercado de capitais); A tendência α do mundo real no lugar da tendência neutra ao risco $(r_f - \delta)$. Em outras

[23] Originalmente a equação de Black & Scholes não previa dividendos (δ=0), tendo este sido incorporado por Merton (ver, por exemplo, Hull, 2003, p.243).

[24] Ver Dixit e Pindick, 1994, p.109. Considerando π(x,t)=0 , a EDP do valor da firma sem fluxo de caixa imediato é idêntica a de uma oportunidade de investimento.

[25] Ver Seção 3.5.5 para analogia com a forma discreta.

palavras, pode-se avaliar o projeto descontando-o à taxa livre de risco imaginando que este segue um MGB com *drift* $(r_f - \delta)$ neutro ao risco.

Note que, pela equação (45), no mundo real $\alpha - \pi = r_f - \delta$. Mas no mundo neutro ao risco (e também com um *portfolio* Φ livre de risco), o retorno exigido pelo investidor é a taxa livre de risco. Desta forma o processo estocástico do ativo subjacente assume uma nova tendência $\alpha' = r_f - \delta = \alpha - \pi$, como ocorre na equação (40). Da equação (36), o MGB neutro ao risco será dado por:

$$dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz \Rightarrow \qquad dV = (r - \delta).V.dt + \sigma.V.dz \quad (41)$$

Como dito, a equação (40) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ de um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB com dividendos contínuos δ. O que permitirá adaptar a equação (40) para uma *call* ou *put*, americana ou européia, finita ou perpétua e o valor do seu *payoff* são as condições de contorno, necessárias para sua solução.

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica

Nesta Seção descreve-se o modelo apresentado por Dixit e Pindick (1994, p.147-150) para o problema da firma que precisa decidir o momento ótimo para exercer a opção de investir em um projeto cujo prazo de expiração é infinito (*call* americana perpétua).

A oportunidade de investimento possui duas características fundamentais (ver Seção 2.1): O investimento é pelo menos parcialmente irreversível, ou seja, é um custo afundado (*sunk cost*) que não pode ser recuperado; A decisão de investimento pode ser postergada de forma que a firma tem a flexibilidade de esperar e verificar como se comporta a(s) fonte(s) de incerteza(s) de um projeto antes de comprometer recursos irreversivelmente. Considere o custo do investimento I conhecido e fixo, e que o processo estocástico do valor do projeto seja dado pela equação (36): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$. Uma das implicações do MGB é que uma vez que o valor do projeto valha zero, dV e V sempre serão zero (barreira absorvente). Em conseqüência a opção de investir perderá seu valor:

$$V = 0 \Rightarrow dV = \alpha.0.dt + \sigma.0.dz = 0 \Rightarrow V + dV = 0 \Leftrightarrow F(V = 0) = 0 \quad (42)$$

Se o tempo de expiração é infinito e os termos α, σ e V não dependerem explicitamente do tempo, então o valor da opção também não dependerá (Dixit e Pindick, 1994, p.107). Isso significa que $\partial F / \partial t = F_t = 0$, $F_v = F'$ e $F_{vv} = F''$, e a EDP (40) torna-se a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = 0 \quad (43)$$

Como visto na Seção 2.4, para uma opção de investimento a cada instante t há um valor V^* abaixo do qual continuar esperando é a decisão ótima e vice-versa. Com isso é possível definir uma curva de $V = V^*(t)$ - curva de gatilho – a partir da qual a decisão ótima é investir. Nesta curva a opção de investir vale exatamente o VPL do projeto:

$$F^*(V^*(t), t) = V^*(t) - I \quad (44)$$

Essa condição é denominada de *value matching condition* e a curva definida por $V^*(t)$ é denominada de "fronteira" livre (*free boundary).*

A *value matching condition* é necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. A segunda condição necessária, denominada de contato alto ou de contato suave (*smooth pasting condition*), é que na "fronteira" livre o valor da opção e do VPL devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^*:

$$F_v(V^*(t), t) = (V^*(t) - I)_v \Rightarrow F_v(V^*(t), t) = 1 \quad (45)$$

Essa condição não é facilmente percebida, mas pode ser verificada graficamente com certa facilidade, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (2004, p.130-131).

Então o valor de uma opção de investimento americana perpétua é dado pela equação (43) sujeita às condições de contorno dadas pelas equações (42), (44) e (45):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).n.V - r_f.F = 0 \qquad (43)$$

$$F(V=0) = 0 \qquad (42)$$

$$F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I \qquad (44)$$

$$F_v(V^*(t),t) = 1 \qquad (45)$$

A EDO (43) possui solução analítica definida dada por (ver Brandão, Cap.5, p.8-14):

$F(V) = A.V^{\beta_1}$ (46) onde $A = (V^* - I)/(V^*)^{\beta 1}$ (47);

$\beta_1 = 1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2]^2 + 2.r_f/\sigma^2}$ (48) e $V^* = \beta_1.I/(\beta_1 - 1)$ (49)

Note que o valor do gatilho dado por (49) não depende de t pois a opção é perpétua.

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração

Ao contrário da opção de investimento perpétua, o tempo de expiração agora é finito e, embora os termos α e σ possam ser constantes, o valor do projeto e o valor da opção de investir são variáveis com o tempo. Com isso $F_t \neq 0$ e a EDO (40) permanece inalterada. As condições de contorno (42), (44) e (45) continuam válidas, havendo uma quarta condição adicional: Na expiração da OR de investir, vale a regra do VPL tradicional:

Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

A EDP (40) para uma opção americana de compra com $\delta > 0$[26] não apresenta solução analítica. Dixit e Pindick (1994, p.401), entretanto, chamam atenção para o fato de que o valor do gatilho de uma OR é pouco sensível ao tempo de expiração quando este é superior a dois anos. Neste tipo de situação, sugerem que a solução

[26] Opções americanas de compra sem dividendos nunca são exercidas antecipadamente (ver Seção 4.5.1 e nota de rodapé 21). Nesta situação equiparam-se a opções européias e a EDP (40) toma as soluções originalmente apresentadas por Blak e Sholes – ver, por exemplo, Hulll, 2003, p. 246.

analítica para uma opção de compra americana perpétua (equações 54 e 55) pode ser uma aproximação razoável.

Entretanto, existem várias alternativas mais precisas para o problema de valoração de uma OR, aqui genericamente denominadas de soluções não analíticas.

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB

A EDP (49) de Black & Sholes & Merton (B&S&M) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ. Mas soluções analíticas nem sempre existem e, na ausência destas, existem alternativas com métodos numéricos e as aproximações analíticas. Na prática, a solução deve ser escolhida com base nas características do derivativo e na precisão desejada.

Hull (2003, p.392-427) e Trigeorgis (1996, p.305-339) destacam e discutem (os mesmos) três métodos numéricos para aplicações em opções financeiras e reais: Simulação de Monte Carlo (SMC), árvores (binomiais, trinomiais, etc. – métodos gradeados) e diferenças finitas.

A SMC é relativamente simples e flexível, além de permitir o uso da avaliação neutra ao risco. Por funcionar do início para o fim da vida da opção (*foward*), adapta-se bem para opções européias, para derivativos com várias variáveis de estado e com complexidade no cálculo dos *payoffs*. A solução com árvores, extensivamente adotada no livro de Copeland e Antikarov (2001), simula os processos estocásticos subjacentes. Geralmente são mais simples, intuitivas e flexíveis para lidar com diferentes processos estocásticos como difusão, saltos ou reversão à média, sempre a partir dos preços do presente. Mas a valoração sempre é feita a partir da expiração para o início da vida da opção, a exemplo do que ocorre no cálculo por diferenças finitas. Ambos os métodos lidam bem tanto com opções do tipo americanas como européias, mas ficam limitados quando os *payoffs* dependem de alguma forma do histórico passado (por exemplo, opções do tipo *lookback*[27]) ou do valor corrente. Além disso, tornam-se progressivamente mais complicadas à medida que aumenta o

[27] *Look back options* são opções cujo *payoff* depende do valor máximo ou mínimo atingido pelo ativo subjacente durante a vida da opção. Ver Hull (2003, p.441-442).

número de variáveis envolvidas. Os métodos de diferenças finitas (explícito e implícito) resolvem a equação diferencial convertendo-a em uma equação de diferenças. O método explícito é muito parecido com uma árvore trinomial enquanto que o implícito, embora mais complicado, não apresenta os problemas de convergência[28] do primeiro.

As aproximações analíticas têm a vantagem de tornar os cálculos instantâneos e permitir uma interpretação clara da relação entre as variáveis envolvidas. Por esses motivos essa é a técnica adotada nesta dissertação. Consiste em adaptar o problema de apreçamento de derivativos e obter uma expressão analítica que se aproxima satisfatoriamente da solução verdadeira da EDP (49) e suas condições de contorno. Existem várias aproximações analíticas para opções americanas. A mais conhecida delas (Hull, 2003, p.427) é a aproximação quadrática de MacMillan (1986), estendida por Barone-Adesi e Whaley (1987), que pode ser utilizada para *calls* e *puts* sobre diversos ativos financeiros e OR. Esta aproximação se baseia na premissa de que o preço de uma opção americana é dado pelo preço de uma européia adicionado de um prêmio pela possibilidade do exercício antecipado. Como essas duas opções satisfazem a mesma equação diferencial (49), este prêmio ou diferença também deve satisfazê-la. Hull (2003, p. 433-434) apresenta resumidamente esta aproximação, que pode também ser vista com um pouco mais de detalhe em Dias (1996, p.217-220).

Broadie e Detemple (1996) desenvolvem limites inferiores e superiores para o preço de opções americanas e apresentam duas aproximações (LBA e LUBA) para o valor destas com base nestes limites. O *Lower Bound Approximationa* (LBA) apresenta Raiz do erro Quadrático Médio (RQM – ver adiante) de 0,1% para um range grande de parâmetros, considerando uma amostra de 2271 opções. O *Lower and Upper Bound Approximation* (LUBA) apresenta RQM de 0,02%. Esses erros foram medidos em relação à estimativa do método binomial com 15000 nós, assumido como o valor verdadeiro da opção por sua convergência.

O RQM é uma medida de erro definida como:

[28] Uma solução é estável se é finita e é convergente se tende para as condições de contorno adequadamente. Uma solução estável e convergente é dita consistente se ela é realmente uma aproximação do problema original (Trigeorgis, 1996, op cit).

$$RQM = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \quad (51) \quad \text{com} \quad e_i = \frac{C_i}{C} - 1$$

Onde e_i é o erro relativo *i*-ésimo valor estimado C_i da opção em relação ao seu valor "real" C e n é o número de estimativas. Para tornar o erro relativo significativo, os valores da opção C_i inferiores a 0,5 são desconsiderados.

Broadie e Detemple (op. cit.) também comparam a precisão e velocidade de cálculo de suas duas estimativas com diversos métodos conhecidos, inclusive o de Barone-Adesi e Whaley. Apesar de sistematicamente apresentarem-se mais rápidos que os demais, o LBA e o LUBA são relativamente complicados de implementar, o que segundo os autores, favoreceria binomiais com desempenho similar. A aproximação de Baroni-Adesi e Whaley apresentou um RQM de 0,6% para opções com maturidade inferior a um ano, e de cerca de 2% para maturidades superiores.

O erro crescente da aproximação de Barone-Adesi e Whaley desfavorece o seu uso para OR em que o tempo de expiração é de vários anos. Bjerksund e Stensland (1993) propuseram uma alternativa de aproximação analítica mais acurada para opções americanas (Haug, 1998). Baseia-se na imposição de uma estratégia de exercício factível, porém não ótima, através de um preço de exercício antecipado único e constante, aqui denominado de modelo de um período.

Bjerksund e Stensland (2002) apresentam uma generalização do seu modelo inicial dividindo o tempo até a maturidade em dois períodos, cada qual com um preço constante de exercício. O segundo período apresenta duração e preço de exercício menor do que o primeiro, refletindo a perda de valor da opção até sua expiração. Os autores comparam os seus modelos de um e dois períodos com o valor calculado por uma binomial com 3201 pontos, a qual é assumida como o valor verdadeiro da opção. Os resultados indicam que os dois modelos calculam valores muito próximos ou idênticos, entretanto o modelo de dois períodos apresenta uma estimativa mais acurada do valor verdadeiro de opções americanas.

Este teste numérico foi realizado com os mesmos parâmetros adotados no artigo de Barone-Adesi e Whaley (1987), o que permite comparar o desempenho das duas aproximações para várias opções de compra e de venda com expiração inferior a 6 meses. O resultado desta análise não favorece nenhuma das duas

aproximações, já que uma ou outra aproximação apresenta menor ou maior RQM a depender do valor verdadeiro da opção adotado: Diferenças finitas no artigo de Baroni-Adesi e Whaley ou binomial no de Bjerksund e Stensland. Os RQM observados variam entre 0,52% e 0,82% para opções de compra e entre 0,92% e 1,14% para opções de venda.

Bjerksund e Stensland (2002) também utilizam os mesmos parâmetros para opções com expiração de 3 anos (ver Tabela 401). Calculado o RQM para o modelo de um período (de menor precisão), se encontrou valores de 0,62% e 0,73% para *call e puts* respectivamente. Estes números são bem inferiores ao RQM de 2% reportados por Broadie e Detemple (op. cit.) em sua análise com a aproximação de Baroni-Adesi e Whaley para opções com expiração superior a um ano.

Esses resultados revelam que, para o conjunto de dados considerados, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período[29] apresentam uma performance superior em relação ao de Baroni-Adesi e Whaley ao não divergir o RQM com o aumento do prazo de expiração para 3 anos, o que está de acordo com os resultados obtidos por Haug (1998),

Adicionalmente, deve-se ter em mente que as aproximações de Bjerksund e Stensland representam limites inferiores (acurados) para o valor verdadeiro da opção americana, o que se por um lado tem a desvantagem de antecipar de forma insignificante o exercício ótimo, por outro tem a vantagem de revelar o sinal do erro da estimativa do valor da opção.

Embora a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período apresente performance melhor do que a de Baroni-Adesei e Whaley, também possui limitações. Testes de sensibilidade mostram que, quando a taxa de dividendos é menor ou igual à taxa livre de risco ($\delta \leq r_f$), o valor crítico e o valor da opção convergem para os valores da opção perpétua à medida que se aumenta o prazo de expiração. Entretanto, à medida que cresce a diferença entre a taxa de dividendos e a taxa livre de risco, há uma perda progressiva de precisão com o aumento do tempo de expiração da opção.

[29] Naturalmente o mesmo vale para o modelo de Bjerksund e Stensland com dois subperíodos, que é mais preciso do que o de um período.

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor "verdadeiro" estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%.

			Call Americana			Put Americana		
Parâmetros da opção		Preço Ativo Base	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = (B&S/ Binomial - 1	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = B&S/ Binomial – 1
K =	100	80	2,34	2,30	-1,71%	25,66	25,61	-0,19%
r_f =	0,08	90	4,75	4,71	-0,84%	20,08	20,04	-0,20%
σ =	0,2	100	8,49	8,44	-0,59%	15,50	15,47	-0,19%
T =	3	110	13,79	13,74	-0,36%	11,80	11,78	-0,17%
δ =	0,12	120	20,88	20,85	-0,14%	8,89	8,87	-0,22%
K =	100	80	3,98	3,95	-0,75%	22,21	22,12	-0,41%
r_f =	0,08	90	7,25	7,20	-0,69%	16,21	16,14	-0,43%
σ =	0,2	100	11,70	11,64	-0,51%	11,70	11,64	-0,51%
T =	3	110	17,31	17,24	-0,40%	8,37	8,31	-0,72%
δ =	0,8	120	24,01	23,93	-0,33%	5,93	5,89	-0,67%
K =	100	80	6,88	6,88	0,00%	20,35	20,32	-0,15%
r_f =	0,08	90	11,49	11,49	0,00%	13,50	13,43	-0,52%
σ =	0,4	100	17,21	17,21	0,00%	8,94	8,86	-0,89%
T =	3	110	23,84	23,84	0,00%	5,91	5,83	-1,35%
δ =	0,4	120	31,17	31,16	-0,03%	3,90	3,83	-1,79%
K =	100	80						
r_f =	0,08	90				11,70	11,67	-0,26%
σ =	0,2	100	Sem exercício antecipado			6,93	6,90	-0,43%
T =	3	110				4,16	4,12	-0,96%
δ =	0	120				2,51	2,48	-1,20%
- Média do erro relativo				-0,42%			-0,56%	
- Desvio Padrão do erro relativo				0,46%			0,47%	
- Raiz do erro Quadrático Médio (RQM)				0,62%			0,73%	

A precisão satisfatória da aproximação analítica de Bjerksund e Stensland para OR, a sua superioridade em relação à aproximação de Barone-Adesi e Whaley, somados à maior simplicidade analítica do modelo de um período (em relação ao modelo de dois períodos), são os motivos da opção por esta aproximação nesta dissertação.

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993)

Bjerksund e Stensland assumem o modelo de Black & Sholes & Merton com uma taxa livre de risco positiva, onde o preço do ativo subjacente V segue um MGB ($dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz$) em relação à medida equivalente de Martingale (mundo neutro ao risco - $\alpha' = r_f - \delta$). Considere I como o preço de exercício (investimento) e X o nível de preço (gatilho) antecipado (estratégia não ótima) em que o decisor opta por exercer a OR ($X > I$).

Dada esta estratégia factível e não ótima, o preço de uma opção americana de compra fica reduzido a dois componentes: (i) Uma opção de compra européia do tipo *up-and-out*[30] (para cima e para fora) com uma barreira de nocaute[31] (*knock-out barrier*) dada por X, *strike* I e maturidade T; (ii) Um *payoff* $X - I$ que é recebido se a opção é exercida antes da maturidade. Então, o valor aproximado da opção americana ($\bar{c}$) é dado por:

$$\bar{c}(V,I,T,r_f,\alpha,\sigma,X) = \nu(X).V^{\beta_1} - \nu(X).\varphi(V,T|\beta_1,X,X) + \varphi(V,T|1,X,X) - \varphi(V,T|\beta_1,I,X) - I.\varphi(V,T|0,X,X) + I.\varphi(V,T|0,I,X) \quad (52)$$

Onde os dois primeiros termos do lado direito da igualdade representam o *payoff* $X - I$ e os quatro últimos o valor da *call* européia *up-and-out*. Os termos $\nu(X), \beta_1$ e $\varphi(V,T|\gamma,H,X)$ são dados por:

$$\nu(X) = (X - I).X^{-\beta_1}$$

$$\beta_1 = (1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2) + \sqrt{((r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2.r_f/\sigma^2} \quad (48)$$

30 Uma call do tipo *up-and-out* (c_{uo}) é uma opção com barreira que deixa de existir quando o preço do ativo subjacente aumenta até um nível pré-estabelecido, superior ao preço inicial. Reciprocamente, a *call* do tipo *up-and-in* (c_{ui}) é aquela que passa a existir quando o preço pré-estabelecido do ativo subjacente é atingido. Note que $c = c_{uo+} c_{ui}$. (Ver Hull 2003, p.438-441).

31 Nível de preço que se atingido pelo ativo subjacente, implica no exercício imediato da opção, ou seja, no qual o decisor "mata" a OR.

$$\varphi(V,T|\gamma,H,X)=\exp(\lambda.T).\{N[\frac{-\ln(V/H)+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]-$$
$$(X/S)^{\kappa}.N[\frac{-\ln(X^2/(V.H))+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]$$

Note que as variáveis γ e H de acordo com a equação (52) podem assumir os seguintes valores: $\gamma \in \{\beta_1,0,1\}$ e $H \in \{X,I\}$. Os termos λ e κ são dados por:

$$\lambda=-r_f+\gamma.(r_f-\delta)+1/2.\gamma.(\gamma-1).\sigma^2$$ [32] e $$\kappa=2.(r_f-\delta)/\sigma^2+(2\gamma-1)$$

Com a estratégia não ótima de adotar um preço de exercício antecipado (gatilho) X, o valor obtido para a opção representa um limite inferior para o verdadeiro valor. As investigações numéricas apresentadas pelos autores (Bjerksund e Stensland, 2002, op. cit.) mostram que essa estimativa pode servir como uma aproximação acurada do verdadeiro valor (como se observa nas diversas tabelas comparativas apresentadas no artigo, tanto para *calls* como *puts*). Bjerksund e Stensland (2002, op. cit.) apresentam uma nova estimativa para o valor do gatilho antecipado X, ligeiramente modificada em relação ao trabalho de 1993:

$$X_t=B_0+(B_\infty-B_0).\{1-\exp[h(t)]\} \quad (53)$$

$$h(t)=-((r_f-\delta).t+2.\sigma\sqrt{t}).\frac{I^2}{(B_\infty-B_0).B_0} \quad \text{com:}$$

$$B_\infty=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}.I \text{ e } B_0=Máx\{I,\frac{r_f}{\delta}.I\} \quad (54)$$

Onde B_∞ representa o gatilho da opção de compra americana perpétua, equações (49) - Seção 3.4.2. A equação (53) tem papel destacado nesta dissertação, pois será com ela que serão construídas as curvas de gatilho apresentadas no Capítulo 5.

A curva de gatilho da opção de investimento americana é contínua no intervalo [0,T), mas pode ser descontínua em T quando $r_f > \delta$ - ver (54). Assim o

[32] O valor de λ adotado, a exemplo do que fazem Bjerksund e Stensland é o apresentado no artigo de 2002, em detrimento do original apresentado em 1993.

limite perto da expiração é dado por $\lim_{t \to T-}(X_t) = Máx[I, (r_f / \delta).I]$ e na expiração é igual a I.

Os resultados obtidos até aqui para opções de compra americana, perpétuas ou com expiração finita, também podem ser aplicadas para opções de venda. Esse desdobramento torna-se relativamente simples considerando a simetria entre *calls* e *puts* americanas.

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas

A simetria entre opções de compra e venda (PCS – *Put-call syimetry*) é uma propriedade de opções americanas segundo a qual, o preço de uma opção de venda pode ser obtido a partir da troca entre parâmetros da opção de compra correspondente. De acordo com Detemple (2006, Cap.3, p.67-104), que apresenta e aprofunda os resultados mais recentes das pesquisas sobre o assunto, esta simetria foi originalmente demonstrada por McDonald e Schroder (1990) e Bjerksund e Stensland (1993b) em tempo discreto e contínuo respectivamente.

Trata-se de uma importante propriedade das opções, pois permite que o mesmo algoritmo possa ser utilizado para apreçar e determinar as regras ótimas de exercício para opções de compra e de venda, mesmo na ausência de simetria no preço do ativo subjacente ou na presença de descontinuidades (Geman et al, 1995, apud Detemple *op. cit.*). Em alguns casos, a PCS reduz o número de variáveis necessárias para o apreçamento de opções, além de permitir *insights* sobre o relacionamento econômico entre contratos,

A homogeneidade de grau 1 da função de *payoff* de uma opção (em relação ao preço do ativo subjacente e ao preço de exercício) faz com que a PCS decorra da simples troca de numerário. Com o novo numerário, o apreçamento também pode ser feito por *contingent claims* com os mesmos *portfolios* replicantes. Isso significa que a opção simétrica também pode ser avaliada em uma economia auxiliar com o novo numerário e uma taxa de juros ajustada, na qual o apreçamento da opção satisfaz as mesmas equações de apreçamento. Essas características também permitem a extensão da PCS para contratos mais complexos sobre um ou mais ativos. Para o propósito desta dissertação, será suficiente a discussão do modelo sobre um MGB.

Considere uma opção de compra americana sobre um MGB neutro ao risco, como na Equação (41): $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$, com r_f, δ e σ constantes. Na Seção 3.5 discutiu-se brevemente que o preço deste derivativo pode ser visto como o preço de uma *call* européia $c(V_t, I, r_f, \delta, t)$ definido por Black e Sholes (1973) e Merton (1973) somado por um prêmio pela possibilidade de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$:

$$C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = c(V_t, I, r_f, \delta, t) + \Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (55)$$

Onde $C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é o preço de uma *call* americana e $B^c(\cdot)$ é a "fronteira" livre (*free boundary)* da opção de compra que soluciona a seguinte integral recursiva:

$$B_\tau^c - I = C(B_t^c, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (56), \text{ sujeito a: } B_T^c - I = Máx(I, I.r_f / \delta) \quad (57)$$

Seja $B^c(I, r_f, \delta, t)$ a solução da equação (56).

O prêmio de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é definido como:

$$\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = \int_t^T \Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c).d\tau \quad (58), \text{ onde:}$$

$$\Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c) = \delta.V_t.\exp[-\delta.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t)] - r_f.I.\exp[-r_f.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) - \sigma.\sqrt{\tau - t}] \quad (59).$$

Onde $N[\cdot]$ é a probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão e:

$$d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) = \frac{\ln(V_t / B_\tau^c) + (r_f - \delta + 0{,}5.\sigma^2).(\tau - t)}{\sigma.\sqrt{(\tau - t)}} \quad (60)$$

A equação (58) não tem solução analítica, motivo pelo qual a opção americana de compra também não tem. De acordo com McDonald e Schroder (apud Detemple, *op. cit.*) as equações correspondentes para uma opção de venda americana podem ser obtidas a partir do conjunto de equações (55) a (60), fazendo uma simples troca de variáveis. Este resultado é enunciado pelo seguinte teorema (Detemple, *op. cit.*, p.72):

Teorema: Considere opções de venda e compra americanas com preço de exercício I e expiração T idênticos, escritos sobre um ativo V_t que segue um MGB neutro ao risco $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$. Sejam $P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(\cdot))$ e $C(V, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ as respectivas funções de preço e $B^P(I, r_f, \delta, \cdot)$ e $B^C(V, r_f, \delta, \cdot)$ os correspondentes preços críticos. Então:

$$P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(I, r_f, \delta, \cdot)) = C(I, V, \delta, r_f, t, B^c(V, \delta, r_f, \cdot)) \quad (61)$$

E para todo $t \in \{0, T\}$:

$$B^P(I, r_f, \delta, t) = \frac{V.I}{B^c(V, \delta, r_f, t)} \quad (62)$$

Assim, o valor de uma *put* americana é o mesmo de uma *call* também americana com preço de exercício V e expiração T, numa economia com taxa de juros livre de risco δ, na qual o ativo subjacente, sob medida neutra ao risco, segue um MGB com dividendos r_f, volatilidade σ e valor inicial I. Além disso, a curva de gatilho da *put* americana é dada pelo inverso da curva de gatilho da *call* multiplicado pelo produto $V.I$ - Equação (62).

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção

Em situações de planejamento de investimentos duas informações são preciosas para projetos que não se encontram *deep in the money*: Quando se espera que a opção de investimento se torne apta ao exercício e; Qual é a probabilidade deste exercício ocorrer.

O tempo esperado de toque é o tempo esperado para que uma variável que segue um processo estocástico alcance um certo valor, no caso a curva de gatilho, quando então a opção deve ser exercida (Dias, p.1-2, http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html). O tempo esperado de toque é matematicamente definido como:

$$T^* = \inf\{t \geq 0; V \geq V^*\}$$

Ao contrário do que ocorre no apreçamento de opções, o tempo esperado de toque depende da tendência real (α) do processo estocástico. Como visto na Seção 3.5.1, a curva de gatilho real pode ser calculada com o processo estocástico neutro ao risco (*drift* $\alpha - \pi = r - \delta$), mas utilizar este mesmo processo implica em erro na resposta às duas questões. O tempo esperado de toque calculado com o processo neutro ao risco seria maior do que o verdadeiro valor e a probabilidade de exercício seria menor do que a verdadeira. Com um menor *drift*, o processo estocástico demora mais tempo para tocar a barreira da curva de gatilho pela primeira vez, e no caso de uma OR finita, toca menos vezes a barreira até a expiração.

A exemplo do que ocorre com as opções de investimento (Seções 3.4.2 e 3.5), o tempo esperado de toque possui uma solução analítica para opções perpétuas, mas não para as opções com expiração finita. Métodos numéricos podem resolver este problema. Dias (op.cit.) sugere a adoção de Simulação de Monte Carlo por ser mais simples dado que, a curva de gatilho pode ser determinada com antecedência e precisão satisfatória utilizando-se aproximações analíticas (Seção 3.5.1, no caso do MGB).

Para isso basta simular o processo estocástico real um número grande de vezes e observar quantas vezes a opção é exercida. A razão entre o número de exercícios e o número de simulações fornece uma estimativa amostral da probabilidade de exercício da opção. Dado o exercício, a média condicional dos tempos de toque é uma estimativa amostral do tempo esperado de toque. Este é o procedimento adotado na Seção 5. 3.

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P

A indústria de petróleo consiste de uma cadeia de atividades de produção, transformação e comercialização de hidrocarbonetos líquidos e gasosos em uma variedade de produtos de tecnologia. De forma simplificada, as atividades neste setor envolvem ativos reais de exploração e produção de petróleo, transporte, refino, distribuição, comercialização, petroquímica, fertilizantes, geração de energia elétrica, etc. As empresas atuam em um ou vários elos (segmentos) da cadeia simultaneamente, tornando-se progressivamente integradas. As grandes corporações têm se diversificado ainda mais, rompendo os limites tradicionais da indústria petrolífera e adotando o conceito de empresas de energia.

Na ausência de um mercado suficientemente desenvolvido para os ativos reais da indústria do petróleo, a otimização dinâmica e contínua de um *portfolio* de ativos reais revela-se onerosa e limitada em relação ao que ocorre com os ativos financeiros. Por esses motivos os investimentos em projetos e vendas de ativos reais devem ser bem fundamentados, de um lado avaliando-se o impacto sobre o *portfolio* da companhia e de outro, certificando-se sobre o valor das flexibilidades embutidas nos ativos. Do ponto de vista de gestão de *portfolio*, as principais OR a serem consideradas são opções de investimento, desinvestimento e abandono.

No contexto do *portfolio* de uma empresa de petróleo com ativos reais de diversos segmentos, modelos de OR mais gerais e simples tornam-se valiosos: Se por um lado estes modelos podem ser adaptados com facilidade diferente ativos do *portfolio,* por outro facilitam a sua implementação dentro da organização.

São discutidos em seguida modelos de OR simples e compostas de ativos de exploração e produção de petróleo, que por serem os ativos básicos das grandes corporações do setor, apresentam uma literatura mais desenvolvida.

Na Seção 4.1 são discutidos os principais tipos de OR na área de exploração e produção de petróleo. Na Seção 4.2 são revistos os principais argumentos que justificam a adoção do MGB para o preço do ativo subjacente. Considerando a hipótese de *Marketed Asset Disclaimer* (Seção 3.3.1), as OR serão modeladas tendo como ativo subjacente os próprios projetos de investimento ou ativos reais já em operação. Na Seção 4.3 são discutidos alguns modelos de OR da área de E&P. O

Anexo I apresenta um pequeno glossário de termos técnicos da área de petróleo citados neste texto.

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo

A Exploração e Produção (E&P) de petróleo é a base ou o primeiro elo da cadeia de atividades da indústria do petróleo[33]. A Exploração é o conjunto de atividades de pesquisa que visam identificar e testar situações geológicas favoráveis à acumulação de petróleo. Uma vez confirmada a existência de petróleo em uma área, segue-se um conjunto de atividades denominadas de delimitação (*appraisal*) que visam diminuir a incerteza sobre o volume de hidrocarboneto descoberto e sua produtividade. Obtidos novamente resultados favoráveis, executa-se outro conjunto de atividades que visam permitir a produção comercial de petróleo, denominada de desenvolvimento da produção (*development*). Ao longo ou ao final desta fase, o campo de petróleo passa a produzir em escala e de forma contínua, iniciando a fase de produção. Durante a fase de produção, podem surgir vários novos projetos de investimento que visam aumentar o volume recuperável de petróleo, sua produtividade ou o retorno do ativo em produção com a redução de custos operacionais. A Figura 10 mostra de forma esquemática as principais OR em projeto típico de E&P de petróleo.

Dias (1996, p.64-65) descreve as principais OR relacionadas ao processo E&P de petróleo, transcritos a seguir:

Quando se tem apenas uma área potencialmente petrolífera (bloco), eventualmente com mapas de sísmica 2D, existe apenas uma probabilidade "p" de se descobrir petróleo, e em caso de haver a descoberta, a reserva esperada é "B". Aqui se poderia subdividir essa opção em duas: opção de explorar (investir em um poço pioneiro) e opção de delimitar (em caso de descoberta, investir em poços delimitadores e em sísmica de detalhe e/ou 3D). O direito de explorar esse bloco pode ser oriundo de um monopólio estatal (opção perpétua) ou de uma concessão governamental obtido por licitação (lease). Em ambos os casos, esse direito é uma opção de exploração, que se exercida (através do pagamento do investimento em exploração) pode levar à descoberta (ou não) de petróleo e à delimitação do campo,

[33] No Anexo 1 encontra-se um pequeno glossário de termos da indústria de petróleo utilizados nesta dissertação.

obtendo-se as chamadas "reservas não-desenvolvidas", além de obter uma outra opção, a de explotar (produzir) o campo. Uma característica dessa fase é que a incerteza técnica é mais relevante que a incerteza econômica.

Uma vez descoberto e delimitado o campo, o gerente tem a opção de explotar (ou de produzir, ou de desenvolver o campo). Através do exercício dessa opção (pagando o custo de investimento no desenvolvimento do campo), o gerente transforma o ativo "reserva não-desenvolvida" em "reserva desenvolvida" (jazida produzindo ou pronta para tal). Além disso, com o exercício dessa opção se obtém novas opções: as opções de expandir a produção (ex.: projetos de desenvolvimento complementar, ou de adensamento de malha, ou de recuperação secundária/métodos especiais), além das opções de interromper provisoriamente a produção e até de abandonar o campo.

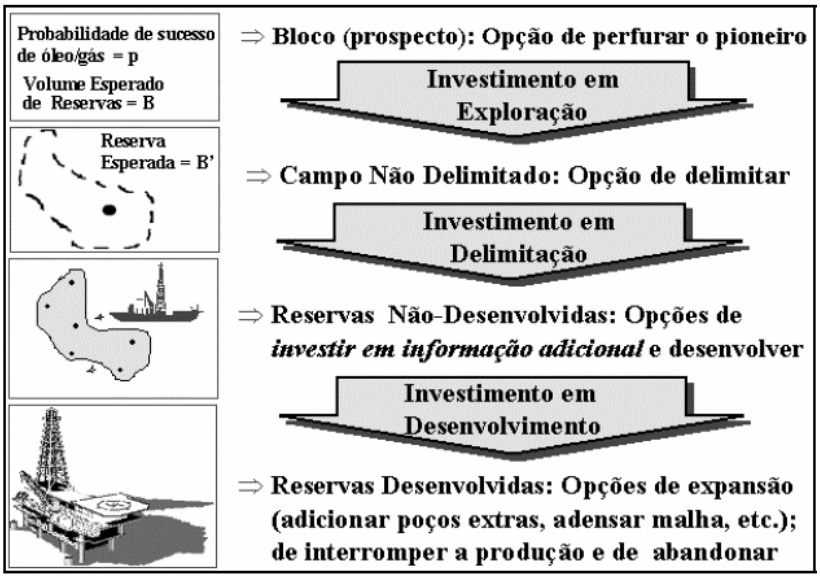

Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005, p.45).

As opções de exploração, delimitação e desenvolvimento da produção são OR estratégicas[34] de investimentos seqüenciais que podem ser avaliadas em conjunto ou isoladamente. Se uma concessão encontra-se na fase exploratória ou de delimitação, a decisão de investimento é uma opção de compra composta (o

[34] As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desenvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio (ver Seção 2.4.1).

sucesso na exploração cria a opção de delimitação e o sucesso desta cria a opção de desenvolvimento). Então o decisor somente deve exercer a primeira opção de investimento se as opções subseqüentes também estiverem *deep in the money*. De outra forma, se a OR de exploração estiver *deep in the money*, mas as OR de delimitação ou de produção não estiverem, é mais vantajoso para a empresa aplicar o recurso deste investimento no mercado financeiro e esperar do que exercer a primeira opção imediatamente e ficar aguardando o *timing* do exercício da segunda.

Deste ponto de vista, a OR de exploração é uma opção americana de compra composta sobre uma opção americana simples de delimitação (*call on call*). A opção de delimitação também é uma americana de compra composta sobre a opção de desenvolvimento, que por sua vez é uma *call* americana simples. Na Seção 4.3.3 é discutido um modelo para opções de exploração compostas**.**

Opções de expandir, interromper (parada temporária) ou abandonar a produção são OR operacionais[35]. Uma opção de expandir a produção ou qualquer outra que aumente a lucratividade de um campo de petróleo já em produção pode ser tratada como uma *call* americana simples, cuja expiração ocorre dentro do período de produção (no Brasil, 27 anos). Opções de interromper provisoriamente a produção (parada temporária) podem ocorrer se há a esperança de se voltar a produzir economicamente[36]. Por fim, as opções de abandonar ou vender um campo de petróleo são *puts* americanas, podendo ser avaliadas por um mesmo modelo. A diferença básica entre elas será o preço de exercício. No abandono este preço é um custo, exceto que haja algum valor residual suficientemente alto (ver Exemplo 2 da Seção 2.2 para a discussão da regra de decisão). Já opção de venda o preço de exercício é uma receita, portanto um valor positivo.

Em projetos de E&P ocorre a estreita relação entre OR estratégicas e operacionais descrita por Trigeorgis (1996, p.227-256, ver Seção 2.6.1). As várias flexibilidades que podem ocorrer em um campo de petróleo fazem com que surjam

---

[35] As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. Ver Seção 3.4.1.

[36] O custo de desmobilização temporária, preservação, e retomada da produção são determinantes nessa decisão. Em campos pouco atrativos pode ser preferível produzir com máxima terceirização e contratos de curto prazo de forma a ter um valor atraente para a opção de parada temporária (Dias, 1996, p.61).

novas e futuras OR. Naturalmente, diversas combinações entre elas são factíveis, criando opções múltiplas ou compostas. A interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto.

O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

Bjerksund e Ekern (1990, p.77-79) avaliam através de um exemplo numérico o impacto adicional da opção de abandono e parada temporária sobre uma opção de desenvolvimento perpétua. O efeito dessas opções adicionais é reduzir o valor crítico (gatilho) para se iniciar o projeto de investimento, sendo pouco maior para a opção de parada temporária. Porém, destacam que o efeito dessas flexibilidades adicionais na redução do preço de petróleo crítico foi pequeno: 1,8% ou de US$ 20,00/bbl para US$ 19.64/bbl.

O maior impacto sobre o projeto foi justamente a introdução da flexibilidade de adiar a decisão de investimento. Então o viés introduzido ao se ignorar as opções adicionais seria desprezível. Parâmetros como a volatilidade σ e a taxa de dividendos δ podem ser mais importantes do que complicar modelos com opções adicionais. Mesmo sob o risco de generalizar um caso particular, Bjerksund e Ekern (*op. cit.*) destacam que o exemplo sugere que maior foco na opção de investimento é melhor do que a adição de novas flexibilidades. Dias (2005, p.77) destaca que a opção de abandono se torna mais valiosa em opções de investimento quando os preços estão baixos.

Laughton (1998, apud Dias 2004) avaliando opções de exploração revela que embora o valor destas aumente tanto com a incerteza sobre o preço do petróleo quanto com a incerteza sobre o volume a ser descoberto, elas tem efeito diferentes sobre o investimento. A incerteza do preço tem efeito de adiar o exercício das

opções enquanto que a incerteza do volume tem efeito de incentivar o investimento em informação, isto é, o exercício de opções de aprendizagem (ver Seção 2.5).

Do ponto de vista desta dissertação, está-se mais interessado em OR estratégicas. Qualquer que seja o tipo de opção considerada, o processo estocástico escolhido para modelar o valor do ativo subjacente é o MGB. Os argumentos que justificam esta adoção são revistos a seguir.

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*

Sob a hipótese do MAD, o ativo subjacente de um projeto de E&P é o preço de uma reserva de petróleo desenvolvida, que por sua vez é muito dependente do preço do petróleo. Sobre este tema, há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média.

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo a convergência para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado.

Independente de qual seja a resposta final a essa questão, o MGB encontra na literatura diversos argumentos teóricos e empíricos que justificam sua adoção, tanto para modelar o preço do ativo subjacente quanto para modelar o preço do petróleo. Estes argumentos foram apresentados ao longo do Capítulo 3 e são reapresentados em conjunto a seguir.

O efeito do uso do MRM sobre a decisão de investimento é duplo. Como modelo estacionário, a convergência da variância com o tempo limita o valor da flexibilidade de esperar (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com os movimentos Brownianos**.** Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM faz com que preços mais altos sejam atingidos menos vezes (Efeito Preços), o que reduz o nível de investimentos. Além disso, a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o

exercício da opção de investir (ver Dixit e Pindyck, 1994, p.161-167). O efeito resultante do MRM é, portanto, menos óbvio do que o do MGB**.**

Metcalf e Hassett (1995, ver Seção 3.1.2) testam numericamente se o nível de investimento agregado obtido com o MGB se altera com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$, enquanto que o MGB é dado por: $dx = \sigma.x.dz$. Ou seja, em seu estudo os autores consideram o MRM e o MGB com mesma tendência α nula (ver equação (22)). De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM os preços gerados pelo primeiro tendem a dominar o MRM com o passar do tempo.

Os autores mostram que os Efeitos Variância e Preços tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza.

Dixit e Pindick (1994, p.77-78, ver Seção 3.1.2) realizam a análise de séries históricas longas de preços de petróleo. Concluem pela reversão à média ao considerar séries de preços com 120 anos, mas não conseguem rejeitar a hipótese de *random walk* ao considerarem séries de 30 ou 40 anos. Estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos.

Samuelson (1965, ver Seção 3.3.2) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado, na medida em que os investidores têm informação completa sobre estes fluxos de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas

como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos. Samuelson prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório (Copeland e Antikarov, 2001, p.222). Então riscos (de timing, políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente.

Dias (2005, p61-70) discute o impacto da utilização do MGB em OR no lugar de MRM para o processo estocástico do preço do petróleo. Inicialmente repete o teste de Dixit e Pindick (1994, *op. cit.*) para os preços real e nominal do petróleo no período 1970-2004, e também não consegue rejeitar o MGB. Em seguida discute dois artigos importantes sobre o assunto (Pindikc, 1999 e Schwartz, 1997) e conclui que o MGB é uma boa aproximação em muitos casos, mas pode ser inadequado quando o preço à vista estiver longe do nível de equilíbrio de longo prazo. Por fim faz duas recomendações: Em OR em que se precisa considerar tanto o curto quanto o longo prazo, modelos mais realistas são mais adequados, mas para análises de longo prazo ou em estudos onde apenas um mapeamento razoável do preço do petróleo é necessário, o MGB pode ser adotado.

A análise do conjunto de argumentos expostos permite concluir que o MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente, a depender dos parâmetros considerados. O efeito da estabilização da variância no MRM incentivando o investimento pode ser compensado pelo efeito da maior volatilidade do MGB. Por fim, resta o teorema de Samuelson (1965) que estimula a adoção do MGB quando o ativo subjacente possui fontes múltiplas de incerteza.

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P

Existem diversos modelos na literatura para apreçamento de OR em projetos de exploração e produção de petróleo. Esses modelos dependem do valor presente da reserva desenvolvida V, que sob a hipótese do MAD é o ativo subjacente. Uma função que calcule V pode então ser utilizada e explicitar as variáveis das incertezas econômicas e técnicas.

Dias (2005, p. 73-75) destaca três alternativas para o cálculo de V com complexidade crescente: Usar uma função simples que considere as variáveis chaves; Utilizar SMC para as variáveis de risco em planilhas de fluxo de caixa e; Combinar planilhas com outros sistemas como simuladores de reservatório que tratam a incerteza técnica mais adequadamente.

Os modelos para apreçamento de OR em projetos de E&P têm sido desenvolvidos para resolver problemas específicos destes projetos, em geral com gradual complexidade. Dias (2004, p.99-102 e 2005, p.83-132), apresenta um resumo da literatura de OR em petróleo. A seguir são apresentados três modelos simples que envolvem decisões de investimento e abandono de ativos reais.

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão

O Modelo de Negócios (*Business Model,* ver Dias, 2004, p.96-98) é uma aproximação para o valor de uma reserva desenvolvida de petróleo sob regimes de contratos de concessão. Trata-se de uma aproximação útil e adequada para o apreçamento de opções de investimento simples, especialmente se o VPL do projeto é previamente conhecido.

O valor do exercício ou *payoff* de uma opção real de investimento simples sobre o desenvolvimento de uma acumulação de petróleo é dado pela diferença entre o valor presente da reserva desenvolvida V e o investimento de desenvolvimento I :

$$VPL = V - I \quad (63)$$

O investimento I é o valor atualizado do fluxo de investimentos líquidos de benefícios fiscais como depreciação. O valor atualizado da reserva desenvolvida V para contratos de concessão de E&P pode ser aproximado por uma função linear do preço do petróleo P (isso é facilmente verificável com uma análise de sensibilidade).

Uma aproximação muito razoável e simples é considerar que V é proporcional ao volume recuperável de hidrocarbonetos (B) existente na acumulação, à qualidade econômica da reserva (q) e ao preço de petróleo:

$$V = q.B.P \quad (64)$$

A qualidade econômica da reserva q depende de uma série de parâmetros geológicos que afetam a produtividade da rocha reservatório, das propriedades físicas do petróleo a ser produzido, da carga de impostos, custos operacionais e da taxa de desconto apropriada para a atualização monetária. A aproximação definida na equação (64) é denominada por Dias (2004) de Modelo de Negócios (*Business Model*). Essa designação é uma alusão ao fato de que a relação $q.P$ corresponder ao valor do barril de petróleo (na cabeça do poço) negociado no mercado de reservas desenvolvidas nos Estados Unidos, onde assume um valor médio de 1/3 (ou seja, $q = 1/3$, também conhecida como regra do 1/3 - Gruy et al, 1982, apud Dias, 2004).

Um segundo e simples modelo também apresentado por Dias (op. cit.), denominado de Fluxo de Caixa Rígido (*Rigid Cash Flow Model*) considera uma parte do custo operacional atualizado como fixo:

$$V = q'.B.P - C$$

Em ambos os modelos, os valores de q' e q'' são obtidos a partir dos VPL calculados em planilhas eletrônicas. A diferença básica entre eles é sintetizada pela inclinação da reta do VPL em função do preço do petróleo (Figura 11):

O Modelo de Negócios é menos sensível ao preço do petróleo e implica que há uma correlação perfeita entre este último e os custos operacionais. Na prática é um modelo que gera valores conservadores para OR, o que poderia levar ao exercício prematuro de opções. Tem sido utilizado em algumas circunstâncias por diversos autores, embora não seja exatamente um consenso na literatura. Mas é inegável que sua simplicidade gera algumas vantagens: Pode ser utilizado como uma primeira aproximação para o valor da OR; Pode ser facilmente empregado em escala para problemas simples com OR e; Pode ser útil no sentido de difundir o uso de OR dentro de uma empresa. Naturalmente que, não é um modelo adequado para

a tomada de decisão em investimentos relevantes ou para problemas mais complexos que envolvam mais de uma variável estocástica, incertezas técnicas e estratégicas ou diversas OR interagindo.

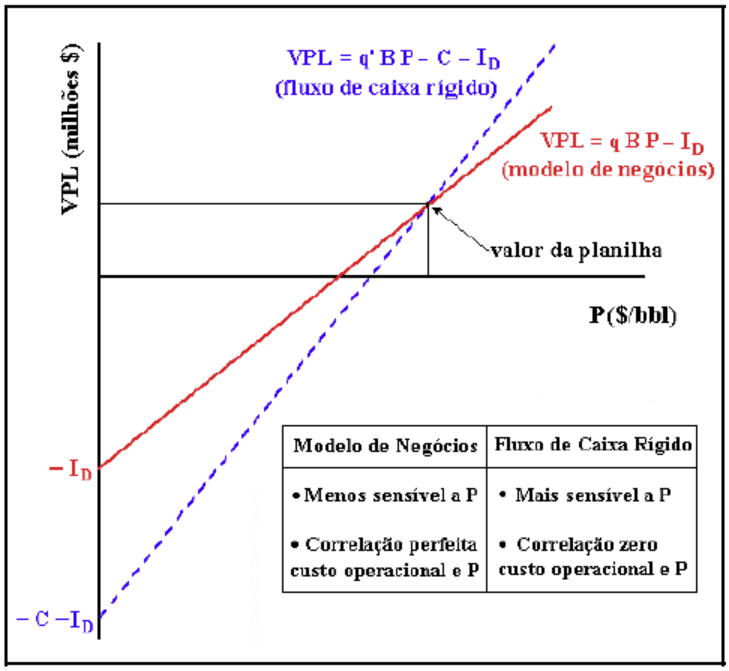

Figura 11 – Comparação entre os Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Fonte: Dias, 2005, p.79).

Se o preço do petróleo segue um MGB (19), então $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Considerando o Modelo de Negócios (64), o processo estocástico do valor presente da reserva desenvolvida V pode ser calculado com o Lema de Ito (35):

$$V = q.B.P \quad \therefore \quad dV = [\alpha.P.\frac{\partial V}{\partial P} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}.P.\sigma^2].dt + \frac{\partial V}{\partial P}.\sigma.P.dz.$$ Então:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = q.B; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow dV = \alpha.q.B.P.dt + \sigma.q.B.P.dz \Leftrightarrow$$

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \quad (66)$$

Então a EDP de B&S&M para uma opção F qualquer sobre o valor da reserva desenvolvida que segue um MGB será a equação (40) - ver Seção 3.4.1 – com $V = q.B.P$, então:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida $V = q.B.P$ que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção é de desenvolvimento de um campo de petróleo é perpétua, vale então a solução analítica da Seção 3.4.2. Se ao contrário tem expiração finita, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Por fim, em se tratando de opções de venda, as soluções permanecem válidas sendo suficiente inverter as variáveis V com I e r com δ (Seção 3.6).

O Modelo de Negócios também pode ser facilmente adaptado para opções compostas de exploração (Seção 4.3.3). Uma alternativa mais elaborada a este primeiro modelo é o clássico trabalho de Paddock, Siegel e Smith (1998), apresentado a seguir.

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S)

O modelo de Paddock, Siegel e Smith - PS&S (1988)[37] é uma aproximação um pouco mais elaborada (em relação ao modelo anterior) para opções de desenvolvimento de reservas de petróleo, porém sem perder simplicidade e a semelhança com a EDP (40) de Black & Sholes & Merton. Basicamente trata algumas variáveis por unidade de volume e considera o efeito da exaustão de uma reserva.

PS&S argumentam que para uma opção de E&P não é suficiente conhecer o processo estocástico do valor de uma reserva desenvolvida, é preciso também conhecer o equilíbrio de mercado deste ativo. Para isso caracterizam o comportamento dos preços de reservas desenvolvidas e demonstram como integrar este modelo com técnicas de apreçamento de opções, valorando a opção de desenvolvimento e depois a de exploração.

[37] Ver também Dixit e Pindick, 1994, p.396-403 e Dias, 1996, p.211-222.

Em equilíbrio, o retorno esperado de uma reserva desenvolvida (dividendos e ganho de capital) deve compensar o custo de oportunidade de investir em tal reserva. Seja B_t o volume de petróleo, V_t o valor de uma unidade de volume de reserva desenvolvida (US$/bbl) e R_t o *payoff* instantâneo por unidade de tempo, então os autores assumem que:

$$\frac{R_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \quad (67)$$

Onde μ_v é a taxa ajustada ao risco requerida por um mercado de capitais em equilíbrio sobre uma *security* que replique perfeitamente a reserva desenvolvida. O *payoff* R_t é dado pela soma dos lucros da produção de petróleo $\pi_t.(-dB_t)$ com o ganho de capital da reserva ainda não produzida $d(B_t.V_t)$. O sinal negativo deve-se à variação de reserva ser negativa com a produção, mas o lucro não.

$$R_t.dt = \pi_t.(-dB_t) + d(B_t.V_t) \quad (68)$$

Onde π_t é a taxa de lucro por unidade de volume. A reserva não produzida de um campo de petróleo em produção pode ser bem representada por uma função exponencial decrescente com o tempo de produção, então:

$$B_t = B_{t-1}.\exp(-\gamma.\Delta t) \Rightarrow \ln B_t = \ln B_{t-1} - \gamma.\Delta t \Rightarrow \Delta \ln B_t = -\gamma.\Delta t$$

Na forma diferencial, quando $\Delta t \to 0$:

$$d\ln B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t / B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t = -\gamma.B_t.dt \quad (69)$$

Onde γ é a taxa de caimento da reserva B_t de petróleo por unidade de tempo (não estocástico). Substituindo (69) em (68) e considerando que $d(B_t.V_t) = B_t.dV_t + V_t.dB_t$:

$$R_t.dt = \gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt \quad (70)$$

Substituindo o resultado (70) em (67), obtém-se:

$$\frac{\gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$\frac{dV_t}{V_t} + \frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} - \gamma.dt = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow \frac{dV_t}{V_t} = -\frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} + \gamma.dt + \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = (-\gamma.\pi_t + \gamma.V_t + \mu_v.V_t).dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = [\mu_v - \gamma.(\pi_t / V_t - 1)].V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$dV_t = (\mu_v - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz$ (71) e $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$ (72)

Onde δ_t é a taxa de *payout* ou dividendos da produção de uma unidade de reserva de petróleo desenvolvida, cujo valor segue o MGB da equação (71), supondo μ_v, δ_t *e* σ_v constantes. A tendência deste MGB é a taxa de ganho de capital da reserva desenvolvida: $\alpha_v = \mu_v - \delta_t$. Em equilíbrio, nenhum agente manterá uma reserva desenvolvida sem produção, pois neste caso a taxa de retorno será a taxa de ganho de capital ($\mu_v - \delta_t$), que é menor do que a taxa requerida pelo mercado sobre o ativo (μ_v).

Considerando a equação (71), o valor da opção de desenvolvimento de uma unidade de reserva e a regra ótima de decisão podem ser determinados. Para isso monta-se um *portfolio* sem risco, composto pela opção de desenvolvimento F e n partes do ativo gêmeo (reserva desenvolvida V). Como o valor da reserva segue um MGB, seguindo-se os mesmos passos da Seção 3.4.1, chega-se à EDP (40) de B&S&M:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente a equação é genérica e serve para qualquer opção sobre o ativo básico (uma unidade de reserva desenvolvida). As condições de contorno é que definirão o tipo de OR:

$F(V=0) = 0$ (42) $\qquad F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I$ (44)

$F_v(V^*(t),t) = 1$ (45) $\qquad$ Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

As três primeiras condições de contorno são para opções de compra americanas perpétuas (adicionalmente em (40) F_t=0). As quatro condições em conjunto definem são para opções de compra americanas com expiração finita. A

condição (42) é um limite econômico que funciona como uma barreira absorvente para o MGB de V - equação (71), ver Seção 3.1.6. A condição (44) define o *payoff* do exercício da opção no valor crítico V^* enquanto que (45) é a condição de otimização de contato suave (*smooth paste condition* – ver Seção 3.4.2). Por fim, a condição (50) indica que, na expiração do direito de desenvolvimento, vale a regra do VPL. As soluções obtidas nas Seções 3.4.2 e 3.5.1 também continuam válidas, com algumas diferenças.

O valor da opção e o valor crítico serão obtidos em unidades monetárias por unidade de reserva desenvolvida. O investimento também deve ser considerado por unidade de volume. A taxa de dividendos δ_t tem uma expressão particular dada pela equação (72) ($\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$). Note que δ_t varia com o tempo (depende da taxa de lucro π_t e do valor de uma unidade de reserva desenvolvida V_t) enquanto que na EDP (40) é constante. Será necessário então estimar uma taxa de dividendos média e assumi-la constante.

O modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para um projeto não implantado. Isso significa que o processo neutro ao risco da reserva não desenvolvida poderá ter uma tendência neutra ao risco ($\alpha_v^{'} = r_f - \delta$) negativa. Em princípio, esse resultado é plausível, pois o custo de oportunidade δ de se adiar a produção pode realmente ser maior que a taxa livre de risco. Mas uma tendência muito negativa pode não ser conveniente, pois pode significar também que o processo estocástico real tem uma tendência real negativa: $\alpha_v < 0$ (ver Seção 5.1).

Se isso ocorrer, significa que o preço da reserva desenvolvida cai com o tempo. Isso só é plausível para uma opção de desenvolvimento se há uma expectativa de redução contínua no preço futuro do petróleo ou se os custos de produção estiverem aumentando continuamente. De uma outra forma, é questionável depreciar a opção de desenvolvimento pela perda de volume que ocorreria se ela estivesse em produção, por que simplesmente o volume da reserva ainda é constante.

PS&S (*op. cit.*) também discutem a opção de exploração. Os autores assumem que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, evitando complicações como o momento ótimo para exercer a opção de desenvolvimento, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única. Isso seria equivalente a fazer os investimentos de exploração e de desenvolvimento esperados ($\bar{I}_E$ e $\bar{I}_D$) em conjunto e receber o valor presente da reserva desenvolvida $\bar{B}$ esperada:

$$VPL_{Exp} = \bar{B}.V - (\bar{I}_E + \bar{I}_D) \quad (73) \text{ com: } \quad \bar{B} = \int B.df(B) \quad \text{e} \quad \bar{I}_D = \int B.I_D.df(B)$$

Onde VPL_{Exp} [38] é o VPL esperado de uma oportunidade exploratória sem risco geológico, V é o valor de uma unidade de reserva desenvolvida e $f(B)$ é a distribuição de probabilidade do volume aleatório de petróleo B a ser descoberto[39].

Considerando que o volume esperado $\bar{B}$ é constante e que a opção de exploração é homogênea de grau 1, então o seu valor pode ser representado como:

$$\bar{B}.E(V, T-t, S) \quad \text{com} \quad S = (\bar{I}_E + \bar{I}_D)/\bar{B} = E + D$$

Sendo que $E(V, T-t, S)$ é o valor corrente para uma opção de exploração sobre uma unidade de reserva desenvolvida com investimento unitário combinado de exploração e desenvolvimento S. A opção de exploração pode então ser resolvida como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento de PS&S.

Se a curva do valor crítico de uma opção de investimento em função do tempo para a expiração $T-t$ for normalizada, ou seja, definida pela relação entre o valor do projeto implantado e o investimento necessário (δ, σ e r_f são constantes), então ela será única (Merton, 1973, apud PS&S, *op. cit.*, p.489). Assim, toda vez que

---

[38] O VPL_{Exp} é uma aproximação grosseira do VME, Valor Monetário Esperado, um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração, estando para os projetos de exploração como está o VPL para projetos de desenvolvimento. A regra de decisão é investir se VME>0.

[39] PS&S não usam o termo VPL_{Exp}, apenas dizem que exercer a opção de exploração pode ser vista como o lado direito da equação (73), esclarecendo na página 491 que seu modelo é válido somente na ausência de incerteza geológica.

a opção exploração estiver *deep in the money* ($V/S \geq V^*/S$), também estará a opção de desenvolvimento pois $V/D > V/S$ (onde $D = \overline{I}_D / \overline{B}$).

A técnica de PS&S para opções exploratórias fornece um valor elevado para a opção, mas qualitativamente inferior. Isso se deve tanto por desconsiderar a incerteza geológica sobre a existência de petróleo, como por suprimir flexibilidades ao colapsar as opções de exploração com a de desenvolvimento. Este assunto será retomado na Seção 5.2, quando se compara os modelos de opção de exploração simples e composta.

Por fim é preciso notar que o Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios podem ser adotados em conjunto. Enquanto o primeiro se preocupa e capturar o efeito da depleção natural de um campo de petróleo através da taxa de dividendos do ativo subjacente, o segundo propõe que o valor de uma reserva seja função linear do preço do petróleo, e por isso segue um MGB derivado a partir deste.

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração

Na Seção 4.1, discutiu-se que a OR de exploração é uma opção americana composta, pois se trata de uma opção de investimento sobre uma opção de desenvolvimento de um campo de petróleo (*call on call*). Até a primeira data de exercício T_1, se o detentor da opção de exploração realizar o investimento exploratório I_E e confirmar a existência do campo de petróleo, ele adquire a opção de desenvolvimento com expiração T_2 ($T_2 \geq T_1$ - medidos em relação à mesma data) e preço de exercício igual ao investimento de desenvolvimento I_D.

Porém, um decisor racional que maximiza o lucro da firma só exercerá a primeira opção da exploração antes da expiração se, além desta estar *deep in the money*, a opção de desenvolvimento também estiver. Dias (2006) argumenta que se a opção de desenvolvimento não estiver *deep in the money,* ao exercer a primeira opção, o decisor obtém na melhor das hipóteses a opção de desenvolvimento, que não será exercida até estar madura. Neste caso, o decisor obtém um melhor retorno ao postergar o primeiro investimento exploratório I_E por um intervalo dt e aplicar o capital exploratório à taxa livre de risco r_f antes que a segunda opção fique

madura. Desta forma, aufere o retorno $I_E.r_f.dt$ sem perder qualquer benefício (dividendo) da opção de desenvolvimento por manter viva a primeira opção. De outra forma, o decisor pode arbitrar postergando o exercício da primeira opção e aplicando o capital exploratório à taxa livre de risco até que ambas as opções estejam maduras. Esta característica também é valida para uma *call on call* financeira americana.

Mas há uma diferença fundamental da OR composta de exploração em relação a uma *call on call* financeira: O fato de se exercer a primeira opção não garante a aquisição da segunda, pois há o risco de não se descobrir o campo de petróleo, ou como se diz com o jargão de E&P, o poço pode ser "seco" (*dry hole*). Na opção composta financeira este risco não existe, ou seja, ao exercer a primeira opção o investidor necessariamente adquire a segunda. A forma tradicional com que a indústria de E&P lida com este risco na tomada de decisão é considerar o valor do campo de petróleo desenvolvido e os investimentos necessários ponderados pelas probabilidades de sucesso e fracasso exploratório.

Dixit e Pindick (1994, p.319-328) discutem o problema de investimentos seqüenciais contínuos ou discretos, que podem ser interrompidos ou suspensos, temporariamente ou definitivamente, como equivalente ao problema de opções compostas. Para o investimento em fases discretas, dado o processo estocástico do preço, os autores derivam o valor do projeto, da opção e do preço crítico para a última fase como uma opção simples. Em seguida demonstram que o valor da opção da fase anterior e o novo preço crítico apresentam equação diferencial e condições de contorno similares à última fase, mas com a diferença de que o *payoff* da fase mais nova depende do valor da opção na fase subseqüente. Esta técnica deve ser repetida sequencialmente até a primeira fase (*backward*), obtendo-se o valor da opção composta.

Os autores então argumentam que o preço de exercício é decrescente da primeira para a última fase, em decorrência da redução progressiva do investimento a ser afundado. Com isso, se o primeiro estágio estiver *deep in the money*, o segundo estágio também estará. Entretanto não mencionam que esta regra é inequívoca se, e somente se, os investimentos seqüenciais tiverem a mesma expiração ou forem perpétuas. No exemplo apresentado no livro, todas as opções de

investimento são consideradas perpétuas e apresentam solução analítica. Mas este não é o caso de uma opção exploratória, onde as fases podem ter expiração diferenciada e as opções não tem solução analítica.

Então, percebe-se que o problema de uma opção composta de exploração, por sua natureza, deve e pode ser tratado de uma forma diferenciada em relação ao seu par financeiro. A solução que se apresenta adiante preserva a natureza do problema de decisão da exploração como uma opção composta, ao contrário do Modelo de PS&S.

O Modelo de PS&S (Seção 5.3.2) para opções exploratórias assume que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única com a mesma expiração. Também considera o volume esperado $\overline{B}$ constante (sem incerteza) e ignora o risco geológico (probabilidade de sucesso)[40], resolvendo a opção de exploração como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento. Por esses motivos, essa técnica fornece um valor qualitativamente inferior para a opção de exploração, como será visto na Seção 5.2. Assim, um modelo que resgate algumas das simplificações acima sem perder praticidade é propício. Uma alternativa é apresentada a seguir, sendo denominado de Modelo de Exploração (MDE).

As principais diferenças do MDE serão reconsiderar o problema de exploração como opção composta de duas fases (exploração e desenvolvimento), observar os diferentes períodos de expiração e ponderar o risco geológico. Entretanto, a incerteza técnica sobre o volume descoberto será desconsiderada, de forma que o volume a descobrir esperado será considerado constante. Por simplicidade, o investimento de delimitação é considerado como parte do desenvolvimento.

[40] O risco e a incerteza geológica representam, respectivamente, a possibilidade de existir ou não petróleo em um prospecto exploratório e, em caso afirmativo, a quantidade de petróleo existente. O risco geológico é estimado através da probabilidade de sucesso geológico. A incerteza sobre o volume pode ser obtida por SMC a partir das distribuições dos parâmetros que definem o volume da acumulação (volume de rocha da trapa, porosidade, preenchimento, saturação de óleo, fator de recuperação, etc.). O produto destes fatores gera a distribuição do volume recuperável, cuja média é o volume esperado a descobrir.

O MDE é elaborado considerando o conceito do Valor Monetário Esperado (VME), um indicador que considera o risco geológico de um projeto exploratório – ver Figura 12.

O Valor Monetário Esperado (VME) é um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração de petróleo, cuja regra de decisão é investir se VME>0. Desempenha um papel equivalente ao do VPL para projetos de desenvolvimento. O VME é um valor esperado por ponderar o valor econômico de um projeto exploratório pelo risco geológico, considerando os cenários de sucesso e de fracasso:

$$VME = Ps.(V - I_E - I_D) - (1 - Ps).I_E = Ps.V - Ps.I_D - I_E \Rightarrow .$$

$$VME = Ps.V - (I_E + Ps.I_D) \quad \text{ou} \quad VME = Ps.(V - I_D) - I_E \quad (74)$$

Onde Ps é a probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*), $1 - Ps$ a probabilidade de fracasso, V o valor presente da "reserva"[41] desenvolvida, I_E o investimento atualizado em exploração do primeiro estágio e I_D o investimento atualizado do desenvolvimento no segundo estágio. Os investimentos e a probabilidade de sucesso são considerados constantes. Seja então:

$$V_E = Ps.(V - I_D) \quad (75) \qquad \Rightarrow VME = V_E - I_E \quad (76)$$

Onde V_E é definido como o valor esperado atualizado do projeto exploratório perfurado ("explorado"). Note a semelhança da equação (76) com a equação (63): $VPL = V - I$. Assim o problema da decisão com o VME é similar ao problema da decisão com o VPL, mas com a vantagem de preservar e ponderar a decisão pelo risco geológico, indissociável do investimento em exploração.

[41] A rigor, para prospectos exploratórios, o termo V é o valor presente do volume a descobrir desenvolvido, já que o termo reserva é tecnicamente inadequado neste caso.

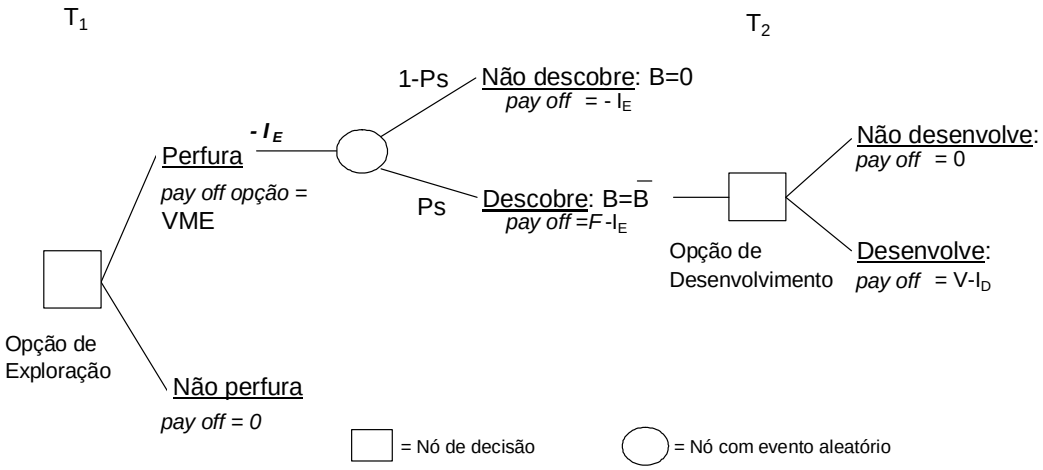

Figura 12 – Árvore de decisão de uma opção de exploração com duas etapas: exploração e desenvolvimento.

Suponha que o processo estocástico do valor da reserva desenvolvida seja um MGB:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (77)$$

No Modelo de Negócios essa relação – Equação (66) - depende do MGB do preço do petróleo ($dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$) e é obtida aplicando-se o Lema de Ito à equação (64): $V = q.B.P$. Em favor de uma maior generalidade, no MDE apenas admite-se que o preço da reserva desenvolvida siga um MGB[42]. Considerando que $V_E = Ps.(V - I_D)$ (75), o valor esperado atualizado do prospecto exploratório perfurado e desenvolvido será dado pelo Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \Rightarrow$$

$$dV_E = [\alpha.V.\frac{\partial V_E}{\partial V} + \frac{\partial V_E}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2}.V.\sigma^2].dt + \frac{\partial V_E}{\partial V}.\sigma.V.dz$$. Então, de (75):

$$\frac{\partial V_E}{\partial V} = Ps \;;\; \frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V_E}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \; dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \qquad (78)$$

[42] Esta premissa é fortalecida pelo teorema de Samuelson (1965) apresentado na Seção 4.3.2. Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório.

Ou, de forma equivalente:

$$\Rightarrow\ dV_E = Ps.(\alpha.V.dt + \sigma.V.dz) \Rightarrow .\ dV_E = Ps.dV \quad (79).$$

A equação (79) revela que o processo estocástico de V_E também é um MGB, múltiplo do MGB da "reserva" desenvolvida. Então, no problema da opção composta de exploração, as duas opções dependem de um mesmo processo estocástico dV [43].

A estratégia de valoração da opção composta de investimento de Dixit e Pindick (*op. cit.*) pode agora ser aplicada, pois as duas opções dependem do mesmo processo estocástico da "reserva" desenvolvida. A solução inicia pelo segundo estágio, ou seja, a opção simples de desenvolvimento. A EDP é exatamente a mesma obtida na Seção 3.4.1, a exemplo do que ocorreu para a opção de desenvolvimento no Modelo de Negócios (Seção 4.3.1), mas com a ressalva que o MGB é dado pela equação (77) e não necessariamente o do preço do petróleo, conforme já discutido. As condições de contorno são as mesmas apresentadas em detalhe nas Seções 3.4.2 e 3.4.3 para uma opção de investimento simples e revisitadas na Seção 4.3.2 com o Modelo de PS&S.

Como visto (Seção 3.4.1), a EDP é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida V que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção de desenvolvimento do campo de petróleo tem expiração T_2, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Com isso o valor da opção de desenvolvimento (F) e o seu valor crítico (V^*) podem ser calculados.

O passo seguinte é montar a EDP de B&S&M (40) do primeiro estágio da opção de investimento sobre o MGB da equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$. Adequando as variáveis para a opção de exploração (E), tem-se:

---

[43] No modelo de Negócios, em última instância, as duas opções dependem do processo estocástico do preço do petróleo: $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Combinando as equações (64) $V = q.\overline{B}.P$ ($B = \overline{B}$) com a equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.(\alpha.P.dt + \sigma.P.dz) \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.dP$.

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 E}{\partial V_E^2}.\sigma^2.{V_E}^2.dt + (r_f - \delta).\frac{\partial E}{\partial V_E}.V_E - r_f.E = -\frac{\partial E}{\partial t} \quad (80)$$

Como visto, a equação é genérica e vale para qualquer derivativo $E(V_E,t)$ que não pague dividendos, escrito sobre V_E, que segue o MGB $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. As condições de contorno são as similares às vistas nas Seções 3.4.2 e 3.4.3, mas com algumas diferenças.

A primeira condição de contorno decorre do fato de $V = 0$ continuar sendo uma barreira absorvente:

$$E(V = 0) = 0$$

A segunda condição afirma que na curva de gatilho do primeiro estágio (V^{**}), a opção de investir vale o VME do projeto ($VME = Ps.(V - I_D) - I_E$ - (74)), onde o valor da "reserva" não desenvolvida $(V - I_D)$ é dada pela opção de desenvolvimento (*value matching condition*):

$$E(V^{**}) = Ps.F(V^{**}) - I_E$$

A terceira condição denominada de contato alto ou suave (*smooth pasting condition*) define que no valor de gatilho o valor das duas opções devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^{**}.

$$E_v(V^{**}) = Ps.F_v(V^{**})$$

A quarta condição afirma que na expiração do primeiro estágio, vale a regra do VME tradicional, com o valor da reserva desenvolvida dado pela opção de desenvolver. Para $t = T_1$:

$$E(V) = Máx[Ps.F(V) - I_E;0]$$

A EDP (80) e condições de contorno do MDE tratam a opção de exploração como composta e preservam o risco geológico na decisão de investimento, mas não

possui solução analítica. Para contornar este problema sugere-se uma aproximação simples, ao se considerar sempre que $F = V - I_D$.

Essa aproximação só não é a solução verdadeira quando $V < V^*$, ou seja, o segundo estágio não está *deep in the money* e portanto, o primeiro não deve ser exercido imediatamente. Essa regra de decisão é inequívoca e para uma opção de exploração, é mais importante do que o valor calculado desta ser exato ou não. Por isso utilizar $F = V - I_D$ como uma aproximação inferior do valor verdadeiro da opção (pois: $V < V^* \Rightarrow F > V - I_D$). A taxa de dividendos (δ) e a volatilidade (σ) para apreçar $E(V)$ serão as mesmas do ativo subjacente.

Com esta simplificação, os dois estágios da opção de exploração passam a depender de vários parâmetros comuns ($r_f, \delta, \sigma \; e \; dV$), diferenciando-se quanto ao ativo subjacente e preço de exercício: $V_E \; x \, V$ e $(I_E + Ps.I_D) \; x \, I_D$. Quanto à expiração, os dois estágios podem ter prazos iguais ou diferentes[44]: $T_1 = T_2$ ou $T_1 < T_2$.

Se os dois estágios da opção tiverem mesma expiração ($T_1 = T_2$) e a probabilidade de sucesso for um, a curva do valor crítico normalizado (V^* / I) será única, já que todos demais parâmetros para sua definição ($r_f, \delta, e \; \sigma$) são iguais (Merton, 1973, apud PS&S, 1998, p.489). Então, como a opção de desenvolvimento apresenta maior relação V / I do que o primeiro estágio da opção de exploração, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a opção de desenvolvimento será a primeira a tornar-se *deep in the money,* independente do valor da probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*):

---

[44] Embora para uma opção de compra composta financeira T1<T2 seja uma premissa óbvia, este não é o caso de uma opção de exploração. Um contrato de exploração cede o direito explorar uma área para uma firma por um período limitado, ao final do qual a firma pode declarar a comercialidade de eventuais descobertas. Desta forma pode-se considerar que na opção de exploração T1=T2. Em outras situações, o contrato de exploração é dividido em etapas, ao final das quais, a empresa é obrigada a devolver uma parte da área. Isso cria incentivos para sejam perfurados poços que auxiliem na definição da área que se deseja reter, fazendo com que a opção de perfuração do pioneiro (exploração propriamente dita) apresente expiração menor do que a da opção de desenvolvimento: T1<T2. Em outras situações, o investimento em poços pioneiros é obrigatório, o que reduz o problema do primeiro estágio à regra do VME e preserva a opção de desenvolvimento, caso haja uma descoberta.

$$\frac{V}{I_D} > \frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Então se $T_1 = T_2$ a condição ótima de exercício $V > V^{**} > V^{*}$ está garantida e a simplificação proposta $F = V - I_D$ é a solução verdadeira.

Se $T_1 < T_2$, cada uma das opções terá sua própria curva de gatilho (V^* / I) e a opção que apresentar maior relação V / I não será necessariamente a primeira a tornar-se *deep in the money*. O primeiro toque irá depender da relação entre os valores dos investimentos de exploração, desenvolvimento, da probabilidade de sucesso e da magnitude da relação $T_1 < T_2$.

Quatro combinações de resultados em relação às maturidades são possíveis para as opções do primeiro e segundo estágio da opção de exploração: *deep x deep; out x deep; deep x out* e; *out x out.* Novamente, se o segundo estágio estiver maduro (*deep x deep* e *out x deep*) a aproximação $F = V - I_D$ é o valor exato, e em caso contrário (*deep x out* e *out x out*), é um valor inferior ao verdadeiro F.

A regra de decisão será a seguinte:

- Se ocorrer o 1º caso (*deep x deep*), a opção deve ser exercida imediatamente;
- Se ocorrer um dos demais casos (*out x deep, out x out* ou *deep x out*) o decisor deve aguardar que os dois estágios estejam *deep* simultaneamente. Caso isso não ocorra*,* na data de expiração do primeiro estágio, o decisor dever então decidir sobre o exercício da opção com a regra do VME.

Então, a opção de composta E de exploração pode ser agora valorada com o instrumental de uma opção simples sobre uma opção de desenvolvimento F_D, preço de exercício $I_E + Ps.I_D$, gatilho $.V^{**}$ e expiração T_1. A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1 continua válida.

O exercício é necessariamente ótimo para a firma maximizadora do lucro se os dois estágios da opção de exploração estiverem *deep in the money* simultaneamente*.* Se os dois estágios têm a mesma data de expiração, essa condição ocorrerá necessariamente toda vez que a o primeiro estágio estiver

maduro. Caso o primeiro estágio da opção expire antes do segundo, o decisor deve verificar se as duas opções estão *deep in the money* para o exercício, em caso contrário deve aguardar. Por fim, nas expirações do primeiro e segundo estágios, o decisor decide com base na regra do VME e VPL respectivamente.

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P)

Este Capítulo tem como objetivo discutir os conceitos e modelos abordados ao longo da dissertação através de exemplos numéricos. Na Seção 5.1 são comparados e discutidos os resultados obtidos para uma opção de desenvolvimento com os Modelos de Negócio e Paddock, Siegel e Smith (PS&S). Na Seção 5.2 são comparados e discutidos os resultados obtidos com o Modelo de Exploração e com o Modelo de PS&S para um projeto exploratório. Na Seção 5.3 segue uma discussão sobre um problema de *portfolio*: Priorização de investimentos com OR.

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo

Nesta Seção aborda-se em detalhe o caso de um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo terrestre sob regime de concessão. Considere uma descoberta de acumulação de petróleo já delimitada denominada de ID-1, com 13,8 milhões de bbl de petróleo recuperáveis em 11 anos de produção. A oportunidade de investimento pode ser declarada comercial pela empresa a qualquer momento, em um prazo máximo de 1 ano. O órgão regulador então, avalia o projeto de desenvolvimento do campo e o cronograma proposto pela empresa. Caso seja aprovado, a empresa recebe a autorização para implantar o projeto e o direito de produzir na área por 20 anos. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O investimento atualizado necessário para o desenvolvimento da reserva (I_D) é de US$ 62,5 milhões (MM), e o valor presente da reserva desenvolvida (V) calculado em planilha eletrônica é US$ 69,2 MM. Com isso, o projeto ID-1 apresenta VPL de US$ 6,7 MM, o que de acordo com a regra clássica do VPL, é o suficiente para o investimento imediato. Mas a empresa ainda conta com a flexibilidade de adiar por até 1 ano a tomada de decisão, e observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida. De acordo com a teoria de OR, o decisor deve apenas investir imediatamente se o projeto estiver *deep in the money*, ou com um valor suficientemente alto (maior ou igual do que o gatilho) que torne desvantajosa a espera.

O valor a OR e do gatilho serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1, considerando inicialmente o Modelo de PS&S, e em seguida com o Modelo de Negócios. Para isso será necessário estimar os demais parâmetros necessários ao apreçamento da OR: σ, r_f e δ.

PS&S (1988, p.496-497) sugerem que a volatilidade (σ) do preço de uma reserva desenvolvida poderia ser estimada a partir de séries históricas, mas que infelizmente não são satisfatórias nem mesmo para os Estados Unidos, onde há um mercado mais desenvolvido. Apontam como solução utilizar o resultado de Gruy et al. (1982) que sugerem uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Com isso utilizam a volatilidade da taxa de variação do preço do petróleo como uma estimativa para a volatilidade da taxa de variação do preço de uma unidade de reserva desenvolvida. De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.400), a volatilidade do preço do petróleo entre os anos 60 e início dos 90 teria sido na ordem de 15%, mas estimativas da indústria podem ser maiores. Consideram que um range razoável seria entre 15% e 25%, por isso adota-se a média de 20% como caso base nesta dissertação. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%[45].

A taxa de dividendos do Modelo de PS&S é dada pela equação (72): $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$, tendo sido estimada de forma semelhante à descrita por Dixit e Pindick (1994, p.399). A taxa de declínio exponencial da reserva γ foi estimada ajustando-se uma curva exponencial à curva de produção do projeto ID-1. A reserva é recuperada de forma acelerada (são apenas 11 anos de produção) e com forte depleção, gerando uma taxa de declínio de 29% ao ano. O lucro π_t foi estimado a partir do fluxo de caixa, deduzidos custos operacionais (53%), *royalties* (13,4%) e impostos (18%, líquido de benefícios fiscais e depreciação). Todos estes percentuais são sobre a receita bruta:

$$\pi_t = (1 - Royalty - Opex).(1 - Tax) = (1 - 13{,}4\% - 53\%).(1 - 18\%) = 27{,}7\%$$

[45] A taxa livre de risco estimada foi a do país onde se encontra o projeto ID-1, pois a empresa detentora da OR também é sediada neste país, tomando e aplicando recursos no mercado interno.

O valor da reserva desenvolvida V_t considerada por PS&S (*op. cit.*) e Dixit e Pindick (*op. cit.*) foi a regra do 1/3 de Gruy et al (*op. cit.*). Considerando que o projeto ID-1 encontra-se em um mercado não desenvolvido como o americano e sujeito a um regime fiscal e regulatório diferente, é mais adequado estimar V_t a partir da equação (64): $V = q.B.P \Rightarrow q = V/(B.P) = 21{,}3\%$. Retornando à equação (72):

$$\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1) = 0{,}29.(0{,}277.P / 0{,}213.P - 1) \Rightarrow \delta_t = 10{,}4\%\ a.a.$$

O MGB neutro ao risco do preço de um barril de reserva desenvolvida do projeto ID-1 será então dado por:

$$dV_t = (r - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow dV_t = -0{,}044.V.dt + 0{,}2.V.dz$$

Este MGB apresenta uma tendência neutra ao risco bastante negativa, decorrente da elevada taxa de dividendos encontrada com o Modelo de PS&S. No mundo real, a tendência irá depender da relação entre a taxa ajustada ao risco μ exigida por um investidor que detivesse a oportunidade de desenvolvimento e a taxa de dividendos δ. De acordo com a equação (37):

$$\alpha - \pi = r_f - \delta \Rightarrow \alpha = r_f + \pi - \delta \Rightarrow \alpha = \mu - \delta$$

No caso do prospecto ID-1, se a taxa ajustada ao risco for de, por exemplo, 9%, significa que a tendência real é negativa: $\alpha = \mu - \delta = 9\% - 10{,}4\% \Rightarrow \alpha = -1{,}4\%$. Então, se $\mu < \delta$, o preço no mundo real de uma unidade de reserva desenvolvida tenderá a decrescer com o tempo. Mas isso só faz sentido se, de fato, a reserva estiver em depleção (com custos crescentes) ou se o preço do petróleo for decrescente, demais parâmetros constantes. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo de PS&S sobre o preço de petróleo ou sobre custos, não faz sentido que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a tendência de preço de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

Com este contra exemplo, argumenta-se que o Modelo de PS&S deve ser utilizado com cuidado para opções de desenvolvimento de campos de petróleo quando $\mu < \delta$.

Todos os parâmetros determinados, o valor da opção com expiração de 1 ano é de US$ 7,7 milhões, portanto, maior do que o VPL de 6,7 milhões. Isso significa

que, ao contrário da regra de decisão com o VPL, o projeto ID-1 não deve ser declarado comercial imediatamente. O prêmio da flexibilidade de diferir a decisão e observar como evolui o valor da reserva desenvolvida do projeto vale US$ 1 milhão. Se a expiração para a declaração de comercialidade fosse igual a 9 anos, o valor da opção de desenvolvimento sobe para US$ 9,7 MM e o prêmio da flexibilidade vale US$ 3 MM. Esse exercício dá a dimensão da sensibilidade do valor da OR de desenvolvimento ao tempo de expiração. A Figura 13 apresenta o valor da opção em função do valor presente da reserva desenvolvida do projeto com expiração de 1 ano, e a sensibilidade para a expiração de 9 anos.

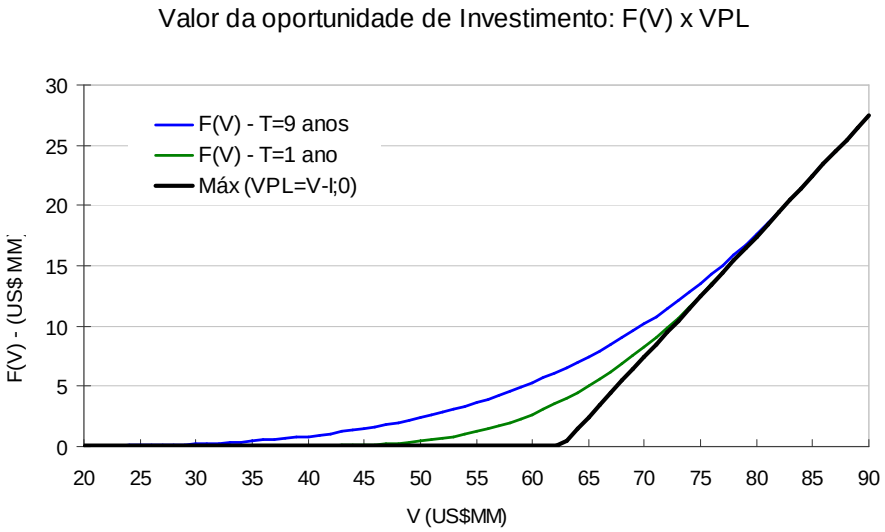

Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1 em função do valor presente da reserva desenvolvida.

Note que o valor da OR domina a regra de decisão do VPL até o ponto em que a curva da opção toca e se funde com a reta do VPL. Este ponto representa o valor crítico da reserva desenvolvida, situação em que o investimento deve ser imediato. Naturalmente que, se o decisor tivesse, por exemplo, 9 anos para decidir sobre o investimento, sua flexibilidade seria maior implicando num valor maior para a opção e seu valor crítico.

O valor crítico do projeto ID-1 é dado pelas equações (53) e (54), visto na Seção 3.5.1. Com o prazo de 1 ano para a expiração da opção de declaração da comercialidade, o valor crítico é de US$ 76,3 MM. Reduzindo progressivamente o prazo da expiração até que se torne zero, pode-se calcular como evolui o valor do

gatilho ao longo do tempo, todos os demais parâmetros constantes. A curva gerada é denominada de curva de gatilho (Figura 14). Observa-se que o valor crítico diminui progressivamente até a data de expiração, quando se torna igual ao valor preço de exercício (ou investimento, de US$ 62,5 MM).

Com esse conjunto de resultados, o decisor deve adiar a declaração de comercialidade do projeto ID-1 até que essa opção se torne *deep in the money* no prazo de 1 ano. Este exemplo deixa de forma clara a superioridade da valoração e decisão com OR.

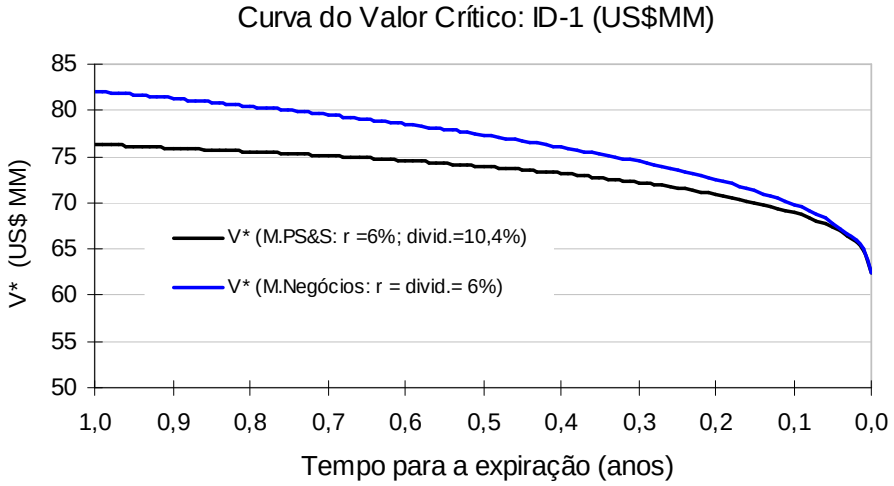

Figura 14 - Curva do valor crítico em função da expiração do Modelo de PS&S. Observa-se o efeito da redução da taxa de dividendos, obtida para o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (1993).

O exercício com o projeto ID-1 demonstrou a necessidade de uma quantidade significativa de informação e premissas na estimativa dos parâmetros para o cálculo da taxa de dividendos. Desta forma, outras alternativas mais simples para a estimativa de δ podem ser necessárias e/ou convenientes.

Dias (2004, p.101) destaca duas alternativas para estimar a taxa de dividendos. Como o preço de uma reserva desenvolvida é proporcional ao preço do óleo na boca do poço, a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.4.2):

$$Spot = Futuro(t).\exp(-(r_f - \delta).\Delta t)$$

Onde $Spot$ é o preço spot do óleo em t_0 e $Futuro(t)$ é o preço futuro do óleo para entrega na data t. A segunda alternativa é uma regra útil e prática para OR proposta por Pickles e Smith (1993). Estes autores concluem que, se ignorada a volatilidade de curto prazo, a taxa de conveniência δ em situações "normais" de mercado é equivalente à taxa livre de risco. Em situações de choques, esta taxa pode variar significativamente no curto prazo, mas tendem a um nível de equilíbrio no longo prazo, sendo portanto estável para projetos de longa duração como os de E&P. Assim os autores sugerem que, em OR, inicialmente se adote como valor "normal" da taxa de conveniência o valor da taxa livre de risco.

Adotar a sugestão de Pickles e Simith (*op. cit.*) desfigura o Modelo de PS&S. Adota-se então o Modelo de negócios onde o valor presente da reserva desenvolvida V é função linear do preço do petróleo e segue o MGB dado pela equação (66): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$, onde $V = q.B.P$ (64).

Reconsidere a opção de desenvolvimento do projeto ID-1, mas assumindo que a taxa livre de risco e a taxa de dividendo são iguais a 6%. O valor da opção de desenvolvimento com expiração de um ano sobe de US$ 7,7MM para US$ 8,9 MM, elevando o prêmio da flexibilidade de US$ 1 MM para US$ 2,2 MM. O valor do gatilho também aumenta, de US$ 76,3 para 82,0 MM, diminuindo a probabilidade de exercício de 75% para 70% e aumentando o tempo esperado de 5 para 7 meses.

Todos estes resultados são consistentes com a redução da taxa de dividendos, que aumenta o valor da opção, o prêmio da flexibilidade e o valor de gatilho, mas diminui a probabilidade do exercício. As Figuras 14 e 15 apresentam a comparação entre os resultados obtidos com PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (op.cit).

Os resultados obtidos são particulares da opção sobre o projeto ID-1, mas as relações descritas são gerais. Os dois critérios de avaliação da opção de desenvolvimento são válidos e consistentes, especialmente no que diz respeito à superioridade com OR sobre a técnica do VPL. A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. O Modelo de Negócios tem a vantagem de evitar o efeito indesejado da perda de valor do projeto não implantado quando a taxa de caimento da reserva é

muito elevada. No caso do projeto ID-1, gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto, o que é adequado dado a baixa relação entre o VPL e o investimento atualizado (10,7%). Entretanto, esse conservadorismo não altera o resultado da decisão no momento da expiração da opção, quando volta a valer a regra do VPL, mas exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

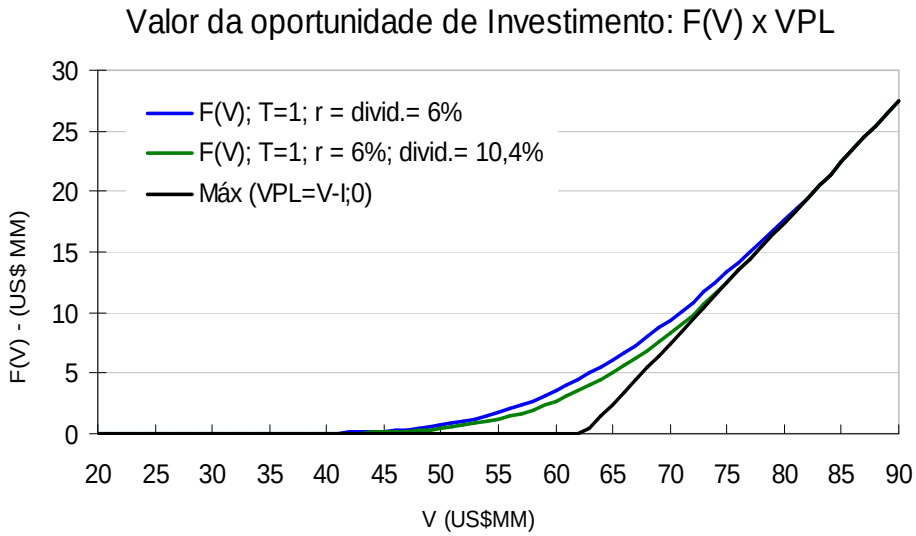

Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação do valor das opções do Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (*op. cit.*).

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S

Nesta Seção se aplica o Modelo de Exploração (MDE) elaborado na Seção 4.3.3 para o problema de decisão em um projeto de exploração. Os resultados são então comparados com a abordagem do Modelo de PS&S para exploração. Diferente do que foi feito na Seção anterior, as opções também são avaliadas na forma sugerida por Merton (1973, apud PS&S, 1988, p.489), ou seja, considerando o valor do ativo subjacente dividido pelo respectivo investimento.

Considere um prospecto exploratório terrestre denominado de IE-2 com um volume de petróleo a descobrir de 25 milhões de bbl recuperáveis. A oportunidade de investimento encontra-se sob um contrato de concessão dividido em dois períodos. Ao final do primeiro período que encerra em 1 ano, a empresa é obrigada a devolver 50% da área sob concessão e para isso, pretende perfurar o prospecto IE-2 para auxiliar a definição da área que irá reter. O segundo período de concessão

expira em 4 anos, ao final do qual, a empresa deve definir sobre o desenvolvimento de uma eventual descoberta e devolver ao órgão regulador o restante da área exploratória. Isso significa que a empresa tem duas decisões a tomar: Primeiro decidir no prazo de 1 ano se exercerá ou não a opção de perfuração do prospecto exploratório, e em seguida deve definir entre os anos 2 e 4 se irá exercer a opção de desenvolver, em caso de sucesso exploratório. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O poço exploratório (I_E) irá custar US$ 3,4 milhões (MM) e tem probabilidade de sucesso (Ps) de 20%. Em caso de um resultado positivo, o investimento de desenvolvimento (I_D) do novo campo é de US$ 82,3 MM, e o valor da reserva desenvolvida (V) é de US$ 126,4 MM. O indicador tradicional de decisão de investimento em um projeto de exploração é o VME, dado pela equação (74) $VME = Ps.(V - I_D) - I_E$, que apresenta valor de US$ 5,4 MM. Isso significa que, do ponto de vista tradicional, o prospecto exploratório pode ser perfurado imediatamente já que é positivo.

Do ponto de vista de OR, a decisão é uma opção composta de exploração. Como visto na Seção 4.3.3, o decisor apenas deve investir imediatamente se ambos os estágios da opção estiverem *deep in the money*. Nesta situação, caso ocorra a descoberta, o campo deve ser desenvolvido imediatamente, e em caso de fracasso exploratório, encerra-se o projeto. Caso um dos estágios não esteja *deep in the money* o decisor deve observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida e aguardar a condição necessária. Se até a expiração da primeira fase esta não ocorrer, a empresa deve decidir com a regra do VME. Em caso de descoberta, o decisor adquire a opção de desenvolvimento com nova expiração, que novamente só deve se deve ser exercida quando estiver *deep in the money*. Caso isto não ocorra até o final do novo período, na expiração volta a valer a regra do VPL.

O valor a OR e do valor crítico (gatilho) serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1. Os demais parâmetros necessários ao apreçamento das OR (σ, r_f e δ) são estimados de forma idêntica à Seção anterior (5.4.1). PS&S (1988, p.496-497) sugerem utilizar o resultado de Gruy

et al. (1982), os quais apontam uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Dixit e Pindick (1994, p.400) consideram o range de 15% a 25% como razoável para a volatilidade do preço do petróleo, por isso adota-se a média de 20%. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%. Dias (2004, p.101) destaca que a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.6.2). Pickles e Smith (1993) sugerem que em OR se use, inicialmente, a taxa livre de risco como o valor da *convenience yeld.* Segundo os autores, esta estimativa é razoável como equilíbrio de longo prazo.

A análise do prospecto IE-2 é realizada na forma *backward*, iniciando pela opção simples de desenvolvimento, que apresenta valor de US$ 44,1 MM e gatilho (V^*) de US$ 123,2 MM. Como o gatilho está abaixo do valor atual da reserva desenvolvida de US$ 126,4 MM, significa que a opção já se encontra *deep in the money*. Já a opção composta de exploração apresenta valor de US$ 5,5 MM com gatilho (V^{**}) de US$ 130,3 MM. Como o gatilho está acima do valor atual da reserva desenvolvida (US$ 126,4 MM), significa que não está madura. Neste cenário, a regra de decisão recomenda que a empresa não invista imediatamente, ao contrário, aguarde até que o primeiro estágio também esteja *deep in the money*.

A Figura 16 compara o valor das opções de desenvolvimento e de exploração em relação à regra de decisão dos seus pares VPL e VME. A diferença entre os valores das duas opções deve-se ao efeito de achatamento dos valores provocado pela ponderação do valor da “reserva” exploratória perfurada e desenvolvida com a probabilidade de sucesso. A Figura 17 apresenta o mesmo gráfico, mas com os valores das opções normalizados pelo investimento. Note que as curvas do VPL e do VME são graficamente coincidentes em decorrência da normalização. A Figura 18 apresenta as curvas de gatilho dos dois estágios em valores absolutos. Note que as duas curvas se cruzam em torno do tempo de 0,5 anos, separando duas regiões do gráfico. À esquerda deste ponto, a curva de gatilho do primeiro estágio (exploração *strictu sensu*) é maior do que a da curva do segundo estágio (desenvolvimento), enquanto que à direita ocorre o contrário. Isso significa que até 0,5 anos, toda vez que a exploração estiver *deep in the money*, o desenvolvimento também estará, podendo a opção composta ser exercida imediatamente. A partir de

então, o fato do primeiro estágio estar *deep in the money* já não é suficiente para o exercício imediato.

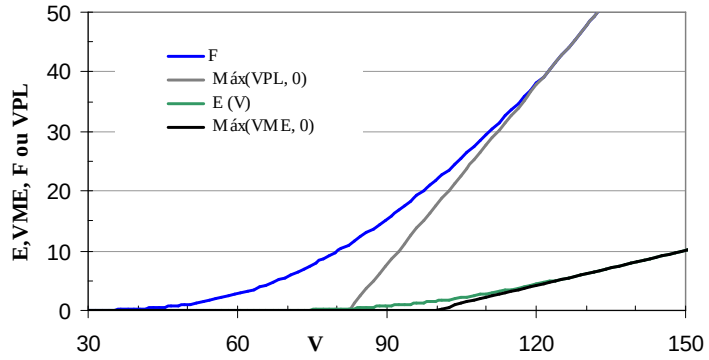

Figura 16 – Valor em US$ Milhões dos dois estágios da opção de exploração IE-2.

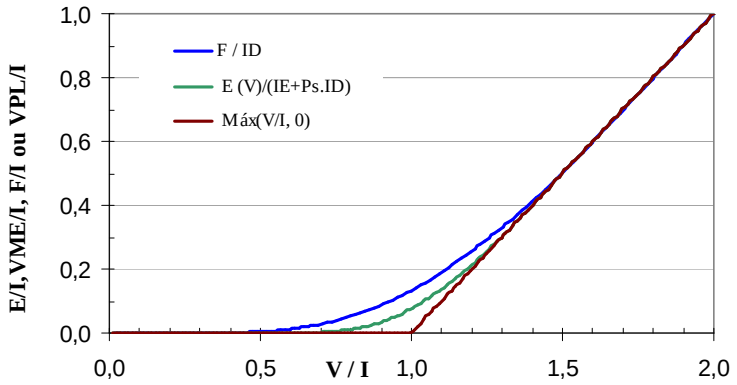

Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2, primeiro e segundo estágios.

Conforme discutido na Seção 4.3.3, o MDE se diferencia do Modelo de PS&S para exploração por tratar esta opção como composta, preservar o risco geológico e observar expirações diferentes para os dois estágios da opção, quando houver. Para permitir a comparação, admitiu-se que as taxas de dividendos são iguais nos dois modelos (6%), enquanto que os valores em US$/bbl de PS&S já estão convertidos para US$ MM nos gráficos. Assim o valor da opção com a abordagem de PS&S é obtido sobre o valor da reserva desenvolvida considerando como preço de exercício a soma dos investimentos em exploração e desenvolvimento. A opção de exploração apresenta valor de US$ 40,7 MM com gatilho de US$ 112,4 MM, estando desde já *deep in the money*.

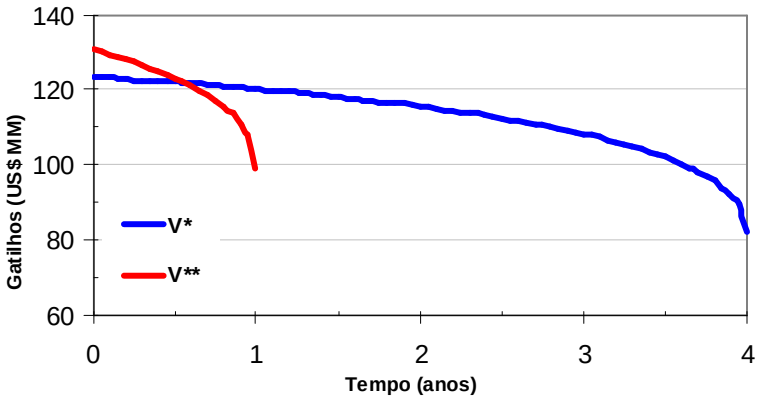

Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE.

A Figura 19 compara o gráfico do valor da opção de exploração do prospecto IE-2 calculado pelo MDE com a abordagem de PS&S. O fato do Modelo de PS&S não considerar a probabilidade de sucesso faz com que a opção exploratória tenha um valor exageradamente alto em relação ao MDE, mas com preço de exercício muito inferior (US$ 112,4 contra US$ 130,3 milhões do MDE), já que apresenta uma relação V/I mais elevada.

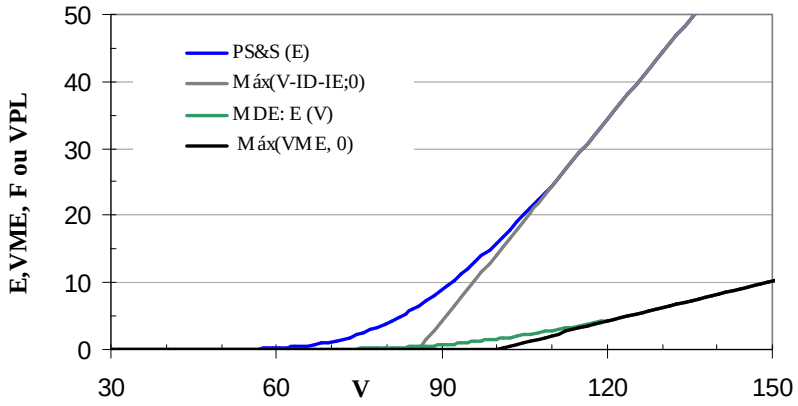

Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE.

A Figura 20 apresenta as curvas de gatilho geradas com os dois modelos. As curvas são paralelas pelo fato dos modelos estarem avaliando um único projeto, ou seja, todos parâmetros são iguais (r_f, σ, δ e T_1), exceto o preço de exercício.

Se o valor da opção é considerado normalizado, a curva do valor crítico normalizado (V^*/I) será única (Figura 21), conforme discutido na Seção 4.3.3 (Merton, 1973, apud PS&S, 1988, p.489). Então, como o modelo de PS&S apresenta maior relação V/I do que o MDE, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a abordagem de PS&S para a opção de exploração será a primeira a tornar-se *deep in the money*, independente do valor da probabilidade de sucesso ($Ps \in [0,1)$):

$$\frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Isso significa que no MDE o valor crítico da opção será sempre maior do que na abordagem de PS&S, portanto apresenta sua curva de valor crítico também sempre maior (Figura 20).

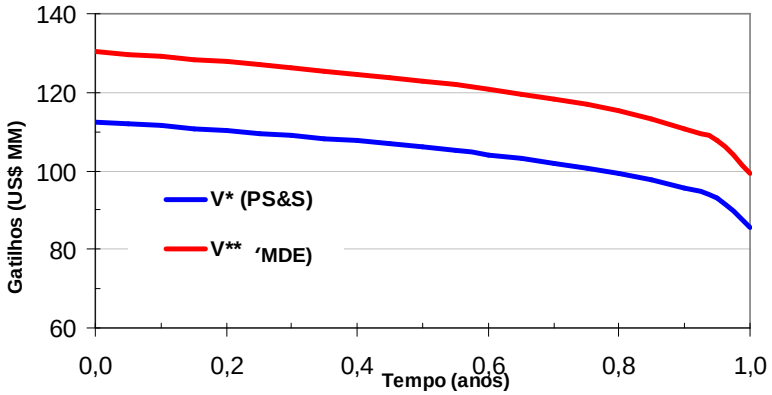

Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE.

A análise deste exemplo demonstrou vários aspectos teóricos discutidos na Seção 4.3.3. Em particular observou-se que o valor da opção exploratória quando tratada como opção simples é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. Também se verificou que ignorar a probabilidade de sucesso geológico implica em um valor crítico menor. Por fim, a diferenciação das expirações dos dois estágios

demonstrou que o exercício do segundo estágio não implica necessariamente no exercício do primeiro, gerando uma regra de decisão mais elaborada do que a de uma opção simples ou composta com uma única expiração. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

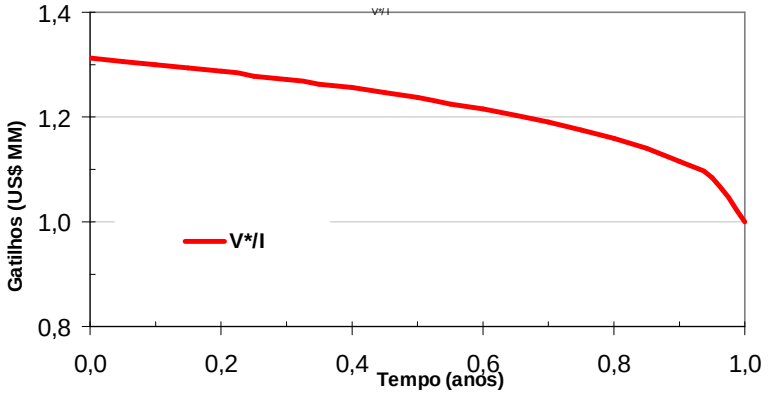

Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2.

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples

No processo de planejamento, uma empresa se depara periodicamente com o problema da priorização de investimentos em um *portfolio* de projetos. São muitos os critérios disponíveis ao decisor para a escolha do conjunto adequado de projetos (ver, por exemplo, Ross *et al*, 2002, Cap.6). Em geral envolvem indicadores tradicionais como o VPL, o *payback*, a TIR, o EVA (*Expected Value Added*), índices de rentabilidade como o VPL/IA (Investimentos Atualizados), etc. Estes indicadores são frequentemente utilizados de forma isolada ou em conjunto, compondo um *ranking* ou alguma função a qual o decisor deseja maximizar, sujeita a uma ou mais restrições como financeiras, de insumos, de equipamentos, etc. Mas por mais sofisticado que se torne este processo, pesa o fato de estar fundamentado em um fluxo de caixa, descontado ou não, que ignora as flexibilidades embutidas em um projeto, capturadas com OR.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43, ver Seção 2.2) relata o exemplo de uma companhia que tradicionalmente utiliza o VPL na aprovação dos

investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo. Realizou um teste *ex-post* da regra de decisão do VPL contra a regra de decisão de OR considerando dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um MGB. Os resultados revelam que o critério de OR apresenta um VPL *ex-post* para os projetos com VPL>>0 16,6% superior, enquanto que os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para significativamente positivo. Este resultado indica que um critério de priorização que considere a valoração com OR deve ser superior àqueles que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades.

Dias (1996, p.247) sugere a adoção de OR para a priorização de investimentos em uma carteira de projetos. Inicialmente, a empresa deve investir apenas naqueles projetos que já estão *deep in the money*. Caso seja necessário reduzir ainda mais investimentos devido a alguma restrição, recomenda que se utilize a volatilidade do preço do petróleo (comum a todos os projetos) como variável de priorização da carteira. Para isso basta aumentar progressivamente a volatilidade até que haja um subconjunto de projetos *deep in the money* que se enquadre na restrição[46].

Nesta Seção testa-se este critério para a priorização de projetos de um *portfolio* de oportunidades de investimentos em projetos de produção de petróleo, avaliados como OR simples – *call* americanas – e sujeitos a restrições orçamentárias. Adota-se o Modelo de Negócios (valor da reserva desenvolvida é função linear do preço do petróleo - Seção 4.3.1) combinado com o Modelo de PS&S para a estimativa da taxa de dividendos (Seção 4.3.2). A volatilidade será a do preço do petróleo, que segue um MGB.

Considere uma carteira com 27 de projetos de investimento em campos de petróleo sob regime de concessão. A Tabela 2 na sua metade esquerda lista o valor do projeto desenvolvido (V), o investimento atualizado (IA ou I), o VPL e a

[46] O ajuste da volatilidade pode ser feito de forma diferenciada. Por exemplo, poderia afetar apenas os projetos que estejam em um determinado país onde haja uma maior instabilidade regulatória. Também pode ser motivado por outras razões como, por exemplo, a expectativa do gerente, acionista ou *debitholder* sobre o comportamento dos preços futuros, o que afetaria o resultado da firma, seu valor de mercado e até sua capacidade de honrar seus financiamentos.

expiração para cada uma das oportunidades de investimento. De acordo com a regra clássica do VPL, dos 27 projetos, 23 apresentam-se positivos e por isso estariam aptos a serem implementados imediatamente.

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado.

Projetos		*V* em 2006	Invest. ou Preço Exercício	VPL (payoff)	Tempo de expiração	Gatilho V* em 2006	Valor da OR (F) (σ=20%)	Prêmio da flexibilid. (F-V) (σ=20%)	Deep in the money? (σ=20%)	Data esperada Exercício (σ=20%)	Probab. de Exercício (σ=20%)
		US$MM	US$MM	US$MM	Anos	US$MM	US$MM	US$MM		Ano	
1	P01	1083,2	450,4	632,9	3	629,6	632,9	0,0	Sim	2006	100%
2	P02	875,4	742,6	132,8	2	1006,6	149,8	17,0	Não	2007	75%
3	P03	243,0	215,6	27,4	2	292,2	35,5	8,0	Não	2007	66%
4	P04	1364,2	900,2	464,0	4	1285,3	464,0	0,0	Sim	2006	100%
5	P05	477,1	783,3	-306,2	4	1118,4	6,8	312,9	Não	2009	10%
6	P06	994,7	799,1	195,5	2	1083,2	203,5	7,9	Não	2007	84%
7	P07	1687,7	957,9	729,9	2	1298,4	729,9	0,0	Sim	2006	100%
8	P08	2995,7	1252,9	1742,7	5	1816,9	1742,7	0,0	Sim	2006	100%
9	P09	2302,0	892,8	1409,2	4	1274,7	1409,2	0,0	Sim	2006	100%
10	P10	492,3	258,5	233,8	3	361,4	233,8	0,0	Sim	2006	100%
11	P11	847,9	875,4	-27,5	3	1223,8	78,1	105,6	Não	2008	43%
12	P12	1102,9	260,2	842,8	3	371,5	842,8	0,0	Sim	2006	100%
13	P21	484,2	124,2	360,0	2	168,4	360,0	0,0	Sim	2006	100%
14	P22	38,4	78,9	-40,6	1	101,4	0,0	40,6	Não	2007	0%
15	P23	1105,6	285,1	820,5	3	398,6	820,5	0,0	Sim	2006	100%
16	P24	105,6	213,1	-107,4	3	297,9	0,2	107,7	Não	2009	2%
17	P25	55,3	39,2	16,1	2	53,2	16,1	0,0	Sim	2006	100%
18	P26	597,9	504,7	93,2	8	753,9	123,9	30,7	Não	2009	66%
19	P27	3059,7	485,2	2574,5	7	719,1	2574,5	0,0	Sim	2006	100%
20	P28	1906,0	795,6	1110,4	6	1167,7	1110,4	0,0	Sim	2006	100%
21	P29	241,6	85,7	155,9	7	127,0	155,9	0,0	Sim	2006	100%
22	P30	301,5	78,1	223,4	8	116,7	223,4	0,0	Sim	2006	100%
23	P31	29,5	28,9	0,6	3	40,4	3,3	2,7	Não	2008	49%
24	P32	37,6	36,7	0,9	3	51,3	4,3	3,4	Não	2008	50%
25	P33	59,2	13,9	45,3	2	18,8	45,3	0,0	Sim	2006	100%
26	P34	37,6	15,6	22,0	2	21,2	22,0	0,0	Sim	2006	100%
27	P35	17,6	3,5	14,1	4	5,0	14,1	0,0	Sim	2006	100%
	Total	22.543,4	11.177,3	11.366,1							

Mas se tratadas as oportunidades de investimento como OR, os resultados são bem diferentes. O valor do projeto desenvolvido é o preço do ativo subjacente (hipótese do MAD, Seção 3.3.1) e o VPL é o *payoff* do exercício da opção. Para o cálculo do valor da OR foi considerada a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993, Seção 3.5.1). A taxa de dividendos considerada foi de 4% a.a. (única para todos os projetos), tendo sido calculada de acordo com a equação (72)

do modelo de Paddock, Siegel e Smith (Seção 4.3.2). Foi considerada uma taxa de declínio de reserva 10%, custo de 30% e impostos de 34%. As datas e probabilidades esperadas de exercício forma calculadas de acordo com a Seção 3.7.

A volatilidade considerada é novamente a média do intervalo sugerido Dixit e Pindick (1994, p.400): 20%. Com estes dados foram calculados o preço de exercício antecipado (gatilho), o valor da OR, o prêmio da flexibilidade de adiar o investimento e a data provável de exercício de cada uma das OR. Os resultados obtidos estão dispostos na metade direita da Tabela 2. Observa-se que apenas 17 projetos encontram-se *deep in the money*, o que reduz o montante de investimento requerido pela regra do VPL em 25% , de US$ 9226,6 MM para US$ 6899,0 MM.

A Tabela 3 compara o efeito do aumento da volatilidade sobre o *portfolio* em análise em dois cenários distintos: 30% e 40%. Os dois cenários de volatilidade foram escolhidos somente com o objetivo de avaliar a eficácia desta estratégia de seleção de projetos.

O que se observa é que com volatilidade de 30% e 40% o numero de projetos *deep in the money* reduz de 17 para 15 e 13 projetos respectivamente. Então, no *portfolio* em questão, dobrar a volatilidade reduz a carteira em 4 projetos. O número de projetos cortados depende do perfil dos projetos da carteira e da intensidade da redução necessária. No caso em questão, a redução foi eficaz na medida em que elevar a volatilidade para 30% e 40% reduziu o investimento para 65% e 51% em relação ao requerido pela regra do VPL (100%) - Tabela 4.

A Tabela 4 permite uma avaliação clara da eficácia da estratégia de aumentar a volatilidade do preço do petróleo para a seleção de um *portfolio* de projetos de investimento. A partir da regra do VPL>0, compara a redução de investimento e VPL obtidos com os projetos selecionados com volatilidades de 20%, 30% e 40%. A terceira e quintas colunas revelam respectivamente a redução dos investimentos e do VPL da carteira com a priorização com OR. Com volatilidade de 40%, o *portfolio* selecionado manteve 84% do VPL>0 inicial gastando metade do investimento.

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo.

Projetos		Deep in the money ? σ=20%	Data esperada Exercício σ=20%	Probab. de Exercício σ=20%	Deep in the money ? σ=30%	Data esperada Exercício σ=30%	Probab. de Exercício σ=30%	Deep in the money? σ=40%	Data esperada Exercício σ=40%	Probab. de Exercício σ=40%
			(ano)			(ano)			(ano)	
1	P01	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
4	P04	**Sim**	2006	100%	Não	2007	100%	Não	2008	67%
7	P07	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	Não	2006	93%
8	P08	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	1%	**Sim**	2006	100%
9	P09	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
10	P10	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	6%	Não	2006	91%
12	P12	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	52%	**Sim**	2006	100%
13	P21	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
15	P23	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
17	P25	**Sim**	2006	100%	Não	2007	46%	Não	2007	72%
19	P27	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
20	P28	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
21	P29	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
22	P30	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
25	P33	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
26	P34	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
27	P35	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
6	P06	Não	2007	84%	Não	2007	100%	Não	2007	60%
2	P02	Não	2007	75%	Não	2007	100%	Não	2007	54%
3	P03	Não	2007	66%	Não	2007	100%	Não	2007	51%
14	P22	Não	2007	0%	Não	2007	100%	Não	2007	2%
24	P32	Não	2008	50%	Não	2008	0%	Não	2008	42%
23	P31	Não	2008	49%	Não	2008	0%	Não	2008	40%
11	P11	Não	2008	43%	Não	2008	83%	Não	2008	38%
18	P26	Não	2009	66%	Não	2010	45%	Não	2010	45%
5	P05	Não	2009	10%	Não	2009	39%	Não	2009	16%
16	P24	Não	2009	2%	Não	2009	100%	Não	2009	8%
	Total Sim	17			15			13		

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.

Critério de corte de projetos:	Investimento		VPL da carteira		VPL/IA
VPL >0	9226,6	100%	11847,7	100%	1,28
OR deep (σ=20%)	6899,0	75%	11397,2	96%	1,65
OR deep (σ=30%)	5959,6	65%	10917,1	92%	1,83
OR deep (σ=40%)	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
OR (σ=20%) com VPL	4929,7	53%	9229,9	78%	1,87
VPL/IA=1,39	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
VPL/IA=0,9	5001,8	54%	10187,3	86%	2,04

Na quinta linha da Tabela 4, apresentam-se os resultados de um critério misto: OR com volatilidade de 20% seguida da priorização com o VPL. A estratégia de combinar OR com o *V** também permitiu reduzir o investimento ao nível desejado (53%), entretanto se obteve um nível inferior de VPL: 78% do VPL>0, revelando-se como uma estratégia inferior.

Os resultados obtidos estão de acordo com o esperado. Utilizar OR como filtro para a seleção de projetos é um procedimento valoroso. Embora possa requerer cenários de volatilidade exagerados, o procedimento tem a vantagem de ser conservador na medida em que seleciona os projetos mais robustos ou mais *deep in the money*. Isso fica muito claro ao se analisar a coluna de VPL/IA da Tabela 4, onde a melhor relação é obtida com a máxima volatilidade.

Dixit e Pindick (1994, p.155, Figura 5.4) caracterizam graficamente a relação do valor crítico ou gatilho com a volatilidade: $\partial V^* / \partial \sigma > 0$. Então, se o investimento for considerado constante, aumentar o gatilho através do aumento da volatilidade implica num aumento proporcional na relação V^* / I. Admitindo que o investimento seja o valor atualizado ($I = IA$) e que o projeto esteja *deep in the money* ($V \geq V^*$), então:

$$VPL = V - I \Rightarrow V = VPL + I \therefore V \geq V^* \Rightarrow VPL + I \geq V^* \Rightarrow VPL \geq V^* - I \Rightarrow$$
$$\frac{VPL}{I} \geq \frac{V^* - I}{I} \Rightarrow \qquad \frac{VPL}{IA} \geq \frac{V^*}{I} - 1 \qquad (81)$$

Esse resultado significa que elevar o gatilho para selecionar projetos previamente *deep in the money,* implica no aumento da relação VPL / IA da carteira selecionada.

Este resultado é ainda um pouco mais geral: Dado um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica, os investimentos são constantes e o valor crítico normalizado V^* / I é desconhecido, selecionar projetos com VPL/IA tem efeito similar ao aumento da volatilidade na priorização com OR. Este critério é limitado, pois não se sabe se os projetos estão *deep in the money* ou não. Mas na ausência de uma valoração com OR, a seleção de projetos com o VPL/IA é uma aproximação inicial melhor do que, por exemplo, o VPL. No *portfolio* analisado com volatilidade de 20%, a razão VPL/IA

crítica ou de corte encontra-se entre 0,9 e 1,39, pois, o projeto P10 (VPL/IA=0,9) não está *deep in the money* enquanto que o P08 sim (VPL/IA=1,39).

As Figuras 22 e 23 exemplificam o efeito da priorização dos projetos com OR sobre a previsão de produção e investimentos com a elevação da volatilidade, observando-se as datas prováveis de exercício e a expiração das OR.

A regra do VPL positivo implica num cronograma de produção e investimento mais agressivos do que aqueles obtidos com OR, que são abrandados pelo gatilho da regra de decisão. Assim, se a firma deseja gerenciar seu planejamento minimizando a probabilidade de perda, deve investir considerando as datas de exercício apresentadas na Tabela 2. No caso de se desejar atender à demanda de um mercado (Figura 22) pode adequar seu cronograma adiando os projetos com menor probabilidade de exercício (com menor razão V^* / I) até as respectivas datas de expiração, gerando uma curva de produção ajustada à demanda projetada.

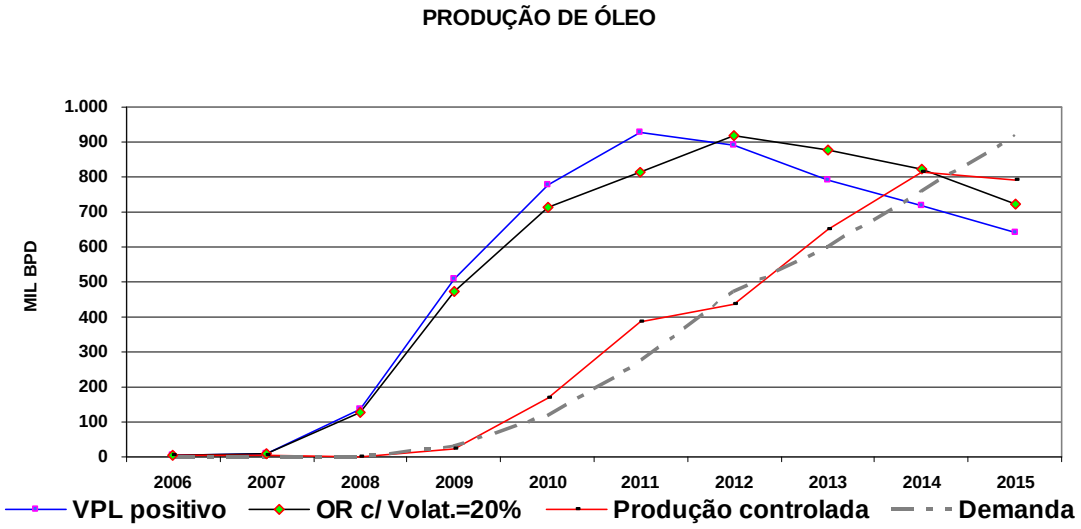

Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento.

A Figura 23 apresenta os investimentos dos projetos como fluxos e em valores nominais, ao contrário da Tabela 2 que apresenta os mesmos dados de forma pontual e atualizados para 2006. Uma observação mais cuidadosa revela que o efeito da priorização sobre o cronograma de investimentos se dilui quando os investimentos são visto como fluxos, mas esse é um efeito presente qualquer que seja o critério de priorização adotado. O perfil das curvas de investimento denota a

implantação dos projetos de desenvolvimento. Tipicamente, há um pico no dispêndio dos recursos durante a perfuração de poços e implantação das facilidades de produção, que então diminuem gradativamente com o início e declínio da produção, quando os investimentos visam amenizar o efeito da depleção das jazidas.

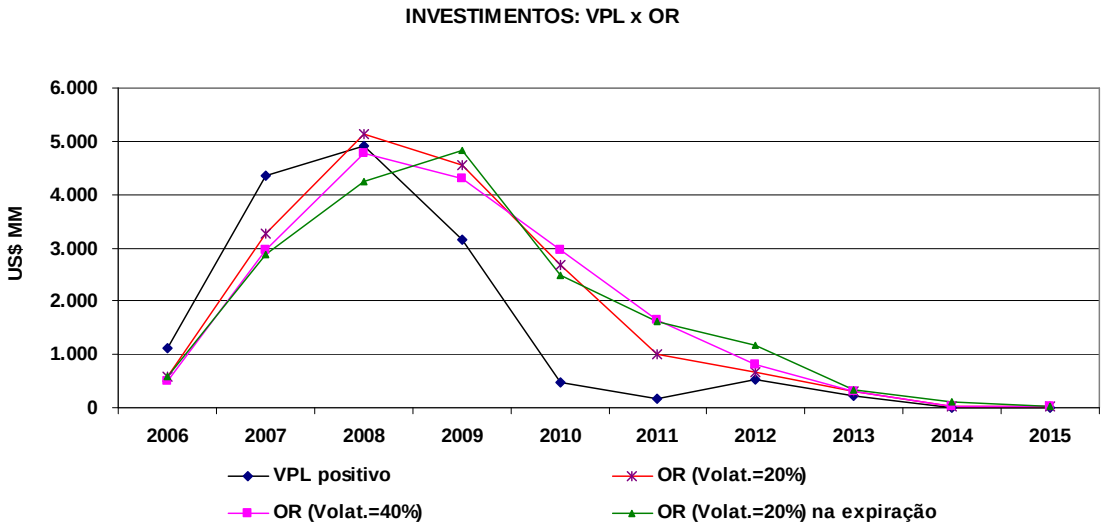

Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado.

Assim, aumentar a volatilidade de um *portfolio* de OR que dependem de uma variável estocástica comum é um procedimento mais eficaz do que o VPL ou o VPL/IA na priorização de projetos à medida que aumenta a robustez da carteira selecionada. Este procedimento também deve ser melhor do qualquer outro critério que se baseie unicamente em um fluxo de caixa positivo devido ao prêmio exigido para o exercício antecipado das opções. Não sendo possível a avaliação por OR, o decisor pode utilizar o *ranking* com VPL/IA como uma primeira aproximação do resultado com OR, embora isso possa levar a investimentos em projetos imaturos.

Por fim cabe ressaltar que, embora o resultado obtido com OR na priorização de investimentos seja animador, apresenta eficácia restrita. Priorizar investimentos da forma descrita, embora aumente o valor esperado do VPL *ex-post* do *portfolio*, considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) pode ser uma solução mais acertada.

6. Conclusões

A dissertação deixou clara a superioridade da Teoria de Opções Reais como ferramenta de decisão sobre investimentos em relação ao tradicional VPL e o VME.

Em uma opção de investimento/abandono, o VPL positivo/negativo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Na presença de incerteza e flexibilidades, o investimento/abandono imediato requer um prêmio maior do que o valor da espera pela evolução da incerteza.

Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir em um momento seguinte. Adiar só tem valor caso haja uma probabilidade positiva de uma perda irreversível, situação em que o investimento não deve ser feito imediatamente. Eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

O MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente a depender dos parâmetros considerados.

A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) apresenta-se como um limite inferior acurado para o valor verdadeiro de uma opção americana de compra com expiração finita, onde o ativo básico segue um MGB. A comparação desta aproximação analítica com a de Baroni-Adesi e Whaley (1987) para opções com expiração superior a um ano revelou que, para o conjunto de dados considerados pelos autores, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland apresentam uma performance superior ao não divergir a Raiz do erro Quadrático Médio - RQM.

A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. Os Modelos de Negócios e de Paddock, Siegel e Smith (1988) para opções de desenvolvimento são válidos e consistentes. Mas o modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para uma reserva não desenvolvida. Isso significa que até mesmo o processo real da reserva não desenvolvida pode ter tendência negativas: $\mu < \delta$. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo sobre o preço

de petróleo ou sobre custos, é questionável que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a depreciação de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

O Modelo de Negócios tem o mérito de ser de fácil aplicação, o que pode contribuir muito para a implantação da cultura de tomada de decisões com OR. Essa facilidade operacional ainda agrega outras vantagens: Permite lidar com facilidade com um grande número de projetos simultaneamente, oferecendo uma resposta rápida ao decisor. Entretanto seu uso deve ser limitado a decisões mais simples.

No caso do projeto ID-1, o Modelo de Negócios gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto. Esse conservadorismo exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

O valor normalizado da opção exploratória quando tratada como opção simples e sem o risco geológico (Modelo de PS&S) é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. A diferenciação das expirações dos dois estágios demonstrou que o exercício da opção requer uma regra de decisão mais elaborada. O fato de o primeiro estágio estar *deep in the money* não implica necessariamente no exercício imediato da opção de exploração, como ocorre quando a opção composta tem expiração única. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo mais apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

A priorização de investimentos com a elevação da volatilidade em um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica é um critério superior em relação aos critérios que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades. A elevação da volatilidade implica em selecionar os projetos mais robustos economicamente, em decorrência da elevação do gatilho para o investimento imediato.

Elevar o gatilho para selecionar projetos implica no aumento da relação VPL/IA da carteira selecionada. Assim, selecionar projetos com VPL/IA gera um resultado mais coerente com a teoria de opções reais sem garantir, obviamente, que os projetos selecionados estão *deep in the money.*

Entretanto, priorizar investimentos com o auxílio de OR conforme descrito é uma ferramenta limitada, pois considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) parece ser uma solução mais acertada.

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. Viu-se que esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Considerando a solução ii $V_U > I > V_D$ por simplicidade (note que $I > V_U > V_D$ o ativo é abandonado em qualquer cenário e que se $V_U > V_D > I$ o ativo não seria abandonado nunca) chegou-se a:

$$V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

A inequação (5) mostra em que situação ainda vale a pena não abandonar. Considerando o aumento do número de períodos e a modelagem da incerteza representados na Figura 3, então:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \Rightarrow \text{ em (5)}$$

$$\frac{(1+r).U.\delta}{r} > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \Rightarrow (1+r).U.\delta.q > [I.(r+q) - \delta.(1+r)].r \Rightarrow$$

$$\delta.(1+r).(U.q - r) > I.(r+q).r \Rightarrow \boxed{\delta > \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}}$$

Então se δ é maior do que o termo à direita na última desigualdade, o decisor deve esperar pelo período seguinte para tomar a decisão de abandono. Para que δ represente a situação em que o abandono imediato é a melhor opção deve-se inverter o sinal da desigualdade. Então, seja δ^* gatilho que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar, a partir da última desigualdade pode-se escrever:

$$\boxed{\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua

probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica

Portfolio replicante (r*eplicating portfolio approach*)

Uma terceira forma de calcular o valor da opção de investir em t_1 (por exemplo, em Copeland e Antikarov, 2001, p.90-95 e Trigeorgis, 1996, p.72-77) é montar um *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção com Δ ações de um ativo gêmeo (*twin security*) e B títulos livres de risco (*bonds*). O ativo gêmeo seria um ativo financeiro que replicasse perfeitamente os *payoffs* do projeto de investimento.

Então na Figura 6 o *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção é formado por Δ ações do ativo gêmeo e B títulos livres de risco:

$$\Phi_0 = \Delta.V_o + B \therefore \Phi_1 = \Delta.V_1 + B.(1 + r_f)$$

Como o *portfolio* Φ replica os *payoffs* da opção, pode-se escrever:

(i) $\Delta.\overline{V}_U + B.(1 + r_f) = F_U$

(ii) $\underline{\Delta.\overline{V}_D + B.(1 + r_f) = F_D}$

(i) - (ii) $\Delta.(\overline{V}_U - \overline{V}_D) = F_U - F_D \Rightarrow \Delta = \dfrac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}$

Que é o resultado (11) obtido anteriormente. A quantidade de ativo livre de risco B pode ser obtida a partir das equações (i) ou (ii) acima:

$$B = \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} = \frac{F_D - \overline{V}_D.\Delta}{R_f}$$

Sejam U e D como definido anteriormente: $\overline{V}_U = U.V_0$ e $\overline{V_D} = D.V_0$. Considerando que o *portfolio* Φ replica a opção, então pelo argumento de não arbitragem, o preço da opção em t_0 é o mesmo preço do *portfolio* Φ em t_0:

$$E_0(F_1) = \Phi_0 = \Delta.V_0 + B \Rightarrow E_0(F_1) = \Delta.V_0 + \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U$$

Este último resultado é a equação (12), obtida por avaliação neutra ao risco. Logo substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14):

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)} \quad (14)$$

Programação dinâmica

A programação dinâmica é uma ferramenta geral de otimização dinâmica particularmente útil para lidar com incerteza. Consiste em reduzir uma seqüência de decisões em duas alternativas mutuamente excludentes: o valor da decisão imediata e a função de valor que contempla todas as decisões subseqüentes (Dixit e Pindick, p.93-94). Assim, em cada o período, o decisor simplesmente escolhe a estratégia de maior valor: exercer a opção (decisão imediata) ou esperar pela decisão subseqüente. Foi exatamente este o processo utilizado nos Exemplos 1 e 2 da Seção 2.2, escolhido por seu apelo intuitivo.

Se o horizonte de tempo é finito, essa ferramenta pode ser aplicada no penúltimo período, revelando o valor da opção neste momento. De posse destes dados, agora a mesma técnica pode ser aplicado no período imediatamente anterior, e assim retroceder-se até o presente, num processo denominado de *backward induction*. Se ao contrário, o horizonte de tempo é infinito, a situação fica relativamente simplificada por sua natureza recursiva que, a cada momento, leva a um problema idêntico ao original. Isso permite a caracterização teórica da solução e em alguns casos, soluções analíticas.

Reconsidere a Figura 6. O primeiro passo consiste em calcular o valor da opção de investir no segundo período é dado por $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e por $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$ nos estados *up* e *down* da natureza, onde $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$ e $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$. Retrocedendo para o primeiro período, o valor esperado de todos os cenários futuros possíveis é dado por $E_0(F_1) = [q.F_U + (1-q).F_D]/R$, onde q e $1-q$ são as probabilidades reais e R é a taxa de desconto apropriada, ajustada ao risco da OR. Cabe ao decisor então decidir entre o investimento imediato ou esperar pelo

segundo período: $Max[V_0, E_0(F_1)]$. Esta valoração foi feita considerando o mundo real, mas poderia ter sido elaborada no mundo neutro ao risco, utilizando-se então as probabilidades neutras ao risco q e $1-q$ dadas por (14) e a taxa livre de risco R_f. Então o valor da opção será dado por $Max[V_0, E_0(F_1)]$ onde $E_0(F_1) = [p.F_U + (1-p).F_D]/R_f$ (13), resultado idêntico aos anteriores.

A Programação Dinâmica é a segunda técnica extensivamente utilizada no livro de Dixit e pindick (1994) para valorar OR, alternativamente a ativos contingentes. Dixit (op.cit, p.120-121) discute o relacionamento entre as duas abordagens, vantagens e desvantagens, argumentando que os dois métodos juntos podem lidar com uma grande variedade de aplicações, embora uma ou outra possa em algum caso ser mais adequada.

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito

Seja $f(x)$ uma função e uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ que convirja para $f(x)$ num certo intervalo de convergência, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...$$

Derivando membro a membro verifica-se que as séries das derivadas de ordem n convergem no mesmo intervalo, então se pode calcular a_n para qualquer n em torno de $x = a$. Por exemplo, para $n = 3$:

$$f'''(x) = (a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...)''' \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (0 + 0 + 0 + 3.2.1.a_3.(x-a)^0 + ... + n.(n-1).(n-2).a_n.(a-a)^{n-3} + ... \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (3.2.1.a_3.1 + ... + 0 + ...) \Rightarrow f'''(a) = 3!.a_3 \Rightarrow a_3 = f'''(a)/3!$$

Generalizando escreve-se: $a_n = f^n(a)/n!$, onde f^n é a *n-ésima* derivada de $f(x)$, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$\Delta f(x) = \frac{f'(a)}{1!}.\Delta x + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(\Delta x)^n + ...$$

Fazendo com que $x \to a$, se obtém a expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f'(a).dx + \frac{f''(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t, então:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt$$

Aplicando a regra da cadeia e admitindo que as diferenciais parciais mistas sejam iguais (Teorema de Young), obtém-se:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 \qquad \text{já que} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}.dt.dx$$

Considerando a Expansão de Talyor (28), dF será dado por:

$$dF = [\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt] + \frac{1}{2!}.[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt] + \frac{1}{3!}.[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 ...$$

Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \Rightarrow dx^2 = a^2(x,t).dt^2 + 2.a(x,t).dt.b(x,t).dz + b^2(x,t).dz^2$$
$$dx^2 = 0 + 2.a(\cdot).b(\cdot).dt.\varepsilon.\sqrt{dt} + b^2(\cdot).(\varepsilon.\sqrt{dt})^2 \Rightarrow dx^2 = 2.a(\cdot).b(\cdot).\varepsilon.dt^{3/2} + b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt$$
$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e:}$$

$$dx^3 = dx^2.dx = b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt.(a(\cdot).dt + b(\cdot).\varepsilon.\sqrt{dt}) \Rightarrow$$
$$dx^3 == a(\cdot).b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt^2 + b^3(\cdot).\varepsilon^3.dt^{3/2} \Rightarrow \; dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - E^2(\varepsilon) = 1 \Rightarrow V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - (0)^2 = 1 \Rightarrow \; E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32)$$

Logo:

$$E(dz^2) = E(\varepsilon^2.dt) = E(\varepsilon^2).dt = 1.dt \Rightarrow E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33)$$ e:

$$V(dz^2) = V(\varepsilon^2.dt) = V(\varepsilon^2).dt^2 \therefore dt^2 = 0 \Rightarrow V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2.dt = dz^2 \sim N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).dt] \Rightarrow$$

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson

Na Seção 3.1.4 abordou-se a associação do Processo de Poisson ao Processo de Ito, o que faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta (Poisson) - (26): $dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq$.

Com isso, determinar o processo de uma função $H(x)$ exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86). Inicialmente, observa-se que a partir de (26) pode-se escrever (Brandão, Cap.3, Seção 2.7, p. 3-4):

$$dH = dH_{continuo} + dH_{discreto} \quad (83)$$

A parte continua pode ser obtida com o Lema de Ito apresentado anteriormente (35):

$$dH_{continuo} = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz]$$

Quanto à parte discreta $(dH_{discreto})$, suponha que o evento de Poisson ocorra em um intervalo $(t, t+dt)$, então $x_{t+dt} = x_t + u.g(x,t)$, onde u é o tamanho do salto que também pode ser aleatório. Com isso, $dH_{discreto}$ será:

$$dH_{discreto} = H(x_t + u.g(x,t), t) - H(x_t, t)$$

Retornado os dois resultados anteriores a (83):

$$dH = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz] + H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)$$

Aplicando o valor esperado, obtém-se:

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)] \Rightarrow$$

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E_u\{\lambda.dt.[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)]\} \quad (84)$$

Onde E_u é o valor esperado do tamanho do salto *u*, dado pela diferença do valor de $H(x,t)$ em pontos discretos diferentes.

Referências Bibliográficas

BARONI-ADESI, G; WHALEY, R.E. Efficient Analitic Approximation of American Option Value. **Journal of Finance**, 42, p.301-320. June 1987.

BERNANKE, B.S. Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment. **Quarterly Journal of Economics**, 98, p.85-106. February 1983.

BJERKSUND, P; EKERN, S. Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: From "Last Chance" to "Wait and See" Strategies. **Financial Management**, 19, p. 65-83. Autun 1990.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. Closed-Form Approximation of American Options. **Scandinavian Journal of Management**. 9, p.87-99, 1993.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. American exchange options and a put-call transformation: a note. **Journal of Business, Finance and Accounting**. 20, p.761-764. 1993b.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. **Closed Form valuation of American Options**. Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, Department of Finance and Management Science, Bergen, Norway. April 2002, 17p. Disponível em: http://www.nhh.no/for/seminars/previous/2002-fall/251002.pdf, acesso em 18/08/2006.

BLACK, F; SCHOLES,M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy.** 81, p. 637-654. 1973.

BRANDÃO, L. Tradução livre do Cap. 3 e 5 do livro Investment under Uncertainty, DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **,** 3rd ed, 1994, disponível em http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/, acesso em 03/04/2006.

BROADIE, M; DETEMPLE, J. American Options Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods. **Review of Financial Studies**. 9, n. 4, Winter, 1996, p.1211-1250.

COPELAND, T; ANTIKAROV. V. **Real Options: a practioner's guide**. 1st ed. USA: Texere, 2001, 372p

DETEMPLE, J. **American-Style Derivatives – Valuation and Computation** Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton (USA), 2006, 232p.

DIAS, M.A.G. **Investimento sob incerteza em Exploração e Produção de Petróleo.** 1996. 470p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. **Journal of Petroleum Science & Engineering**. 44, p.93-114. 2004.

DIAS, M.A.G. **Opções Reais Hibridas com Aplicações em Petróleo**. 2005. 509p. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. e ROCHA, K.M.C. Petroleum Concessions with Extendible. Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, Wassenaar-Leiden (Holanda), June 1999. Disponível versão revisada de janeiro de 2001 em: http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/. Acesso em: 17/04/2005.

DIAS, M.A.G. **Mean Reversion with Jumps Models**, p.3-4. Disponível em: http://www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm/. Acesso em: 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **First Hitting Time and Expected Discount Factor**. Disponível em: http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html. Acesso em : 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **Real Option Theory for Real Assets Portfolios: the Oil Exploration Case.** Working Paper, Depart. of Industrial Engineering, PUC-Rio, presented at the 10th Annual International Conference on Real Options, New York, June 2006, 37 p.

DICKEY, D.A., FULLER, W.A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with Unit Root. **Econometrica**, 49, 1057-1072. 1981.

DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **Investment under Uncertainty**. 3rd ed. USA: Princenton University Press, 1994, 468p.

GEMAN, E; EL KAROUI, N; ROBERT, J.C. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing. **Journal of Applied Probability**. 32, p.443-458. 1995.

GRUY, H.J; GRAB,F.A; WOOD, J.W. Determining the value of oil and gas in the ground. **World Oil CXCIV**. p.105-108. 1982.

HAUG, E.G. **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**. McGraw-Hill, 1998, 232 p.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. 5th ed. USA: Prentice Hall, 2003, 744p.

LAUGHTON, D.G., The management of flexibility in the upstream petroleum industry. **Energy Journal**. 19, p.83-114. January 1990.

MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**. 7, p.77-91. 1952.

MACMILLAN, L.W. Analytic Approximation for the American Put Option. **Advances in Futures and Options Research**. 1, p.119-139. 1986.

MCDONALD, R; SIEGEL, D. The Value of Waiting to Invest. **Quarterly Journal of Economics**, p.707-727. November 1986.

MCDONALD, R; SCHRODER, M. A parity result for American options. **Journal of Computational Finance.** Working paper, Northwestern University, 1990.

MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science.** 4, p.141-183. 1973.

MERTON, R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. **Journal of Financial Economics**. 3, p.125-144. 1976.

MERTON, R.C. (1990). **Continuous-Time Finance**. Blackwell Publishers Inc, Cambridge, MA, 1990 (revised edition, 1992), 734 pgs.

METCALF, G.E; K.A. HASSET (1995). Investment under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walks and Mean Reversion. **Journal of Economic Dynamics and Control**. 19, p.1471-1488. November 1995.

MOSZKOWICZ, V.N. **Validação do Critério de Avaliação de Projetos Utilizando a Teoria das Opções Reais**. 2003. 157p. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

MYERS, S.C. Determinants of Corporate Borrowing. **Journal of Financial Economics**. n. 5, p.147-175. November 1977.

PADDOCK, J.L; SIEGEL, D.R; SMITH, J.L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. **Quarterly Journal of Economics**. 103, p.479-508. August, 1988.

PICKLES, E., SMITH, J.L. Petroleum property evaluation: a binomial lattice implementation of option pricing theory. **Energy Journal**. 14 (2), p.1-26. 1993.

PINDYCK, R.S.; D.L. RUBINFELD. 1995. p.545-546. **Microeconomics**. Prentice-Hall, Inc., third edition, 1995, 700 p.

PINDYCK, R.S. The Long-Run Evolution of Energy Prices. **Energy Journal.** 20(2), p.1-27. 1999.

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JAFFE, J.F. **Finanças Corporativas**. 2ª ed. Editora Atlas, 2002, 776p.

SAMUELSON, P. Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuates Randomly. **Industrial Management Review**. p.41-49. Spring, 1965.

SCHWARTZ, E.S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **Journal of Finance.** 52(3), p.923-973. July, 1997.

SHIMKO, D.C. **Finance in Continuous Time. A Primer**. 1st ed. **Local** Kolb Publishing Company, 1992, 110 p.

TRIGEORGIS, L. **Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. 1st ed. 5th printing. USA: The MIT Press, 1996, 427p.

VARIAN, Hal R. **Microeconomia**. 6a ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003, 778p.

VOLLERT, Alexander. **A stochastic control framework for real options in strategic valuation**. 1st ed. USA: Birkhauser Boston, 2003, 266p.

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo

Os seguintes termos foram adotados nessa dissertação com o significado que se segue. Definições formais ou completas devem ser buscadas em literatura específica.

Acumulação de petróleo: Qualquer volume de petróleo acumulado em subsuperfície, independente de ser recuperável técnico ou economicamente.

Adensamento de malha: Programa de desenvolvimento complementar de um campo de petróleo, onde novos poços são perfurados entre os pré-existentes com a finalidade de aumentar o volume de petróleo a ser recuperado.

Bloco: Área delimitada geograficamente por um órgão regulador onde uma companhia de petróleo tem o direito de desenvolver atividades de exploração e produção. Objeto de um contrato de cessão de direitos de exploração ou produção.

Cabeça do poço: Local onde se encontra os equipamentos de superfície instaldos em um poço.

Campo de petróleo: Acumulação de petróleo em produção.

Contrato de concessão: Instrumento legal pelo qual um órgão regulador cede e define as condições de uso de uma área para exploração e produção em um regime de concessão.

Delimitação: Conjunto de atividades que se seguem ao descobrimento de uma acumulação de petróleo cujo objetivo é definir o volume de petróleo descoberto e sua produção.

Depleção: Perda de pressão em um reservatório em decorrência da produção.

Desenvolvimento: Conjunto de atividades que se seguem à delimitação, cujo objetivo é instalar a infra-estrutura necessária para a produção de uma acumulação de petróleo.

Desenvolvimento complementar: conjunto de atividades complementares ao desenvolvimento de um campo cujo objetivo é aumentar o volume de petróleo recuperado. O adensamento de malha é um exemplo.

Exploração: Conjunto de atividades responsáveis pela identificação e teste de situações geológicas que podem revelar a existência de uma acumulação de petróleo. A exploração num sentido mais amplo engloba a fase de exploração propriamente dita e a fase de delimitação.

Explotação ou Produção: Fase operacional de um campo de petróleo, ou seja, em que ocorre a produção contínua de petróleo. Durante a fase de produção podem ser realizados projetos de desenvolvimento complementar.

Fator de recuperação: Percentual do volume de petróleo acumulado em subsuperfície que pode ser recuperado de forma econômica.

Poços: Obra de engenharia resultante da perfuração de uma situação geológica de interesse. Há diferentes tipos de poços, por exemplo: Pioneiro ou exploratório, de delimitação, de produção, de injeção de fluidos ou gás, etc.

Poço seco: Qualquer poço de exploração, delimitação ou produção perfurado na expectativa de se tornar produtor de petróleo, mas cujo resultado foi negativo.

Porosidade: Volume de espaço vazio em uma rocha reservatório preenchido por petróleo, água ou gás.

Preenchimento, fator de: Proporção de uma rocha trapa preenchida por petróleo;

Prospecto exploratório: Situação geológica não perfurada cujo estudo indica a possibilidade de acumular petróleo. Todo prospecto visa testar uma ou mais trapas.

Recuperação primária e secundária, fator de: Representa o percentual do volume de petróleo existente em uma acumulação de petróleo que pode ser recuperado do reservatório. A recuperação primária é aquela que pode ser obtida sem técnicas especiais como a pressurização do reservatório. A secundária refere-se ao volume adicional que pode ser recuperado com o auxílio de tais técnicas.

Regime de concessão: Regime regulatório para a atividade de exploração e produção de petróleo onde uma das principais características é a participação governamental (*royalty*) como uma fração constante da receita bruta ou produção.

Reserva: Há vários tipos de reservas, de uma forma genérica, refere-se a um volume de petróleo cuja existência já é comprovada e cuja recuperação é economicamente viável.

Reserva não desenvolvida: Reserva cujo desenvolvimento ainda não foi realizado, ou seja, sem a infra-estrutura necessária à sua produção.

Rocha reservatório: Rocha cuja porosidade permite a acumulação de petróleo.

Saturação de óleo: Refere-se ao percentual da porosidade de uma rocha que é ocupado por óleo. A saturação de óleo, gás e água de um reservatório soma 100%.

Sísmica 2D e 3D: A sísmica refere-se a um conjunto de atividades cujo objeto é o imageamento da disposição e relação das rochas em subsuperfície. A sísmica 2D refere-se à técnica de imageamento em duas dimensões, enquanto que a 3D refere-se ao imageamento em três dimensões.

Sonda: Nesta dissertação, refere-se ao equipamento responsável pela perfuração de poços. A sonda pode ser terrestre ou estar instalada em uma plataforma ou navio. Também

Trapa: Refere-se a uma situação geológica favorável à acumulação de petróleo. Trata-se de uma armadilha natural capaz de aprisionar o petróleo que migra em subsuperfície. A trapa associadas a outros fatores como, por exemplo, a existência de reservatório, a existência de petróleo em uma área, etc., pode constituir-se em um prospecto exploratório.

Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE
Fundação Getúlio Vargas

Opções Reais em Decisões de Investimento em Exploração e Produção

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Finanças e Economia Empresarial

Aluno: André Avila Scartezini

Banca Examinadora:
Marco Antonio Guimarães Dias (Orientador; PUC-RIO/DEI)
Marco Bonomo (EPGE/FGV)
José Paulo Teixeira (PUC-RIO/DEI)

Rio de Janeiro
2006

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, afetadas pela minha ausência parcial durante os últimos três anos, colaboraram com seu desprendimento, tolerância e compreensão para a conclusão do meu curso de mestrado em finanças e economia empresarial.

Em especial, agradeço a Silvana Pedroni por seu apoio e companheirismo.

A Marco Antonio Guimarães Dias pela orientação.

A Marco Bonomo pela atenção despendida.

A Adauto Carneiro Pereira, pela oportunidade e incentivo.

A Adelson Antônio da Silva, por viabilizar a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores, minha admiração.

Dedico este trabalho à Petrobras.

Rio de Janeiro, julho de 2006.

Resumo

Este trabalho faz uma revisão dos principais conceitos que definem a Teoria de Opções Reais. Tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob incerteza aplicado a problemas de Exploração e Produção de petróleo (E&P). Foram priorizados modelos simples que podem ser facilmente implantados no dia a dia de uma empresa, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Os modelos discutidos são elaborados com Movimento Geométrico Browniano, que pode ser uma aproximação razoável para a modelagem de preços, a depender dos parâmetros considerados. Em particular, é apresentado um modelo de opção composta para exploração, que se revela mais apropriado por considerar o risco geológico e os estágios da opção com expiração diferenciada. A priorização de investimentos com auxílio de OR para uma carteira representativa de um *portfolio* de projetos de Produção também é testada, resultando numa maior relação VPL / Investimento da carteira selecionada.

Abstract

This work reviews the main concepts of real option theory. It intends to discuss the investment decision problem under uncertainty in petroleum Exploration and Production (E&P). Simple models including the classic Padock, Siegel and Smith (1998) were focused because they may be easily implemented in petroleum companies. All the models discussed consider the Geometric Brownian Motion (GBM) which may be a reasonable approach to modeling prices since appropriated parameters are considered. In particular, a compound option model to exploration and development is presented. It reveals to be more appropriated, mainly when considering both the geologic risk and stages with distinct expiration dates. The selection of projects with real options is also tested in a representative portfolio of development projects, which results in an increasing NPV-investment ratio of selected portfolio.

Sumário

Agradecimentos 3

Resumo 5

Abstract 6

Símbolos, Abreviaturas e Siglas 10

Lista de Figuras 12

Lista de Tabelas 13

1. Introdução 14

2. Conceitos Básicos de Opções Reais 18

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza 18

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money* 20

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias 30

2.4. Taxonomia de opções reais 33

2.4.1. Classificação gerencial 36

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração 38

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica 41

2.6. Introdução à valoração de opções reais 43

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) 44

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*) 48

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados 49

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo 50

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos 53

3.1. Processos estocásticos em finanças 53

3.1.1. Movimentos Brownianos 54

3.1.2. Reversão à média 58

3.1.3. Processos de saltos de Poisson 63

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*).....63

3.1.5. Reversão à média com saltos.....64

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras.....66

3.2. Lema de Ito.....67

3.3. Modelando o ativo subjacente.....70

3.3.1. Marketed Asset Disclaimer (MAD).....70

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente.....71

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos.....74

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB.....74

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica.....79

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração.....81

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB.....82

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993).....87

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas.....89

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção.....91

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P.....93

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo.....94

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*.....98

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P.....101

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão.101

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S).....104

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração.....109

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P).....119

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo 119

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S 125

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples ..131

6. Conclusões 139

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono 142

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica 144

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito 147

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson.....150

Referências Bibliográficas.....151

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo 156

Símbolos, Abreviaturas e Siglas

$a.a.$ = ao ano

B = Volume ou reserva de petróleo

bbl = unidade de volume de um barril, corresponde a cerca de 160,5 litros.

Cov = Operador de covariância

δ = Dividendo ou fluxo de caixa de um período t qualquer.

dz = Incremento de Wiener

$E\ (x)$ = Valor esperado.

FCD = Fluxo de Caixa Livre Descontado ou simplesmente Fluxo de Caixa Descontado.

FCL = Fluxo de Caixa Livre, não descontado.

I = Investimento.

IA = Investimento Atualizado.

μ = Taxa de desconto ajustada ao risco, dada, por exemplo, pelo CAPM.

MAB = Movimento Aritmético Browniano

MAD = *Market Asset Disclaimer*

MGB = Movimento Geométrico Browniano

MM = Abreviatura para milhão.

MRM = Movimento de Reversão à Média

$N(\mu,\sigma)$ = Distribuição normal de média μ e desvio padrão σ

OR = Opção Real ou Opções Reais

p = probabilidade neutra ao risco

q = probabilidade real ou objetiva

π_t = lucro (ou *payout*) no período t

π = prêmio de risco

r = Taxa de desconto não especificada.

$R = 1 + r$

r_f = Taxa de juros livre de risco (*risk free*).

$R_f = 1 + r_f$

$\rho_{AB} ou\ \rho(AB)$ = correlação de A com B

$\sigma_A\ ou\ \sigma(A)$ = desvio padrão de A

$\sigma_{AB} ou\ \sigma(AB)$ = covariância de A com B

$\sigma_A^2\ ou\ \sigma^2(A)$ = variância de A.

US$ = uma unidade de dólar americano.

VPL = Valor Presente Líquido.

$V(x)$ = Operador de variância

Lista de Figuras

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período. 22
Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período. 26
Figura 3 - Evolução do FCL 30
Figura 4 - Classificação das OR (adaptado de Trigeorgis, 1996). 35
Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003). 36
Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar. 46
Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. 55
Figura 8 – MGB. 57
Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999). 65
Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005). 95
Figura 11 – Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Dias, 2005). 103
Figura 12 – Opção de exploração com duas etapas. 113
Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1. 122
Figura 14 - Curva do valor crítico. 123
Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação dos Modelos. 125
Figura 16 – Valor dos dois estágios da opção de exploração IE-2. 128
Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2. 128
Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE. 129
Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE. 129
Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE. 130
Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2. 131
Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento. 137
Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado. 138

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor “verdadeiro” estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%. 86

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado. 133

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo. 135

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.135

1. Introdução

A valoração econômica para a tomada de decisão sobre projetos de investimento é afetada por incertezas econômicas, técnicas e pelas flexibilidades embutidas nos projetos. A incerteza econômica é exógena ao projeto afetando, por exemplo, a demanda, o preço do produto, os custos operacionais, a tributação, etc. A incerteza técnica é endógena ao projeto, relacionando-se a temas como tecnologia, capacidade de produção, desempenho, etc. As flexibilidades embutidas nos projetos por sua vez, criam a faculdade gerencial sobre o empreendimento, permitindo escolhas como o momento adequado (*timing)* para a decisão sobre o investimento, a alternativa de produção, a expansão, a parada temporária, a mudança de escopo, o abandono, o desinvestimento, etc. São escolhas disponíveis ao decisor na gerência de seus projetos e ativos reais, sendo por isso denominadas de opções reais (OR).

O termo opção real foi sugerido por Myers (1977) ao destacar que oportunidades de crescimento de uma empresa podiam ser vistas como opções dependentes de futuros investimentos discricionários da firma[1]. A abordagem de valoração econômica que contempla esses aspectos é denominada de teoria das opções reais e recentemente de análise de investimento sob incerteza.

A teoria de opções reais pode ser vista como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real (VPL) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência e quantidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos em toda a dissertação.

Assim, uma opção real é um direito, por isso uma opção e não uma obrigação, de realizar uma ação sobre um ativo real ou projeto, a um custo chamado preço de exercício, por um período de tempo pré-determinado, denominado de vida da opção. O preço de exercício é o custo do investimento, pois ocorre na expectativa

[1] O trabalho de Myers denominado “Determinants of Corporate Borrowing” tem o mérito de destacar que a visão de investimentos como opções poderia ter como a mais importante contribuição, a valoração de ativos reais (p.170). E estava certo.

de uma recompensa futura, seja pela geração de lucro ou pela redução de uma perda corrente no fluxo de caixa.

A maioria das decisões de investimentos possui características em comum, mas que ocorrem em diferentes intensidades. Destacam-se: O fato do investimento ser totalmente ou parcialmente irreversível; a incerteza sobre o retorno do investimento e a flexibilidade de se adiar a decisão em troca de se obter mais informações.

A teoria ortodoxa de decisão de investimento através do VPL (Valor Presente Líquido) não contempla as implicações decorrentes da interação entre essas três características que afetam a decisão ótima do investidor. O VPL não captura as flexibilidades disponíveis ao tomador de decisão, e por isso sistematicamente subestima o valor dos projetos (Copeland e Antikarov, 2001**,** p. 4-5). Além disso, o VPL ignora a possibilidade de perda, isso significa que o decisor que o utiliza ou é indiferente a este risco (neutro ao risco) ou realmente crê que pode se desfazer do investimento pelo seu valor original atualizado. A avaliação por opções reais se propõe a corrigir estas distorções.

Dixit e Pindick (1993, p. 6-7) discutem sobre a sub-avaliação implícita no VPL. Argumentam que o VPL assume que o investimento é reversível (de alguma forma poderia ser desfeito e recuperado) e representa uma decisão do tipo agora ou nunca. Embora muitas decisões de investimento tenham essas características, a maioria é pelo menos parcialmente irreversível e pode ser postergada, o que afeta profundamente a decisão de investir. Quando a firma exerce sua opção de investir, elimina de forma irreversível a possibilidade de esperar por novas informações que afetam o resultado do investimento e o momento ótimo para o investimento.

O valor da flexibilidade perdida é um custo de oportunidade que deve ser incluído no custo do investimento. Esse custo de oportunidade é muito sensível à incerteza associada ao futuro valor do projeto. Talvez isso ajude a explicar por que a teoria neoclássica de investimento falha empiricamente ao descrever o comportamento de investimento da firma. Seja por superestimar o efeito da taxa de juros e da política tributária sobre o nível de investimento, seja pelas empresas somente aprovarem seus projetos com VPL positivo descontando-os a taxas muito superiores ao seu custo de capital (*hurdle rates*) ou em cenários de *stress.* Essa

mesma incerteza também explica por que as firmas permanecem em seus negócios por longos períodos de prejuízo.

A faculdade gerencial de adaptar as decisões futuras às condições de mercado e às ações dos competidores aumenta o valor das oportunidades de investimento da firma, tanto por aproveitar o potencial de melhora dos projetos quanto por limitar perdas em relação às expectativas inicias de um gerenciamento passivo. Trigeorgis (1996, p.4) argumenta que a assimetria resultante da adaptabilidade gerencial revela um critério de investimento expandido ou estratégico com dois componentes: o tradicional VPL (estático, passivo) e o valor criado pela flexibilidade e interações estratégicas.

A abordagem por opções para o problema de valoração tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e das interações estratégicas. Esse valor manifesta-se tipicamente através das opções reais inerentes às oportunidades de investimento de capital, tendo como ativo subjacente o valor esperado descontado dos fluxos de caixa operacionais (Trigeorgis, 1996, p.4).

Assim uma oportunidade de investimento equivale a uma opção de compra financeira (*call*). De forma semelhante às financeiras, o valor das opções reais depende de pelo menos seis importantes variáveis: O valor do ativo de risco subjacente (projeto ou ativo real), o desvio padrão e os dividendos que podem ser obtidos através deste, o preço de exercício (valor do investimento ou desinvestimento), o tempo de expiração da opção e a taxa livre de risco (sob a hipótese de não arbitragem).

Essa dissertação tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob o ponto de vista teórico da ótica de opções reais, aplicados a problemas de Exploração e Produção de petróleo. Foi priorizado o foco em modelos simples que possam ser amplamente utilizados e facilmente implantados no dia a dia de uma empresa de petróleo. Para isso, o trabalho foi dividido em cinco partes. No Capítulo 2 são revistos os principais conceitos de opções reais em tempo discreto, incluindo o valor da redução da incerteza, a nova regra de decisao, taxonomia, valoração e a transição para tempo continuo. No Capítulo 3 amplia-se a discussão sobre opções reais para tempo e estados contínuos, incluindo processos estocásticos, Lema de Ito, modelagem do ativo subjacente, equações diferencias de

valoração, soluções analíticas, não analíticas e a aproximação de Bjerksund e Stensland (1993), além da simetria *call put*. No Capítulo 4 são discutidos dois modelos de valoração de opções simples de investimento em Exploração e Produção de petróleo, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Também é desenvolvido um modelo de opção composta, denominado de Modelo de Exploração. Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se alguns estudos de caso onde os modelos discutidos no capítulo anterior são comparados, além da discussão de priorização de investimentos com opções reais a partir de uma sugestão de Dias (1996). No Capítulo 6 são revistas e discutidas as conclusões.

A abordagem dessa dissertação é heurística. Eventuais erros são de responsabilidade do autor. Referências sobre todos os assuntos abordados são citadas ao longo de todo o texto.

Dias (2005, p.26-43) apresenta um bom resumo sobre a evolução bibliográfica do conhecimento na área de opções reais desde seus precursores na década de 70, passando pelos principais artigos das décadas de 80 e 90 bem como importantes livros textos e coletâneas de artigos publicados até a atualidade. Em seguida passa em revista ao crescente uso de opções reais em empresas e outras instituições, discutindo inclusive procedimentos para sua difusão e consolidação como ferramenta de trabalho. Vários exemplos verídicos disponíveis na literatura são apresentados, abordando tanto o uso de opções reais internamente às empresas como externamente nas negociações entre companhias e, por exemplo, com órgãos reguladores.

2. Conceitos Básicos de Opções Reais

A teoria de opções reais pode ser visto como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real dado pelo VPL (função objetivo) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência, quantidade e qualidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos neste capítulo.

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza

De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.8-9), investimentos são custos afundados quando são específicos da firma ou da indústria, como por exemplo, campanhas de publicidade ou equipamentos industriais especializados. No último caso, embora possa haver um valor de revenda, assim como ocorre com os equipamentos não específicos (veículos, computadores, etc.), os investimentos estão sujeitos à depreciação e outras forças de mercado que os tornam pelo menos parcialmente irreversíveis. De forma similar, ativos que possuem a opção de serem abandonados ou suspensos, incorrem em custos e ou investimentos irreversíveis caso essas opções sejam executadas.

Considerando a irreversibilidade dos investimentos e a incerteza relacionada aos fluxos de caixa futuros, a flexibilidade de esperar pela redução da incerteza pode gerar valor. A proposta de valoração pela teoria de opções reais é justamente capturar e quantificar este valor**.** Uma firma que tem uma oportunidade de gerar fluxos de caixa positivos ou, ao contrário abandonar fluxos de caixa negativos operantes, deve comparar os custos destas decisões com os possíveis benefícios de se esperar pela revelação de novas informações que reduzem ou eliminam as incertezas existentes no presente. Esse é o valor da espera pela redução da incerteza, permitindo a escolha ótima do decisor.

Copeland e Antikarov (2001**,** p.73-74) chamam a atenção para o fato de que o VPL poderia representar uma opção real particular, aquela que assume a inexistência de flexibilidade na tomada de decisão. Uma expressão usual para o VPL de um projeto em tempo discreto é dada por:

$$VPL = -I + \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$$

Na identidade acima I é o investimento, FCL é o fluxo de caixa livre e r a taxa de desconto. Nota-se que apenas um dos muitos caminhos possíveis ao FCL entre o início e o fim de um projeto é explicitamente considerado. A abordagem clássica do VPL usa somente a informação disponível no presente ignorando qualquer incerteza existente, recomendando o investimento caso seu valor seja positivo:

Regra de decisão do VPL: $Máx_{t=0}[0, E_0(V_T) - I]$ onde $E_0(V_T) = \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$.

O VPL ignora a incerteza, portanto desconsidera a possibilidade de perda em qualquer outro cenário que não seja o seu mundo determinístico. Isso significa que decidir com o VPL é ser indiferente ao risco (neutro ao risco), ou realmente crer que se pode desfazer do investimento pelo seu valor atualizado. A primeira alternativa seria considerar diferentes cenários para o projeto, cada qual com probabilidade P_j e valor presente $V_{T,j}$, sendo o valor esperado do projeto dado por: $E_0(V_T) = \sum_j P_j . V_{T,j}$. Essa técnica equivale a considerar uma árvore de decisão com a mesma regra do VPL, ou seja, que a decisão de investir é do tipo agora ou nunca e é feita com base em um valor esperado. Isso significa pressupor que o decisor ainda é neutro ao risco, pois embora possa reconhecer e quantificar a incerteza de um projeto através de cenários, ele se mostra indiferente ou passivo ao decidir com o valor monetário esperado (VME). Somente um novo paradigma pode levar o decisor à uma escolha que contemple o risco em suas decisões: Esperar pela redução da incerteza até que esta se torne equivalente à decisão imediata.

A abordagem por opções reais considera que a decisão é tomada quando a informação sobre o estado da natureza é revelada. Entre todas as alternativas mutuamente excludentes, escolhe-se a melhor. Assim, por exemplo, o valor do exercício (*payoff*) de uma de uma opção de investimento (*call* européia) é dado pelo valor esperado dos máximos (e não o máximo entre os valores esperados):

Regra de decisão de uma *call* européia: $E_0[Máx_{t=T}(0, V_T - I)]$

O valor das três abordagens na presença da flexibilidade de esperar somente será o mesmo se $E_0(V_T) = V_T$. Ou seja, na ausência de incerteza, o valor esperado em t_0 do valor futuro é igual ao valor futuro atualizado. De outra forma, decidir antecipadamente com o VPL equivale a supor que o investimento é reversível, ou seja, na medida em que um cenário desfavorável se concretize, o decisor sairia do negócio recuperando seu capital, o que não é real (Dixit e Pindick, 1994, p.28).

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money*

Como visto, a escolha ótima do decisor consiste em optar entre a decisão imediata ou esperar pela redução da incerteza, quando possível. Se nesta análise o decisor conclui que agir imediatamente é mais valioso do que esperar, diz-se que a opção real está madura ou *deep in the money*, e ele "mata" a opção ao agir. Se há maior valor na espera, o decisor deve adiar a decisão e manter a opção real ativa ou "viva".

Para se entender em que condições (regra de decisão) exercer ou manter uma opção real é mais vantajoso para a firma, são apresentados dois exemplos de decisão simples em tempo discreto: Em que condição a firma deve investir em um novo projeto e; Em que condição não deve abandonar um ativo real que apresenta VPL negativo.

Os exemplos são apresentados com a abordagem de valor esperado em árvores binomiais com nós de decisão e nós aleatórios. A utilização do valor esperado requer taxas de descontos adequadas ao ativo que está sendo descontado. Então para descontar o ativo subjacente usa-se uma taxa e ao descontar a opção outra. Além disso, a taxa de desconto de cada ativo deve variar ao longo da árvore com a incerteza ou estados da natureza. Este é um problema que não ocorre nos exemplos, pois são considerados apenas dois períodos e dois estados da natureza. Além disso, a taxa de desconto para a opção e para o ativo subjacente é considerada a mesma, mas essa premissa só é correta no mundo neutro ao risco, discutido na Seção 2.6.1. Portanto a taxa de desconto r utilizada nos dois exemplos é a rigor a taxa livre de risco (*risk free* - r_f) e probabilidade real q

é a rigor a probabilidade neutra ao risco p . Como os exemplos visam explorar as regras de decisão e o mundo neutro ao risco é discutido somente na Seção 2.6.1, preservou-se a notação r e q.

Exemplo 1: Opção de investimento com a flexibilidade de esperar por um período. Considere um projeto de investimento postergável por 1 período, cujo investimento I gera um fluxo de caixa V. No primeiro período t_0, o decisor pode escolher entre investir imediatamente e gerar um *payoff* positivo ou postergar a decisão para o segundo período (ver árvore de decisão - Figura 1). Se o decisor não tem a flexibilidade de adiar a decisão de investimento, ele encontra-se no ramo inferior da árvore e sua decisão de investir é com base na regra tradicional do VPL. Mas se o decisor dispõe da flexibilidade esperar e decidir sobre o investimento em t_1, ele pode escolher adiar a decisão para o segundo período (ramo superior da árvore). Em t_1 pode então observar o estado da natureza que se revela com as novas estimativas de Fluxo de Caixa Livre Descontado (FCD) do projeto. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*), o FCD do projeto apresenta valor V_U e caso contrário, V_D (estado da natureza pior ou *down*). Note que os estados da natureza V_U e V_D são os mesmos em qualquer ramo da árvore e que $V_U > V_D$. Após esperar, qualquer que seja o estado da natureza, a decisão de investir também é feita com base na regra do VPL. Demonstra-se em seguida em que condições o decisor racional que maximiza a riqueza da firma escolhe esperar por t_1 ou investir imediatamente.

Quando o decisor não dispõe da flexibilidade de esperar, sua decisão é do tipo investir agora ou nunca (ramo inferior). Considerando as probabilidades (reais) q e 1-q dos estados da natureza *up* e *down*, o VPL do projeto (V_0) em t_0 é dado pelo valor esperado do fluxo de caixa de t_1 ($E_0(V_1)$) descontado a uma taxa r apropriada, subtraído do investimento e somado do fluxo de caixa livre δ (dividendo) em t_0:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \text{, onde } E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} - I + \delta \qquad (1)$$

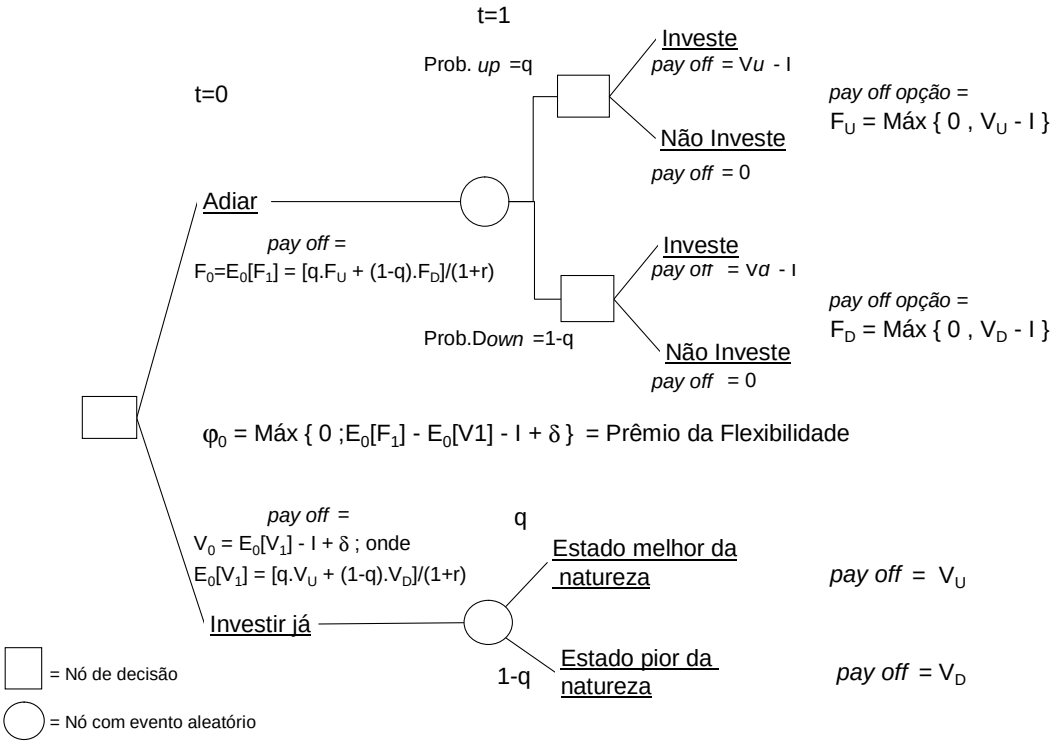

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período.

A regra de decisão será investir se $V_0 > 0$ ou desistir do projeto caso contrário. Mas com a flexibilidade de esperar, o decisor pode postergar a decisão e exercer a opção de investir em t_1 caso o projeto tenha *payoff* positivo ($V_1 - I > 0$). Portanto os *payoffs* da opção (F_1) nos dois estados da natureza possíveis em t_1 são:

$$F_U = Máx[0, V_U - I] \qquad \text{e} \qquad F_D = Máx[0, V_D - I]$$

A regra de decisão é investir se $F_1 > 0$. Nessa condição, diz-se que a opção está *in the money* e caso contrário, *out of the money*. O valor esperado de F_1 em t_0 é:

$$F_0 = E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} \qquad (2)$$

A decisão entre investir imediatamente ou esperar para decidir em t_1 é feita coma a escolha da alternativa de maior valor entre (1) e (2). Portanto, adiar a decisão de investir é mais valioso se:

$$(2) > (1) \Rightarrow (2) - (1) > 0 \Rightarrow E_0(F_1) - V_0 > 0$$

E o valor ou prêmio da flexibilidade de postergar (φ_0) a decisão de t_0 para t_1 será:

$$\varphi_0 = Máx\{0; E_0(F_1) - V_0\} = Máx\{0; \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} - \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + I - \delta\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = Máx\{0; \frac{q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)}{1+r}\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{(1+r)}.Máx\{0; q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)\}$$

A partir dessa equação pode-se explorar em que condição qualquer uma das variáveis torna a flexibilidade de postergar valiosa:

$$\varphi_0 > 0 \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) > 0$$

Pode-se também definir em que condições o decisor torna-se indiferente entre investir em t_0 ou esperar para decidir em t_1:

$$(2) = (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) = 0$$

Ou pelo contrário, definir em que condições investir imediatamente é mais vantajoso:

$$(2) < (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) < 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \quad (3)$$

Quando a relação (3) se verifica, diz-se que a opção está *deep in the money*, ou seja, o VPL (V_0) é de tal forma positivo que não vale a pena esperar. O custo de sacrificar o lucro imediato δ é maior do que o benefício esperar e tomar a decisão ótima após observar o estado da natureza em t_1.

Considerando q, I, r e δ dados, a inequação (3) será verdadeira a depender das relações entre F_U e F_D. Existem 3 situações a considerar: $F_U = F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D > 0$:

i) Supondo que: $F_U = F_D = 0 \Leftrightarrow V_D < V_U < I \Rightarrow E_0(V_1) < I \Rightarrow I - E_0(V_1) > 0$. Ou seja, a flexibilidade de esperar não tem valor, pois o decisor não investiria em t_1 qualquer que fosse o cenário revelado. Então, qual é a condição necessária para investir em t_0? Em (3):

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \;\Rightarrow\; q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} > (I-\delta) \Rightarrow \frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} - I + \delta > 0 \;\Rightarrow E_0(V_1) - I + \delta > 0 \Rightarrow$$

a) $V_0 > 0$ ou b) $\delta > I - E_0(V_1) > 0$

Então se a flexibilidade de esperar não tem valor ($F_U = F_D = 0$), a opção de investir reduz-se à regra tradicional do VPL ($V_0 > 0$) e o dividendo δ deve ser suficientemente positivo: $\delta > I - E_0(V_1) > 0$.

ii) Supondo que : $F_U = V_U - I > 0$ e que $F_D = 0$ ($V_D - I < 0 \Rightarrow I - V_D > 0$). Ou seja, em t_1 a opção está *in the money* no estado melhor da natureza e *out of the money* no estado pior da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \Rightarrow q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) + q.F_U \Rightarrow \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} - I + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.V_U + (1-q).V_D - I.(1+r)}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U - I)}{1+r} + \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > 0$$

$$\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$$

Ou seja, em t_0 a opção está *deep in the money* se a expressão $\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$ for verdadeira. Note que apesar de $F_U > 0$, em última

instância, investir ou não imediatamente não depende do que ocorrer no estado *up* da natureza.

iii) Supondo que $F_U > 0$ e $F_D > 0 \Leftrightarrow F_U = V_U - I$ e $F_D = V_D - I \Rightarrow V_U > I$ e $V_D > I$. Ou seja, em t_1 a opção de investimento está *in the money* qualquer que seja o estado da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I - \delta).(1+r) > 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - V_U + I) + (1-q).(V_D - V_D + I) > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow q.I + (1-q).I > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{I}{(1+r)} > I - \delta \Rightarrow \ \delta > I - \frac{I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Se a opção está *in the money* em qualquer cenário de t_1, estar *deep in the money* em t_0 implica que o dividendo seja maior que o valor presente do benefício da capitalização do investimento à taxa r, que é o custo de oportunidade de não investir imediatamente: $\delta > \frac{I.r}{(1+r)}$. Note que essa condição está inseirda na solução do caso ii).

Portanto, pode-se concluir que na opção de investimento, o VPL positivo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Em qualquer situação, o investimento imediato requer um prêmio maior do que o custo de oportunidade de não investir (esperar), exceto que a flexibilidade de esperar não tenha valor.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43) relata o resultado de *back-testing* (dados a partir de 1970) para uma companhia de petróleo que, hipoteticamente, na aprovação dos investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo, utilizasse opções reais no lugar do tradicional VPL. O teste considerou o cálculo do VPL *ex-post* de dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um Movimento Geométrico Browniano (Seção 3.1.1). Os resultados foram animadores: o VPL *ex-post* dos projetos com VPL >>0 apresentaram-se 16,6% superiores com o critério de OR e os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para um significativamente positivo na regra de OR. Esse resultado decorre da abordagem por OR exigir um prêmio adicional ao

tradicional VPL para o investimento imediato, que é o custo de oportunidade da flexibilidade de esperar. Com isso a probabilidade de um VPL negativo *ex post* considerando OR torna-se menor em relação ao tradicional VPL. É o benefício de se postergar a decisão evitando o investimento caso o estado da natureza revelado não seja favorável.

Exemplo 2: Opção de abandono com a flexibilidade de esperar por um período. Na literatura a opção de abandono é comumente tratada como o direito de vender um ativo por um valor terminal, cabendo ao decisor escolher o momento ótimo em um dado período. Nestes casos o valor da opção é positivo. Neste trabalho interessa especificamente opções de abando em que o decisor tem um custo ao abandonar o ativo, portanto a opção não tem necessariamente um valor positivo. Considere um ativo real operante que apresente um resultado operacional (δ) no primeiro período (t_0) e valor esperado do FCD futuro $E_0(V_1)$. O decisor pode então escolher entre abandonar o ativo imediatamente a um custo ou investimento ($I < 0$), ou postergar a decisão para o segundo período (t_1) - Figura 2, ramos superior e inferior da árvore de decisão respectivamente.

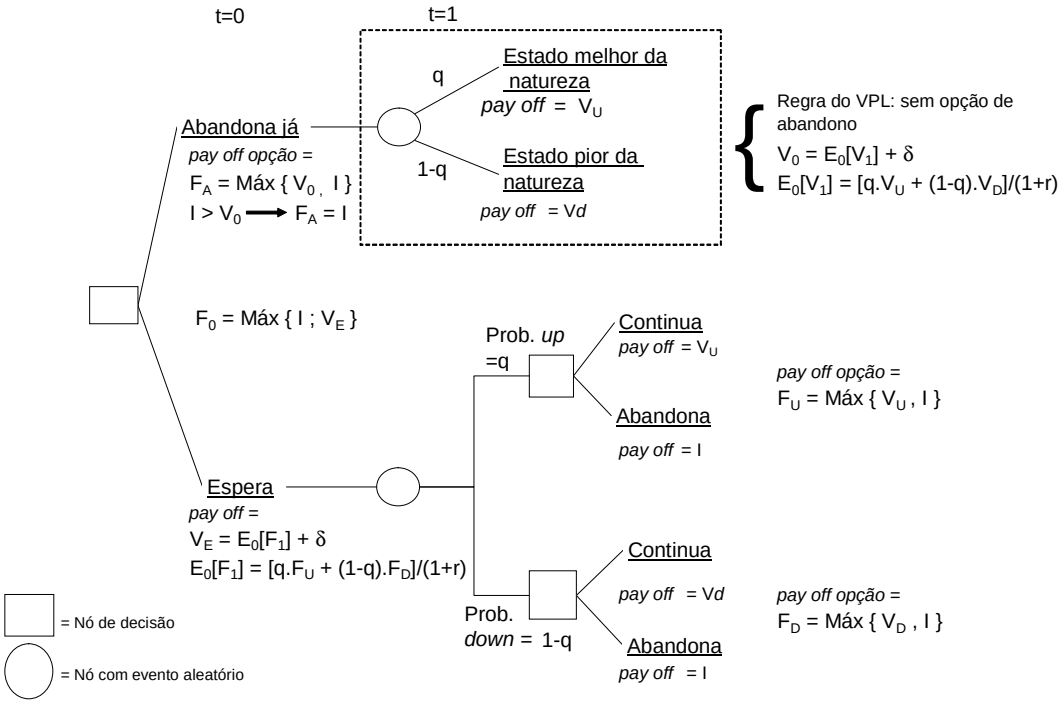

Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período.

O decisor que não tem a opção de abandono observa passivamente o valor de seu ativo real dado pela regra tradicional do VPL, representada dentro do quadro tracejado no ramo superior da árvore. Nesta situação, o VPL (V_0) do ativo é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) + \delta \qquad \text{e} \qquad E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)}$$

Se o decisor tem a opção de abandonar o ativo no primeiro período (o que corresponde a todo o ramo superior da árvore), o payoff F_A desta será:

$$F_A = Máx\{V_0, I\} \Rightarrow F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\}$$

Considerando I como o preço de exercício (constante) e V_0 como o preço do ativo subjacente (variável), observa-se que a opção de abandono equivale a uma opção de venda (*put*) financeira.

O decisor racional que maximiza o lucro da firma escolhe "abandonar já" se $I > V_0$:

$$I > V_0 \Rightarrow I - V_0 > 0 \Rightarrow \ Máx\{0, I - V_0\} = I - V_0 \Leftrightarrow$$

$$F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\} = V_0 + I - V_0 \Rightarrow \boxed{F_A = I}$$

Mas também é verdade que:

$$I > V_0 \therefore I < 0 \Rightarrow \boxed{V_0 < I < 0}$$

Esses dois resultados significam que o decisor só paga para abandonar um ativo se seu VPL for negativo e menor que o custo de abandono.

A flexibilidade de adiar a decisão para o segundo período t_1 é representada pelo ramo inferior da árvore da Figura 2. O decisor tem então a possibilidade de observar o estado da natureza que se revelará com novas estimativas do FCD para o ativo. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*) o FCD do ativo apresenta valor V_U e caso contrário V_D (estado da natureza pior ou *down*) – ou seja: $V_U > V_D$. Após esperar, os *payoffs* da opção de abandono nos dois estados da natureza em t_1 serão:

$$F_U = Máx\{V_U, I\} \text{ e } F_D = Máx\{V_D, I\} \Rightarrow$$

$$F_U = V_U + Máx\{0, I - V_U\} \text{ e } F_D = V_D + Máx\{0, I - V_D\}$$

O valor do ativo com a flexibilidade de abandonar em t_1 será:

$$V_E = E_0(F_1) + \delta \text{ onde } E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}$$

Uma firma que tem a oportunidade de abandonar um fluxo de caixa negativo imediatamente ($F_A = I$) deve comparar o custo I desta decisão com o valor do ativo com o benefício de esperar (V_E). O *payoff* da opção de abandono nos dois períodos (F_0) será:

$$F_0 = Máx\{V_E, I\} \Rightarrow F_0 = V_E + Máx\{0, I - V_E\}$$

Esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow Máx\{0, I - V_E\} = 0 \Rightarrow F_0 = V_E$$

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Este resultado define em que condição a opção de abandono não está *deep in the money* em t_0. Ou seja, interessa aqui definir em que circunstâncias vale mais ao decisor operar um FCD incerto do que pagar para abandoná-lo (inverter a desigualdade em (4) define a situação oposta: a opção de abandono imediato estaria *deep in the money*).

Se na inequação (4) q, r e δ são conhecidos, a escolha por esperar passa a depender das relações entre V_U, V_D e I, já que $F_U = Máx\{V_U, I\}$ e $F_D = Máx\{V_D, I\}$. Por construção $V_U > V_D$, então novamente há 3 situações a se examinar: $I > V_U > V_D$; $V_U > I > V_D$ e $V_U > V_D > I$:

i) $I > V_U > V_D$. Nesta situação, abandona-se o ativo em qualquer cenário de t_1 (e de t_0, pois $V_0 < 0$). Então, em que condições ainda sim é melhor esperar e abandonar em t_1 do que em t_0? Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.I + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{I}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow$$

$$\delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Isso significa que se o fluxo de caixa δ em t_0 for maior do que o valor presente da capitalização do investimento de abandono à taxa r, ainda sim vale a pena adiar o abandono.

ii) $V_U > I > V_D$. O ativo é mantido operante no cenário *up* e abandonado no cenário *down*. Então esperar por t_1 será vantajoso se:

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow q.V_U > (I-\delta).(1+r) - (1-q).I \Rightarrow$$

$$q.V_U > I.(1+r-1+q) - \delta.(1+r) \Rightarrow V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

Este resultado demonstra que se no cenário *up* o ativo não é abandonado, então para adiar o abandono de t_0 para t_1 é necessário que $V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q}$.

iii) $V_U > V_D > I$. O ativo é mantido operante nos cenários *up* e *down*, ou seja, não é abandonado em t_1. Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow V_E = V_0 > I$$

Esse resultado mostra que se esperar é mais valioso do que abandonar imediatamente ($V_E > I$), e que se em t_1 o ativo nunca é abandonado, então a opção de abandono é igual ao VPL em t_0 e o prêmio da flexibilidade de esperar é zero:

$$V_0 > I \Leftrightarrow F_A = Máx(V_0, I) = V_0 .$$

Portanto, pode-se concluir que na presença de uma opção real de abandono cujo preço de exercício seja um desembolso $I < 0$, o VPL negativo é uma condição necessária para a decisão de desinvestir em t_0, mas não suficiente. É preciso que o abandono imediato valha mais do que a flexibilidade de esperar, ou seja, a opção de abandono deve estar *deep in the money.* Esse termo pode parecer desconfortável já

que os FCD são negativos no exemplo. Mas considerando o jargão de opções, ele é adequado.

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias

Na Seção anterior discutiu-se em que termos uma opção de investimento (*call*) e outra de abandono (*put*) deveriam ou não ser exercidas imediatamente. O investimento necessário – um valor fixo (em geral) - corresponde ao preço de exercício da opção e o valor do projeto ou ativo real – variável - corresponde ao preço do ativo subjacente. O valor crítico ou gatilho é o preço do ativo subjacente que leva o decisor a optar pelo imediato investimento no projeto ou no imediato abandono do ativo. Ou seja, o gatilho é o preço que torna a opção *deep in the money*.

Para tornar o conceito mais claro, reconsidere Exemplo 1 da Seção anterior, mas suponha que o número de períodos é um valor N muito grande ($N \to \infty$). Entretanto, a incerteza quanto ao valor do projeto é resolvida de forma equivalente, ou seja, no segundo período. Sendo δ o FCL no primeiro período t_0, este pode evoluir em t_1 para um valor melhor $U.\delta$ caso ocorra o estado da natureza *up* ou para um valor pior $D.\delta$ caso o ocorra o estado *down*. Em qualquer cenário, permanece constante a partir de então (Figura 3).

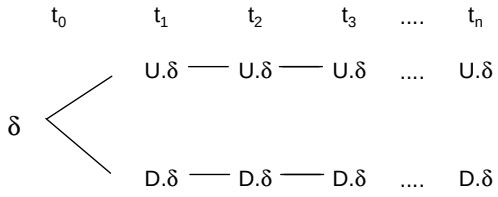

Figura 3 - Evolução do FCL a partir de t_0.

Pode-se escrever então que, se $N \to \infty$, os valores de V_U e V_D em t_1 serão:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{U.\delta}{r} + U.\delta = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \therefore V_D = \sum_{t=1}^{N} \frac{D.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{D.\delta}{r} + D.\delta = \frac{(1+r).D.\delta}{r}$$

Então o valor esperado de V_1 em t_0 será:

$$E_0(V_1) = \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta].(1+r)}{(1+r).r} \Rightarrow E_0(V_1) = \frac{q.U.\delta + (1-q).D.\delta}{r}$$

O VPL do projeto sem a flexibilidade de esperar é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \Rightarrow\ V_0 = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta]}{r} - I + \delta = \frac{q.\delta.(U-D) + D.\delta}{r} - I + \delta \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{\delta}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I \quad (6)$$

Se o decisor escolhe esperar e decidir sobre o projeto em t_1, a opção de investimento é dada por (2):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}, \text{ onde:}$$

$$F_U = Máx[V_U - I, 0] = Máx[\frac{U.\delta}{r}.(1+r) - I, 0] \therefore\ F_D = Máx[V_D - I, 0] = Máx[\frac{D.\delta}{r}.(1+r) - I, 0]$$

Suponha que $F_U > 0$ e $F_D = 0$ por simplicidade (se $F_U = F_D = 0$ não há opção em t_1 e se $F_U > F_D > 0$ a opção seria exercida em qualquer estado em t_1):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).0]}{(1+r)} = \frac{q.[(U.\delta / r).(1+r) - I]}{(1+r)} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{q.U.\delta}{r} - \frac{q.I}{1+r} \quad (7)$$

Então o gatilho será o FCL δ^* que torna a opção de investimento imediato mais valiosa do que a flexibilidade de adiar e decidir em t_1. No limite, o investimento imediato deve ser pelo menos tão valiosa quanto esperar, ou seja, o preço onde o decisor deixa de ser indiferente: (6) = (7):

$$V_0 = E_0(F_1) \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I = \frac{q.U.\delta^*}{r} - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta^*}{r}.(-q.D + r + D) = I - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[(1-q).D + r] = \frac{I.(1+r-q)}{1+r} \Rightarrow$$

$$\delta^* = \frac{r.I.(r + (1-q))}{(1+r).[(1-q).D + r]} \quad (8)$$

Em (8) pode-se observar que o valor do gatilho δ^* só depende do estado pior ou ruim da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho D do movimento para baixo do preço do ativo subjacente e de $(1-q)$. Esse fato é conhecido como Princípio das Más Notícias de Investimentos Irreversíveis (*bad news principle of irreversible investments*), termo foi cunhado por Bernanke (1983,

p.91-93, ver também Dixit e Pindick, 1994, p. 40). De acordo com Bernake esse resultado tem um apelo intuitivo: Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir (ou não) no período seguinte. Essa opção só tem valor caso haja uma probabilidade positiva do investimento não ser feito e da severidade da perda com o investimento irreversível. Ou seja, o valor da opção só depende do lado ruim da incerteza.

Note ainda que um pequeno aumento na probabilidade de um mal resultado não pode ser compensado por um ganho potencial com o lado bom ou positivo da incerteza. Observe também que o impacto do lado ruim sobre o valor de uma opção de investimento não depende das preferências ao risco do decisor. Assim eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. O Apêndice 1 demonstra que o gatilho δ^* que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar é dado por:

$$\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Até este momento discutiu-se o conceito de OR, exploraram-se as vantagens desta abordagem em relação ao VPL e exercitou-se a regra de decisão de um investidor considerando exemplos simples. A teoria de opções reais tem sido construída progressivamente a partir de contribuições de situações particulares, como bem evidencia o histórico da literatura. Com isso, uma taxonomia homogênea para OR ainda não é consenso, embora esforços rescentes apresentem significativos avanços. Na próxima Seção este assunto é discutido.

2.4. Taxonomia de opções reais

A abordagem do problema de decisão de investimento como opções reais tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e de suas interações estratégicas (ver adiante). Esse valor manifesta-se tipicamente através das flexibilidades embutidas nas oportunidades de investimento de capital.

Copeland e Antikarov (2001, p.12-13) classificam as opções reais primariamente pelo tipo de flexibilidade que oferecem. Assim a opção de diferir, esperar ou postergar é uma *call* americana sobre um projeto cujo início pode ser adiado. A opção de abandono de um projeto por um preço fixo é formalmente uma *put* americana, como o é a opção de contração, onde se vende uma parte do ativo por um preço fixo. A opção de expansão é o oposto da contração, e como a opção de extensão (prorrogação de um direito) são *calls* americanas. Opção de mudança de uso (*switch options*) a um preço fixo são *portfolios* de *calls* e *puts* americanas. As opções sobre opções são chamadas de opções compostas e incluem os projetos com investimentos em etapas ou fases, que oferecem a opção de abandonar ou diferir ao final de cada fase. Por fim, as *rainbow options* (opções arco-íris) são aquelas com múltiplas fontes de incerteza. Muitos problemas de decisão reais são opções arco-íris compostas (*compound rainbow options*), como ocorre na área de exploração e produção de petróleo. Essas situações são mais comuns do que parecem, por exemplo, basta considerar a incerteza no preço, na quantidade produzida e na taxa de desconto de qualquer investimento em fases.

Trigeorgis (1996, p.2-4) observa que as OR podem tanto ocorrer naturalmente (como opções de diferir, contratar, desativar, abandonar, etc.) como podem ser construídas a um custo desde o início de um projeto (opções como expansão de capacidade, crescimento, mudança de uso). Este autor também classifica as OR em categorias, destacando os tipos mais comuns, a indústria onde são mais importantes e alguns autores representativos que as analisaram. São elas: Opção de diferir, de investir em etapas (compostas), de mudança de escala (expandir, contrair, desativar ou reiniciar), de abandono, de mudança de uso (insumos, produtos, etc.), de crescimento (quando um investimento pode criar vários outros projetos) e opções múltiplas interagindo.

Dixit e Pindick (1994) por sua vez discutem pelo menos 13 tipos de OR diferentes e variações destas. Em sua maioria já foram citadas ou são variações das apresentadas nos parágrafos anteriores. Dias (1996, p.59-66) descreve os tipos de opções mais comuns observadas na literatura OR aplicadas à indústria do petróleo. Na Seção 4.1 o processo de Exploração e Produção de petróleo é discutido do ponto de vista de OR.

Não existe uma uniformidade absoluta para a taxonomia da OR. Por exemplo, o agrupamento denominado de opção de mudança de escala de Trigeorgis (*op. cit.*) é desmembrado em até quatro tipos pelos outros autores. Isso faz com que um mesmo tipo de opção receba diferentes nomes, por exemplo, opções compostas em geral têm o mesmo significado de opções seqüenciais de Dixit e Pindyck (*op. cit.*). Outro exemplo é a opção de diferir ou esperar em Copeland e Antikarov (op. cit), denominada de opção investir em Dixit e Pindick (op. cit).

A denominação “esperar” de Copeland e Antikarov é particularmente infeliz, pois esperar é um aspecto comum a toda OR até a sua data de expiração. De forma similar, alguém pode então argumentar que investir também é uma característica comum a vários tipos de opções, e com razão, mas na condição de preço de exercício, e não como meio de implantação de um projeto.

Uma outra dimensão do problema de valoração e decisão de investimentos pode ser percebida ao se considerar as interações estratégicas entre competidores (Trigeorgis, 1996, p.133-134). Se o impacto de um competidor restringe-se à captura de parte do valor do mercado de um projeto, então o decisor ainda encontra-se com o problema de maximização do valor da firma discutido nos itens anteriores, embora mais complexo. Neste caso, deve-se incorporar o impacto da competição na decisão de investimento, mas pode-se ignorar qualquer efeito interativo de ação e reação entre os competidores. Entretanto, se a decisão de investimento é sensível e contingente às decisões de outras firmas, então um tratamento mais complexo combinando Teoria de Jogos com Teoria de Opções Reais é necessário.

Trigeorgis (1996, p.142-149) sugere uma classificação para OR considerando as interações estratégicas entre competidores. Essa classificação, de acordo com o autor, visa destacar importantes características das oportunidades de investimento como opções sobre ativos reais. Sugere que três aspectos devem ser considerados

sob o ponto de vista de estratégia competitiva: o primeiro refere-se à exclusividade da propriedade e o efeito da competição sobre a habilidade da firma apropriar para si o valor da opção. Se a firma tem exclusividade sobre se e quando investir, ou seja, não é afetada pelos competidores, a opção é dita Proprietária, caso contrário, a opção é Compartilhada. A segunda questão estratégica refere-se às interações internas à oportunidade de investimento. Se a OR leva a outros investimentos ou outras opções subseqüentes, é então chamada de Composta. Com isso esse tipo de opção pode ter maior impacto estratégico sobre a firma, o que torna sua análise mais complexa. Por outro lado, se o projeto é analisado como um investimento isolado, a OR é dita Simples. A terceira questão estratégica refere-se ao momento e urgência da decisão. Projetos que necessitam de uma decisão imediata do tipo agora ou nunca são ditos em Expiração ou Expirando, mas se a decisão pode ser adiada, então a opção é chamada de Diferível ou Adiável.

A Figura 4 apresenta exemplos com os conceitos da classificação anterior, considerando diferentes estratégias e o valor da OR correspondentes.

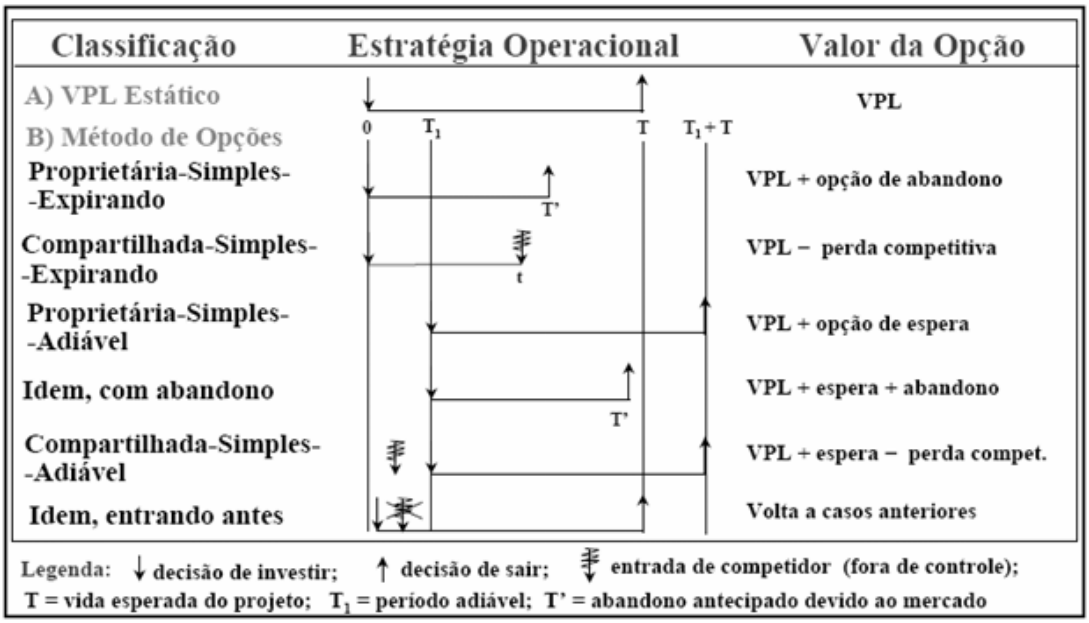

Figura 4 - Classificação das OR, interações estratégicas e valor da opção como a soma do VPL com o valor da "opção" dada pela flexibilidade e o efeito competitivo (adaptado de Trigeorgis, 1996, p.148).

No quadro da Figura 4, o item A representa o problema de capital budgeting tradicional enquanto o item B inclui seis exemplos com OR. Para uma opção proprietária, simples e em expiração com a flexibilidade de abandono em T<T', o

valor da OR é dado pelo VPL somado do valor de abandono. Para uma opção compartilhada, simples e em expiração, o investimento é feito imediatamente, mas a entrada de um competidor pode erodir o valor do projeto. Para uma opção proprietária, simples e adiável, o valor da opção depende da flexibilidade de adiar o investimento e da existência da possibilidade de abandono. Para uma opção compatilhada, simples e adiável, a entrada prévia de um competidor gera uma perda competitiva, mas que pode ser evitada caso a firma invista antes.

Vollert (2003, p.22-39) apresenta talvez a mais completa sistemática para OR, revendo e organizando a contribuição histórica de muitos autores a partir do trabalho pioneiro de Myers (1977, *op. cit.*). Apresenta duas classificações que contemplam a perspectiva gerencial e a perspectiva de valoração econômica. As duas abordagens são complementares na medida em que se propõe a relacionar as flexibilidades gerenciais (de orientação prática) com o instrumental teórico exigido para a valoração com OR, derivado da teoria de apreçamento de opções financeiras.

2.4.1. Classificação gerencial

A classificação gerencial de Vollert (op. cit.) pode ser bem compreendida através da decomposição do valor da firma em seu valor estático (dado pelo VPL tradicional) e o valor das diferentes flexibilidades gerenciais (Figura 5):

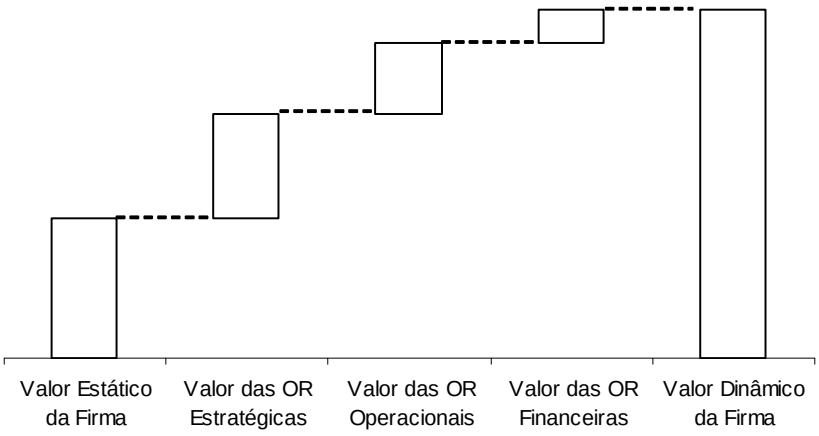

Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003, p.22).

Esta subdivisão é feita exclusivamente com o propósito taxonômico, já que o valor total das OR de um projeto, ativo ou firma é tipicamente não aditivo em decorrência das interações entre as OR**.**

Trigeorgis (1996, p.227-256) avalia a interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto – opções múltiplas (ou compostas na taxonomia de Copeland e Antikarov *op. cit*.). Demonstra que a interação entre duas opções pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo do valor do projeto. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto. Embora os valores das opções não sejam aditivos, em interações pequenas e simples a adição pode ser uma boa aproximação. O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são de tipos opostos (por exemplo, expandir e contrair) e tem uma separação finita, a probabilidade conjunta de exercício será pequena. Mas à medida que aumenta o intervalo cresce o valor da interação. Por outro lado, se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

O valor dinâmico da firma (Figura 5) é então dado pela composição do valor estático da firma com o valor das OR Estratégicas, Operacionais e Financeiras. As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desinvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio. As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. As OR Operacionais podem ser subdivididas em opções de insumo (*input options*), processo, produto (*output options*) e opções de expansão/contração. Há frequentemente uma estreita relação entre OR Estratégicas e Operacionais, pois, havendo alta flexibilidade nos ativos existentes, naturalmente surgem novas e futuras OR Estratégicas. As OR Financeiras, por fim, são aquelas relacionadas à

habilidade de modificar a estrutura de capital durante o curso de um projeto, agregando valor para a firma.

Neste trabalho, a opção de investir é o que na literatura se chama opção de diferir, mas é a mesma designação adotada por Dixit e Pindick (2004), e refere-se a uma OR estratégica. Por sua vez, a opção de abandono refere-se ao abandono irreversível de um ativo real, onde o preço de exercício é um custo.

Percebe-se que a classificação gerencial se preocupa mais em auxiliar o aspecto da nomenclatura de OR como tratado por Copeland e Antikarov (2001), Dixit e Pindick (2004 - que na verdade não se preocupam com este tema) e em parte por Trigeorgis (1996). Por sua vez, a classificação sob a perspectiva da valoração de Vollert tem um papel mais pró-ativo, na medida em que se preocupa em sistematizar os diferentes aspectos que afetam o valor de uma OR.

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração

A classificação com a perspectiva de valoração de Vollert (op. cit., p.26-33, Figuras 2.4 a 2.11) ocupa-se de aspectos específicos de OR a serem considerados para o apreçamento por opções. Dois grandes tópicos são considerados: Parâmetros de entrada para opções reais e as diferenças em relação às financeiras e; Limitações da analogia de OR com opções financeiras.

i - Parâmetros de entrada

Considerando os parâmetros de entrada para a valoração com OR, o primeiro importante aspecto a ser considerado são as fontes de incerteza. Vollert (op. cit.) sumariza as fontes de risco como tecnológico, *timing*, político, social, legal e econômico, sendo este último subdividido em valor do projeto, preço/custo, demanda, processo, taxa de câmbio e risco estratégico. Todos esses riscos afetam a lucratividade de um projeto e muitos deles ocorrem simultaneamente. Em aplicações práticas, as fontes de risco mais importantes são as que afetam seriamente o projeto (em intensidade e freqüência), e por isso devem ser priorizadas na modelagem do valor deste. Especial atenção deve ser dada aos riscos específicos da firma, que não são apreçados pelo mercado. Em seguida é preciso definir o instrumental matemático a ser utilizado para a modelagem do risco do ativo subjacente: se em tempo discreto ou contínuo; o tipo de processo estocástico a ser utilizado (Seção

3.1), e por fim, se o ativo subjacente é ou não transacionado no mercado e como isso pode ser contornado. A estimativa da volatilidade do processo estocástico pode ser feita com o auxílio de séries históricas ou com um modelo de equilíbrio como o CAPM.

A modelagem dos dividendos é igualmente importante, devendo se considerar a taxa, a periodicidade, se estocástico ou não, e o beneficiário dos pagamentos. Em relação a este ponto, em OR é preciso diferenciar entre os dividendos pagos ao detentor do ativo subjacente e os dividendos pagos ao detentor da opção. A taxa de retorno por sua vez, dever refletir a incerteza relacionada aos fluxos de caixa (*timing*, freqüência e intensidade). Esse problema é normalmente resolvido com um desconto na taxa de retorno via taxa de dividendo, explicando o baixo retorno observado em ativos reais em relação aos seus pares financeiros com estruturas de risco semelhantes. No caso de uma *commodiy* essa taxa é conhecida como *convenience yeld* e compensa os dividendos que deveriam ser recebidos pelo proprietário fisicamente detentor desta, mas não pelo detentor de um contrato sobre a mesma. A *convenience yeld* pode ser determinada no mercado de contratos futuro e *foward* ou por uma estrutura a termo desta taxa, caso seja estocástica no modelo de valoração.

Outros dois parâmetros indispensáveis são: o preço de exercício e a taxa livre de risco. Em OR estes parâmetros podem variar durante a vida da opção, podendo ser modelados por processos estocásticos. O último parâmetro a ser considerado é justamente a vida da opção, ou maturidade. Em OR, esse parâmetro pode estar relacionado à vida do ativo subjacente e, em ambos os casos, a maturidade pode ser classificada como perpétua, limitada ou desconhecida.

ii - Limitações da analogia de OR com opções financeiras

Considerando as limitações da analogia de OR com opções financeiras, Vollert (op. cit., p.34-39) destaca cinco aspectos: Urgência na decisão, competitividade da situação (ou do mercado), resolução da incerteza, efeito tempo de atraso e interações inter e intra-projetos.

O aspecto urgência da decisão de Vollert (op. cit., p. 34) corresponde à classificação segundo as interações estratégicas de Trigeorgis (1996, p.133-134)

apresentada anteriormente (ver Figura 4). O aspecto competitividade da situação refere-se ao nível de competição do mercado à que pertence a OR (tanto as exclusivas como as compartilhadas). Se o mercado é competitivo, o impacto da competitividade deve ser modelado exogenamente, por exemplo, com saltos de Poisson (ver Seção 3.1.3). Em situações de oligopólio, ao contrário, a modelagem da competição é endógena e pode considerar modelos dinâmicos de teoria de jogos[2].

O impacto da resolução da incerteza por sua vez, inverte-se se o risco é transacionado no mercado ou se é exclusivo da firma. O aumento do preço do risco transacionado no mercado aumenta o valor da OR, mas o oposto ocorre com o risco privado (por exemplo, a incerteza técnica, ver Seção 2.5). Isso torna importante a separação entre esses dois tipos de risco em modelos de OR. Um segundo aspecto importante é entender como a incerteza é resolvida ao longo da vida de uma OR. Os riscos transacionados no mercado (por exemplo, o preço de uma *commodiy*) em geral resolvem-se naturalmente com o tempo. Mas em relação ao risco privado, frequentemente ocorre o oposto, de forma que o detentor da OR não só não observa a resolução da incerteza como tem que investir para a sua redução. São as denominadas opções de aprendizagem (*learning options*), que representam importantes ferramentas gerencias tanto para limitar o risco de perda como para influenciar a incerteza de forma favorável à firma.

O efeito tempo de atraso ou resposta refere-se à defasagem entre a decisão de investir e o início do fluxo de caixa (*time lags*), o que pode durar de poucos dias até vários anos em OR. Naturalmente, este efeito pode ter um alto impacto na valoração e decisão ótima sobre um projeto. Isso torna valioso para a firma a segmentação do projeto em fases, o que pode trazer várias vantagens como a geração de novas opções (inclusive de aprendizagem) e a redução do efeito tempo de atraso para um primeiro fluxo de caixa.

[2] Em OR compostas, o exercício antecipado de uma ou mais etapas pode gerar valor, enquanto que em OR simples, o exercício antecipado pode ser necessário mesmo destruindo a opção. Jogos de opções têm se tornado um ativo campo de pesquisa com o objetivo de capturar o componente estratégico das OR (ver Vollert, 2003, p.36, Trigeorgis, 1996, p.133-134 e Dias, 2005, p.360-402).

Finalmente, as interações inter e intra-projetos refere-se às opções compostas de um mesmo projeto e às interações entre OR de diferentes projetos. Dada a não aditividade das OR, a modelagem a ser construída deve considerar simultaneamente todos esses aspectos, inclusive eventuais sinergias. Vollert (op. cit, p.39) alerta que a interdependência pode resultar em modelos excessivamente complexos. Sugere então que sejam ignoradas as flexibilidades menos importantes em ordem de um modelo operacional, cujos erros são geralmente pequenos.

A classificação sob a perspectiva de valoração de Vollert é bastante útil na medida em que pode auxiliar na construção de modelos de valoração com OR como uma espécie de guia no mapeamento de aspectos relevantes[3]. Conhecendo-se melhor a OR a valorar, pode-se realizar esta tarefa com a técnica ou abordagem mais adequada, entre as várias disponíveis.

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica

Em finanças, tradicionalmente se diferencia dois tipos de risco, denominados de risco de mercado (ou sistemático ou não diversificável) e de risco específico (ou diversificável). O risco de mercado está relacionado aos movimentos da economia em geral, decorrendo de acontecimentos aleatórios que afetam todos os ativos. O risco específico por sua vez relaciona-se à firma e o tipo de negócio em que está envolvida, podendo ser eliminado através da diversificação.

Os riscos de mercado e específico também geram incerteza sobre o valor econômico de projetos e ativos reais. Nos exemplos apresentados na Seção 2.2, a flexibilidade de esperar e o caráter opcional do investimento ou abandono em t_1 mostraram que essa incerteza possui valor, estimulando ou reduzindo a disposição de investir. A incerteza pode ser subdividida em incerteza econômica e incerteza técnica[4].

---

[3] A preocupação de Vollert com uma boa sistemática se justifica na medida em que seu livro, *A Stochastic Control Framework for Real Options in Strategic Valuation* (2003), concentra-se num modelo geral dedicado a capturar as interações entre OR intra-projetos (*switching options*, reversíveis ou não) e inter-projetos (interações competitivas endógenas e exógenas).

[4] Um terceiro tipo de incerteza tem sido considerado em OR. Denominada de estratégica, contempla a incerteza decorrente da interação estratégica entre competidores e entre projetos. Ver Seção 2.4.2 uma breve discussão, Vollert (2003, Cap.5) ou Dias (2005, Cap.4)

A incerteza econômica é exógena à firma, afetando negativamente as decisões de investimentos na medida em que estimula a espera, postergando projetos com VPL positivo. Quanto maior o horizonte temporal, maior é a incerteza econômica.

A Incerteza técnica é endógena ao processo de decisão da firma e não é correlacionada aos movimentos da economia. Mas conviver com a incerteza técnica pode ser uma escolha gerencial inadequada para a tomada de decisão, pois se contempla cenários desfavoráveis que reduzem o valor esperado do ativo básico da OR, adiando o exercício da opção.

Assim, a incerteza técnica cria um incentivo para o investimento em fases em busca de informação. Por isso, decisões de investimento com incerteza técnica são chamadas de opções de aprendizagem: A empresa aprende com esse tipo de investimento, permitindo, por exemplo, o melhor dimensionamento do projeto (ver Dixit e Pindick, 1994, p.47-48 e p.345-347). Assim, a redução da incerteza técnica cria um benefício adicional denominado de valor-sombra (*shadow value*), que não é diretamente mensurado pelo FCD.

É interessante notar que uma mesma variável pode ter os dois tipos de incerteza. No exemplo dado por Dixit e Pindick (*op. cit.*) o custo de um projeto pode ter tanto incerteza associada ao preço de insumos e facilidades de produção (incerteza econômica, risco específico) quanto à quantidade que será utilizada (incerteza técnica - risco de dimensionamento incorreto).

Dias (1996, p.36) destaca a diferença entre um investidor que detém uma carteira de ativos financeiros e um decisor que detém uma carteira de projetos e ativos reais: “O investidor não pode tomar vantagem da incerteza técnica para maximizar sua riqueza, o melhor que pode fazer é diversificar a sua carteira, de forma a tornar irrelevante esse risco e outros riscos específicos. Já o gerente pode agir, revisando a sua alocação de recursos, de forma a tomar vantagem da incerteza técnica e maximizar o valor da firma”. Por outro lado, o gerente ou decisor não tem a mesma flexibilidade do investidor para diversificar sua carteira e assim poder minimizar ou eliminar o risco específico.

Como a incerteza técnica independe do risco de mercado (é um risco diversificável), sua correlação com o retorno do *portfolio* de mercado é nula. Isso faz

com que o prêmio de risco exigido por este risco seja zero (Dias, 2005, p.135-137). Assim, enquanto que os processos estocásticos relacionados à incerteza econômica devem ter a tendência ajustada pela subtração de um prêmio de risco, as distribuições de probabilidade da incerteza técnica permanecem inalteradas. Por isso, a combinação de incertezas técnicas com incerteza de mercado em modelos de OR pode se dar de uma forma mais simples se for usado um método neutro ao risco. Pode-se usar a taxa livre de risco para descontar processos estocásticos neutros ao risco das variáveis de mercado, combinados com as distribuições de probabilidade das incertezas técnicas, que já são naturalmente neutras ao risco.

Dias (2005, Cap.3) trata a incerteza técnica com Teoria da Informação. A análise de valor da informação (VOI – *value of information*[5]) considera a aquisição de informação para a redução da incerteza (variância) em um processo seqüencial de revelação com expectativas condicionais. Propõe uma medida de aprendizagem probabilística associada ao conceito de distribuição de revelações.

2.6. Introdução à valoração de opções reais

O valor de uma opção real é dado pela soma do valor do projeto sem a opção (VPL tradicional) com o valor (prêmio) da flexibilidade embutida no projeto[6]:

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio da flexibilidade (10)

O apreçamento de OR é baseado no conhecimento sobre seus pares financeiros. Apesar das analogias entre estes dois tipos de opções, há diferenças importantes (Trigeorgis, 1996, p.127-129). Opções e ativos financeiros são negociados em um mercado eficiente a um custo mínimo. Opções e ativos reais podem ser pouco ou não negociáveis, especialmente se as opções são compartilhadas. Opções reais de domínio público são ainda mais complexas considerando as interações estratégicas entre as firmas, envolvendo investimentos preventivos e a criação de barreiras de entrada. Por outro lado, opções proprietárias

[5] O VOI é a diferença entre o valor da decisão informada e o valor da decisão à priori (sem a informação): VOI = VDI − VDP.

[6] Note que aqui se considera apenas uma única opção real associada a um projeto. Como discutido na Seção 2.4, a não aditividade das opções de um mesmo projeto ou quando interagem estando em projetos diferentes, a rigor, exige uma adaptação semântica da expressão (10):

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio líquido resultante das interações das flexibilidades (10).

como patentes podem ser facilmente negociáveis. Outras opções reais só podem ser vendidas se em conjunto com o ativo subjacente. Os custos de transação por sua vez não são desprezíveis, podendo mesmo inviabilizar um negócio. Mas o fato das opções reais não terem um mercado desenvolvido e suas conseqüências, não representa uma barreira para a sua valoração com o instrumental de opções financeiras.

O valor de uma opção real é a soma do VPL tradicional com o prêmio da flexibilidade (equação 10). Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2) discutiu-se em que condições o decisor deveria optar por esperar ou exercer a opção imediatamente, mas não sobre a estimativa das variáveis envolvidas. Por exemplo, como são calculadas as probabilidades dos estados da natureza? Como quantificar o valor do ativo subjacente nos estados *up* e *down* da natureza? Que taxa de desconto deve-se utilizar?

Não é fácil saber a taxa de desconto a ser aplicada sobre os *payoffs* esperados da opção no mundo real. Inicialmente sabe-se que uma opção é mais arriscada do que seu ativo subjacente (possui maior incerteza), exigindo por isso uma taxa de desconto maior. Se a opção for transacionada no mercado, seu valor é conhecido e pode-se obter de forma inversa a taxa de desconto a ser utilizada. Mas existem alternativas mais simples de apreçamento de opções que dispensam esta estimativa e de outras variáveis, como por exemplo, as probabilidades reais dos estados da natureza.

Algumas das estratégias de apreçamento mais conhecidas envolvem a construção de *portfolios* que permitem chegar ao valor da opção. Apresenta-se nesta dissertação a equivalência entre três alternativas desse tipo de valoração: Avaliação neutra ao risco, ativos contingentes (*contigent claims*) e *portfolios* replicantes. Segue-se uma quarta opção de apreçamento com programação dinâmica (há outras alternativas para o apreçamento de OR, ver, por exemplo, Seção 3.5). Embora a demonstração seja feita heuristicamente e a partir de um caso simples, o resultado é perfeitamente geral.

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*)

A valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) é um princípio fundamental para o apreçamento de opções financeiras (Hull, 2003, p.202-204). Este princípio

afirma que o preço de uma opção em um mundo neutro ao risco é correto também para o mundo real. Todos os investidores "tornam-se" indiferentes (neutro) ao risco e com isso não requerem mais prêmio de risco, o que torna o retorno esperado de qualquer ativo financeiro igual à taxa livre de risco[7].

A avaliação neutra ao risco de opções financeiras decorre do argumento de não arbitragem e também é válida para OR. Reconsidere a opção de investimento com a flexibilidade de adiar do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora o projeto paga dividendos δ_1 em t_1. O valor do projeto pode então evoluir de V_0 para $V_U + \delta_U$ ou $V_D + \delta_D$ conforme o estado da natureza. De forma similar o valor da opção pode variar para F_U e F_D - Figura 6.

A Figura 6 equivale ao ramo superior da Figura 1, mas com as probabilidades neutras ao risco p e $1-p$ dos estados da natureza up e down. Na Figura 1, o ramo inferior da árvore representou a decisão imediata, dada pela regra do VPL. Ao compará-lo com o ramo da superior da mesma Figura se explorou a regra de decisão considerando a flexibilidade de adiar. Note que o valor da opção foi dado pelo ramo superior, e a diferença entre os valores presentes dos dois ramos representa o prêmio da flexibilidade da equação (10).

[7] Note que o método não supõe que os investidores sejam neutros ao risco.

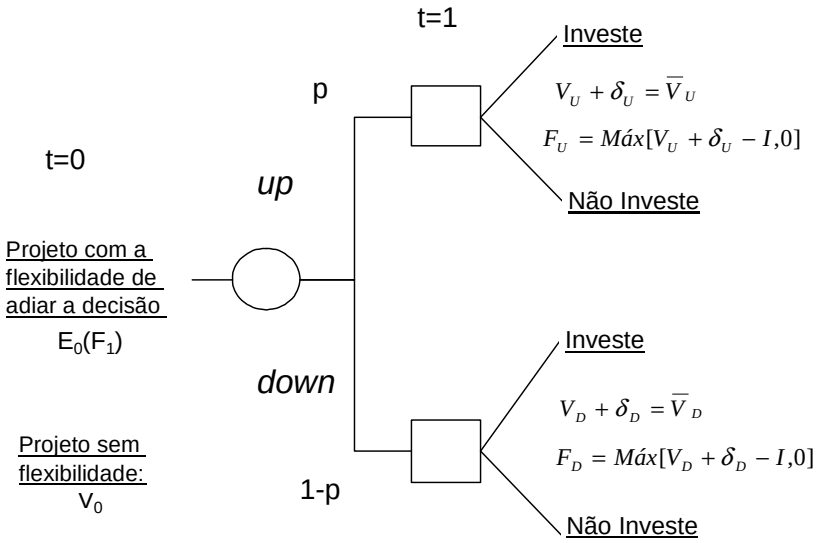

Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar.

Considere um *portfolio* (Φ) composto por uma posição longa na opção de investimento e uma curta em Δ unidades do ativo subjacente[8] (V_0). Para calcular o número Δ de ativos subjacentes que torne o *portfolio* sem risco, o valor deste deve ser o mesmo nos dois estados da natureza *up* e *down*:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D} \quad (11)$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Como o *portfolio* é sem risco o seu valor em t_0 é igual ao seu valor em t_1 descontado à taxa livre de risco (r_f):

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_1}{1+r_f} = \frac{\Phi_U}{1+r_f} \Rightarrow E_0(F_1) - \Delta.V_0 = \frac{F_U - \Delta.\overline{V}_U}{R_f} \Rightarrow$$

[8] A rigor, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. Poderia ser uma ação, um contrato futuro ou um *portfolio* dinâmico de ativos continuamente ajustado, de forma que seja obtida a perfeita correlação com o ativo da OR (Dixit e Pindick, 1994, p.117). A hipótese do *Market Asset Disclaimer* (MAD) propõe que este ativo seja o VPL do próprio projeto da OR – ver Seção 3.3.1. Nesta Seção adota-se o MAD para a demonstração proposta.

$$E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U \quad (12)$$

Onde $R_f = 1 + r_f$. Seja U e D tal que:

$$U = \frac{\overline{V}_U}{V_0} = \frac{V_U + \delta_U}{V_0} \Rightarrow \overline{V}_U = U.V_0 \therefore D = \frac{\overline{V}_D}{V_0} = \frac{V_D + \delta_D}{V_0} \Rightarrow \overline{V_D} = D.V_0$$

Usando (11), U e D em (12), tem-se:

$$E_0(F_1).R_f = \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.V_0.R_f + F_U - \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.U.V_0 \Rightarrow$$

$$E_0(F_1).R_f.(U-D) = R_f.(F_U - F_D). + F_U.(U-D) - U.(F_U - F_D) \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + \frac{(U - R_f)}{(U-D)}.\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + [1 - \frac{(R_f - D)}{(U-D)}].\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \text{ onde:} \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U-D)} \quad (14)$$

O preço da opção com a flexibilidade de esperar é dado por (13). Note que não depende das probabilidades reais q e $1-q$ dos estados da natureza nem do valor esperado do projeto, logo independe do grau de aversão ao risco do decisor. Isso implica que o preço da opção no mundo real é igual ao preço no mundo neutro ao risco. Mas o resultado (13) também sugere que o valor da opção de esperar por t_1 é o valor esperado de seus *payoffs* nos estados *up* e *down* com probabilidades p e $1-p$. Essas probabilidades são denominadas de probabilidades neutras ao risco e tem valor dado por (14). Note que anular o dividendo na demonstração ($\delta_U = \delta_D = 0$) apenas altera U, D e as probabilidades neutra ao risco p e $1-p$, sendo o resultado idêntico ao apresentado por Hull (*op. cit.*). Incluir dividendo em t_0 também não altera o resultado demonstrado, apenas que U e D devem considerar $V_0 + \delta_0$ como denominador.

Também se pode calcular o valor esperado do ativo subjacente $E_1(V_1)$ com as probabilidades neutras ao risco (14) em t_1:

$$E_1(V_1) = p.U.V_0 + (1-p).D.V_0 \Rightarrow E_1(V_1) = p.(U-D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow$$

$$E_1(V_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.(U-D).V_0 + D.V_0 = (R_f - D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow \boxed{E_1(V_1) = (1+r_f).V_0}$$

Este resultado demonstra que, no mundo neutro ao risco, o preço de qualquer ativo cresce à taxa livre de risco.

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*)

A segunda forma que se apresenta para calcular o valor da opção, aqui denominada de *ativos contingentes*, corresponde à adotada extensivamente por Dixit e Pindick em seu livro *Investment Under Uncertainty* (1994). Estes autores a denominam de *Contingent Claims* com o uso de *Spanning Assets***.**

Seja um *portfolio* Φ composto pela opção de investimento (Figura 6) e Δ ativos subjacentes[9], de tal forma que seu valor é constante em qualquer estado da natureza:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}} \quad (11)^{10}$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Sendo o *portfolio* sem risco, o seu valor cresce à taxa livre de risco, de outra forma haveria arbitragem. Então:

$$d\Phi = r_f.\Phi_0.dt\,.$$

Mas a variação de valor de um *portfolio* também é dada pelo ganho de capital e dividendo distribuído, então:

$$d\Phi = [dF - \Delta.(dV + d\delta)].dt$$

Igualando as duas equações e discretizando:

---

[9] A rigor, ver nota de rodapé 7, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. A hipótese do *Market Asset Disclaimer* – ver Seção 3.3.1 – é adotada nesta Seção pelo seu apelo intuitivo.

[10] A equação (11) é conhecida como delta *hedging* por sinalizar ao detentor da posição curta de uma opção a quantidade de ativos subjacentes que deve deter de forma a criar uma estratégia de *hedging* sem risco.

$$[(F_1 - F_0) - \Delta.((V_1 - V_0) + \delta_1)].(t_1 - t_0) = r_f.\Phi_0.(t_1 - t_0) \Rightarrow$$
$$F_1 - F_0 - \Delta.V_1 + \Delta.V_0 - \Delta.\delta_1 = r_f.F_0 - r_f.\Delta.V_0 \Rightarrow$$
$$F_1 - \Delta.(V_1 + \delta_1) + (1 + r_f).\Delta.V_0 = (1 + r_f).F_0 \Rightarrow \Phi_1 + R_f.\Delta.V_0 = R_f.F_0$$

Como o *portfolio* é sem risco, então:

$$\Phi_1 = \Phi_U = F_U - \Delta.\overline{V}_U \Rightarrow \boxed{F_U - \Delta.\overline{V}_U + R_f.\Delta.V_0 = E_0(F_1).R_f}$$

Esta última expressão é novamente a equação (12). Logo, substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14).

$$\boxed{E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f}} \text{ (13) onde: } \boxed{p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)}} \text{ (14)}$$

O apreçamento por *portfolio* replicante e a programação dinâmica levam aos mesmos resultados (13) e (14), e encontram-se demonstrados no Apêndice 2.

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados

Demonstrou-se nas Seções 2.6.1 e 2.6.2 e no Apêndice 2 que a avaliação neutra ao risco, por *contingent claims*, por *portfolios* replicantes e por programação dinâmica são equivalentes na medida em que levam ao mesmo resultado. As três primeiras técnicas consistem em criar *portfolios* com o objetivo de valorar opções considerando a eficiência de mercado e a ausência de arbitragem. Mas as semelhanças param por aí.

As avaliações neutras ao risco e por *contingent claims* consideram *portfolios* formados pela opção e um ativo perfeitamente correlacionado com o projeto. Os *portfolios* são montados de tal forma que apresentam valor constante em qualquer estado da natureza, portanto são sem risco. O *portfolio* replicante é constituído pelo ativo subjacente e títulos livre de risco, tendo como objetivo replicar os *payoffs* da opção, por isso é um *portfolio* com risco.

A avaliação neutra ao risco calcula o valor da opção considerando que o *portfolio* em t_1 descontado à taxa livre de risco é igual ao valor do *portfolio* em t_0. A valoração por *contingent claims* considera que o ganho de capital mais dividendo recebidos entre t_0 e t_1 é igual ao valor do *portfolio* em t_0 capitalizado à taxa livre de

risco. Por fim, o *portfolio* replicante por modelar o comportamento da OR, tem o mesmo valor do que esta em t_0.

A programação dinâmica aparenta ser mais simples, já que não monta nenhum *portfolio*, apenas utiliza o conceito de valor esperado e que a utilidade do decisor seja crescente com o lucro. Mas depende das probabilidades reais e da taxa ajustada ao risco da opção μ, que podem ser verdadeiramente desconhecidas. Alternativamente, a programação dinâmica pode ser aplicada no mundo neutro ao risco, utilizando as probabilidades neutras ao risco e a taxa livre de risco. Neste caso assume indiretamente todas as premissas desta valoração.

Na próxima Seção desenvolve-se a teoria da programação dinâmica para um modelo de vários períodos e seu caso limite em tempo contínuo. Para isso utiliza-se o contexto do Exemplo 1 (Seção 2.2), novamente por sua simplicidade e sem perda de generalidade.

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo

Para ativos financeiros em que informação, negócios e mudanças de preços ocorrem a todo instante, aplicar finanças em tempo contínuo soa natural. Para problemas de *capital budgeting*, a abordagem em tempo contínuo é em muitos casos pelo menos tão razoável quanto considerar fluxos de caixa anuais (Vollert, 2003, p.50), mas com a vantagem de utilizar os resultados da literatura de opções financeiras para valorar OR.

Dixit e Pindick (1994, p.98-106) apresentam uma didática transição do problema de apreçamento de OR de dois para muitos períodos e daí para tempo contínuo. Os pontos mais relevantes são destacados em seguida.

Reconsidere o contexto da decisão do problema de investimento do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora com vários períodos e onde a incerteza segue um processo de Markov, ou seja, não depende de seu histórico passado (ver Seção 3.1). Seja x_t a variável de estado que descreve a situação atual da firma e como esta afeta sua opção de investimento e, seja u_t a variável de controle que descreve as escolhas disponíveis ao decisor: Investir ou esperar. As variáveis x_t e u_t afetam tanto o lucro do período corrente $\pi_t(x_t, u_t)$ (ou dividendo - $\delta_t(x_t, u_t)$), quanto a

distribuição de probabilidade dos futuros estados da natureza. O objetivo do decisor é escolher a seqüência de controles u_t que maximize o valor esperado da firma, ativo ou projeto - $F_t(x_t, u_t)$:

$$F_t(x_t) = \underset{u_t}{Máx} \{\pi_t(x_t, u_t) + E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (15)$$

A equação (15) é denominada de Equação Geral de Bellman e representa o princípio da otimização de Bellman para vários períodos em tempo discreto. O termo $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$ é denominado de valor de continuação (*continuation value*) e representa do ponto de vista do período t, o valor esperado das escolhas ótimas futuras ($u_{t+1}, u_{t+2}, ...$). A variável de controle u_t então é escolhida de forma que $F_t(x_t)$ seja máximo. Isso representa exatamente o *backward induction* da programação dinâmica, iniciada no último período T até $t+1$ ($u_{t+T}, ..., u_{t+2}, u_{t+1}$), e por fim em t com a escolha de u_t.

Se o horizonte de tempo é infinito (mas ainda com intervalos discretos), o decisor enfrenta o mesmo problema em qualquer data e a equação de Bellman é comum a todos os períodos, dependendo somente de x_t:

$$F(x_t) = \underset{u_t}{Máx}\{\pi(x_t, u_t) + E_t[F(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (16)$$

A equação (16) é uma equação funcional não linear (pois é recursiva) que neste caso tem solução única (Dixit e Pindick, 1664, p.102). A boa notícia é que há uma solução prática simples. Iniciando de uma estimativa qualquer para o valor verdadeiro da função - $F^1(x_t)$ - escolhe-se a variável de controle ótima u^1. Retornando u^1 ao lado direito de (16), obtém-se uma segunda estimativa – agora calculada – do valor verdadeiro da função: $F^2(x_t)$. Repetindo-se o processo continuamente converge-se para o verdadeiro valor da função. A convergência é garantida pelo fator de desconto $1/(1+r)$ que é menor do que 1.

Suponha agora que a duração de cada período de tempo Δt tenda a zero. O lucro e o fator de desconto devem ser considerados como taxas, de forma que a equação (15) é reescrita:

$$F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t)|x,u]/(1+r.\Delta t)\}$$

Multiplicando por $1+r.\Delta t$ e rearranjando:

$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - F(x,t)]\} \Rightarrow$$
$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[\Delta F]\}$$

Dividindo por Δt e tomando este tendendo a zero, obtém-se a equação de Bellman para tempo contínuo:

$$r.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t) + E[dF]/dt\} \quad (17)$$

A equação (17) mostra que o retorno do ativo medido sobre uma função de valor ($r.F(x,t)$) é a soma do seu lucro (ou dividendo) imediato com a taxa esperada de ganho de capital. A igualdade reflete a condição de não arbitragem e para isso, o ativo deve ser otimamente gerenciado (o que é dado pela maximização em relação às escolhas disponíveis ao decisor: u).

A equação (17) é uma formulação generalizada do problema de valoração em tempo contínuo. Neste trabalho, essa função é uma OR cujo valor dependente de uma ou mais variáveis de risco (estocásticas) associadas ao ativo subjacente da opção. Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2), a incerteza relacionada ao ativo subjacente foi descrita pelos estados da natureza das árvores binomiais. Entretanto, esse é um tratamento insatisfatório, pois a incerteza vista como cenários discretos não corresponde à realidade de muitos problemas reais. Por outro lado, descrever a incerteza associada ao ativo subjacente (x) com processos estocásticos contínuos (dx) é relativamente simples. Igualmente importante é obter o processo estocástico da OR (dF) derivado do(s) processo(s) estocástico(s) do ativo subjacente, o que se faz usando o de Lema de Ito. Resta então resolver a equação diferencial do valor da OR (dF) de forma satisfatória. Estes são temas tratados no próximo Capítulo.

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos

A abordagem apresentada para processos estocásticos e o Lema de Ito nesta dissertação são heurísticas

3.1. Processos estocásticos em finanças

Um processo estocástico é uma função que dá a probabilidade com que uma variável estará em um estado i e em um instante $t \in [t_o, T]$. Assim o processo estocástico pode descrever a evolução aleatória de uma variável com o tempo (ver Figura 7, Seção 3.1.1). Cada caminho possível da variável aleatória é uma coleção de observações: $X = \{X(t), t \in [t_0, T]\}$, onde $X(t)$ é a observação da variável aleatória X no estado da natureza i vigente no instante t **.**

Essa aleatoriedade é que habilita os processos estocásticos para a modelagem da incerteza sobre a evolução de uma variável como, por exemplo, o preço de um ativo. Assim, um processo estocástico envolve pelo menos uma variável aleatória que, se muda de valor em intervalos de tempo conhecidos ou fixos, caracteriza um processo de tempo discreto. Se a variável muda em qualquer instante t o processo é dito continuo no tempo. Por outro lado, se a variável aleatória assume um conjunto de valores descontínuos, que representam os estados da natureza, o processo é dito de variável discreta. Se ao contrário, a variável pode assumir qualquer valor em um dado intervalo, o processo é dito de variável continua (os estados da natureza são contínuos). Um processo estocástico pode ainda ser classificado (grosseiramente) como estacionário se possui estatísticas constantes por longos períodos de tempo, ou não-estacionário, quando ocorre o contrário. Assim, por exemplo, em todo o Capítulo 2 os exemplos apresentados são processos estocásticos estacionários com variável e tempo discretos.

Uma importante característica para processos estocásticos é a propriedade de Markov**.** Um processo é dito de Markov quando sua distribuição de probabilidade em qualquer instante futuro não depende de seu histórico passado. De outra forma, a única informação relevante para a distribuição de probabilidade futura é a informação do momento presente.

Em seguida são apresentados os principais processos estocásticos contínuos utilizados em opções reais[11] destacados em Dixit e Pindick (1994, Cap. 3) e detalhados por Brandão (Cap. 3). Dentre estes, fundamental é o Processo de Wiener, que por sua simplicidade, funciona como um elemento de construção para outros processos mais realistas e sofisticados.

3.1.1. Movimentos Brownianos

O Processo de Wiener ou movimento Browniano é um processo estocástico em tempo contínuo com três importantes propriedades:

I – É um processo de Markov.

II – As mudanças no processo δz para qualquer intervalo de tempo Δt são normalmente distribuídas e a variância cresce linearmente com o tempo. Por definição:

$$\delta z = \varepsilon.\sqrt{\delta t} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \;\Rightarrow \delta z \sim N(0,\sqrt{\delta t})$$

Onde ε segue uma Normal padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão um. Assim o valor esperado de z é sempre zero e sua variância é δt.

III – Apresenta variações ou incrementos δz independentes por unidade δt de tempo, ou seja, possui correlação serial nula: $Corr(\delta z_i, \delta z_j) = 0$.

$$Corr(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{Cov(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{Var(\delta z_i)}.\sqrt{Var(\delta z_j)}} \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{\delta t}.\sqrt{\delta t}} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t}, \varepsilon_j.\sqrt{\delta t})}{\delta t} = \frac{E\{[\varepsilon_i.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t})].[\varepsilon_j.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_j.\sqrt{\delta t})]}{\delta t} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\delta t.E\{[\varepsilon_i - 0].[\varepsilon_j - 0]\}}{\delta t} = E[\varepsilon_i].E[\varepsilon_j] = 0.0 \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = 0$$

Onde: $\rho =$ Correlação, $\sigma(\delta z_i, \delta z_j) =$ Covariância e $\sigma^2 =$ Variância.

[11] Conforme comentado ao final da Seção 2.7, os processos de variável discreta são comumente insatisfatórios para a descrição dos fatores de risco do ativo subjacente, motivo pelo qual são preteridos daqui por diante.

Na medida em que se consideram intervalos de tempo progressivamente menores, no limite $\delta t \to 0$, o processo torna-se continuo no tempo, pode-se escrever que:

$$dz = \varepsilon.\sqrt{dt} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \therefore dz \sim N(0,\sqrt{dt})$$

Onde dz é denominado incremento de Wiener. O fato de este processo ter a propriedade de Markov e de $dt \to 0$ (o que em geral torna $|dz| = |\varepsilon.\sqrt{dt}| >> dt$) faz com que o caminho da variável dz seja irregular e "quebradiço" (Figura 7). Por isso, no Processo de Wiener a variável estocástica não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional, o que demanda o uso do cálculo estocástico:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Além disso, duas outras propriedades decorrem (Hull, 2003, p.219):

I – O comprimento esperado do caminho percorrido pela variável z é infinito para qualquer intervalo de tempo;

II – O número esperado de vezes que z iguala qualquer valor em particular em qualquer intervalo de tempo é infinito.

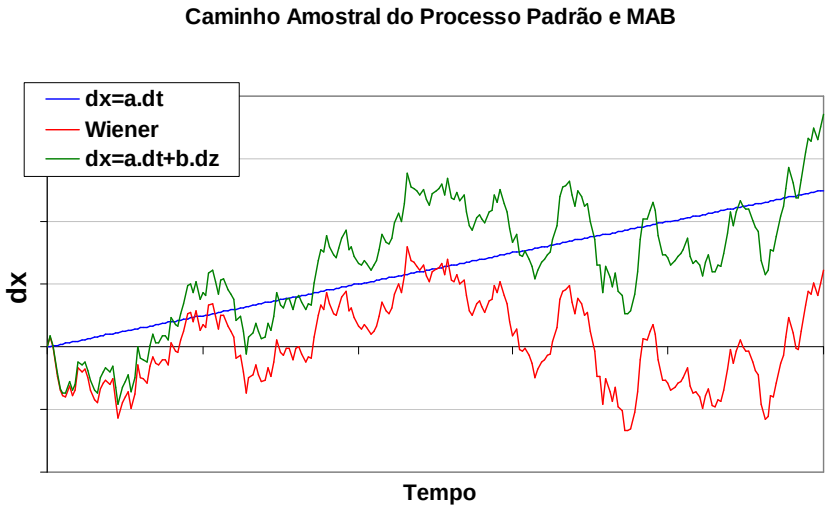

Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. A reta em azul representa a tendência do MAB.

Embora o Processo de Wiener tenha propriedades que pareçam restritivas do ponto de vista prático, trata-se uma ferramenta muito útil na modelagem de muitas

variáveis que mudam de forma continua e estocástica com o tempo. Adaptações podem ser necessárias, como por exemplo, para modelar preços que em geral não podem ser negativos (neste caso assume-se que o logaritmo do preço é normalmente distribuído – ver adiante).

A adaptação mais simples do Processo de Wiener é a inclusão de uma tendência ou *drift*, denominado de Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Aritmético Browniano (MAB) ou Movimento Browniano com D*rift* (Figura 7).

$$dx = \alpha.dt + \sigma.dz \quad (18)$$ sendo α e σ constantes.

Onde α é o *drift*, σ a volatilidade e dz é o incremento de Wiener. O Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, conforme mostrado, por exemplo, por Dixit e Pindick para um MAB (1994, p.68-70).

As variações dx do MAB - (18) - seguem uma distribuição normal com média $\alpha.dt$ e variância $\sigma^2.dt$: $dx \sim N(\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt})$:

$$E(dx) = E(\alpha.dt + \sigma.dz) = E(\alpha.dt) + E(\sigma.dz) = \alpha.dt + \sigma.E(dz) \Rightarrow$$
$$E(dx) = \alpha.dt + \sigma.0 \Rightarrow E(dx) = \alpha.dt$$

$$\sigma^2(dx) = V(dx) = V(\alpha.dt + \sigma.dz) = V(\alpha.dt) + V(\sigma.dz) + 2.Cov(\alpha.dt, \sigma.dz) \Rightarrow$$
$$V(dx) = 0 + \sigma^2.dt + 2.0 = \sigma^2.dt \Rightarrow \sigma(dx) = \sigma.\sqrt{dt}$$

Pode-se observar na Figura 7 que no curto prazo a volatilidade é determinante para o movimento Browniano enquanto que no longo prazo a tendência é que define o processo. Isso se deve ao fato da volatilidade crescer com $\sqrt{dt}$ e a média com dt. Se o dt é pequeno então $\sqrt{dt} >> dt$, mas à medida que dt cresce a relação se inverte: $\sqrt{dt} << dt$.

Um processo mais generalizado denominado de Processo de Ito ou Movimento Browniano Generalizado pode ser definido a partir do MAB, substituindo as constantes α e σ por funções não aleatórias de x e t.

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz$$

O valor esperado do Processo de Ito é dado por $E(dx) = a(x,t).dt$, e a variância é dada por $\sigma^2(dx) = b^2(x,t).dt$, sendo que $a(x,t).dt$ é a taxa instantânea de tendência ou *drift* e $b(x,t).\sqrt{dt}$ é a taxa instantânea de variância.

Um caso particular especialmente importante do Processo de Ito é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), obtido fazendo $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$ (Figura 8), sendo α e σ constantes:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz \quad (19) \quad \text{e} \quad dx \sim N[\alpha.x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

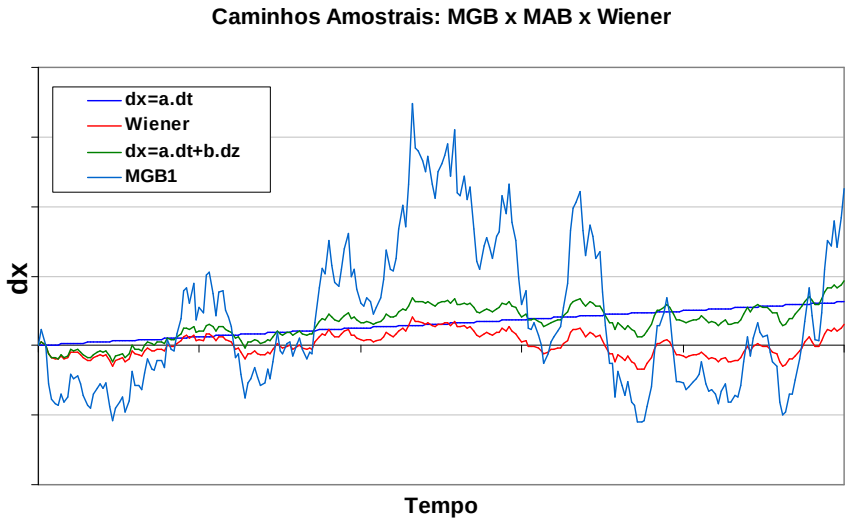

Figura 8 – MGB em relação ao Wiener padrão e ao MAB da Figura 7.

O MGB também é um processo estocástico não estacionário em que o valor esperado de dx depende do valor de x no momento inicial. Considerando que $\sigma = 0$, a equação (19) deixa de ser um processo estocástico e pode-se utilizar o cálculo diferencial convencional, então:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt; \quad \text{Mas: } d\ln x = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow d\ln x = \alpha.dt \Rightarrow$$

$$\int_0^x d\ln x = \int_0^t \alpha.dt \Rightarrow \ln(x_t / x_0) = \alpha.(t-0) \Rightarrow x_t / x_0 = \exp(\alpha.t) \Rightarrow x_t = x_0.\exp(\alpha.t)$$

Se $\sigma \neq 0$ é preciso utilizar o Lema de Ito do cálculo diferencial estocástico para definir o processo estocástico de $d\ln x$. Como se verá adiante (Seção 3.2.1),

$d \ln x$ é normalmente distribuídos e segue um o Processo de Wiener Generalizado dado por:

$$d \ln x = (\alpha - \sigma^2 / 2).dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \text{e} \quad d \ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2 / 2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Considerando um intervalo de tempo Δt, então:

$$\ln x_t \sim N[\ln x_{0+}(\alpha - \sigma^2 / 2).\Delta t, \sigma.\sqrt{\Delta t}] \therefore \text{ Se } Y = \ln x_t \Rightarrow x_t = e^Y \Rightarrow E(x_t) = E(e^Y)$$

E a variância de x_t será: $Var(x_t) = E(x_t)^2 - E^2(x_t) = E(e^{2Y}) - E^2(e^Y)$.

Ou seja, tanto o valor esperado quanto a variância de x_t são funções de $E(e^Y)$. Brandão (Cap.3, p.22-24) demonstra que:

$$E(x_t) = x_0.e^{(\alpha.t)} \quad \text{e} \quad Var(x_t) = x_0^2.e^{(2.\alpha.t)}.(e^{(\sigma^2.t)} - 1)$$

3.1.2. Reversão à média

Processos estocásticos que tendem a divergir do ponto de origem com o passar do tempo podem não ser adequados para algumas variáveis econômicas. O preço de *commodities* como petróleo e cobre, por exemplo, embora possam variar de forma aleatória no curto prazo em resposta a desequilíbrios de mercado, no longo tendem a reverter na direção do custo marginal de produção (Dixit e Pindick, 1994, p.74) ou alguma média que reflita o preço de equilíbrio de mercado. Processos com essa característica são denominados de Modelos de Reversão à Média (MRM).

Essa média no caso de uma *commodity* inclui o custo marginal de produção, a remuneração ao risco e o chamado "custo de utilização" (*user cost*) quando se trata de um recurso não-renovável, crescente com o tempo devido ao efeito da exaustão (Pindyck & Rubinfeld, 1995, p.545-546, apud Dias, 1996, p.109). Quanto mais competitivo for o mercado, maior deve ser a velocidade de reversão à média. No entanto, a velocidade de reversão também depende das restrições tecnológicas[12] do bem a ser produzido. Na indústria do petróleo, tipicamente de capital intensivo, as restrições tecnológicas somadas à existência um cartel atuante (OPEP) implicam

[12] A natureza impõe restrições tecnológicas de forma que apenas algumas combinações de insumos constituem formas viáveis de produzir certa quantidade de produtos. As alternativas viáveis são denominados de conjunto de produção, cuja fronteira ou limite descreve a função de produção (Varian, 2003, p.344).

numa velocidade de reversão à média muito lenta, conforme se observa nas séries históricas de preço do petróleo.

Há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média. Responder a essa pergunta implica na análise de séries históricas de preços. Dixit e Pindick (1994, p.77-78) sugerem e realizam esta análise com o teste de raiz unitária de Dickey e Fuller (1981, apud Dixit e Pindick op.cit) sobre séries históricas longas de preços de petróleo. Considerando uma série de 120 anos, estes autores concluem pela reversão à média. Mas ao considerarem séries de 30 ou 40 anos não conseguem rejeita a hipótese de *random walk*. Essa parece ser a situação de muitas variáveis econômicas, qual seja, é difícil estatisticamente distinguir entre *random walk* e reversão à média com dados de 30 ou 40 anos. Como resultado, estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos. A favor do MGB, porém, conta a simplicidade analítica, motivo pelo qual este processo é o mais adotado na literatura (Dias, 1996, p.106).

Existem vários MRM sendo que, os mais utilizados, podem ser divididos em dois grupos (Dias, 1996, p.116). O primeiro grupo agrega os MRM baseados no Processo de Ornstein-Uhlenbeck, sendo mais utilizado em aplicações econômicas. O segundo grupo, mais utilizado no mercado financeiro, deriva da equação de MRM descrita em Shimko (1992, pg.11).

O processo reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck apresenta algumas variações. O modelo mais simples é denominado de MRM Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck :

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.dz \quad (21) \qquad \text{e} \qquad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde η é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é o nível para que x tende a reverter. O Processo de Ornstein-Uhlenbeck apresenta a propriedade de Markov, embora seus incrementos não sejam independentes. Observe que se $x > \bar{x}$ então dx tende a ser negativo (dz é uma distribuição simétrica) e por isso x caminha na direção de $\bar{x}$. Se ocorrer $x < \bar{x}$, dx tende a ser positivo e novamente x tende a $\bar{x}$.

Note que quanto maior η, maior o efeito da convergência dada por $\bar{x} - x$, por isso η é denominado de "velocidade" de reversão. A média e variância deste processo podem ser obtidas a partir das equações de kolmogorov e são dadas por (ver demonstração em Dixit e Pindick, 1994, p.90-91):

$$E[x] = \bar{x} + (x - \bar{x}).e^{-\eta.t} \quad \text{e} \quad V[x - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2.\eta}.(1 - e^{-2.\eta.t})$$

Observe que se trata de um processo convergente, pois se $t \to \infty$ então $E[x] = \bar{x}$ e a variância converge para um valor constante: $V[x - \bar{x}] = \sigma^2 / 2.\eta$. Caso $\eta \to \infty$ novamente $E[x] = \bar{x}$, mas a variância ao contrário tende para zero. Por fim se $\eta \to 0$ o processo se transforma num Movimento Browniano simples: $E[x] = x$ e $V[x] = \sigma^2.t$.

Dixit e Pindick (1994, p.76) observam que a equação (21) é a versão em tempo contínuo de um processo auto-regressivo de 1ª ordem em tempo discreto – AR(1). Isso significa que seus parâmetros podem então ser estimados a partir de dados históricos em tempo discreto.

O MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck é o modelo mais popular deste grupo por vários motivos, como não gerar preços negativos, por sua similaridade com o MGB e por ter uma solução analítica para o problema da opção de investimento com expiração infinita (Dixit e Pindyck, 1994, p.161-163). A equação deste modelo é dada por:

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz \quad \text{e} \quad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

Note que a diferença para o MGB é que a tendência α é substituída por $\eta.(\bar{x} - x)$, que é justamente o termo de reversão. Com isso, a solução do problema de investimento de Dixit e Pindick (op. cit) com o MGB se estende ao MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck com alguns ajustes.

Metcalf e Hassett (1995) comparam o retorno de um investimento considerando o MGB e MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck para a modelagem do preço de um produto ou o valor de um ativo. Neste sentido apresentam uma

equação que generaliza os processos estocásticos de reversão à média e Browniano:

$$\frac{dx}{x} = \{\alpha + [\eta.(\bar{x}.e^{\alpha.t} - x)]\}.dt + \sigma.dz \quad (22)$$

Note que se $\alpha = 0$ obtém-se o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck dado por (20). Se $\eta = 0$ obtém-se o MGB (19). O termo $e^{\alpha.t}$ é uma inovação em relação aos MRM anteriores refletindo a expectativa de que a média de longo prazo $\bar{x}$ varie com o tempo (crescente se $\alpha > 0$ e vice-versa).

A outra classe de processo de reversão à média, como dito, deriva da equação de Shimko (1992, p.11):

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.x^{\gamma}.dz \quad (23) \qquad \text{e} \qquad dx = N \sim [\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.x^{\gamma}.\sqrt{dt}]$$

Essa classe de processos de MRM possui o mesmo valor esperado de dx, mas a variância cresce com o expoente γ. Note que se γ é nulo, obtém-se o MRM de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético (21).

Trata-se de uma classe de processos também bem difundida na literatura com diferentes aplicações (ver Dias, 1996, p.119-120).

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo o fato de convergir para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado. Preços crescentes estimulam a entrada de novos concorrentes, o que aumenta a oferta e estimula a sua redução. Simetricamente, preços muito baixos eliminam os competidores com maiores custos, reduzindo a oferta, o que estimula a recuperação do nível de preços.

Entretanto, Metcalf e Hassett (1995) mostram numericamente que o nível de investimento agregado obtido com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck no lugar do MGB é estatisticamente o mesmo para um range de parâmetros representativo. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva

de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck, obtido a partir da Equação (22) fazendo a tendência (α) igual à zero: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$. O MGB também é obtido a partir de (22) com tendência (α) e velocidade de reversão (η) nulas: $dx = \sigma.x.dz$. Em outras palavras, em seu estudo estes autores fazem com que tanto o MGB quanto o MRM apresentem a mesma tendência ou *drift*, no caso nula. De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM, intuitivamente espera-se que os preços gerados pelo primeiro irão necessariamente dominar o MRM.

A estabilização da variância com o tempo no MRM geométrico (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com o MGB, limita o valor da flexibilidade de esperar. Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir em relação aos Movimentos Brownianos. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM significa que preços mais altos são alcançados com menor freqüência (Efeito Preços), o que induz a uma redução do nível de investimentos. Os autores mostram que estes dois efeitos se tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, os autores argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza[13].

Dixit e Pindyck, (1994, p.161-167) também discutem os efeitos decorrentes da adoção do MRM. Adicionalmente, argumentam que a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o exercício da opção de investir. Segundo estes autores, o efeito resultante do MRM é menos óbvio do que o do MGB**.**

[13] Este resultado foi obtido em um modelo onde a função de produção apresenta retorno decrescente de escala, o que ocorre, por exemplo, em projetos de produção de petróleo. Entretanto, se o retorno de escala é constante e os custos são convexos, os efeitos preços altos e variância se somam e aumentam o nível de investimentos.

3.1.3. Processos de saltos de Poisson

Choques na oferta de um produto podem causar descontinuidades nos níveis de preços praticados. Por exemplo, a entrada de um novo competidor em um mercado pouco competitivo aumentando a oferta, ou ao contrário, conflitos armados e instabilidades políticas reduzindo a oferta, podem causar respectivamente queda ou aumento brusco nos preços correntes. Assim algumas variáveis econômicas podem apresentar infreqüentes, mas discretos saltos em seu valor, sendo modeladas por um Processo de Poisson (Dixit e Pindick, 1994, p.85).

O Processo de Poisson é um processo que apresenta uma variável dq que modela saltos de tamanho u fixo ou variável, correlacionado a x ou não, onde a probabilidade de ocorrência ($\lambda.dt$) do salto é dada por uma de taxa de chegada λ por unidade de tempo dt com distribuição de Poisson:

$$dq = \begin{cases} u & com\ probabilidade\ \ \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade\ \ 1-\lambda.dt \end{cases} \quad (24) \Rightarrow$$

$$E(dq) = u.\lambda.dt + 0.(1-\lambda).dt \Rightarrow \boxed{E(dq) = u.\lambda.dt} \quad (25)$$

Note que a distribuição de probabilidade, o valor esperado e a variância de dq são contínuos no tempo, mas dq não. Por analogia com o Processo de Ito, dx pode ser escrito como:

$$\boxed{dx = f(x,t).dt + g(x,t).dq}$$

Por exemplo, se o valor do salto depender do valor corrente de x, então poderia se ter $g(x,t) = x$, sendo dq definido como em (24) e $f(x,t)$ representaria uma tendência determinística. Um salto é dito degenerado quando a variável pode somente pular para um valor fixo e então permanece neste para sempre.

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*)

Também denominados de Processos de Poisson-Gaussianos, os processos de difusão com saltos resultam da combinação de um Processo de Poisson com um Processo de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86):

$$\boxed{dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq} \quad (26)$$

Esta associação faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta e não diferenciável no tempo (Poisson). Com isso, determinar o processo de uma função H(x) exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (ver Apêndice 4).

O retorno de um processo de difusão com saltos não é normalmente distribuído. No exemplo acima, o Processo de Poisson provoca uma alteração no valor da média e da variância, e a distribuição torna-se assimétrica**.** Se o tamanho do salto u também for aleatório, as caudas da distribuição também se tornam mais grossas.

A adição de um Processo de Poisson ao Processo de Ito retrata uma maior incerteza sobre a evolução de dx. A possibilidade de saltos aleatórios de tamanho u (positivo ou negativo) aumenta a incerteza sobre a variável modelada. O aumento do risco reduz o valor de um ativo na medida em que aumenta a taxa de desconto exigida pelo investidor. No caso da adição de um Processo de Poisson, esse incremento é dado exatamente pela taxa de chegada do salto λ (ver, por exemplo, Dixit e Pindick, 1994, p.87). Este resultado é bastante geral. A adição do parâmetro λ eleva o valor do gatilho e torna a regra de decisão mais conservadora (Dixit e Pindyck, 1994, p.201).

3.1.5. Reversão à média com saltos

Resultante da combinação de um MRM com um processo de Poisson, a reversão à média com saltos pode ser entendido como um caso particular de um Processo de Poisson-Gaussiano (26) onde $a(x,t) = \eta.(x - \bar{x})$. Por exemplo, considere o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck com saltos, então:

$$dx = \eta.x.(x - \bar{x}).dt + \sigma.x.dz + x.dq \Rightarrow \quad dx / x = \eta.(x - \bar{x}).dt + \sigma.dz + dq \quad (27)$$

Onde $dz\ e\ dq$ usualmente são considerados independentes. Note que, de (25), $E(dq) = u.\lambda.dt$, então ao subtrair-se $u.\lambda$ da tendência em (27), obtém-se um MRM com saltos compensado, cuja tendência não é mais afetada pelo Processo de Poisson:

$$dx / x = [\eta.(x - \bar{x}) - u.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Esse MRM com Saltos de Poisson Compensados, onde $-u.\lambda$ é o termo de compensação, tem vantagens práticas sendo algumas vezes usados na literatura, como por Dias e Rocha (1999) para a simulação do processo estocástico do preço do petróleo.

A reversão à média com saltos é um modelo particularmente importante para simular os preços de algumas *commodities* e taxa de juros. Esse processo combina o conceito de equilíbrio de preços de mercado para *commodities* (reversão à média) com o conceito de oscilação de preços apresentado por Merton (1976, apud Dias e Rocha *op. cit.*), segundo o qual a chegada de informações anormais gera choques estocásticos discretos, modelados pelo processo de Poisson.

Em seu artigo, Dias e Rocha (op.cit) adotam o seguinte MRM com Saltos de Poisson Compensados para o preço do petróleo (P):

$$dP / P = [\eta.(\overline{P} - P) - K.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Onde $K = E(\phi - 1)$ e dq é definido de forma similar a (24):

$$dq = \begin{cases} \phi - 1 & com\ probabilidade \quad \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade \quad 1 - \lambda.dt \end{cases}$$

Os saltos apresentam de tamanho ϕ variável com probabilidade de ocorrência $\lambda.dt$ com distribuição de Poisson. Os saltos ϕ tem uma distribuição de probabilidade especial com média $K + 1$ representada por duas normais truncadas, uma para saltos para cima (*jump up*) e outra com saltos para baixo (*jump down*) – Figura 9:

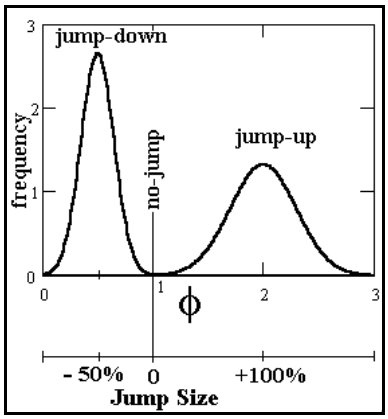

Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999, p.5).

Em caso de salto, há a probabilidade de 50% deste ser para cima e 50% para baixo. No caso de ser para cima, os preços são esperados dobrar e em caso de ser para baixo os preços são esperados reduzir pela metade.

As duas principais desvantagens do processo de reversão com saltos é que, não se pode construir um *portfolio* sem risco quando se considera saltos e a dificuldade em se estimar os vários parâmetros necessários. O primeiro problema conceitualmente é o mais importante, pois não se pode construir um *hedge* perfeito utilizado no apreçamento de opções por *ativos contingentes*, por exemplo**.** Mas existem alternativas para contornar esta situação, como também para superar as dificuldades encontradas nas estimativas dos parâmetros (Dias, p.3-4, www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm).

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras

Processos estocásticos com limites superiores ou inferiores impostos são ditos com barreiras. Estes processos são particularmente importantes para opções financeiras com barreiras (ver Hull, 2003, p.439-441), mas também encontram aplicação em OR.

Sob o ponto de vista econômico, as barreiras podem ser utilizadas para simular mecanismos de equilíbrio de mercado (entrada e saída de competidores), limites regulatórios ou mesmo a atuação de cartéis. Há três tipos de barreiras: refletoras, absorventes e elásticas. As barreiras refletoras são aquelas que, quando atingidas, devolvem a variável para o mesmo nível ou valor do momento anterior ao toque. As barreiras absorventes, ao contrário, quando atingidas absorvem a variável estocástica eliminando sua aleatoriedade. No MGB ($dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$), o limite $x = 0$ funciona como uma barreira absorvente, pois, se atingido em um tempo t', então $dx = 0$ e $x = 0$ para todo $t > t'$. As curvas de gatilho de OR também funcionam como barreiras absorventes, pois uma vez atingidas pela variável aleatória, levam ao exercício da opção. As barreiras elásticas por sua vez, são aquelas que se apresentam parcialmente absorventes ou parcialmente elásticas.

Dixit e Pindick (1994, p. 83-84) demonstram que um MAB com barreiras refletoras (superior e inferior) converge no longo prazo com densidade de

probabilidade exponencial, cujo valor esperado depende do sinal da tendência. Este resultado não se altera se a barreira inferior é relaxada quando a tendência é positiva ou se a barreira superior é relaxada quando a tendência é negativa. Bjerksund e Stensland (1993) propõem uma aproximação analítica para a opção de compra americana utilizando uma barreira absorvente superior, as qual é uma aproximação da curva de gatilho (ver Seção 3.5.1).

3.2. Lema de Ito

Na Seção 3.1.1, ao introduzir o Processo de Wiener, discutiu-se que devido à propriedade de Markov e de $dt \to 0$, o caminho da variável dz é continuo em relação ao tempo, mas não diferenciável no sentido convencional:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Todos os processos estocásticos apresentado até agora que apresentam o incremento de Wiener herdam essa característica. Assim, determinar o processo estocástico de uma função que dependa de um outro processo não diferenciável no sentido convencional demanda o uso do cálculo estocástico.

O Lema de Ito permite diferenciar ou integrar funções desse tipo, sendo mais conhecido na forma que se aplica a um processo estocástico de Ito. Pode ser entendido a partir da expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f^{'}(a).dx + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^{n}(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t. Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:então dF será dado por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e } \quad dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32); \; E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33) \text{ e } V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \; \varepsilon^2.dt \; = dz^2 \; \sim \; N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

O Apêndice 3 apresenta a demonstração de todos os resultados mostrados nesta Seção, da equação (28) à (35). Modificações são necessárias para outros processos estocásticos. O Apêndice 4 mostra a versão que considera um processo de Poisson.

Verifica-se agora verificar o resultado (20). Seja x o preço de um ativo que segue um MGB: $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Para um período de tempo dt suficientemente pequeno, é razoável que a variação percentual do preço do ativo

(taxa de retorno dx/x) independa do seu nível de preço (Hull, 2003, p.223), seguindo portanto um MAB:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt + \sigma.dz \qquad \Rightarrow \frac{dx}{x} \sim N[\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde α e σ são a tendência e volatilidade da taxa de retorno. Para determinar o processo estocástico do logaritmo do preço toma-se o Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz$$

Sendo $F(x,t) = \ln(x)$ e $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Então $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$:

$$d\ln x = [\alpha.x.\frac{1}{x} + 0 - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}.\sigma^2.x^2].dt + \frac{1}{x}.\sigma.x.dz] \Rightarrow$$

$$d\ln x = [\alpha - \frac{1}{2}.\sigma^2].dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \Rightarrow d\ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2/2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Ou seja, embora $d\ln x$ e dx/x sigam distribuições normais com a mesma volatilidade σ, apresentam tendências diferentes tais que $E(dx/x) > E(d\ln x)$. Esse resultado é decorrente da desigualdade de Jensen[14], dada pela presença da segunda derivada parcial de *F(x)* no Lema de Ito. Como $\ln x$ é côncava, então $\partial^2 F/\partial x^2 < 0$, portanto $[\alpha - \sigma^2/2].dt \leq \alpha.dt$.

Os diferentes processos estocásticos apresentados e o Lema de Ito são instrumentos adequados para a representação estocástica do ativo subjacente e da função de valor de uma opção. Mas é preciso detalhar um pouco melhor o que é o ativo subjacente transacionado no mercado de uma opção real e discutir como modelar seu processo estocástico.

---

[14] Se F(x) é uma função convexa então E[F(x)] ≥ F{E(x)], a expectativa existe e é finita. Demonstração: Seja a expansão de Taylor (28) em torno de x e na forma discreta, onde *f(x)* é convexa: *f"(x)>0,* então:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}.(\Delta x)^2 > f'(x).\Delta x \Rightarrow E[f(x+\Delta x)] > E[f(x) + f'(x).\Delta x] \Rightarrow$$

$$E[f(x+\Delta x)] > f(x) + f'(x).E[\Delta x], \text{ fazendo } \Delta x \to 0 \text{ obtém-se: } E[f(x)] > f(x).$$

3.3. Modelando o ativo subjacente

Avaliar opções reais com várias fontes de incerteza pode ser uma tarefa complicada ou impraticável. Mesmo com duas fontes, pode ser difícil resolver solucionar uma modelagem que considere a correlação entre os processos estocásticos envolvidos. Por isso, seria muito proveitoso algum tipo de simplificação que torne possível reduzir várias fontes de incerteza em uma única.

Para evitar este problema, Copeland e Antikarov (2001, p. 219) assumem duas premissas: A primeira, denominada *Marketed Asset Disclaimer,* consiste em utilizar o valor (V) do projeto implantado como se fosse um ativo financeiro transacionado no mercado; A segunda, consiste em utilizar o teorema de que qualquer preço adequadamente antecipado flutua randomicamente (Samuelson, 1965). Isso significa que, independente do padrão de fluxo de caixa que se espere de um projeto, as mudanças em seu VPL irão seguir um passeio aleatório (*random walk*). Esse teorema permite que qualquer conjunto de variáveis com incerteza possa, via Simulação de Monte Carlo, produzir uma estimativa de V estocástico, cujo desvio padrão é então o de um passeio aleatório. Assim, Copeland e Antikarov (op.cit.) utilizam este teorema para dizer que V pode seguir um MGB, aproximadamente.

3.3.1. *Marketed Asset Disclaimer* (MAD)

Na Seção 2.6 se discutiu diferentes abordagens (e sua equivalência) para se calcular o valor de uma OR com o instrumental desenvolvido para opções financeiras. Isso foi possível através da montagem de diferentes *portfolios* que incluíam um ativo subjacente ou um ativo gêmeo do projeto, supostamente transacionados no mercado financeiro. Mas que ativo financeiro teria um fluxo de caixa perfeitamente correlacionado com o de um projeto em todos os estados da natureza?

A resposta é simples: Nenhum, pois isso é praticamente impossível. Inicialmente, as aplicações de OR usaram os preços de *commodities* mundiais como aproximações para o ativo subjacente. Mas assumir que a volatilidade do projeto subjacente sem flexibilidade é a mesma de uma *commodity* é uma premissa um tanto arbitrária. Por outro lado, o que poderia ser mais bem correlacionado com um projeto do que o próprio projeto? Então parece razoável a premissa de que o VPL

tradicional (sem flexibilidades) de um projeto é o melhor estimador não viesado do valor de mercado deste mesmo projeto, caso ele fosse transacionado. Essa premissa é denominada de *Marketed Asset Disclaimer* (MAD) por Copeland e Antikarov (2001, p.94-95) e é bastante utilizada na valoração de OR.

Estes autores destacam que o MAD não faz nenhuma premissa mais forte do que aquelas utilizadas na estimativa do VPL. A premissa mais importante adotada ao utilizar o VPL, tão óbvia que por isso talvez passe despercebida ao decisor, é admitir que a distribuição de retorno do VPL é bem correlacionada com o projeto o suficiente para ser utilizada[15]. Mas isso é o melhor que se pode fazer, e também por isso é razoável assumir que o valor presente de um projeto implantado seria o valor que este assumiria no mercado caso fosse transacionado (Copeland e Antikarov, op. cit.). Portanto, um decisor que utiliza o VPL para valorar seus projetos não faz nenhuma premissa adicional ao utilizar o mesmo VPL como ativo subjacente.

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente

Samuelson (1965, apud Copeland e Antikarov, 2001, p.222-227) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado. Se os investidores têm informação completa sobre o fluxo de caixa e toda a informação já está embutida no preço corrente da ação, então as expectativas serão atingidas e os investidores irão receber exatamente o seu custo de capital, independente do padrão de fluxo de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório[16] (Copeland e Antikarov, 2001,

[15] Note que a rigor, saber o VPL do projeto pressupõe conhecer a distribuição de probabilidade real dos estados da natureza e a taxa de desconto do projeto sem flexibilidade a cada instante *t*.

[16] Conforme citado na Seção 3.1.1, um Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, ver um exemplo em Dixit e Pindick (1994**,** p.68-70).

p.222). Então riscos (de *timing,* políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente. Porém, em alguns casos, pode ser útil ter uma determinada incerteza isolada das demais, individualizando alguma decisão específica, como por exemplo, aquelas relacionadas às incertezas técnicas[17] (Seção 2.5).

Samuelson (op. cit) prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Seja x_t uma variável aleatória de preço tal que seu preço *spot* na data de hoje s_t seja constante: $E(s_0) = x_0$ e $\sigma^2(s_0) = 0$. Suponha que o preço *spot* siga um processo dado por: $s_{t+1} = a.s_t + \sigma.\varepsilon_t$ onde $\varepsilon_t \sim N[0,1]$. Então, o valor esperado será $E(s_{t+1}) = a.s_t$ enquanto que a variância será:

$$V(s_{t+1}) = E(s_{t+1}^2) - E^2(s_{t+1}) = E[a^2.s_t^2 + 2.a.s_t.\sigma.\varepsilon_t + \sigma^2.\varepsilon_t^2] - a^2.s_t^2 = \sigma^2.E(\varepsilon_t^2)$$

Usando o resultado (32): $E(\varepsilon_t^2) = 1$, então: $V(s_{t+1}) = \sigma^2$.

Nos períodos seguintes o valor esperado será:

$$s_{t+2} = a.s_{t+1} + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a.(a.s_t + \sigma.\varepsilon_t) + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \Rightarrow$$
$$E(s_{t+2}) = E(a^2.s_t) + E[\sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})] \Rightarrow \; E(s_{t+2}) = a^2.E(s_t)$$

Observando três períodos à frente:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow E(s_{t+3}) = a^3.E(s_t).$$

E a variância será:

---

[17] Se a incerteza econômica sobre o preço de um ativo segue um movimento Browniano, sua volatilidade cresce com o tempo (ver Seção 4.1.1). O contrário ocorre com a incerteza técnica, maior no início de um projeto, diminui à medida que a firma investe em informação. Uma OR com essa característica é denominada de opção de aprendizagem (*learning option*), um tipo especial de opção composta "arco-íris" (*rainbow compound option*).

$$V(s_{t+2}) = E[s_{t+2} - E(s_{t+2})]^2 = E\{a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) - E[a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})]\}^2.$$

Com o resultado (32), chega-se a: $V(s_{t+2}) = \sigma^2.(a^2 + 1)$.

De forma similar verifica-se que $V(s_{t+3}) = \sigma^2.(a^4 + a^2 + 1)$, e assim por diante. O último termo entre parênteses forma uma série cuja convergência depende de a. Se $a > 1$ a variância diverge aceleradamente; Se $a = 1$, a variância passa a ser $V(s_{t+T}) = \sigma^2.T$ e tem-se um processo de Wiener padrão: $\varepsilon_t \sim N[0, \sigma.\sqrt{t}] = \sigma.\sqrt{t}.N[0,1] = \sigma.dz$; Por fim, se $a < 1$, a variância é convergente: $V(s_{t+T}) = \sigma^2 / (1 - a^2)$ - Copeland e Antikarov (*op. cit.*, p.225).

O preço futuro de $T = 3$ observado em t é o valor esperado em t do preço *spot* para $T = 3$, dado por:

$$F_3^t = E_t(s_{t+3}) = a^3.E_t(s_t) \Rightarrow F_3^t = a^3.s_t$$

No momento seguinte $t+1$: $F_3^{t+1} = E_{t+1}(s_{t+3})$, então:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow$$
$$E_{t+1}(s_{t+3}) = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + 0 + 0 \Rightarrow F_3^{t+1} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1}$$

Note que o termo de aleatório em $t+1$ agora é um valor observável de forma que $E_{t+1}(\varepsilon_{t+1})$ é substituído por ε_{t+1}. Mas o valor esperado da mudança no valor esperado do preço futuro em t é igual a zero:

$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = E_t[a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} - a^3.s_t] = \sigma.a^2.E_t[\varepsilon_{t+1}] = \sigma.a^2.0 \Rightarrow$$
$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = 0$$

Então mesmo que o preço *spot* mude ao longo do tempo, o preço esperado de um contrato futuro não muda. Isto resulta do fato destes contratos serem escritos para refletir a expectativa de um preço em um ponto no tempo, e isso não depende do caminho que o preço segue até lá. Assim, como a informação sobre o preço *spot* na maturidade do contrato é randômico e não viezado ($\varepsilon_t \sim N[0,1]$), o preço de um futuro é um passeio aleatório com tendência zero**.**

Copeland e Antikarov (2001, p.233-236) estudam três indústrias entre 1991 e 1999 em busca de evidências empíricas do teorema de Samuelson. Testam a ciclicidade de medidas de retorno e encontram resultados consistentes com o teorema. Entretanto, referem-se a outros estudos acadêmicos mais sofisticados que verificam dependência temporal, mas argumentam que poucos destes são significantes após dedução de custos de transação e ajustes ao risco. Com isso, se posicionam a favor do uso do teorema de Samuelson com propósitos práticos.

Adicionalmente ao teorema de Samuelson, em favor do MGB há o fato deste ser matematicamente mais simples do que outros processos estocásticos, além de ser estatisticamente equivalente a modelos mais sofisticados como o de reversão à média em intervalos com até 30 ou 40 anos (ver Seção 3.1.2). Por isso o MGB é o modelo estocástico mais empregado para modelar a incerteza não só em projetos, como em toda a literatura de economia e finanças. (Dias, 1996, p.106).

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos

Na Seção 2.7 demonstrou-se para um exemplo simples discreto a equivalência entre diferentes técnicas como ativos contingentes (*contingent claims*) e programação dinâmica. Conforme comentado, essa equivalência é uma propriedade geral válida inclusive com variáveis contínuas, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (1994, p.108-124). Por isso, a partir deste ponto da dissertação, faz-se a opção pela valoração por ativos contingentes (*contingent claims*) pelo seu significado econômico e o uso do argumento de não arbitragem, conceitos consagrados em finanças[18].

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB

A oportunidade gerada por uma OR é um ativo que tem valor. Se esta oportunidade for um ativo transacionado no mercado, seu preço será conhecido.

[18] Existem várias outras alternativas para resolver problemas de otimização sob incerteza. Dois exemplos são o método integral e o método evolucionário. O método integral é particularmente útil para opções perpétuas. Soma integrais estocásticas para apreçar OR em que os limites de integração são os tempos de parada ótima, quando o processo estocástico toca a curva de gatilho (ver exemplo Dixit e Pindick, 1994, Cap.9). O método evolucionário utiliza algoritmos genéticos para evoluir soluções a partir de uma estimativa inicial da curva de gatilho até se aproximar do ótimo, podendo ser combinada com SMC. (ver Dias, 2005, p.450-457 - opções evolucionárias).

Mas mesmo que não seja, seu valor pode ser calculado através de um *portfolio* de ativos transacionados que replique perfeitamente o retorno do projeto em qualquer momento futuro e em qualquer estado da natureza. Então o valor do projeto será o valor deste *portfolio*, caso contrário há uma oportunidade de arbitragem. Está implícita nesta premissa que, a firma gerencia a OR da forma mais eficiente possível, pois, de outra forma, não se elimina a oportunidade de fazer arbitragem.

Seja V o valor de um projeto segue um MGB, então:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (36)^{19}$$

O uso de ativos contingentes (*contingent claims*) requer a premissa de que as mudanças estocásticas em V sejam modeladas por um *portfolio* ou ativo gêmeo transacionado na economia. Esse *portfolio* pode ser composto por ativos financeiros como ações, por *commodities* (transacionadas no mercado à vista e futuro) ou mesmo artigos manufaturados**.**

Seja x o ativo ou *portfolio* perfeitamente correlacionado com V (a correlação de x e V com o *portfolio* de mercado são iguais: $\rho_{xm} = \rho_{vm}$), então seu processo estocástico será dado por:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$$

Note que a volatilidade σ e a tendência α de x e V são exatamente as mesmas, afinal o *portfolio* e o projeto são idênticos por construção. Seja então μ a taxa esperada de retorno do investidor que detém este ativo ou *portfolio* gêmeo. Então μ também é a taxa ajustada ao risco exigida pelo investidor que detém a oportunidade de investimento V. De acordo com o CAPM μ é dado por: $\mu = r_f + \phi.\rho_{xm}.\sigma$ onde $\phi = (r_m - r_f)/\sigma_m$ é o *market price of risk* e $\phi.\rho_{xm}.\sigma$ é o prêmio de risco π, então: $\mu = r_f + \pi$. Mas o retorno do projeto também é dado pela

---

[19] Dixit e Pindick (1994, p136-137) alertam que a equação (36) é uma abstração da realidade para a maioria dos projetos. Seja por exemplo por não contemplar a possibilidade de desativar ou abandonar um projeto, seja por não permitir valores negativos para *V* (o que ocorre na realidade), ou mesmo por não ser o MGB o processo teoricamente mais adequado para modelar *V*. Mas ainda sim o MGB é útil numa série de situações onde a equação (36) reflita a expectativa da firma sobre o valor do projeto, ou pelo menos do preço do bem produzido. Adicionalmente há de se considerar que o MGB estatisticamente não pôde ser rejeitado em favor do MRM para períodos de 30 a 40 anos e a sua simplicidade analítica, fazendo-o um sucesso na literatura (ver Seção 3.1.2).

soma da taxa de ganho de capital α com a taxa de dividendos δ: $\mu = \alpha + \delta$. Igualando as duas equações obtém-se:

$$\mu = \alpha + \delta = r_f + \pi \Rightarrow \qquad \alpha - \pi = r_f - \delta \text{ [20]} \quad (37)$$

A taxa de dividendos δ desempenha um importante papel sobre o exercício de uma opção. Para uma opção de compra financeira, se $\delta = 0$, a opção nunca é exercida antes da maturidade[21]. Isso se deve a dois motivos: Como não há custo em manter a opção de compra ($\delta = 0$), manter a opção viva no lugar do ativo subjacente funciona (até a expiração) como um seguro contra quedas do preço do ativo subjacente abaixo do preço de exercício e; Adiar o exercício permite capitalizar o investimento (preço de exercício) à taxa livre de risco até a expiração. Para a opção de investimento esta propriedade se repete[22]. Se $\delta > 0$, a taxa de retorno do projeto α (equação 43x) é menor do que a taxa de retorno μ (equação 44x) exigida pelo investidor, havendo um custo em manter a opção viva. Assim δ é um custo de oportunidade em adiar o início de um projeto que deve ser descontado do benefício da espera dado pela opção. Por outro lado, se δ é suficientemente grande, o valor da flexibilidade de adiar a decisão de investimento torna-se muito pequeno e a opção real torna-se *deep in the money*.

Para calcular o valor da opção real F considere um *portfolio* Φ dado por uma posição longa na opção e uma posição curta em n unidades do ativo gêmeo ou do projeto V, sob a hipótese do MAD (Seção 3.3.1): $\Phi = F - n.V$.

Seja n escolhido de tal forma que o *portfolio* seja livre de risco. Então num intervalo de tempo infinitesimal dt o retorno exigido pelo investidor será a taxa livre de risco: $r_f.\Phi.dt = r_f.(F - n.V).dt$.

---

[20] Ver expressão equivalente em Dixit e Pindick, 1994, p.118, equações 22 e 23.

[21] Hull (2003, p.175-176) oferece uma demonstração desta propriedade com exemplos numéricos, a qual decorre basicamente de argumentos de não arbitragem.

[22] A taxa de dividendo δ também pode ser interpretada de outras formas. Por exemplo, pode refletir: o custo para a firma da entrada de outros competidores no mercado; o FCL do projeto ou; a *convenience yeld* quando o ativo gêmeo é uma *commodity* – ver Seção 3.4.2. O valor agregado ou médio da *convenience yield* também pode ser medida no mercado *spot* e futuro de uma *commodity*.

O retorno do *portfolio* também é dado pela soma do retorno dos ativos da carteira. O retorno da opção (que não paga dividendos) é dado pelo ganho de capital dF. O retorno do projeto é dado pela soma do ganho de capital com os dividendos ($dV + \delta.V.dt$). Então o retorno da carteira Φ será: $dF - n.(dV + \delta.V.dt)$. Igualando as duas expressões:

$$dF - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \quad (38)$$

Substituindo x pelo ativo subjacente V na equação (31) do Lema de Ito, obtém-se:

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.dV^2 \quad (31)$$

Mas também se viu em (29) que $dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt$ e em (32) que $E(\varepsilon^2) = 1$, então $dx^2 = \sigma^2.x^2.dt$ ou de forma mais genérica:

$$dx^2 = b^2(x,t).dt \quad (39)$$

Considerando que $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ (36), então $dV^2 = \sigma^2.V^2.dt$. Substituindo dV^2 na equação (31) anterior e esta em (38):

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt \Rightarrow$$

$$F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \Rightarrow$$

$$(F_v - n).dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0$$

Como o *portfolio* Φ é sem risco e o primeiro termo da expressão acima com dV tem risco ($dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$), este deve ser nulo, então:

$$(F_v - n).dV = 0 \Rightarrow F_v - n = 0 \Rightarrow n = F_v = \partial F / \partial V$$

Note que este resultado é o mesmo *delta hedging* obtido na Seção 2.7 na forma discreta - equação (11). Retornando este resultado à última equação diferencial, dividindo por dt e rearranjando os termos:

$$0.dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

A equação (40) é a conhecida equação diferencial parcial (EDP) de Black & Scholes & Merton (B&S&M)[23] com dividendos contínuos. Note que na sua dedução, embora tenha sido citada a opção de investimento como exemplo, não foi assumida nenhuma premissa sobre o tipo da opção envolvida, se *call* ou *put*, se americana ou européia. Portanto, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ.

A valoração por ativos contingentes requer a existência de um conjunto de ativos transacionados no mercado diversificados o suficiente, de tal forma que seja possível montar um *portfolio* que não só replique o risco do projeto como também seja perfeitamente correlacionado com este. Esta é uma premissa exigente que não é feita na valoração com programação dinâmica, que simplesmente considera a valoração de risco subjetiva do tomador de decisão (Dixit e Pindick, 1994, p.121).

Apesar desta diferença significativa, a equação diferencial obtida por programação dinâmica correspondente à EDP (40) é dada por:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + \alpha.F_v.V - \mu.F = -F_t$$ [24]

As diferenças entre a EDP da programação dinâmica em relação à EDP de contingentes são duas[25]: A taxa de desconto ajustada o risco μ (exógena) no lugar da taxa livre de risco (decorrente do equilíbrio no mercado de capitais); A tendência α do mundo real no lugar da tendência neutra ao risco $(r_f - \delta)$. Em outras

[23] Originalmente a equação de Black & Scholes não previa dividendos (δ=0), tendo este sido incorporado por Merton (ver, por exemplo, Hull, 2003, p.243).

[24] Ver Dixit e Pindick, 1994, p.109. Considerando π(x,t)=0 , a EDP do valor da firma sem fluxo de caixa imediato é idêntica a de uma oportunidade de investimento.

[25] Ver Seção 3.5.5 para analogia com a forma discreta.

palavras, pode-se avaliar o projeto descontando-o à taxa livre de risco imaginando que este segue um MGB com *drift* $(r_f - \delta)$ neutro ao risco.

Note que, pela equação (45), no mundo real $\alpha - \pi = r_f - \delta$. Mas no mundo neutro ao risco (e também com um *portfolio* Φ livre de risco), o retorno exigido pelo investidor é a taxa livre de risco. Desta forma o processo estocástico do ativo subjacente assume uma nova tendência $\alpha' = r_f - \delta = \alpha - \pi$, como ocorre na equação (40). Da equação (36), o MGB neutro ao risco será dado por:

$$dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz \Rightarrow \qquad dV = (r - \delta).V.dt + \sigma.V.dz \quad (41)$$

Como dito, a equação (40) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ de um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB com dividendos contínuos δ. O que permitirá adaptar a equação (40) para uma *call* ou *put*, americana ou européia, finita ou perpétua e o valor do seu *payoff* são as condições de contorno, necessárias para sua solução.

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica

Nesta Seção descreve-se o modelo apresentado por Dixit e Pindick (1994, p.147-150) para o problema da firma que precisa decidir o momento ótimo para exercer a opção de investir em um projeto cujo prazo de expiração é infinito (*call* americana perpétua).

A oportunidade de investimento possui duas características fundamentais (ver Seção 2.1): O investimento é pelo menos parcialmente irreversível, ou seja, é um custo afundado (*sunk cost*) que não pode ser recuperado; A decisão de investimento pode ser postergada de forma que a firma tem a flexibilidade de esperar e verificar como se comporta a(s) fonte(s) de incerteza(s) de um projeto antes de comprometer recursos irreversivelmente. Considere o custo do investimento I conhecido e fixo, e que o processo estocástico do valor do projeto seja dado pela equação (36): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$. Uma das implicações do MGB é que uma vez que o valor do projeto valha zero, dV e V sempre serão zero (barreira absorvente). Em conseqüência a opção de investir perderá seu valor:

$$V = 0 \Rightarrow dV = \alpha.0.dt + \sigma.0.dz = 0 \Rightarrow V + dV = 0 \Leftrightarrow F(V = 0) = 0 \quad (42)$$

Se o tempo de expiração é infinito e os termos α, σ e V não dependerem explicitamente do tempo, então o valor da opção também não dependerá (Dixit e Pindick, 1994, p.107). Isso significa que $\partial F / \partial t = F_t = 0$, $F_v = F'$ e $F_{vv} = F''$, e a EDP (40) torna-se a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = 0 \quad (43)$$

Como visto na Seção 2.4, para uma opção de investimento a cada instante t há um valor V^* abaixo do qual continuar esperando é a decisão ótima e vice-versa. Com isso é possível definir uma curva de $V = V^*(t)$ - curva de gatilho – a partir da qual a decisão ótima é investir. Nesta curva a opção de investir vale exatamente o VPL do projeto:

$$F^*(V^*(t), t) = V^*(t) - I \quad (44)$$

Essa condição é denominada de *value matching condition* e a curva definida por $V^*(t)$ é denominada de "fronteira" livre (*free boundary).*

A *value matching condition* é necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. A segunda condição necessária, denominada de contato alto ou de contato suave (*smooth pasting condition*), é que na "fronteira" livre o valor da opção e do VPL devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^*:

$$F_v(V^*(t), t) = (V^*(t) - I)_v \Rightarrow F_v(V^*(t), t) = 1 \quad (45)$$

Essa condição não é facilmente percebida, mas pode ser verificada graficamente com certa facilidade, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (2004, p.130-131).

Então o valor de uma opção de investimento americana perpétua é dado pela equação (43) sujeita às condições de contorno dadas pelas equações (42), (44) e (45):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).n.V - r_f.F = 0 \qquad (43)$$

$$F(V=0) = 0 \qquad (42)$$

$$F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I \qquad (44)$$

$$F_v(V^*(t),t) = 1 \qquad (45)$$

A EDO (43) possui solução analítica definida dada por (ver Brandão, Cap.5, p.8-14):

$F(V) = A.V^{\beta_1}$ (46) onde $A = (V^* - I)/(V^*)^{\beta 1}$ (47);

$\beta_1 = 1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2]^2 + 2.r_f/\sigma^2}$ (48) e $V^* = \beta_1.I/(\beta_1 - 1)$ (49)

Note que o valor do gatilho dado por (49) não depende de t pois a opção é perpétua.

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração

Ao contrário da opção de investimento perpétua, o tempo de expiração agora é finito e, embora os termos α e σ possam ser constantes, o valor do projeto e o valor da opção de investir são variáveis com o tempo. Com isso $F_t \neq 0$ e a EDO (40) permanece inalterada. As condições de contorno (42), (44) e (45) continuam válidas, havendo uma quarta condição adicional: Na expiração da OR de investir, vale a regra do VPL tradicional:

Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

A EDP (40) para uma opção americana de compra com $\delta > 0$[26] não apresenta solução analítica. Dixit e Pindick (1994, p.401), entretanto, chamam atenção para o fato de que o valor do gatilho de uma OR é pouco sensível ao tempo de expiração quando este é superior a dois anos. Neste tipo de situação, sugerem que a solução

[26] Opções americanas de compra sem dividendos nunca são exercidas antecipadamente (ver Seção 4.5.1 e nota de rodapé 21). Nesta situação equiparam-se a opções européias e a EDP (40) toma as soluções originalmente apresentadas por Blak e Sholes – ver, por exemplo, Hulll, 2003, p. 246.

analítica para uma opção de compra americana perpétua (equações 54 e 55) pode ser uma aproximação razoável.

Entretanto, existem várias alternativas mais precisas para o problema de valoração de uma OR, aqui genericamente denominadas de soluções não analíticas.

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB

A EDP (49) de Black & Sholes & Merton (B&S&M) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ. Mas soluções analíticas nem sempre existem e, na ausência destas, existem alternativas com métodos numéricos e as aproximações analíticas. Na prática, a solução deve ser escolhida com base nas características do derivativo e na precisão desejada.

Hull (2003, p.392-427) e Trigeorgis (1996, p.305-339) destacam e discutem (os mesmos) três métodos numéricos para aplicações em opções financeiras e reais: Simulação de Monte Carlo (SMC), árvores (binomiais, trinomiais, etc. – métodos gradeados) e diferenças finitas.

A SMC é relativamente simples e flexível, além de permitir o uso da avaliação neutra ao risco. Por funcionar do início para o fim da vida da opção (*foward*), adapta-se bem para opções européias, para derivativos com várias variáveis de estado e com complexidade no cálculo dos *payoffs*. A solução com árvores, extensivamente adotada no livro de Copeland e Antikarov (2001), simula os processos estocásticos subjacentes. Geralmente são mais simples, intuitivas e flexíveis para lidar com diferentes processos estocásticos como difusão, saltos ou reversão à média, sempre a partir dos preços do presente. Mas a valoração sempre é feita a partir da expiração para o início da vida da opção, a exemplo do que ocorre no cálculo por diferenças finitas. Ambos os métodos lidam bem tanto com opções do tipo americanas como européias, mas ficam limitados quando os *payoffs* dependem de alguma forma do histórico passado (por exemplo, opções do tipo *lookback*[27]) ou do valor corrente. Além disso, tornam-se progressivamente mais complicadas à medida que aumenta o

[27] *Look back options* são opções cujo *payoff* depende do valor máximo ou mínimo atingido pelo ativo subjacente durante a vida da opção. Ver Hull (2003, p.441-442).

número de variáveis envolvidas. Os métodos de diferenças finitas (explícito e implícito) resolvem a equação diferencial convertendo-a em uma equação de diferenças. O método explícito é muito parecido com uma árvore trinomial enquanto que o implícito, embora mais complicado, não apresenta os problemas de convergência[28] do primeiro.

As aproximações analíticas têm a vantagem de tornar os cálculos instantâneos e permitir uma interpretação clara da relação entre as variáveis envolvidas. Por esses motivos essa é a técnica adotada nesta dissertação. Consiste em adaptar o problema de apreçamento de derivativos e obter uma expressão analítica que se aproxima satisfatoriamente da solução verdadeira da EDP (49) e suas condições de contorno. Existem várias aproximações analíticas para opções americanas. A mais conhecida delas (Hull, 2003, p.427) é a aproximação quadrática de MacMillan (1986), estendida por Barone-Adesi e Whaley (1987), que pode ser utilizada para *calls* e *puts* sobre diversos ativos financeiros e OR. Esta aproximação se baseia na premissa de que o preço de uma opção americana é dado pelo preço de uma européia adicionado de um prêmio pela possibilidade do exercício antecipado. Como essas duas opções satisfazem a mesma equação diferencial (49), este prêmio ou diferença também deve satisfazê-la. Hull (2003, p. 433-434) apresenta resumidamente esta aproximação, que pode também ser vista com um pouco mais de detalhe em Dias (1996, p.217-220).

Broadie e Detemple (1996) desenvolvem limites inferiores e superiores para o preço de opções americanas e apresentam duas aproximações (LBA e LUBA) para o valor destas com base nestes limites. O *Lower Bound Approximationa* (LBA) apresenta Raiz do erro Quadrático Médio (RQM – ver adiante) de 0,1% para um range grande de parâmetros, considerando uma amostra de 2271 opções. O *Lower and Upper Bound Approximation* (LUBA) apresenta RQM de 0,02%. Esses erros foram medidos em relação à estimativa do método binomial com 15000 nós, assumido como o valor verdadeiro da opção por sua convergência.

O RQM é uma medida de erro definida como:

[28] Uma solução é estável se é finita e é convergente se tende para as condições de contorno adequadamente. Uma solução estável e convergente é dita consistente se ela é realmente uma aproximação do problema original (Trigeorgis, 1996, op cit).

$$RQM = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \quad (51) \quad \text{com} \quad e_i = \frac{C_i}{C} - 1$$

Onde e_i é o erro relativo *i*-ésimo valor estimado C_i da opção em relação ao seu valor "real" C e n é o número de estimativas. Para tornar o erro relativo significativo, os valores da opção C_i inferiores a 0,5 são desconsiderados.

Broadie e Detemple (op. cit.) também comparam a precisão e velocidade de cálculo de suas duas estimativas com diversos métodos conhecidos, inclusive o de Barone-Adesi e Whaley. Apesar de sistematicamente apresentarem-se mais rápidos que os demais, o LBA e o LUBA são relativamente complicados de implementar, o que segundo os autores, favoreceria binomiais com desempenho similar. A aproximação de Baroni-Adesi e Whaley apresentou um RQM de 0,6% para opções com maturidade inferior a um ano, e de cerca de 2% para maturidades superiores.

O erro crescente da aproximação de Barone-Adesi e Whaley desfavorece o seu uso para OR em que o tempo de expiração é de vários anos. Bjerksund e Stensland (1993) propuseram uma alternativa de aproximação analítica mais acurada para opções americanas (Haug, 1998). Baseia-se na imposição de uma estratégia de exercício factível, porém não ótima, através de um preço de exercício antecipado único e constante, aqui denominado de modelo de um período.

Bjerksund e Stensland (2002) apresentam uma generalização do seu modelo inicial dividindo o tempo até a maturidade em dois períodos, cada qual com um preço constante de exercício. O segundo período apresenta duração e preço de exercício menor do que o primeiro, refletindo a perda de valor da opção até sua expiração. Os autores comparam os seus modelos de um e dois períodos com o valor calculado por uma binomial com 3201 pontos, a qual é assumida como o valor verdadeiro da opção. Os resultados indicam que os dois modelos calculam valores muito próximos ou idênticos, entretanto o modelo de dois períodos apresenta uma estimativa mais acurada do valor verdadeiro de opções americanas.

Este teste numérico foi realizado com os mesmos parâmetros adotados no artigo de Barone-Adesi e Whaley (1987), o que permite comparar o desempenho das duas aproximações para várias opções de compra e de venda com expiração inferior a 6 meses. O resultado desta análise não favorece nenhuma das duas

aproximações, já que uma ou outra aproximação apresenta menor ou maior RQM a depender do valor verdadeiro da opção adotado: Diferenças finitas no artigo de Baroni-Adesi e Whaley ou binomial no de Bjerksund e Stensland. Os RQM observados variam entre 0,52% e 0,82% para opções de compra e entre 0,92% e 1,14% para opções de venda.

Bjerksund e Stensland (2002) também utilizam os mesmos parâmetros para opções com expiração de 3 anos (ver Tabela 401). Calculado o RQM para o modelo de um período (de menor precisão), se encontrou valores de 0,62% e 0,73% para *call e puts* respectivamente. Estes números são bem inferiores ao RQM de 2% reportados por Broadie e Detemple (op. cit.) em sua análise com a aproximação de Baroni-Adesi e Whaley para opções com expiração superior a um ano.

Esses resultados revelam que, para o conjunto de dados considerados, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período[29] apresentam uma performance superior em relação ao de Baroni-Adesi e Whaley ao não divergir o RQM com o aumento do prazo de expiração para 3 anos, o que está de acordo com os resultados obtidos por Haug (1998),

Adicionalmente, deve-se ter em mente que as aproximações de Bjerksund e Stensland representam limites inferiores (acurados) para o valor verdadeiro da opção americana, o que se por um lado tem a desvantagem de antecipar de forma insignificante o exercício ótimo, por outro tem a vantagem de revelar o sinal do erro da estimativa do valor da opção.

Embora a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período apresente performance melhor do que a de Baroni-Adesei e Whaley, também possui limitações. Testes de sensibilidade mostram que, quando a taxa de dividendos é menor ou igual à taxa livre de risco ($\delta \leq r_f$), o valor crítico e o valor da opção convergem para os valores da opção perpétua à medida que se aumenta o prazo de expiração. Entretanto, à medida que cresce a diferença entre a taxa de dividendos e a taxa livre de risco, há uma perda progressiva de precisão com o aumento do tempo de expiração da opção.

[29] Naturalmente o mesmo vale para o modelo de Bjerksund e Stensland com dois subperíodos, que é mais preciso do que o de um período.

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor "verdadeiro" estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%.

			Call Americana			Put Americana		
Parâmetros da opção		Preço Ativo Base	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = (B&S/ Binomial - 1	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = B&S/ Binomial – 1
K =	100	80	2,34	2,30	-1,71%	25,66	25,61	-0,19%
r_f =	0,08	90	4,75	4,71	-0,84%	20,08	20,04	-0,20%
σ =	0,2	100	8,49	8,44	-0,59%	15,50	15,47	-0,19%
T =	3	110	13,79	13,74	-0,36%	11,80	11,78	-0,17%
δ =	0,12	120	20,88	20,85	-0,14%	8,89	8,87	-0,22%
K =	100	80	3,98	3,95	-0,75%	22,21	22,12	-0,41%
r_f =	0,08	90	7,25	7,20	-0,69%	16,21	16,14	-0,43%
σ =	0,2	100	11,70	11,64	-0,51%	11,70	11,64	-0,51%
T =	3	110	17,31	17,24	-0,40%	8,37	8,31	-0,72%
δ =	0,8	120	24,01	23,93	-0,33%	5,93	5,89	-0,67%
K =	100	80	6,88	6,88	0,00%	20,35	20,32	-0,15%
r_f =	0,08	90	11,49	11,49	0,00%	13,50	13,43	-0,52%
σ =	0,4	100	17,21	17,21	0,00%	8,94	8,86	-0,89%
T =	3	110	23,84	23,84	0,00%	5,91	5,83	-1,35%
δ =	0,4	120	31,17	31,16	-0,03%	3,90	3,83	-1,79%
K =	100	80						
r_f =	0,08	90				11,70	11,67	-0,26%
σ =	0,2	100	Sem exercício antecipado			6,93	6,90	-0,43%
T =	3	110				4,16	4,12	-0,96%
δ =	0	120				2,51	2,48	-1,20%
- Média do erro relativo				-0,42%			-0,56%	
- Desvio Padrão do erro relativo				0,46%			0,47%	
- Raiz do erro Quadrático Médio (RQM)				0,62%			0,73%	

A precisão satisfatória da aproximação analítica de Bjerksund e Stensland para OR, a sua superioridade em relação à aproximação de Barone-Adesi e Whaley, somados à maior simplicidade analítica do modelo de um período (em relação ao modelo de dois períodos), são os motivos da opção por esta aproximação nesta dissertação.

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993)

Bjerksund e Stensland assumem o modelo de Black & Sholes & Merton com uma taxa livre de risco positiva, onde o preço do ativo subjacente V segue um MGB ($dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz$) em relação à medida equivalente de Martingale (mundo neutro ao risco - $\alpha' = r_f - \delta$). Considere I como o preço de exercício (investimento) e X o nível de preço (gatilho) antecipado (estratégia não ótima) em que o decisor opta por exercer a OR ($X > I$).

Dada esta estratégia factível e não ótima, o preço de uma opção americana de compra fica reduzido a dois componentes: (i) Uma opção de compra européia do tipo *up-and-out*[30] (para cima e para fora) com uma barreira de nocaute[31] (*knock-out barrier*) dada por X, *strike* I e maturidade T; (ii) Um *payoff* $X - I$ que é recebido se a opção é exercida antes da maturidade. Então, o valor aproximado da opção americana ($\bar{c}$) é dado por:

$$\bar{c}(V,I,T,r_f,\alpha,\sigma,X) = \nu(X).V^{\beta_1} - \nu(X).\varphi(V,T|\beta_1,X,X) + \varphi(V,T|1,X,X) - \varphi(V,T|\beta_1,I,X) - I.\varphi(V,T|0,X,X) + I.\varphi(V,T|0,I,X) \quad (52)$$

Onde os dois primeiros termos do lado direito da igualdade representam o *payoff* $X - I$ e os quatro últimos o valor da *call* européia *up-and-out*. Os termos $\nu(X), \beta_1$ e $\varphi(V,T|\gamma,H,X)$ são dados por:

$$\nu(X) = (X - I).X^{-\beta_1}$$

$$\beta_1 = (1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2) + \sqrt{((r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2.r_f/\sigma^2} \quad (48)$$

30 Uma call do tipo *up-and-out* (c_{uo}) é uma opção com barreira que deixa de existir quando o preço do ativo subjacente aumenta até um nível pré-estabelecido, superior ao preço inicial. Reciprocamente, a *call* do tipo *up-and-in* (c_{ui}) é aquela que passa a existir quando o preço pré-estabelecido do ativo subjacente é atingido. Note que $c = c_{uo+} c_{ui}$. (Ver Hull 2003, p.438-441).

31 Nível de preço que se atingido pelo ativo subjacente, implica no exercício imediato da opção, ou seja, no qual o decisor "mata" a OR.

$$\varphi(V,T|\gamma,H,X)=\exp(\lambda.T).\{N[\frac{-\ln(V/H)+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]-$$
$$(X/S)^{\kappa}.N[\frac{-\ln(X^2/(V.H))+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]$$

Note que as variáveis γ e H de acordo com a equação (52) podem assumir os seguintes valores: $\gamma \in \{\beta_1,0,1\}$ e $H \in \{X,I\}$. Os termos λ e κ são dados por:

$$\lambda=-r_f+\gamma.(r_f-\delta)+1/2.\gamma.(\gamma-1).\sigma^2$$ [32] e $$\kappa=2.(r_f-\delta)/\sigma^2+(2\gamma-1)$$

Com a estratégia não ótima de adotar um preço de exercício antecipado (gatilho) X, o valor obtido para a opção representa um limite inferior para o verdadeiro valor. As investigações numéricas apresentadas pelos autores (Bjerksund e Stensland, 2002, op. cit.) mostram que essa estimativa pode servir como uma aproximação acurada do verdadeiro valor (como se observa nas diversas tabelas comparativas apresentadas no artigo, tanto para *calls* como *puts*). Bjerksund e Stensland (2002, op. cit.) apresentam uma nova estimativa para o valor do gatilho antecipado X, ligeiramente modificada em relação ao trabalho de 1993:

$$X_t=B_0+(B_\infty-B_0).\{1-\exp[h(t)]\} \quad (53)$$

$$h(t)=-((r_f-\delta).t+2.\sigma\sqrt{t}).\frac{I^2}{(B_\infty-B_0).B_0} \quad \text{com:}$$

$$B_\infty=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}.I \text{ e } B_0=Máx\{I,\frac{r_f}{\delta}.I\} \quad (54)$$

Onde B_∞ representa o gatilho da opção de compra americana perpétua, equações (49) - Seção 3.4.2. A equação (53) tem papel destacado nesta dissertação, pois será com ela que serão construídas as curvas de gatilho apresentadas no Capítulo 5.

A curva de gatilho da opção de investimento americana é contínua no intervalo [0,T), mas pode ser descontínua em T quando $r_f > \delta$ - ver (54). Assim o

[32] O valor de λ adotado, a exemplo do que fazem Bjerksund e Stensland é o apresentado no artigo de 2002, em detrimento do original apresentado em 1993.

limite perto da expiração é dado por $\lim_{t \to T-}(X_t) = Máx[I, (r_f / \delta).I]$ e na expiração é igual a I.

Os resultados obtidos até aqui para opções de compra americana, perpétuas ou com expiração finita, também podem ser aplicadas para opções de venda. Esse desdobramento torna-se relativamente simples considerando a simetria entre *calls* e *puts* americanas.

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas

A simetria entre opções de compra e venda (PCS – *Put-call syimetry*) é uma propriedade de opções americanas segundo a qual, o preço de uma opção de venda pode ser obtido a partir da troca entre parâmetros da opção de compra correspondente. De acordo com Detemple (2006, Cap.3, p.67-104), que apresenta e aprofunda os resultados mais recentes das pesquisas sobre o assunto, esta simetria foi originalmente demonstrada por McDonald e Schroder (1990) e Bjerksund e Stensland (1993b) em tempo discreto e contínuo respectivamente.

Trata-se de uma importante propriedade das opções, pois permite que o mesmo algoritmo possa ser utilizado para apreçar e determinar as regras ótimas de exercício para opções de compra e de venda, mesmo na ausência de simetria no preço do ativo subjacente ou na presença de descontinuidades (Geman et al, 1995, apud Detemple *op. cit.*). Em alguns casos, a PCS reduz o número de variáveis necessárias para o apreçamento de opções, além de permitir *insights* sobre o relacionamento econômico entre contratos,

A homogeneidade de grau 1 da função de *payoff* de uma opção (em relação ao preço do ativo subjacente e ao preço de exercício) faz com que a PCS decorra da simples troca de numerário. Com o novo numerário, o apreçamento também pode ser feito por *contingent claims* com os mesmos *portfolios* replicantes. Isso significa que a opção simétrica também pode ser avaliada em uma economia auxiliar com o novo numerário e uma taxa de juros ajustada, na qual o apreçamento da opção satisfaz as mesmas equações de apreçamento. Essas características também permitem a extensão da PCS para contratos mais complexos sobre um ou mais ativos. Para o propósito desta dissertação, será suficiente a discussão do modelo sobre um MGB.

Considere uma opção de compra americana sobre um MGB neutro ao risco, como na Equação (41): $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$, com r_f, δ e σ constantes. Na Seção 3.5 discutiu-se brevemente que o preço deste derivativo pode ser visto como o preço de uma *call* européia $c(V_t, I, r_f, \delta, t)$ definido por Black e Sholes (1973) e Merton (1973) somado por um prêmio pela possibilidade de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$:

$$C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = c(V_t, I, r_f, \delta, t) + \Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (55)$$

Onde $C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é o preço de uma *call* americana e $B^c(\cdot)$ é a "fronteira" livre (*free boundary)* da opção de compra que soluciona a seguinte integral recursiva:

$$B_\tau^c - I = C(B_t^c, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (56), \text{ sujeito a: } B_T^c - I = Máx(I, I.r_f / \delta) \quad (57)$$

Seja $B^c(I, r_f, \delta, t)$ a solução da equação (56).

O prêmio de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é definido como:

$$\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = \int_t^T \Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c).d\tau \quad (58), \text{ onde:}$$

$$\Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c) = \delta.V_t.\exp[-\delta.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t)] - r_f.I.\exp[-r_f.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) - \sigma.\sqrt{\tau - t}] \quad (59).$$

Onde $N[\cdot]$ é a probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão e:

$$d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) = \frac{\ln(V_t / B_\tau^c) + (r_f - \delta + 0{,}5.\sigma^2).(\tau - t)}{\sigma.\sqrt{(\tau - t)}} \quad (60)$$

A equação (58) não tem solução analítica, motivo pelo qual a opção americana de compra também não tem. De acordo com McDonald e Schroder (apud Detemple, *op. cit.*) as equações correspondentes para uma opção de venda americana podem ser obtidas a partir do conjunto de equações (55) a (60), fazendo uma simples troca de variáveis. Este resultado é enunciado pelo seguinte teorema (Detemple, *op. cit.*, p.72):

Teorema: Considere opções de venda e compra americanas com preço de exercício I e expiração T idênticos, escritos sobre um ativo V_t que segue um MGB neutro ao risco $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$. Sejam $P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(\cdot))$ e $C(V, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ as respectivas funções de preço e $B^P(I, r_f, \delta, \cdot)$ e $B^C(V, r_f, \delta, \cdot)$ os correspondentes preços críticos. Então:

$$P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(I, r_f, \delta, \cdot)) = C(I, V, \delta, r_f, t, B^c(V, \delta, r_f, \cdot)) \quad (61)$$

E para todo $t \in \{0, T\}$:

$$B^P(I, r_f, \delta, t) = \frac{V.I}{B^c(V, \delta, r_f, t)} \quad (62)$$

Assim, o valor de uma *put* americana é o mesmo de uma *call* também americana com preço de exercício V e expiração T, numa economia com taxa de juros livre de risco δ, na qual o ativo subjacente, sob medida neutra ao risco, segue um MGB com dividendos r_f, volatilidade σ e valor inicial I. Além disso, a curva de gatilho da *put* americana é dada pelo inverso da curva de gatilho da *call* multiplicado pelo produto $V.I$ - Equação (62).

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção

Em situações de planejamento de investimentos duas informações são preciosas para projetos que não se encontram *deep in the money*: Quando se espera que a opção de investimento se torne apta ao exercício e; Qual é a probabilidade deste exercício ocorrer.

O tempo esperado de toque é o tempo esperado para que uma variável que segue um processo estocástico alcance um certo valor, no caso a curva de gatilho, quando então a opção deve ser exercida (Dias, p.1-2, http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html). O tempo esperado de toque é matematicamente definido como:

$$T^* = \inf\{t \geq 0; V \geq V^*\}$$

Ao contrário do que ocorre no apreçamento de opções, o tempo esperado de toque depende da tendência real (α) do processo estocástico. Como visto na Seção 3.5.1, a curva de gatilho real pode ser calculada com o processo estocástico neutro ao risco (*drift* $\alpha - \pi = r - \delta$), mas utilizar este mesmo processo implica em erro na resposta às duas questões. O tempo esperado de toque calculado com o processo neutro ao risco seria maior do que o verdadeiro valor e a probabilidade de exercício seria menor do que a verdadeira. Com um menor *drift*, o processo estocástico demora mais tempo para tocar a barreira da curva de gatilho pela primeira vez, e no caso de uma OR finita, toca menos vezes a barreira até a expiração.

A exemplo do que ocorre com as opções de investimento (Seções 3.4.2 e 3.5), o tempo esperado de toque possui uma solução analítica para opções perpétuas, mas não para as opções com expiração finita. Métodos numéricos podem resolver este problema. Dias (op.cit.) sugere a adoção de Simulação de Monte Carlo por ser mais simples dado que, a curva de gatilho pode ser determinada com antecedência e precisão satisfatória utilizando-se aproximações analíticas (Seção 3.5.1, no caso do MGB).

Para isso basta simular o processo estocástico real um número grande de vezes e observar quantas vezes a opção é exercida. A razão entre o número de exercícios e o número de simulações fornece uma estimativa amostral da probabilidade de exercício da opção. Dado o exercício, a média condicional dos tempos de toque é uma estimativa amostral do tempo esperado de toque. Este é o procedimento adotado na Seção 5. 3.

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P

A indústria de petróleo consiste de uma cadeia de atividades de produção, transformação e comercialização de hidrocarbonetos líquidos e gasosos em uma variedade de produtos de tecnologia. De forma simplificada, as atividades neste setor envolvem ativos reais de exploração e produção de petróleo, transporte, refino, distribuição, comercialização, petroquímica, fertilizantes, geração de energia elétrica, etc. As empresas atuam em um ou vários elos (segmentos) da cadeia simultaneamente, tornando-se progressivamente integradas. As grandes corporações têm se diversificado ainda mais, rompendo os limites tradicionais da indústria petrolífera e adotando o conceito de empresas de energia.

Na ausência de um mercado suficientemente desenvolvido para os ativos reais da indústria do petróleo, a otimização dinâmica e contínua de um *portfolio* de ativos reais revela-se onerosa e limitada em relação ao que ocorre com os ativos financeiros. Por esses motivos os investimentos em projetos e vendas de ativos reais devem ser bem fundamentados, de um lado avaliando-se o impacto sobre o *portfolio* da companhia e de outro, certificando-se sobre o valor das flexibilidades embutidas nos ativos. Do ponto de vista de gestão de *portfolio*, as principais OR a serem consideradas são opções de investimento, desinvestimento e abandono.

No contexto do *portfolio* de uma empresa de petróleo com ativos reais de diversos segmentos, modelos de OR mais gerais e simples tornam-se valiosos: Se por um lado estes modelos podem ser adaptados com facilidade diferente ativos do *portfolio,* por outro facilitam a sua implementação dentro da organização.

São discutidos em seguida modelos de OR simples e compostas de ativos de exploração e produção de petróleo, que por serem os ativos básicos das grandes corporações do setor, apresentam uma literatura mais desenvolvida.

Na Seção 4.1 são discutidos os principais tipos de OR na área de exploração e produção de petróleo. Na Seção 4.2 são revistos os principais argumentos que justificam a adoção do MGB para o preço do ativo subjacente. Considerando a hipótese de *Marketed Asset Disclaimer* (Seção 3.3.1), as OR serão modeladas tendo como ativo subjacente os próprios projetos de investimento ou ativos reais já em operação. Na Seção 4.3 são discutidos alguns modelos de OR da área de E&P. O

Anexo I apresenta um pequeno glossário de termos técnicos da área de petróleo citados neste texto.

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo

A Exploração e Produção (E&P) de petróleo é a base ou o primeiro elo da cadeia de atividades da indústria do petróleo[33]. A Exploração é o conjunto de atividades de pesquisa que visam identificar e testar situações geológicas favoráveis à acumulação de petróleo. Uma vez confirmada a existência de petróleo em uma área, segue-se um conjunto de atividades denominadas de delimitação (*appraisal*) que visam diminuir a incerteza sobre o volume de hidrocarboneto descoberto e sua produtividade. Obtidos novamente resultados favoráveis, executa-se outro conjunto de atividades que visam permitir a produção comercial de petróleo, denominada de desenvolvimento da produção (*development*). Ao longo ou ao final desta fase, o campo de petróleo passa a produzir em escala e de forma contínua, iniciando a fase de produção. Durante a fase de produção, podem surgir vários novos projetos de investimento que visam aumentar o volume recuperável de petróleo, sua produtividade ou o retorno do ativo em produção com a redução de custos operacionais. A Figura 10 mostra de forma esquemática as principais OR em projeto típico de E&P de petróleo.

Dias (1996, p.64-65) descreve as principais OR relacionadas ao processo E&P de petróleo, transcritos a seguir:

Quando se tem apenas uma área potencialmente petrolífera (bloco), eventualmente com mapas de sísmica 2D, existe apenas uma probabilidade "p" de se descobrir petróleo, e em caso de haver a descoberta, a reserva esperada é "B". Aqui se poderia subdividir essa opção em duas: opção de explorar (investir em um poço pioneiro) e opção de delimitar (em caso de descoberta, investir em poços delimitadores e em sísmica de detalhe e/ou 3D). O direito de explorar esse bloco pode ser oriundo de um monopólio estatal (opção perpétua) ou de uma concessão governamental obtido por licitação (lease). Em ambos os casos, esse direito é uma opção de exploração, que se exercida (através do pagamento do investimento em exploração) pode levar à descoberta (ou não) de petróleo e à delimitação do campo,

[33] No Anexo 1 encontra-se um pequeno glossário de termos da indústria de petróleo utilizados nesta dissertação.

obtendo-se as chamadas "reservas não-desenvolvidas", além de obter uma outra opção, a de explotar (produzir) o campo. Uma característica dessa fase é que a incerteza técnica é mais relevante que a incerteza econômica.

Uma vez descoberto e delimitado o campo, o gerente tem a opção de explotar (ou de produzir, ou de desenvolver o campo). Através do exercício dessa opção (pagando o custo de investimento no desenvolvimento do campo), o gerente transforma o ativo "reserva não-desenvolvida" em "reserva desenvolvida" (jazida produzindo ou pronta para tal). Além disso, com o exercício dessa opção se obtém novas opções: as opções de expandir a produção (ex.: projetos de desenvolvimento complementar, ou de adensamento de malha, ou de recuperação secundária/métodos especiais), além das opções de interromper provisoriamente a produção e até de abandonar o campo.

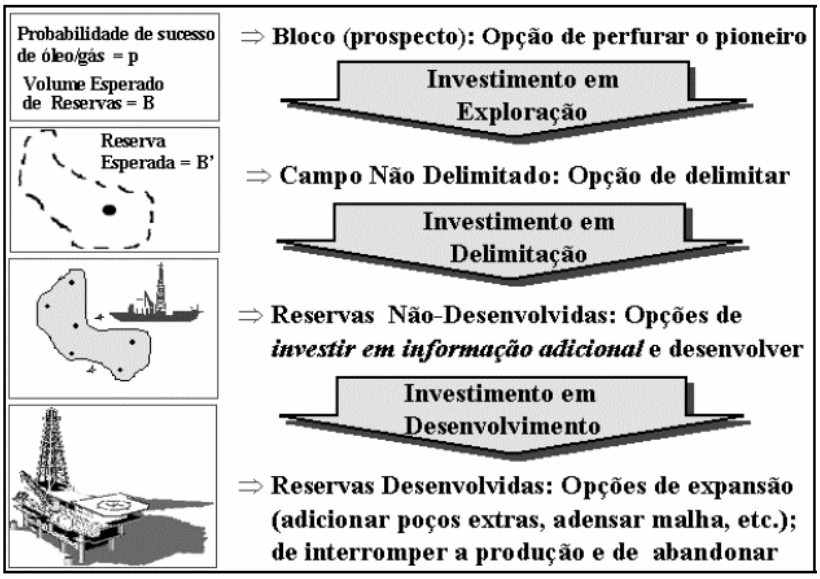

Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005, p.45).

As opções de exploração, delimitação e desenvolvimento da produção são OR estratégicas[34] de investimentos seqüenciais que podem ser avaliadas em conjunto ou isoladamente. Se uma concessão encontra-se na fase exploratória ou de delimitação, a decisão de investimento é uma opção de compra composta (o

[34] As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desenvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio (ver Seção 2.4.1).

sucesso na exploração cria a opção de delimitação e o sucesso desta cria a opção de desenvolvimento). Então o decisor somente deve exercer a primeira opção de investimento se as opções subseqüentes também estiverem *deep in the money*. De outra forma, se a OR de exploração estiver *deep in the money*, mas as OR de delimitação ou de produção não estiverem, é mais vantajoso para a empresa aplicar o recurso deste investimento no mercado financeiro e esperar do que exercer a primeira opção imediatamente e ficar aguardando o *timing* do exercício da segunda.

Deste ponto de vista, a OR de exploração é uma opção americana de compra composta sobre uma opção americana simples de delimitação (*call on call*). A opção de delimitação também é uma americana de compra composta sobre a opção de desenvolvimento, que por sua vez é uma *call* americana simples. Na Seção 4.3.3 é discutido um modelo para opções de exploração compostas**.**

Opções de expandir, interromper (parada temporária) ou abandonar a produção são OR operacionais[35]. Uma opção de expandir a produção ou qualquer outra que aumente a lucratividade de um campo de petróleo já em produção pode ser tratada como uma *call* americana simples, cuja expiração ocorre dentro do período de produção (no Brasil, 27 anos). Opções de interromper provisoriamente a produção (parada temporária) podem ocorrer se há a esperança de se voltar a produzir economicamente[36]. Por fim, as opções de abandonar ou vender um campo de petróleo são *puts* americanas, podendo ser avaliadas por um mesmo modelo. A diferença básica entre elas será o preço de exercício. No abandono este preço é um custo, exceto que haja algum valor residual suficientemente alto (ver Exemplo 2 da Seção 2.2 para a discussão da regra de decisão). Já opção de venda o preço de exercício é uma receita, portanto um valor positivo.

Em projetos de E&P ocorre a estreita relação entre OR estratégicas e operacionais descrita por Trigeorgis (1996, p.227-256, ver Seção 2.6.1). As várias flexibilidades que podem ocorrer em um campo de petróleo fazem com que surjam

---

[35] As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. Ver Seção 3.4.1.

[36] O custo de desmobilização temporária, preservação, e retomada da produção são determinantes nessa decisão. Em campos pouco atrativos pode ser preferível produzir com máxima terceirização e contratos de curto prazo de forma a ter um valor atraente para a opção de parada temporária (Dias, 1996, p.61).

novas e futuras OR. Naturalmente, diversas combinações entre elas são factíveis, criando opções múltiplas ou compostas. A interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto.

O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

Bjerksund e Ekern (1990, p.77-79) avaliam através de um exemplo numérico o impacto adicional da opção de abandono e parada temporária sobre uma opção de desenvolvimento perpétua. O efeito dessas opções adicionais é reduzir o valor crítico (gatilho) para se iniciar o projeto de investimento, sendo pouco maior para a opção de parada temporária. Porém, destacam que o efeito dessas flexibilidades adicionais na redução do preço de petróleo crítico foi pequeno: 1,8% ou de US$ 20,00/bbl para US$ 19.64/bbl.

O maior impacto sobre o projeto foi justamente a introdução da flexibilidade de adiar a decisão de investimento. Então o viés introduzido ao se ignorar as opções adicionais seria desprezível. Parâmetros como a volatilidade σ e a taxa de dividendos δ podem ser mais importantes do que complicar modelos com opções adicionais. Mesmo sob o risco de generalizar um caso particular, Bjerksund e Ekern (*op. cit.*) destacam que o exemplo sugere que maior foco na opção de investimento é melhor do que a adição de novas flexibilidades. Dias (2005, p.77) destaca que a opção de abandono se torna mais valiosa em opções de investimento quando os preços estão baixos.

Laughton (1998, apud Dias 2004) avaliando opções de exploração revela que embora o valor destas aumente tanto com a incerteza sobre o preço do petróleo quanto com a incerteza sobre o volume a ser descoberto, elas tem efeito diferentes sobre o investimento. A incerteza do preço tem efeito de adiar o exercício das

opções enquanto que a incerteza do volume tem efeito de incentivar o investimento em informação, isto é, o exercício de opções de aprendizagem (ver Seção 2.5).

Do ponto de vista desta dissertação, está-se mais interessado em OR estratégicas. Qualquer que seja o tipo de opção considerada, o processo estocástico escolhido para modelar o valor do ativo subjacente é o MGB. Os argumentos que justificam esta adoção são revistos a seguir.

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*

Sob a hipótese do MAD, o ativo subjacente de um projeto de E&P é o preço de uma reserva de petróleo desenvolvida, que por sua vez é muito dependente do preço do petróleo. Sobre este tema, há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média.

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo a convergência para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado.

Independente de qual seja a resposta final a essa questão, o MGB encontra na literatura diversos argumentos teóricos e empíricos que justificam sua adoção, tanto para modelar o preço do ativo subjacente quanto para modelar o preço do petróleo. Estes argumentos foram apresentados ao longo do Capítulo 3 e são reapresentados em conjunto a seguir.

O efeito do uso do MRM sobre a decisão de investimento é duplo. Como modelo estacionário, a convergência da variância com o tempo limita o valor da flexibilidade de esperar (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com os movimentos Brownianos**.** Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM faz com que preços mais altos sejam atingidos menos vezes (Efeito Preços), o que reduz o nível de investimentos. Além disso, a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o

exercício da opção de investir (ver Dixit e Pindyck, 1994, p.161-167). O efeito resultante do MRM é, portanto, menos óbvio do que o do MGB**.**

Metcalf e Hassett (1995, ver Seção 3.1.2) testam numericamente se o nível de investimento agregado obtido com o MGB se altera com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$, enquanto que o MGB é dado por: $dx = \sigma.x.dz$. Ou seja, em seu estudo os autores consideram o MRM e o MGB com mesma tendência α nula (ver equação (22)). De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM os preços gerados pelo primeiro tendem a dominar o MRM com o passar do tempo.

Os autores mostram que os Efeitos Variância e Preços tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza.

Dixit e Pindick (1994, p.77-78, ver Seção 3.1.2) realizam a análise de séries históricas longas de preços de petróleo. Concluem pela reversão à média ao considerar séries de preços com 120 anos, mas não conseguem rejeitar a hipótese de *random walk* ao considerarem séries de 30 ou 40 anos. Estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos.

Samuelson (1965, ver Seção 3.3.2) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado, na medida em que os investidores têm informação completa sobre estes fluxos de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas

como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos. Samuelson prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório (Copeland e Antikarov, 2001, p.222). Então riscos (de timing, políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente.

Dias (2005, p61-70) discute o impacto da utilização do MGB em OR no lugar de MRM para o processo estocástico do preço do petróleo. Inicialmente repete o teste de Dixit e Pindick (1994, *op. cit.*) para os preços real e nominal do petróleo no período 1970-2004, e também não consegue rejeitar o MGB. Em seguida discute dois artigos importantes sobre o assunto (Pindikc, 1999 e Schwartz, 1997) e conclui que o MGB é uma boa aproximação em muitos casos, mas pode ser inadequado quando o preço à vista estiver longe do nível de equilíbrio de longo prazo. Por fim faz duas recomendações: Em OR em que se precisa considerar tanto o curto quanto o longo prazo, modelos mais realistas são mais adequados, mas para análises de longo prazo ou em estudos onde apenas um mapeamento razoável do preço do petróleo é necessário, o MGB pode ser adotado.

A análise do conjunto de argumentos expostos permite concluir que o MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente, a depender dos parâmetros considerados. O efeito da estabilização da variância no MRM incentivando o investimento pode ser compensado pelo efeito da maior volatilidade do MGB. Por fim, resta o teorema de Samuelson (1965) que estimula a adoção do MGB quando o ativo subjacente possui fontes múltiplas de incerteza.

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P

Existem diversos modelos na literatura para apreçamento de OR em projetos de exploração e produção de petróleo. Esses modelos dependem do valor presente da reserva desenvolvida V, que sob a hipótese do MAD é o ativo subjacente. Uma função que calcule V pode então ser utilizada e explicitar as variáveis das incertezas econômicas e técnicas.

Dias (2005, p. 73-75) destaca três alternativas para o cálculo de V com complexidade crescente: Usar uma função simples que considere as variáveis chaves; Utilizar SMC para as variáveis de risco em planilhas de fluxo de caixa e; Combinar planilhas com outros sistemas como simuladores de reservatório que tratam a incerteza técnica mais adequadamente.

Os modelos para apreçamento de OR em projetos de E&P têm sido desenvolvidos para resolver problemas específicos destes projetos, em geral com gradual complexidade. Dias (2004, p.99-102 e 2005, p.83-132), apresenta um resumo da literatura de OR em petróleo. A seguir são apresentados três modelos simples que envolvem decisões de investimento e abandono de ativos reais.

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão

O Modelo de Negócios (*Business Model,* ver Dias, 2004, p.96-98) é uma aproximação para o valor de uma reserva desenvolvida de petróleo sob regimes de contratos de concessão. Trata-se de uma aproximação útil e adequada para o apreçamento de opções de investimento simples, especialmente se o VPL do projeto é previamente conhecido.

O valor do exercício ou *payoff* de uma opção real de investimento simples sobre o desenvolvimento de uma acumulação de petróleo é dado pela diferença entre o valor presente da reserva desenvolvida V e o investimento de desenvolvimento I :

$$VPL = V - I \quad (63)$$

O investimento I é o valor atualizado do fluxo de investimentos líquidos de benefícios fiscais como depreciação. O valor atualizado da reserva desenvolvida V para contratos de concessão de E&P pode ser aproximado por uma função linear do preço do petróleo P (isso é facilmente verificável com uma análise de sensibilidade).

Uma aproximação muito razoável e simples é considerar que V é proporcional ao volume recuperável de hidrocarbonetos (B) existente na acumulação, à qualidade econômica da reserva (q) e ao preço de petróleo:

$$V = q.B.P \quad (64)$$

A qualidade econômica da reserva q depende de uma série de parâmetros geológicos que afetam a produtividade da rocha reservatório, das propriedades físicas do petróleo a ser produzido, da carga de impostos, custos operacionais e da taxa de desconto apropriada para a atualização monetária. A aproximação definida na equação (64) é denominada por Dias (2004) de Modelo de Negócios (*Business Model*). Essa designação é uma alusão ao fato de que a relação $q.P$ corresponder ao valor do barril de petróleo (na cabeça do poço) negociado no mercado de reservas desenvolvidas nos Estados Unidos, onde assume um valor médio de 1/3 (ou seja, $q = 1/3$, também conhecida como regra do 1/3 - Gruy et al, 1982, apud Dias, 2004).

Um segundo e simples modelo também apresentado por Dias (op. cit.), denominado de Fluxo de Caixa Rígido (*Rigid Cash Flow Model*) considera uma parte do custo operacional atualizado como fixo:

$$V = q'.B.P - C$$

Em ambos os modelos, os valores de q' e q'' são obtidos a partir dos VPL calculados em planilhas eletrônicas. A diferença básica entre eles é sintetizada pela inclinação da reta do VPL em função do preço do petróleo (Figura 11):

O Modelo de Negócios é menos sensível ao preço do petróleo e implica que há uma correlação perfeita entre este último e os custos operacionais. Na prática é um modelo que gera valores conservadores para OR, o que poderia levar ao exercício prematuro de opções. Tem sido utilizado em algumas circunstâncias por diversos autores, embora não seja exatamente um consenso na literatura. Mas é inegável que sua simplicidade gera algumas vantagens: Pode ser utilizado como uma primeira aproximação para o valor da OR; Pode ser facilmente empregado em escala para problemas simples com OR e; Pode ser útil no sentido de difundir o uso de OR dentro de uma empresa. Naturalmente que, não é um modelo adequado para

a tomada de decisão em investimentos relevantes ou para problemas mais complexos que envolvam mais de uma variável estocástica, incertezas técnicas e estratégicas ou diversas OR interagindo.

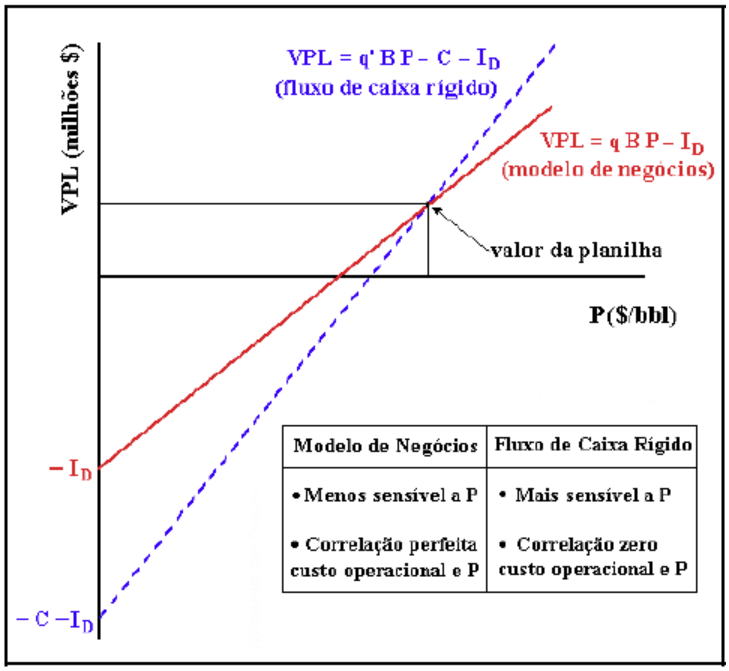

Figura 11 – Comparação entre os Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Fonte: Dias, 2005, p.79).

Se o preço do petróleo segue um MGB (19), então $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Considerando o Modelo de Negócios (64), o processo estocástico do valor presente da reserva desenvolvida V pode ser calculado com o Lema de Ito (35):

$$V = q.B.P \quad \therefore \quad dV = [\alpha.P.\frac{\partial V}{\partial P} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}.P.\sigma^2].dt + \frac{\partial V}{\partial P}.\sigma.P.dz.$$ Então:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = q.B; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow dV = \alpha.q.B.P.dt + \sigma.q.B.P.dz \Leftrightarrow$$

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \quad (66)$$

Então a EDP de B&S&M para uma opção F qualquer sobre o valor da reserva desenvolvida que segue um MGB será a equação (40) - ver Seção 3.4.1 – com $V = q.B.P$, então:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida $V = q.B.P$ que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção é de desenvolvimento de um campo de petróleo é perpétua, vale então a solução analítica da Seção 3.4.2. Se ao contrário tem expiração finita, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Por fim, em se tratando de opções de venda, as soluções permanecem válidas sendo suficiente inverter as variáveis V com I e r com δ (Seção 3.6).

O Modelo de Negócios também pode ser facilmente adaptado para opções compostas de exploração (Seção 4.3.3). Uma alternativa mais elaborada a este primeiro modelo é o clássico trabalho de Paddock, Siegel e Smith (1998), apresentado a seguir.

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S)

O modelo de Paddock, Siegel e Smith - PS&S (1988)[37] é uma aproximação um pouco mais elaborada (em relação ao modelo anterior) para opções de desenvolvimento de reservas de petróleo, porém sem perder simplicidade e a semelhança com a EDP (40) de Black & Sholes & Merton. Basicamente trata algumas variáveis por unidade de volume e considera o efeito da exaustão de uma reserva.

PS&S argumentam que para uma opção de E&P não é suficiente conhecer o processo estocástico do valor de uma reserva desenvolvida, é preciso também conhecer o equilíbrio de mercado deste ativo. Para isso caracterizam o comportamento dos preços de reservas desenvolvidas e demonstram como integrar este modelo com técnicas de apreçamento de opções, valorando a opção de desenvolvimento e depois a de exploração.

[37] Ver também Dixit e Pindick, 1994, p.396-403 e Dias, 1996, p.211-222.

Em equilíbrio, o retorno esperado de uma reserva desenvolvida (dividendos e ganho de capital) deve compensar o custo de oportunidade de investir em tal reserva. Seja B_t o volume de petróleo, V_t o valor de uma unidade de volume de reserva desenvolvida (US$/bbl) e R_t o *payoff* instantâneo por unidade de tempo, então os autores assumem que:

$$\frac{R_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \quad (67)$$

Onde μ_v é a taxa ajustada ao risco requerida por um mercado de capitais em equilíbrio sobre uma *security* que replique perfeitamente a reserva desenvolvida. O *payoff* R_t é dado pela soma dos lucros da produção de petróleo $\pi_t.(-dB_t)$ com o ganho de capital da reserva ainda não produzida $d(B_t.V_t)$. O sinal negativo deve-se à variação de reserva ser negativa com a produção, mas o lucro não.

$$R_t.dt = \pi_t.(-dB_t) + d(B_t.V_t) \quad (68)$$

Onde π_t é a taxa de lucro por unidade de volume. A reserva não produzida de um campo de petróleo em produção pode ser bem representada por uma função exponencial decrescente com o tempo de produção, então:

$$B_t = B_{t-1}.\exp(-\gamma.\Delta t) \Rightarrow \ln B_t = \ln B_{t-1} - \gamma.\Delta t \Rightarrow \Delta \ln B_t = -\gamma.\Delta t$$

Na forma diferencial, quando $\Delta t \to 0$:

$$d\ln B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t / B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t = -\gamma.B_t.dt \quad (69)$$

Onde γ é a taxa de caimento da reserva B_t de petróleo por unidade de tempo (não estocástico). Substituindo (69) em (68) e considerando que $d(B_t.V_t) = B_t.dV_t + V_t.dB_t$:

$$R_t.dt = \gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt \quad (70)$$

Substituindo o resultado (70) em (67), obtém-se:

$$\frac{\gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$\frac{dV_t}{V_t} + \frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} - \gamma.dt = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow \frac{dV_t}{V_t} = -\frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} + \gamma.dt + \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = (-\gamma.\pi_t + \gamma.V_t + \mu_v.V_t).dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = [\mu_v - \gamma.(\pi_t / V_t - 1)].V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$dV_t = (\mu_v - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz$ (71) e $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$ (72)

Onde δ_t é a taxa de *payout* ou dividendos da produção de uma unidade de reserva de petróleo desenvolvida, cujo valor segue o MGB da equação (71), supondo μ_v, δ_t *e* σ_v constantes. A tendência deste MGB é a taxa de ganho de capital da reserva desenvolvida: $\alpha_v = \mu_v - \delta_t$. Em equilíbrio, nenhum agente manterá uma reserva desenvolvida sem produção, pois neste caso a taxa de retorno será a taxa de ganho de capital ($\mu_v - \delta_t$), que é menor do que a taxa requerida pelo mercado sobre o ativo (μ_v).

Considerando a equação (71), o valor da opção de desenvolvimento de uma unidade de reserva e a regra ótima de decisão podem ser determinados. Para isso monta-se um *portfolio* sem risco, composto pela opção de desenvolvimento F e n partes do ativo gêmeo (reserva desenvolvida V). Como o valor da reserva segue um MGB, seguindo-se os mesmos passos da Seção 3.4.1, chega-se à EDP (40) de B&S&M:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente a equação é genérica e serve para qualquer opção sobre o ativo básico (uma unidade de reserva desenvolvida). As condições de contorno é que definirão o tipo de OR:

$F(V=0) = 0$ (42) $\qquad F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I$ (44)

$F_v(V^*(t),t) = 1$ (45) $\qquad$ Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

As três primeiras condições de contorno são para opções de compra americanas perpétuas (adicionalmente em (40) F_t=0). As quatro condições em conjunto definem são para opções de compra americanas com expiração finita. A

condição (42) é um limite econômico que funciona como uma barreira absorvente para o MGB de V - equação (71), ver Seção 3.1.6. A condição (44) define o *payoff* do exercício da opção no valor crítico V^* enquanto que (45) é a condição de otimização de contato suave (*smooth paste condition* – ver Seção 3.4.2). Por fim, a condição (50) indica que, na expiração do direito de desenvolvimento, vale a regra do VPL. As soluções obtidas nas Seções 3.4.2 e 3.5.1 também continuam válidas, com algumas diferenças.

O valor da opção e o valor crítico serão obtidos em unidades monetárias por unidade de reserva desenvolvida. O investimento também deve ser considerado por unidade de volume. A taxa de dividendos δ_t tem uma expressão particular dada pela equação (72) ($\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$). Note que δ_t varia com o tempo (depende da taxa de lucro π_t e do valor de uma unidade de reserva desenvolvida V_t) enquanto que na EDP (40) é constante. Será necessário então estimar uma taxa de dividendos média e assumi-la constante.

O modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para um projeto não implantado. Isso significa que o processo neutro ao risco da reserva não desenvolvida poderá ter uma tendência neutra ao risco ($\alpha_v^{'} = r_f - \delta$) negativa. Em princípio, esse resultado é plausível, pois o custo de oportunidade δ de se adiar a produção pode realmente ser maior que a taxa livre de risco. Mas uma tendência muito negativa pode não ser conveniente, pois pode significar também que o processo estocástico real tem uma tendência real negativa: $\alpha_v < 0$ (ver Seção 5.1).

Se isso ocorrer, significa que o preço da reserva desenvolvida cai com o tempo. Isso só é plausível para uma opção de desenvolvimento se há uma expectativa de redução contínua no preço futuro do petróleo ou se os custos de produção estiverem aumentando continuamente. De uma outra forma, é questionável depreciar a opção de desenvolvimento pela perda de volume que ocorreria se ela estivesse em produção, por que simplesmente o volume da reserva ainda é constante.

PS&S (*op. cit.*) também discutem a opção de exploração. Os autores assumem que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, evitando complicações como o momento ótimo para exercer a opção de desenvolvimento, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única. Isso seria equivalente a fazer os investimentos de exploração e de desenvolvimento esperados ($\bar{I}_E$ e $\bar{I}_D$) em conjunto e receber o valor presente da reserva desenvolvida $\bar{B}$ esperada:

$$VPL_{Exp} = \bar{B}.V - (\bar{I}_E + \bar{I}_D) \quad (73) \text{ com: } \quad \bar{B} = \int B.df(B) \quad \text{e} \quad \bar{I}_D = \int B.I_D.df(B)$$

Onde VPL_{Exp} [38] é o VPL esperado de uma oportunidade exploratória sem risco geológico, V é o valor de uma unidade de reserva desenvolvida e $f(B)$ é a distribuição de probabilidade do volume aleatório de petróleo B a ser descoberto[39].

Considerando que o volume esperado $\bar{B}$ é constante e que a opção de exploração é homogênea de grau 1, então o seu valor pode ser representado como:

$$\bar{B}.E(V, T-t, S) \quad \text{com} \quad S = (\bar{I}_E + \bar{I}_D)/\bar{B} = E + D$$

Sendo que $E(V, T-t, S)$ é o valor corrente para uma opção de exploração sobre uma unidade de reserva desenvolvida com investimento unitário combinado de exploração e desenvolvimento S. A opção de exploração pode então ser resolvida como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento de PS&S.

Se a curva do valor crítico de uma opção de investimento em função do tempo para a expiração $T-t$ for normalizada, ou seja, definida pela relação entre o valor do projeto implantado e o investimento necessário (δ, σ e r_f são constantes), então ela será única (Merton, 1973, apud PS&S, *op. cit.*, p.489). Assim, toda vez que

---

[38] O VPL_{Exp} é uma aproximação grosseira do VME, Valor Monetário Esperado, um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração, estando para os projetos de exploração como está o VPL para projetos de desenvolvimento. A regra de decisão é investir se VME>0.

[39] PS&S não usam o termo VPL_{Exp}, apenas dizem que exercer a opção de exploração pode ser vista como o lado direito da equação (73), esclarecendo na página 491 que seu modelo é válido somente na ausência de incerteza geológica.

a opção exploração estiver *deep in the money* ($V/S \geq V^*/S$), também estará a opção de desenvolvimento pois $V/D > V/S$ (onde $D = \overline{I}_D / \overline{B}$).

A técnica de PS&S para opções exploratórias fornece um valor elevado para a opção, mas qualitativamente inferior. Isso se deve tanto por desconsiderar a incerteza geológica sobre a existência de petróleo, como por suprimir flexibilidades ao colapsar as opções de exploração com a de desenvolvimento. Este assunto será retomado na Seção 5.2, quando se compara os modelos de opção de exploração simples e composta.

Por fim é preciso notar que o Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios podem ser adotados em conjunto. Enquanto o primeiro se preocupa e capturar o efeito da depleção natural de um campo de petróleo através da taxa de dividendos do ativo subjacente, o segundo propõe que o valor de uma reserva seja função linear do preço do petróleo, e por isso segue um MGB derivado a partir deste.

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração

Na Seção 4.1, discutiu-se que a OR de exploração é uma opção americana composta, pois se trata de uma opção de investimento sobre uma opção de desenvolvimento de um campo de petróleo (*call on call*). Até a primeira data de exercício T_1, se o detentor da opção de exploração realizar o investimento exploratório I_E e confirmar a existência do campo de petróleo, ele adquire a opção de desenvolvimento com expiração T_2 ($T_2 \geq T_1$ - medidos em relação à mesma data) e preço de exercício igual ao investimento de desenvolvimento I_D.

Porém, um decisor racional que maximiza o lucro da firma só exercerá a primeira opção da exploração antes da expiração se, além desta estar *deep in the money*, a opção de desenvolvimento também estiver. Dias (2006) argumenta que se a opção de desenvolvimento não estiver *deep in the money,* ao exercer a primeira opção, o decisor obtém na melhor das hipóteses a opção de desenvolvimento, que não será exercida até estar madura. Neste caso, o decisor obtém um melhor retorno ao postergar o primeiro investimento exploratório I_E por um intervalo dt e aplicar o capital exploratório à taxa livre de risco r_f antes que a segunda opção fique

madura. Desta forma, aufere o retorno $I_E.r_f.dt$ sem perder qualquer benefício (dividendo) da opção de desenvolvimento por manter viva a primeira opção. De outra forma, o decisor pode arbitrar postergando o exercício da primeira opção e aplicando o capital exploratório à taxa livre de risco até que ambas as opções estejam maduras. Esta característica também é valida para uma *call on call* financeira americana.

Mas há uma diferença fundamental da OR composta de exploração em relação a uma *call on call* financeira: O fato de se exercer a primeira opção não garante a aquisição da segunda, pois há o risco de não se descobrir o campo de petróleo, ou como se diz com o jargão de E&P, o poço pode ser "seco" (*dry hole*). Na opção composta financeira este risco não existe, ou seja, ao exercer a primeira opção o investidor necessariamente adquire a segunda. A forma tradicional com que a indústria de E&P lida com este risco na tomada de decisão é considerar o valor do campo de petróleo desenvolvido e os investimentos necessários ponderados pelas probabilidades de sucesso e fracasso exploratório.

Dixit e Pindick (1994, p.319-328) discutem o problema de investimentos seqüenciais contínuos ou discretos, que podem ser interrompidos ou suspensos, temporariamente ou definitivamente, como equivalente ao problema de opções compostas. Para o investimento em fases discretas, dado o processo estocástico do preço, os autores derivam o valor do projeto, da opção e do preço crítico para a última fase como uma opção simples. Em seguida demonstram que o valor da opção da fase anterior e o novo preço crítico apresentam equação diferencial e condições de contorno similares à última fase, mas com a diferença de que o *payoff* da fase mais nova depende do valor da opção na fase subseqüente. Esta técnica deve ser repetida sequencialmente até a primeira fase (*backward*), obtendo-se o valor da opção composta.

Os autores então argumentam que o preço de exercício é decrescente da primeira para a última fase, em decorrência da redução progressiva do investimento a ser afundado. Com isso, se o primeiro estágio estiver *deep in the money*, o segundo estágio também estará. Entretanto não mencionam que esta regra é inequívoca se, e somente se, os investimentos seqüenciais tiverem a mesma expiração ou forem perpétuas. No exemplo apresentado no livro, todas as opções de

investimento são consideradas perpétuas e apresentam solução analítica. Mas este não é o caso de uma opção exploratória, onde as fases podem ter expiração diferenciada e as opções não tem solução analítica.

Então, percebe-se que o problema de uma opção composta de exploração, por sua natureza, deve e pode ser tratado de uma forma diferenciada em relação ao seu par financeiro. A solução que se apresenta adiante preserva a natureza do problema de decisão da exploração como uma opção composta, ao contrário do Modelo de PS&S.

O Modelo de PS&S (Seção 5.3.2) para opções exploratórias assume que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única com a mesma expiração. Também considera o volume esperado $\overline{B}$ constante (sem incerteza) e ignora o risco geológico (probabilidade de sucesso)[40], resolvendo a opção de exploração como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento. Por esses motivos, essa técnica fornece um valor qualitativamente inferior para a opção de exploração, como será visto na Seção 5.2. Assim, um modelo que resgate algumas das simplificações acima sem perder praticidade é propício. Uma alternativa é apresentada a seguir, sendo denominado de Modelo de Exploração (MDE).

As principais diferenças do MDE serão reconsiderar o problema de exploração como opção composta de duas fases (exploração e desenvolvimento), observar os diferentes períodos de expiração e ponderar o risco geológico. Entretanto, a incerteza técnica sobre o volume descoberto será desconsiderada, de forma que o volume a descobrir esperado será considerado constante. Por simplicidade, o investimento de delimitação é considerado como parte do desenvolvimento.

[40] O risco e a incerteza geológica representam, respectivamente, a possibilidade de existir ou não petróleo em um prospecto exploratório e, em caso afirmativo, a quantidade de petróleo existente. O risco geológico é estimado através da probabilidade de sucesso geológico. A incerteza sobre o volume pode ser obtida por SMC a partir das distribuições dos parâmetros que definem o volume da acumulação (volume de rocha da trapa, porosidade, preenchimento, saturação de óleo, fator de recuperação, etc.). O produto destes fatores gera a distribuição do volume recuperável, cuja média é o volume esperado a descobrir.

O MDE é elaborado considerando o conceito do Valor Monetário Esperado (VME), um indicador que considera o risco geológico de um projeto exploratório – ver Figura 12.

O Valor Monetário Esperado (VME) é um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração de petróleo, cuja regra de decisão é investir se VME>0. Desempenha um papel equivalente ao do VPL para projetos de desenvolvimento. O VME é um valor esperado por ponderar o valor econômico de um projeto exploratório pelo risco geológico, considerando os cenários de sucesso e de fracasso:

$$VME = Ps.(V - I_E - I_D) - (1 - Ps).I_E = Ps.V - Ps.I_D - I_E \Rightarrow .$$

$$VME = Ps.V - (I_E + Ps.I_D) \quad \text{ou} \quad VME = Ps.(V - I_D) - I_E \quad (74)$$

Onde Ps é a probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*), $1 - Ps$ a probabilidade de fracasso, V o valor presente da "reserva"[41] desenvolvida, I_E o investimento atualizado em exploração do primeiro estágio e I_D o investimento atualizado do desenvolvimento no segundo estágio. Os investimentos e a probabilidade de sucesso são considerados constantes. Seja então:

$$V_E = Ps.(V - I_D) \quad (75) \qquad \Rightarrow VME = V_E - I_E \quad (76)$$

Onde V_E é definido como o valor esperado atualizado do projeto exploratório perfurado ("explorado"). Note a semelhança da equação (76) com a equação (63): $VPL = V - I$. Assim o problema da decisão com o VME é similar ao problema da decisão com o VPL, mas com a vantagem de preservar e ponderar a decisão pelo risco geológico, indissociável do investimento em exploração.

[41] A rigor, para prospectos exploratórios, o termo V é o valor presente do volume a descobrir desenvolvido, já que o termo reserva é tecnicamente inadequado neste caso.

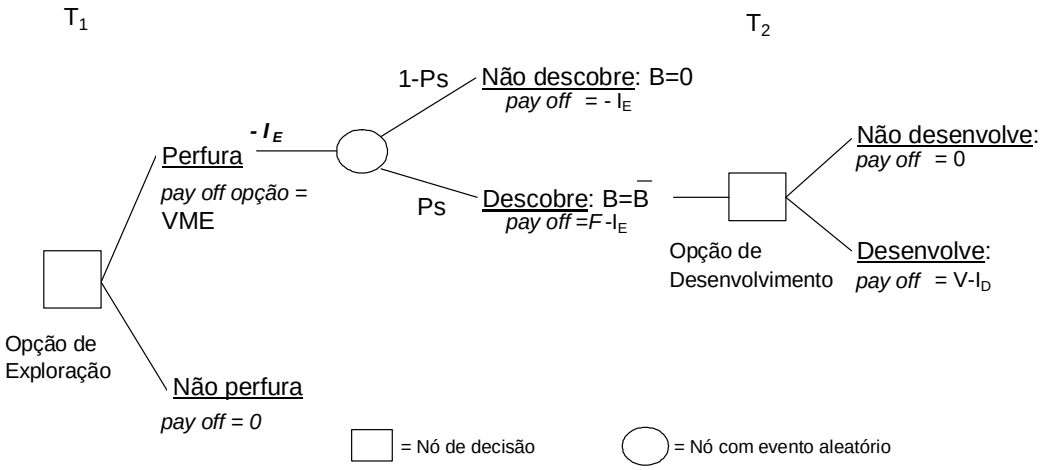

Figura 12 – Árvore de decisão de uma opção de exploração com duas etapas: exploração e desenvolvimento.

Suponha que o processo estocástico do valor da reserva desenvolvida seja um MGB:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (77)$$

No Modelo de Negócios essa relação – Equação (66) - depende do MGB do preço do petróleo ($dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$) e é obtida aplicando-se o Lema de Ito à equação (64): $V = q.B.P$. Em favor de uma maior generalidade, no MDE apenas admite-se que o preço da reserva desenvolvida siga um MGB[42]. Considerando que $V_E = Ps.(V - I_D)$ (75), o valor esperado atualizado do prospecto exploratório perfurado e desenvolvido será dado pelo Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \Rightarrow$$

$$dV_E = [\alpha.V.\frac{\partial V_E}{\partial V} + \frac{\partial V_E}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2}.V.\sigma^2].dt + \frac{\partial V_E}{\partial V}.\sigma.V.dz$$. Então, de (75):

$$\frac{\partial V_E}{\partial V} = Ps \;;\; \frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V_E}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \; dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \qquad (78)$$

[42] Esta premissa é fortalecida pelo teorema de Samuelson (1965) apresentado na Seção 4.3.2. Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório.

Ou, de forma equivalente:

$$\Rightarrow\ dV_E = Ps.(\alpha.V.dt + \sigma.V.dz) \Rightarrow .\ dV_E = Ps.dV \quad (79).$$

A equação (79) revela que o processo estocástico de V_E também é um MGB, múltiplo do MGB da "reserva" desenvolvida. Então, no problema da opção composta de exploração, as duas opções dependem de um mesmo processo estocástico dV [43].

A estratégia de valoração da opção composta de investimento de Dixit e Pindick (*op. cit.*) pode agora ser aplicada, pois as duas opções dependem do mesmo processo estocástico da "reserva" desenvolvida. A solução inicia pelo segundo estágio, ou seja, a opção simples de desenvolvimento. A EDP é exatamente a mesma obtida na Seção 3.4.1, a exemplo do que ocorreu para a opção de desenvolvimento no Modelo de Negócios (Seção 4.3.1), mas com a ressalva que o MGB é dado pela equação (77) e não necessariamente o do preço do petróleo, conforme já discutido. As condições de contorno são as mesmas apresentadas em detalhe nas Seções 3.4.2 e 3.4.3 para uma opção de investimento simples e revisitadas na Seção 4.3.2 com o Modelo de PS&S.

Como visto (Seção 3.4.1), a EDP é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida V que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção de desenvolvimento do campo de petróleo tem expiração T_2, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Com isso o valor da opção de desenvolvimento (F) e o seu valor crítico (V^*) podem ser calculados.

O passo seguinte é montar a EDP de B&S&M (40) do primeiro estágio da opção de investimento sobre o MGB da equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$. Adequando as variáveis para a opção de exploração (E), tem-se:

---

[43] No modelo de Negócios, em última instância, as duas opções dependem do processo estocástico do preço do petróleo: $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Combinando as equações (64) $V = q.\overline{B}.P$ ($B = \overline{B}$) com a equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.(\alpha.P.dt + \sigma.P.dz) \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.dP$.

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 E}{\partial V_E^2}.\sigma^2.{V_E}^2.dt + (r_f - \delta).\frac{\partial E}{\partial V_E}.V_E - r_f.E = -\frac{\partial E}{\partial t} \quad (80)$$

Como visto, a equação é genérica e vale para qualquer derivativo $E(V_E,t)$ que não pague dividendos, escrito sobre V_E, que segue o MGB $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. As condições de contorno são as similares às vistas nas Seções 3.4.2 e 3.4.3, mas com algumas diferenças.

A primeira condição de contorno decorre do fato de $V = 0$ continuar sendo uma barreira absorvente:

$$E(V = 0) = 0$$

A segunda condição afirma que na curva de gatilho do primeiro estágio (V^{**}), a opção de investir vale o VME do projeto ($VME = Ps.(V - I_D) - I_E$ - (74)), onde o valor da "reserva" não desenvolvida $(V - I_D)$ é dada pela opção de desenvolvimento (*value matching condition*):

$$E(V^{**}) = Ps.F(V^{**}) - I_E$$

A terceira condição denominada de contato alto ou suave (*smooth pasting condition*) define que no valor de gatilho o valor das duas opções devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^{**}.

$$E_v(V^{**}) = Ps.F_v(V^{**})$$

A quarta condição afirma que na expiração do primeiro estágio, vale a regra do VME tradicional, com o valor da reserva desenvolvida dado pela opção de desenvolver. Para $t = T_1$:

$$E(V) = Máx[Ps.F(V) - I_E;0]$$

A EDP (80) e condições de contorno do MDE tratam a opção de exploração como composta e preservam o risco geológico na decisão de investimento, mas não

possui solução analítica. Para contornar este problema sugere-se uma aproximação simples, ao se considerar sempre que $F = V - I_D$.

Essa aproximação só não é a solução verdadeira quando $V < V^*$, ou seja, o segundo estágio não está *deep in the money* e portanto, o primeiro não deve ser exercido imediatamente. Essa regra de decisão é inequívoca e para uma opção de exploração, é mais importante do que o valor calculado desta ser exato ou não. Por isso utilizar $F = V - I_D$ como uma aproximação inferior do valor verdadeiro da opção (pois: $V < V^* \Rightarrow F > V - I_D$). A taxa de dividendos (δ) e a volatilidade (σ) para apreçar $E(V)$ serão as mesmas do ativo subjacente.

Com esta simplificação, os dois estágios da opção de exploração passam a depender de vários parâmetros comuns ($r_f, \delta, \sigma \; e \; dV$), diferenciando-se quanto ao ativo subjacente e preço de exercício: $V_E \; x \, V$ e $(I_E + Ps.I_D) \; x \, I_D$. Quanto à expiração, os dois estágios podem ter prazos iguais ou diferentes[44]: $T_1 = T_2$ ou $T_1 < T_2$.

Se os dois estágios da opção tiverem mesma expiração ($T_1 = T_2$) e a probabilidade de sucesso for um, a curva do valor crítico normalizado (V^* / I) será única, já que todos demais parâmetros para sua definição ($r_f, \delta, e \; \sigma$) são iguais (Merton, 1973, apud PS&S, 1998, p.489). Então, como a opção de desenvolvimento apresenta maior relação V / I do que o primeiro estágio da opção de exploração, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a opção de desenvolvimento será a primeira a tornar-se *deep in the money,* independente do valor da probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*):

---

[44] Embora para uma opção de compra composta financeira T1<T2 seja uma premissa óbvia, este não é o caso de uma opção de exploração. Um contrato de exploração cede o direito explorar uma área para uma firma por um período limitado, ao final do qual a firma pode declarar a comercialidade de eventuais descobertas. Desta forma pode-se considerar que na opção de exploração T1=T2. Em outras situações, o contrato de exploração é dividido em etapas, ao final das quais, a empresa é obrigada a devolver uma parte da área. Isso cria incentivos para sejam perfurados poços que auxiliem na definição da área que se deseja reter, fazendo com que a opção de perfuração do pioneiro (exploração propriamente dita) apresente expiração menor do que a da opção de desenvolvimento: T1<T2. Em outras situações, o investimento em poços pioneiros é obrigatório, o que reduz o problema do primeiro estágio à regra do VME e preserva a opção de desenvolvimento, caso haja uma descoberta.

$$\frac{V}{I_D} > \frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Então se $T_1 = T_2$ a condição ótima de exercício $V > V^{**} > V^{*}$ está garantida e a simplificação proposta $F = V - I_D$ é a solução verdadeira.

Se $T_1 < T_2$, cada uma das opções terá sua própria curva de gatilho (V^* / I) e a opção que apresentar maior relação V / I não será necessariamente a primeira a tornar-se *deep in the money*. O primeiro toque irá depender da relação entre os valores dos investimentos de exploração, desenvolvimento, da probabilidade de sucesso e da magnitude da relação $T_1 < T_2$.

Quatro combinações de resultados em relação às maturidades são possíveis para as opções do primeiro e segundo estágio da opção de exploração: *deep x deep; out x deep; deep x out* e; *out x out.* Novamente, se o segundo estágio estiver maduro (*deep x deep* e *out x deep*) a aproximação $F = V - I_D$ é o valor exato, e em caso contrário (*deep x out* e *out x out*), é um valor inferior ao verdadeiro F.

A regra de decisão será a seguinte:

- Se ocorrer o 1º caso (*deep x deep*), a opção deve ser exercida imediatamente;
- Se ocorrer um dos demais casos (*out x deep, out x out* ou *deep x out*) o decisor deve aguardar que os dois estágios estejam *deep* simultaneamente. Caso isso não ocorra*,* na data de expiração do primeiro estágio, o decisor dever então decidir sobre o exercício da opção com a regra do VME.

Então, a opção de composta E de exploração pode ser agora valorada com o instrumental de uma opção simples sobre uma opção de desenvolvimento F_D, preço de exercício $I_E + Ps.I_D$, gatilho $.V^{**}$ e expiração T_1. A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1 continua válida.

O exercício é necessariamente ótimo para a firma maximizadora do lucro se os dois estágios da opção de exploração estiverem *deep in the money* simultaneamente*.* Se os dois estágios têm a mesma data de expiração, essa condição ocorrerá necessariamente toda vez que a o primeiro estágio estiver

maduro. Caso o primeiro estágio da opção expire antes do segundo, o decisor deve verificar se as duas opções estão *deep in the money* para o exercício, em caso contrário deve aguardar. Por fim, nas expirações do primeiro e segundo estágios, o decisor decide com base na regra do VME e VPL respectivamente.

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P)

Este Capítulo tem como objetivo discutir os conceitos e modelos abordados ao longo da dissertação através de exemplos numéricos. Na Seção 5.1 são comparados e discutidos os resultados obtidos para uma opção de desenvolvimento com os Modelos de Negócio e Paddock, Siegel e Smith (PS&S). Na Seção 5.2 são comparados e discutidos os resultados obtidos com o Modelo de Exploração e com o Modelo de PS&S para um projeto exploratório. Na Seção 5.3 segue uma discussão sobre um problema de *portfolio*: Priorização de investimentos com OR.

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo

Nesta Seção aborda-se em detalhe o caso de um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo terrestre sob regime de concessão. Considere uma descoberta de acumulação de petróleo já delimitada denominada de ID-1, com 13,8 milhões de bbl de petróleo recuperáveis em 11 anos de produção. A oportunidade de investimento pode ser declarada comercial pela empresa a qualquer momento, em um prazo máximo de 1 ano. O órgão regulador então, avalia o projeto de desenvolvimento do campo e o cronograma proposto pela empresa. Caso seja aprovado, a empresa recebe a autorização para implantar o projeto e o direito de produzir na área por 20 anos. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O investimento atualizado necessário para o desenvolvimento da reserva (I_D) é de US$ 62,5 milhões (MM), e o valor presente da reserva desenvolvida (V) calculado em planilha eletrônica é US$ 69,2 MM. Com isso, o projeto ID-1 apresenta VPL de US$ 6,7 MM, o que de acordo com a regra clássica do VPL, é o suficiente para o investimento imediato. Mas a empresa ainda conta com a flexibilidade de adiar por até 1 ano a tomada de decisão, e observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida. De acordo com a teoria de OR, o decisor deve apenas investir imediatamente se o projeto estiver *deep in the money*, ou com um valor suficientemente alto (maior ou igual do que o gatilho) que torne desvantajosa a espera.

O valor a OR e do gatilho serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1, considerando inicialmente o Modelo de PS&S, e em seguida com o Modelo de Negócios. Para isso será necessário estimar os demais parâmetros necessários ao apreçamento da OR: σ, r_f e δ.

PS&S (1988, p.496-497) sugerem que a volatilidade (σ) do preço de uma reserva desenvolvida poderia ser estimada a partir de séries históricas, mas que infelizmente não são satisfatórias nem mesmo para os Estados Unidos, onde há um mercado mais desenvolvido. Apontam como solução utilizar o resultado de Gruy et al. (1982) que sugerem uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Com isso utilizam a volatilidade da taxa de variação do preço do petróleo como uma estimativa para a volatilidade da taxa de variação do preço de uma unidade de reserva desenvolvida. De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.400), a volatilidade do preço do petróleo entre os anos 60 e início dos 90 teria sido na ordem de 15%, mas estimativas da indústria podem ser maiores. Consideram que um range razoável seria entre 15% e 25%, por isso adota-se a média de 20% como caso base nesta dissertação. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%[45].

A taxa de dividendos do Modelo de PS&S é dada pela equação (72): $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$, tendo sido estimada de forma semelhante à descrita por Dixit e Pindick (1994, p.399). A taxa de declínio exponencial da reserva γ foi estimada ajustando-se uma curva exponencial à curva de produção do projeto ID-1. A reserva é recuperada de forma acelerada (são apenas 11 anos de produção) e com forte depleção, gerando uma taxa de declínio de 29% ao ano. O lucro π_t foi estimado a partir do fluxo de caixa, deduzidos custos operacionais (53%), *royalties* (13,4%) e impostos (18%, líquido de benefícios fiscais e depreciação). Todos estes percentuais são sobre a receita bruta:

$$\pi_t = (1 - Royalty - Opex).(1 - Tax) = (1 - 13{,}4\% - 53\%).(1 - 18\%) = 27{,}7\%$$

[45] A taxa livre de risco estimada foi a do país onde se encontra o projeto ID-1, pois a empresa detentora da OR também é sediada neste país, tomando e aplicando recursos no mercado interno.

O valor da reserva desenvolvida V_t considerada por PS&S (*op. cit.*) e Dixit e Pindick (*op. cit.*) foi a regra do 1/3 de Gruy et al (*op. cit.*). Considerando que o projeto ID-1 encontra-se em um mercado não desenvolvido como o americano e sujeito a um regime fiscal e regulatório diferente, é mais adequado estimar V_t a partir da equação (64): $V = q.B.P \Rightarrow q = V/(B.P) = 21{,}3\%$. Retornando à equação (72):

$$\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1) = 0{,}29.(0{,}277.P / 0{,}213.P - 1) \Rightarrow \delta_t = 10{,}4\%\ a.a.$$

O MGB neutro ao risco do preço de um barril de reserva desenvolvida do projeto ID-1 será então dado por:

$$dV_t = (r - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow dV_t = -0{,}044.V.dt + 0{,}2.V.dz$$

Este MGB apresenta uma tendência neutra ao risco bastante negativa, decorrente da elevada taxa de dividendos encontrada com o Modelo de PS&S. No mundo real, a tendência irá depender da relação entre a taxa ajustada ao risco μ exigida por um investidor que detivesse a oportunidade de desenvolvimento e a taxa de dividendos δ. De acordo com a equação (37):

$$\alpha - \pi = r_f - \delta \Rightarrow \alpha = r_f + \pi - \delta \Rightarrow \alpha = \mu - \delta$$

No caso do prospecto ID-1, se a taxa ajustada ao risco for de, por exemplo, 9%, significa que a tendência real é negativa: $\alpha = \mu - \delta = 9\% - 10{,}4\% \Rightarrow \alpha = -1{,}4\%$. Então, se $\mu < \delta$, o preço no mundo real de uma unidade de reserva desenvolvida tenderá a decrescer com o tempo. Mas isso só faz sentido se, de fato, a reserva estiver em depleção (com custos crescentes) ou se o preço do petróleo for decrescente, demais parâmetros constantes. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo de PS&S sobre o preço de petróleo ou sobre custos, não faz sentido que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a tendência de preço de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

Com este contra exemplo, argumenta-se que o Modelo de PS&S deve ser utilizado com cuidado para opções de desenvolvimento de campos de petróleo quando $\mu < \delta$.

Todos os parâmetros determinados, o valor da opção com expiração de 1 ano é de US$ 7,7 milhões, portanto, maior do que o VPL de 6,7 milhões. Isso significa

que, ao contrário da regra de decisão com o VPL, o projeto ID-1 não deve ser declarado comercial imediatamente. O prêmio da flexibilidade de diferir a decisão e observar como evolui o valor da reserva desenvolvida do projeto vale US$ 1 milhão. Se a expiração para a declaração de comercialidade fosse igual a 9 anos, o valor da opção de desenvolvimento sobe para US$ 9,7 MM e o prêmio da flexibilidade vale US$ 3 MM. Esse exercício dá a dimensão da sensibilidade do valor da OR de desenvolvimento ao tempo de expiração. A Figura 13 apresenta o valor da opção em função do valor presente da reserva desenvolvida do projeto com expiração de 1 ano, e a sensibilidade para a expiração de 9 anos.

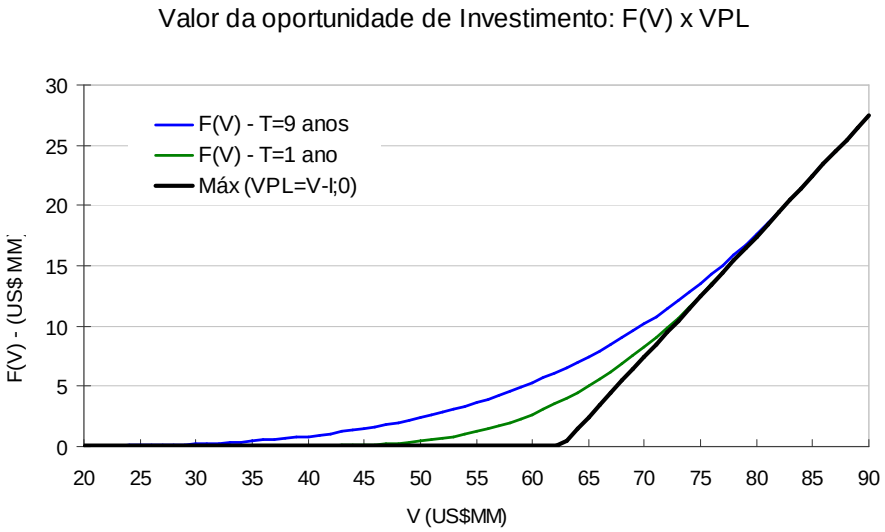

Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1 em função do valor presente da reserva desenvolvida.

Note que o valor da OR domina a regra de decisão do VPL até o ponto em que a curva da opção toca e se funde com a reta do VPL. Este ponto representa o valor crítico da reserva desenvolvida, situação em que o investimento deve ser imediato. Naturalmente que, se o decisor tivesse, por exemplo, 9 anos para decidir sobre o investimento, sua flexibilidade seria maior implicando num valor maior para a opção e seu valor crítico.

O valor crítico do projeto ID-1 é dado pelas equações (53) e (54), visto na Seção 3.5.1. Com o prazo de 1 ano para a expiração da opção de declaração da comercialidade, o valor crítico é de US$ 76,3 MM. Reduzindo progressivamente o prazo da expiração até que se torne zero, pode-se calcular como evolui o valor do

gatilho ao longo do tempo, todos os demais parâmetros constantes. A curva gerada é denominada de curva de gatilho (Figura 14). Observa-se que o valor crítico diminui progressivamente até a data de expiração, quando se torna igual ao valor preço de exercício (ou investimento, de US$ 62,5 MM).

Com esse conjunto de resultados, o decisor deve adiar a declaração de comercialidade do projeto ID-1 até que essa opção se torne *deep in the money* no prazo de 1 ano. Este exemplo deixa de forma clara a superioridade da valoração e decisão com OR.

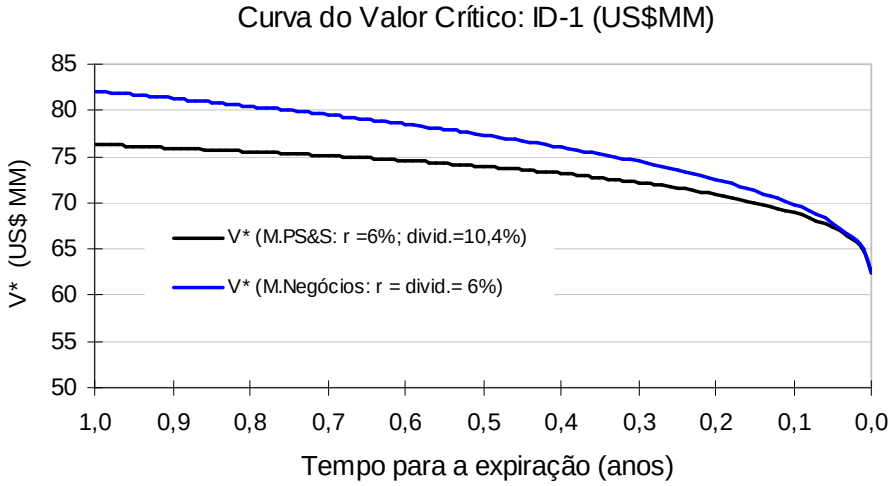

Figura 14 - Curva do valor crítico em função da expiração do Modelo de PS&S. Observa-se o efeito da redução da taxa de dividendos, obtida para o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (1993).

O exercício com o projeto ID-1 demonstrou a necessidade de uma quantidade significativa de informação e premissas na estimativa dos parâmetros para o cálculo da taxa de dividendos. Desta forma, outras alternativas mais simples para a estimativa de δ podem ser necessárias e/ou convenientes.

Dias (2004, p.101) destaca duas alternativas para estimar a taxa de dividendos. Como o preço de uma reserva desenvolvida é proporcional ao preço do óleo na boca do poço, a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.4.2):

$$Spot = Futuro(t).\exp(-(r_f - \delta).\Delta t)$$

Onde $Spot$ é o preço spot do óleo em t_0 e $Futuro(t)$ é o preço futuro do óleo para entrega na data t. A segunda alternativa é uma regra útil e prática para OR proposta por Pickles e Smith (1993). Estes autores concluem que, se ignorada a volatilidade de curto prazo, a taxa de conveniência δ em situações "normais" de mercado é equivalente à taxa livre de risco. Em situações de choques, esta taxa pode variar significativamente no curto prazo, mas tendem a um nível de equilíbrio no longo prazo, sendo portanto estável para projetos de longa duração como os de E&P. Assim os autores sugerem que, em OR, inicialmente se adote como valor "normal" da taxa de conveniência o valor da taxa livre de risco.

Adotar a sugestão de Pickles e Simith (*op. cit.*) desfigura o Modelo de PS&S. Adota-se então o Modelo de negócios onde o valor presente da reserva desenvolvida V é função linear do preço do petróleo e segue o MGB dado pela equação (66): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$, onde $V = q.B.P$ (64).

Reconsidere a opção de desenvolvimento do projeto ID-1, mas assumindo que a taxa livre de risco e a taxa de dividendo são iguais a 6%. O valor da opção de desenvolvimento com expiração de um ano sobe de US$ 7,7MM para US$ 8,9 MM, elevando o prêmio da flexibilidade de US$ 1 MM para US$ 2,2 MM. O valor do gatilho também aumenta, de US$ 76,3 para 82,0 MM, diminuindo a probabilidade de exercício de 75% para 70% e aumentando o tempo esperado de 5 para 7 meses.

Todos estes resultados são consistentes com a redução da taxa de dividendos, que aumenta o valor da opção, o prêmio da flexibilidade e o valor de gatilho, mas diminui a probabilidade do exercício. As Figuras 14 e 15 apresentam a comparação entre os resultados obtidos com PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (op.cit).

Os resultados obtidos são particulares da opção sobre o projeto ID-1, mas as relações descritas são gerais. Os dois critérios de avaliação da opção de desenvolvimento são válidos e consistentes, especialmente no que diz respeito à superioridade com OR sobre a técnica do VPL. A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. O Modelo de Negócios tem a vantagem de evitar o efeito indesejado da perda de valor do projeto não implantado quando a taxa de caimento da reserva é

muito elevada. No caso do projeto ID-1, gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto, o que é adequado dado a baixa relação entre o VPL e o investimento atualizado (10,7%). Entretanto, esse conservadorismo não altera o resultado da decisão no momento da expiração da opção, quando volta a valer a regra do VPL, mas exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

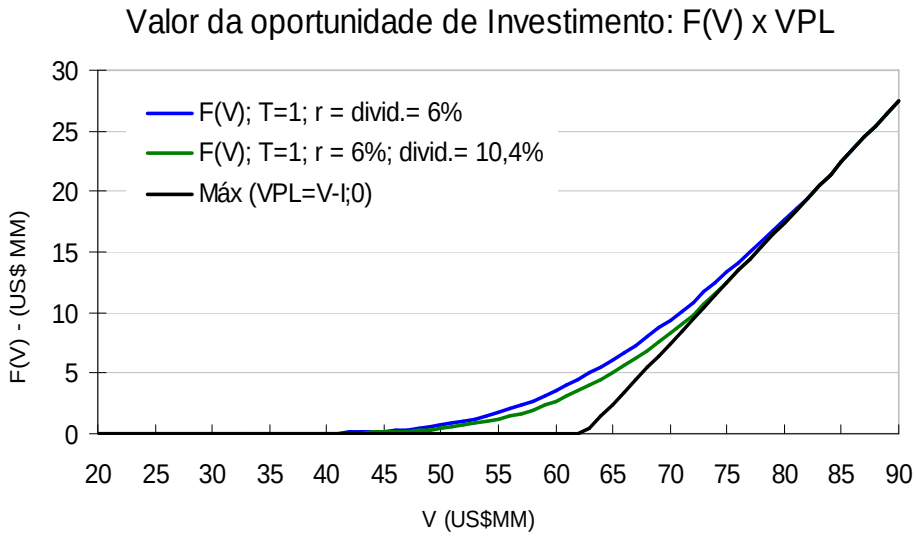

Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação do valor das opções do Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (*op. cit.*).

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S

Nesta Seção se aplica o Modelo de Exploração (MDE) elaborado na Seção 4.3.3 para o problema de decisão em um projeto de exploração. Os resultados são então comparados com a abordagem do Modelo de PS&S para exploração. Diferente do que foi feito na Seção anterior, as opções também são avaliadas na forma sugerida por Merton (1973, apud PS&S, 1988, p.489), ou seja, considerando o valor do ativo subjacente dividido pelo respectivo investimento.

Considere um prospecto exploratório terrestre denominado de IE-2 com um volume de petróleo a descobrir de 25 milhões de bbl recuperáveis. A oportunidade de investimento encontra-se sob um contrato de concessão dividido em dois períodos. Ao final do primeiro período que encerra em 1 ano, a empresa é obrigada a devolver 50% da área sob concessão e para isso, pretende perfurar o prospecto IE-2 para auxiliar a definição da área que irá reter. O segundo período de concessão

expira em 4 anos, ao final do qual, a empresa deve definir sobre o desenvolvimento de uma eventual descoberta e devolver ao órgão regulador o restante da área exploratória. Isso significa que a empresa tem duas decisões a tomar: Primeiro decidir no prazo de 1 ano se exercerá ou não a opção de perfuração do prospecto exploratório, e em seguida deve definir entre os anos 2 e 4 se irá exercer a opção de desenvolver, em caso de sucesso exploratório. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O poço exploratório (I_E) irá custar US$ 3,4 milhões (MM) e tem probabilidade de sucesso (Ps) de 20%. Em caso de um resultado positivo, o investimento de desenvolvimento (I_D) do novo campo é de US$ 82,3 MM, e o valor da reserva desenvolvida (V) é de US$ 126,4 MM. O indicador tradicional de decisão de investimento em um projeto de exploração é o VME, dado pela equação (74) $VME = Ps.(V - I_D) - I_E$, que apresenta valor de US$ 5,4 MM. Isso significa que, do ponto de vista tradicional, o prospecto exploratório pode ser perfurado imediatamente já que é positivo.

Do ponto de vista de OR, a decisão é uma opção composta de exploração. Como visto na Seção 4.3.3, o decisor apenas deve investir imediatamente se ambos os estágios da opção estiverem *deep in the money*. Nesta situação, caso ocorra a descoberta, o campo deve ser desenvolvido imediatamente, e em caso de fracasso exploratório, encerra-se o projeto. Caso um dos estágios não esteja *deep in the money* o decisor deve observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida e aguardar a condição necessária. Se até a expiração da primeira fase esta não ocorrer, a empresa deve decidir com a regra do VME. Em caso de descoberta, o decisor adquire a opção de desenvolvimento com nova expiração, que novamente só deve se deve ser exercida quando estiver *deep in the money*. Caso isto não ocorra até o final do novo período, na expiração volta a valer a regra do VPL.

O valor a OR e do valor crítico (gatilho) serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1. Os demais parâmetros necessários ao apreçamento das OR (σ, r_f e δ) são estimados de forma idêntica à Seção anterior (5.4.1). PS&S (1988, p.496-497) sugerem utilizar o resultado de Gruy

et al. (1982), os quais apontam uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Dixit e Pindick (1994, p.400) consideram o range de 15% a 25% como razoável para a volatilidade do preço do petróleo, por isso adota-se a média de 20%. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%. Dias (2004, p.101) destaca que a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.6.2). Pickles e Smith (1993) sugerem que em OR se use, inicialmente, a taxa livre de risco como o valor da *convenience yeld.* Segundo os autores, esta estimativa é razoável como equilíbrio de longo prazo.

A análise do prospecto IE-2 é realizada na forma *backward*, iniciando pela opção simples de desenvolvimento, que apresenta valor de US$ 44,1 MM e gatilho (V^*) de US$ 123,2 MM. Como o gatilho está abaixo do valor atual da reserva desenvolvida de US$ 126,4 MM, significa que a opção já se encontra *deep in the money*. Já a opção composta de exploração apresenta valor de US$ 5,5 MM com gatilho (V^{**}) de US$ 130,3 MM. Como o gatilho está acima do valor atual da reserva desenvolvida (US$ 126,4 MM), significa que não está madura. Neste cenário, a regra de decisão recomenda que a empresa não invista imediatamente, ao contrário, aguarde até que o primeiro estágio também esteja *deep in the money*.

A Figura 16 compara o valor das opções de desenvolvimento e de exploração em relação à regra de decisão dos seus pares VPL e VME. A diferença entre os valores das duas opções deve-se ao efeito de achatamento dos valores provocado pela ponderação do valor da “reserva” exploratória perfurada e desenvolvida com a probabilidade de sucesso. A Figura 17 apresenta o mesmo gráfico, mas com os valores das opções normalizados pelo investimento. Note que as curvas do VPL e do VME são graficamente coincidentes em decorrência da normalização. A Figura 18 apresenta as curvas de gatilho dos dois estágios em valores absolutos. Note que as duas curvas se cruzam em torno do tempo de 0,5 anos, separando duas regiões do gráfico. À esquerda deste ponto, a curva de gatilho do primeiro estágio (exploração *strictu sensu*) é maior do que a da curva do segundo estágio (desenvolvimento), enquanto que à direita ocorre o contrário. Isso significa que até 0,5 anos, toda vez que a exploração estiver *deep in the money*, o desenvolvimento também estará, podendo a opção composta ser exercida imediatamente. A partir de

então, o fato do primeiro estágio estar *deep in the money* já não é suficiente para o exercício imediato.

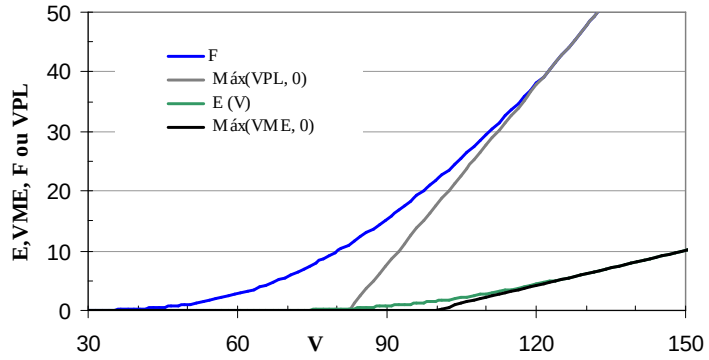

Figura 16 – Valor em US$ Milhões dos dois estágios da opção de exploração IE-2.

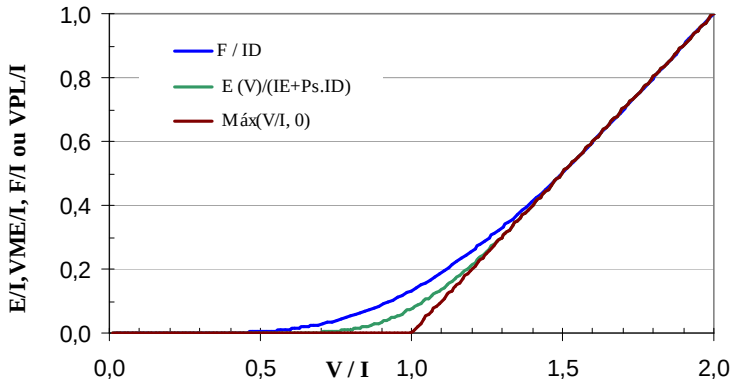

Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2, primeiro e segundo estágios.

Conforme discutido na Seção 4.3.3, o MDE se diferencia do Modelo de PS&S para exploração por tratar esta opção como composta, preservar o risco geológico e observar expirações diferentes para os dois estágios da opção, quando houver. Para permitir a comparação, admitiu-se que as taxas de dividendos são iguais nos dois modelos (6%), enquanto que os valores em US$/bbl de PS&S já estão convertidos para US$ MM nos gráficos. Assim o valor da opção com a abordagem de PS&S é obtido sobre o valor da reserva desenvolvida considerando como preço de exercício a soma dos investimentos em exploração e desenvolvimento. A opção de exploração apresenta valor de US$ 40,7 MM com gatilho de US$ 112,4 MM, estando desde já *deep in the money*.

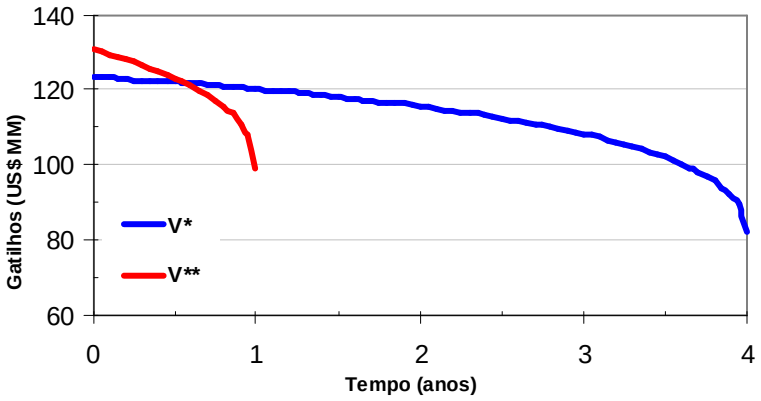

Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE.

A Figura 19 compara o gráfico do valor da opção de exploração do prospecto IE-2 calculado pelo MDE com a abordagem de PS&S. O fato do Modelo de PS&S não considerar a probabilidade de sucesso faz com que a opção exploratória tenha um valor exageradamente alto em relação ao MDE, mas com preço de exercício muito inferior (US$ 112,4 contra US$ 130,3 milhões do MDE), já que apresenta uma relação V/I mais elevada.

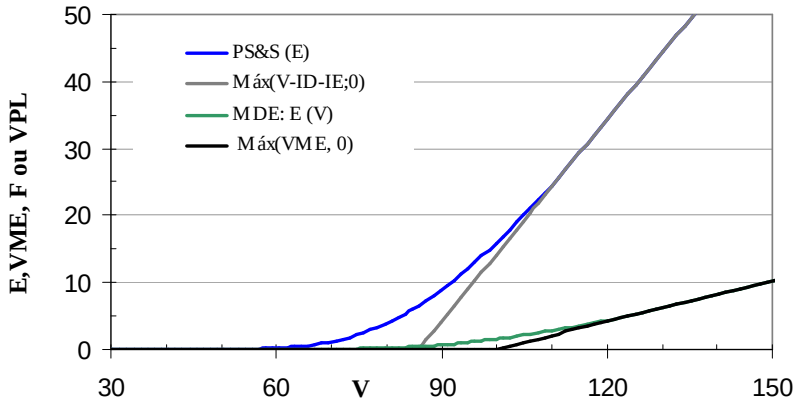

Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE.

A Figura 20 apresenta as curvas de gatilho geradas com os dois modelos. As curvas são paralelas pelo fato dos modelos estarem avaliando um único projeto, ou seja, todos parâmetros são iguais (r_f, σ, δ e T_1), exceto o preço de exercício.

Se o valor da opção é considerado normalizado, a curva do valor crítico normalizado (V^*/I) será única (Figura 21), conforme discutido na Seção 4.3.3 (Merton, 1973, apud PS&S, 1988, p.489). Então, como o modelo de PS&S apresenta maior relação V/I do que o MDE, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a abordagem de PS&S para a opção de exploração será a primeira a tornar-se *deep in the money*, independente do valor da probabilidade de sucesso ($Ps \in [0,1)$):

$$\frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Isso significa que no MDE o valor crítico da opção será sempre maior do que na abordagem de PS&S, portanto apresenta sua curva de valor crítico também sempre maior (Figura 20).

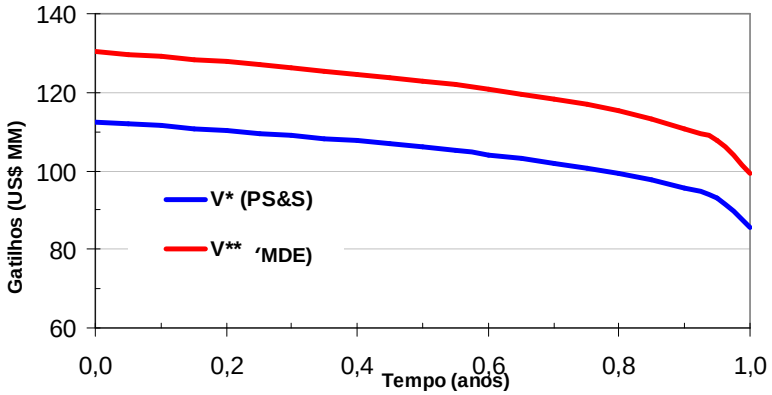

Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE.

A análise deste exemplo demonstrou vários aspectos teóricos discutidos na Seção 4.3.3. Em particular observou-se que o valor da opção exploratória quando tratada como opção simples é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. Também se verificou que ignorar a probabilidade de sucesso geológico implica em um valor crítico menor. Por fim, a diferenciação das expirações dos dois estágios

demonstrou que o exercício do segundo estágio não implica necessariamente no exercício do primeiro, gerando uma regra de decisão mais elaborada do que a de uma opção simples ou composta com uma única expiração. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

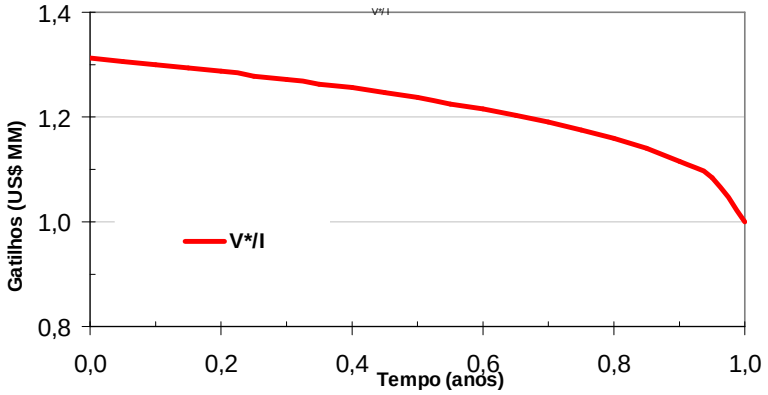

Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2.

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples

No processo de planejamento, uma empresa se depara periodicamente com o problema da priorização de investimentos em um *portfolio* de projetos. São muitos os critérios disponíveis ao decisor para a escolha do conjunto adequado de projetos (ver, por exemplo, Ross *et al*, 2002, Cap.6). Em geral envolvem indicadores tradicionais como o VPL, o *payback*, a TIR, o EVA (*Expected Value Added*), índices de rentabilidade como o VPL/IA (Investimentos Atualizados), etc. Estes indicadores são frequentemente utilizados de forma isolada ou em conjunto, compondo um *ranking* ou alguma função a qual o decisor deseja maximizar, sujeita a uma ou mais restrições como financeiras, de insumos, de equipamentos, etc. Mas por mais sofisticado que se torne este processo, pesa o fato de estar fundamentado em um fluxo de caixa, descontado ou não, que ignora as flexibilidades embutidas em um projeto, capturadas com OR.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43, ver Seção 2.2) relata o exemplo de uma companhia que tradicionalmente utiliza o VPL na aprovação dos

investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo. Realizou um teste *ex-post* da regra de decisão do VPL contra a regra de decisão de OR considerando dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um MGB. Os resultados revelam que o critério de OR apresenta um VPL *ex-post* para os projetos com VPL>>0 16,6% superior, enquanto que os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para significativamente positivo. Este resultado indica que um critério de priorização que considere a valoração com OR deve ser superior àqueles que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades.

Dias (1996, p.247) sugere a adoção de OR para a priorização de investimentos em uma carteira de projetos. Inicialmente, a empresa deve investir apenas naqueles projetos que já estão *deep in the money*. Caso seja necessário reduzir ainda mais investimentos devido a alguma restrição, recomenda que se utilize a volatilidade do preço do petróleo (comum a todos os projetos) como variável de priorização da carteira. Para isso basta aumentar progressivamente a volatilidade até que haja um subconjunto de projetos *deep in the money* que se enquadre na restrição[46].

Nesta Seção testa-se este critério para a priorização de projetos de um *portfolio* de oportunidades de investimentos em projetos de produção de petróleo, avaliados como OR simples – *call* americanas – e sujeitos a restrições orçamentárias. Adota-se o Modelo de Negócios (valor da reserva desenvolvida é função linear do preço do petróleo - Seção 4.3.1) combinado com o Modelo de PS&S para a estimativa da taxa de dividendos (Seção 4.3.2). A volatilidade será a do preço do petróleo, que segue um MGB.

Considere uma carteira com 27 de projetos de investimento em campos de petróleo sob regime de concessão. A Tabela 2 na sua metade esquerda lista o valor do projeto desenvolvido (V), o investimento atualizado (IA ou I), o VPL e a

[46] O ajuste da volatilidade pode ser feito de forma diferenciada. Por exemplo, poderia afetar apenas os projetos que estejam em um determinado país onde haja uma maior instabilidade regulatória. Também pode ser motivado por outras razões como, por exemplo, a expectativa do gerente, acionista ou *debitholder* sobre o comportamento dos preços futuros, o que afetaria o resultado da firma, seu valor de mercado e até sua capacidade de honrar seus financiamentos.

expiração para cada uma das oportunidades de investimento. De acordo com a regra clássica do VPL, dos 27 projetos, 23 apresentam-se positivos e por isso estariam aptos a serem implementados imediatamente.

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado.

Projetos		*V* em 2006	Invest. ou Preço Exercício	VPL (payoff)	Tempo de expiração	Gatilho V* em 2006	Valor da OR (F) (σ=20%)	Prêmio da flexibilid. (F-V) (σ=20%)	Deep in the money? (σ=20%)	Data esperada Exercício (σ=20%)	Probab. de Exercício (σ=20%)
		US$MM	US$MM	US$MM	Anos	US$MM	US$MM	US$MM		Ano	
1	P01	1083,2	450,4	632,9	3	629,6	632,9	0,0	Sim	2006	100%
2	P02	875,4	742,6	132,8	2	1006,6	149,8	17,0	Não	2007	75%
3	P03	243,0	215,6	27,4	2	292,2	35,5	8,0	Não	2007	66%
4	P04	1364,2	900,2	464,0	4	1285,3	464,0	0,0	Sim	2006	100%
5	P05	477,1	783,3	-306,2	4	1118,4	6,8	312,9	Não	2009	10%
6	P06	994,7	799,1	195,5	2	1083,2	203,5	7,9	Não	2007	84%
7	P07	1687,7	957,9	729,9	2	1298,4	729,9	0,0	Sim	2006	100%
8	P08	2995,7	1252,9	1742,7	5	1816,9	1742,7	0,0	Sim	2006	100%
9	P09	2302,0	892,8	1409,2	4	1274,7	1409,2	0,0	Sim	2006	100%
10	P10	492,3	258,5	233,8	3	361,4	233,8	0,0	Sim	2006	100%
11	P11	847,9	875,4	-27,5	3	1223,8	78,1	105,6	Não	2008	43%
12	P12	1102,9	260,2	842,8	3	371,5	842,8	0,0	Sim	2006	100%
13	P21	484,2	124,2	360,0	2	168,4	360,0	0,0	Sim	2006	100%
14	P22	38,4	78,9	-40,6	1	101,4	0,0	40,6	Não	2007	0%
15	P23	1105,6	285,1	820,5	3	398,6	820,5	0,0	Sim	2006	100%
16	P24	105,6	213,1	-107,4	3	297,9	0,2	107,7	Não	2009	2%
17	P25	55,3	39,2	16,1	2	53,2	16,1	0,0	Sim	2006	100%
18	P26	597,9	504,7	93,2	8	753,9	123,9	30,7	Não	2009	66%
19	P27	3059,7	485,2	2574,5	7	719,1	2574,5	0,0	Sim	2006	100%
20	P28	1906,0	795,6	1110,4	6	1167,7	1110,4	0,0	Sim	2006	100%
21	P29	241,6	85,7	155,9	7	127,0	155,9	0,0	Sim	2006	100%
22	P30	301,5	78,1	223,4	8	116,7	223,4	0,0	Sim	2006	100%
23	P31	29,5	28,9	0,6	3	40,4	3,3	2,7	Não	2008	49%
24	P32	37,6	36,7	0,9	3	51,3	4,3	3,4	Não	2008	50%
25	P33	59,2	13,9	45,3	2	18,8	45,3	0,0	Sim	2006	100%
26	P34	37,6	15,6	22,0	2	21,2	22,0	0,0	Sim	2006	100%
27	P35	17,6	3,5	14,1	4	5,0	14,1	0,0	Sim	2006	100%
	Total	22.543,4	11.177,3	11.366,1							

Mas se tratadas as oportunidades de investimento como OR, os resultados são bem diferentes. O valor do projeto desenvolvido é o preço do ativo subjacente (hipótese do MAD, Seção 3.3.1) e o VPL é o *payoff* do exercício da opção. Para o cálculo do valor da OR foi considerada a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993, Seção 3.5.1). A taxa de dividendos considerada foi de 4% a.a. (única para todos os projetos), tendo sido calculada de acordo com a equação (72)

do modelo de Paddock, Siegel e Smith (Seção 4.3.2). Foi considerada uma taxa de declínio de reserva 10%, custo de 30% e impostos de 34%. As datas e probabilidades esperadas de exercício forma calculadas de acordo com a Seção 3.7.

A volatilidade considerada é novamente a média do intervalo sugerido Dixit e Pindick (1994, p.400): 20%. Com estes dados foram calculados o preço de exercício antecipado (gatilho), o valor da OR, o prêmio da flexibilidade de adiar o investimento e a data provável de exercício de cada uma das OR. Os resultados obtidos estão dispostos na metade direita da Tabela 2. Observa-se que apenas 17 projetos encontram-se *deep in the money*, o que reduz o montante de investimento requerido pela regra do VPL em 25% , de US$ 9226,6 MM para US$ 6899,0 MM.

A Tabela 3 compara o efeito do aumento da volatilidade sobre o *portfolio* em análise em dois cenários distintos: 30% e 40%. Os dois cenários de volatilidade foram escolhidos somente com o objetivo de avaliar a eficácia desta estratégia de seleção de projetos.

O que se observa é que com volatilidade de 30% e 40% o numero de projetos *deep in the money* reduz de 17 para 15 e 13 projetos respectivamente. Então, no *portfolio* em questão, dobrar a volatilidade reduz a carteira em 4 projetos. O número de projetos cortados depende do perfil dos projetos da carteira e da intensidade da redução necessária. No caso em questão, a redução foi eficaz na medida em que elevar a volatilidade para 30% e 40% reduziu o investimento para 65% e 51% em relação ao requerido pela regra do VPL (100%) - Tabela 4.

A Tabela 4 permite uma avaliação clara da eficácia da estratégia de aumentar a volatilidade do preço do petróleo para a seleção de um *portfolio* de projetos de investimento. A partir da regra do VPL>0, compara a redução de investimento e VPL obtidos com os projetos selecionados com volatilidades de 20%, 30% e 40%. A terceira e quintas colunas revelam respectivamente a redução dos investimentos e do VPL da carteira com a priorização com OR. Com volatilidade de 40%, o *portfolio* selecionado manteve 84% do VPL>0 inicial gastando metade do investimento.

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo.

Projetos		Deep in the money ? σ=20%	Data esperada Exercício σ=20%	Probab. de Exercício σ=20%	Deep in the money ? σ=30%	Data esperada Exercício σ=30%	Probab. de Exercício σ=30%	Deep in the money? σ=40%	Data esperada Exercício σ=40%	Probab. de Exercício σ=40%
			(ano)			(ano)			(ano)	
1	P01	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
4	P04	**Sim**	2006	100%	Não	2007	100%	Não	2008	67%
7	P07	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	Não	2006	93%
8	P08	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	1%	**Sim**	2006	100%
9	P09	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
10	P10	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	6%	Não	2006	91%
12	P12	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	52%	**Sim**	2006	100%
13	P21	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
15	P23	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
17	P25	**Sim**	2006	100%	Não	2007	46%	Não	2007	72%
19	P27	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
20	P28	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
21	P29	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
22	P30	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
25	P33	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
26	P34	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
27	P35	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
6	P06	Não	2007	84%	Não	2007	100%	Não	2007	60%
2	P02	Não	2007	75%	Não	2007	100%	Não	2007	54%
3	P03	Não	2007	66%	Não	2007	100%	Não	2007	51%
14	P22	Não	2007	0%	Não	2007	100%	Não	2007	2%
24	P32	Não	2008	50%	Não	2008	0%	Não	2008	42%
23	P31	Não	2008	49%	Não	2008	0%	Não	2008	40%
11	P11	Não	2008	43%	Não	2008	83%	Não	2008	38%
18	P26	Não	2009	66%	Não	2010	45%	Não	2010	45%
5	P05	Não	2009	10%	Não	2009	39%	Não	2009	16%
16	P24	Não	2009	2%	Não	2009	100%	Não	2009	8%
	Total Sim	17			15			13		

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.

Critério de corte de projetos:	Investimento		VPL da carteira		VPL/IA
VPL >0	9226,6	100%	11847,7	100%	1,28
OR deep (σ=20%)	6899,0	75%	11397,2	96%	1,65
OR deep (σ=30%)	5959,6	65%	10917,1	92%	1,83
OR deep (σ=40%)	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
OR (σ=20%) com VPL	4929,7	53%	9229,9	78%	1,87
VPL/IA=1,39	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
VPL/IA=0,9	5001,8	54%	10187,3	86%	2,04

Na quinta linha da Tabela 4, apresentam-se os resultados de um critério misto: OR com volatilidade de 20% seguida da priorização com o VPL. A estratégia de combinar OR com o *V** também permitiu reduzir o investimento ao nível desejado (53%), entretanto se obteve um nível inferior de VPL: 78% do VPL>0, revelando-se como uma estratégia inferior.

Os resultados obtidos estão de acordo com o esperado. Utilizar OR como filtro para a seleção de projetos é um procedimento valoroso. Embora possa requerer cenários de volatilidade exagerados, o procedimento tem a vantagem de ser conservador na medida em que seleciona os projetos mais robustos ou mais *deep in the money*. Isso fica muito claro ao se analisar a coluna de VPL/IA da Tabela 4, onde a melhor relação é obtida com a máxima volatilidade.

Dixit e Pindick (1994, p.155, Figura 5.4) caracterizam graficamente a relação do valor crítico ou gatilho com a volatilidade: $\partial V^* / \partial \sigma > 0$. Então, se o investimento for considerado constante, aumentar o gatilho através do aumento da volatilidade implica num aumento proporcional na relação V^* / I. Admitindo que o investimento seja o valor atualizado ($I = IA$) e que o projeto esteja *deep in the money* ($V \geq V^*$), então:

$$VPL = V - I \Rightarrow V = VPL + I \therefore V \geq V^* \Rightarrow VPL + I \geq V^* \Rightarrow VPL \geq V^* - I \Rightarrow$$
$$\frac{VPL}{I} \geq \frac{V^* - I}{I} \Rightarrow \qquad \frac{VPL}{IA} \geq \frac{V^*}{I} - 1 \qquad (81)$$

Esse resultado significa que elevar o gatilho para selecionar projetos previamente *deep in the money,* implica no aumento da relação VPL / IA da carteira selecionada.

Este resultado é ainda um pouco mais geral: Dado um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica, os investimentos são constantes e o valor crítico normalizado V^* / I é desconhecido, selecionar projetos com VPL/IA tem efeito similar ao aumento da volatilidade na priorização com OR. Este critério é limitado, pois não se sabe se os projetos estão *deep in the money* ou não. Mas na ausência de uma valoração com OR, a seleção de projetos com o VPL/IA é uma aproximação inicial melhor do que, por exemplo, o VPL. No *portfolio* analisado com volatilidade de 20%, a razão VPL/IA

crítica ou de corte encontra-se entre 0,9 e 1,39, pois, o projeto P10 (VPL/IA=0,9) não está *deep in the money* enquanto que o P08 sim (VPL/IA=1,39).

As Figuras 22 e 23 exemplificam o efeito da priorização dos projetos com OR sobre a previsão de produção e investimentos com a elevação da volatilidade, observando-se as datas prováveis de exercício e a expiração das OR.

A regra do VPL positivo implica num cronograma de produção e investimento mais agressivos do que aqueles obtidos com OR, que são abrandados pelo gatilho da regra de decisão. Assim, se a firma deseja gerenciar seu planejamento minimizando a probabilidade de perda, deve investir considerando as datas de exercício apresentadas na Tabela 2. No caso de se desejar atender à demanda de um mercado (Figura 22) pode adequar seu cronograma adiando os projetos com menor probabilidade de exercício (com menor razão V^* / I) até as respectivas datas de expiração, gerando uma curva de produção ajustada à demanda projetada.

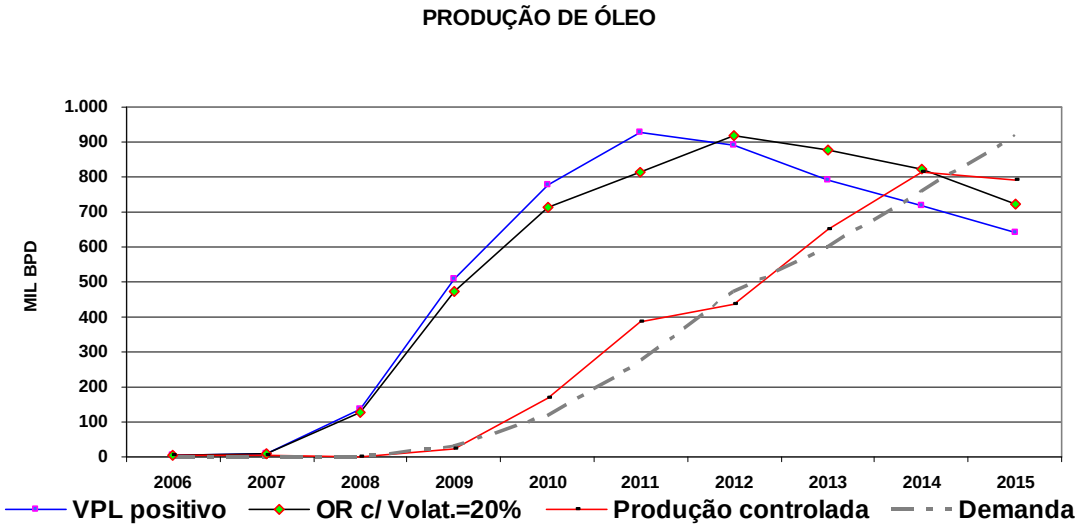

Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento.

A Figura 23 apresenta os investimentos dos projetos como fluxos e em valores nominais, ao contrário da Tabela 2 que apresenta os mesmos dados de forma pontual e atualizados para 2006. Uma observação mais cuidadosa revela que o efeito da priorização sobre o cronograma de investimentos se dilui quando os investimentos são visto como fluxos, mas esse é um efeito presente qualquer que seja o critério de priorização adotado. O perfil das curvas de investimento denota a

implantação dos projetos de desenvolvimento. Tipicamente, há um pico no dispêndio dos recursos durante a perfuração de poços e implantação das facilidades de produção, que então diminuem gradativamente com o início e declínio da produção, quando os investimentos visam amenizar o efeito da depleção das jazidas.

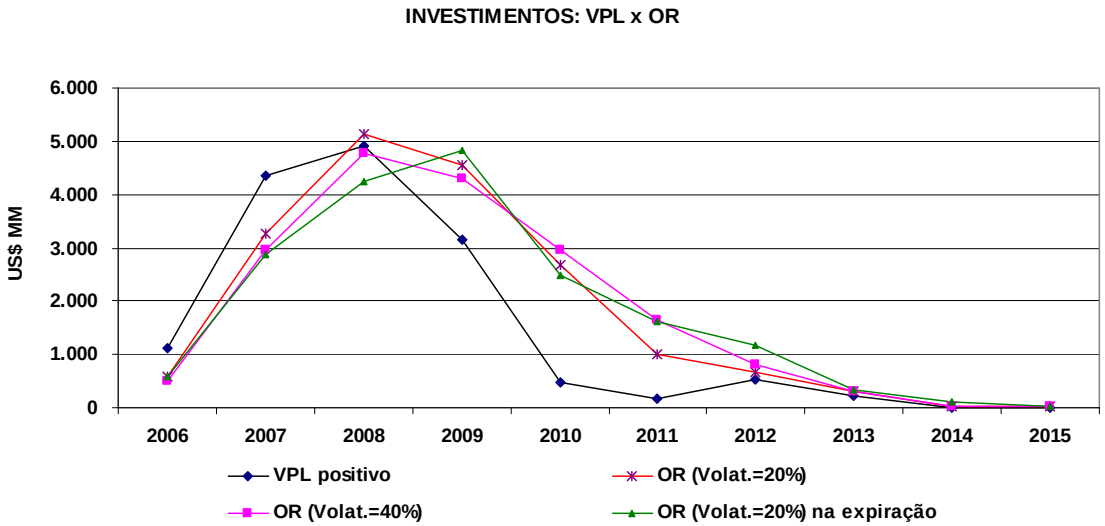

Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado.

Assim, aumentar a volatilidade de um *portfolio* de OR que dependem de uma variável estocástica comum é um procedimento mais eficaz do que o VPL ou o VPL/IA na priorização de projetos à medida que aumenta a robustez da carteira selecionada. Este procedimento também deve ser melhor do qualquer outro critério que se baseie unicamente em um fluxo de caixa positivo devido ao prêmio exigido para o exercício antecipado das opções. Não sendo possível a avaliação por OR, o decisor pode utilizar o *ranking* com VPL/IA como uma primeira aproximação do resultado com OR, embora isso possa levar a investimentos em projetos imaturos.

Por fim cabe ressaltar que, embora o resultado obtido com OR na priorização de investimentos seja animador, apresenta eficácia restrita. Priorizar investimentos da forma descrita, embora aumente o valor esperado do VPL *ex-post* do *portfolio*, considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) pode ser uma solução mais acertada.

6. Conclusões

A dissertação deixou clara a superioridade da Teoria de Opções Reais como ferramenta de decisão sobre investimentos em relação ao tradicional VPL e o VME.

Em uma opção de investimento/abandono, o VPL positivo/negativo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Na presença de incerteza e flexibilidades, o investimento/abandono imediato requer um prêmio maior do que o valor da espera pela evolução da incerteza.

Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir em um momento seguinte. Adiar só tem valor caso haja uma probabilidade positiva de uma perda irreversível, situação em que o investimento não deve ser feito imediatamente. Eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

O MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente a depender dos parâmetros considerados.

A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) apresenta-se como um limite inferior acurado para o valor verdadeiro de uma opção americana de compra com expiração finita, onde o ativo básico segue um MGB. A comparação desta aproximação analítica com a de Baroni-Adesi e Whaley (1987) para opções com expiração superior a um ano revelou que, para o conjunto de dados considerados pelos autores, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland apresentam uma performance superior ao não divergir a Raiz do erro Quadrático Médio - RQM.

A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. Os Modelos de Negócios e de Paddock, Siegel e Smith (1988) para opções de desenvolvimento são válidos e consistentes. Mas o modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para uma reserva não desenvolvida. Isso significa que até mesmo o processo real da reserva não desenvolvida pode ter tendência negativas: $\mu < \delta$. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo sobre o preço

de petróleo ou sobre custos, é questionável que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a depreciação de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

O Modelo de Negócios tem o mérito de ser de fácil aplicação, o que pode contribuir muito para a implantação da cultura de tomada de decisões com OR. Essa facilidade operacional ainda agrega outras vantagens: Permite lidar com facilidade com um grande número de projetos simultaneamente, oferecendo uma resposta rápida ao decisor. Entretanto seu uso deve ser limitado a decisões mais simples.

No caso do projeto ID-1, o Modelo de Negócios gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto. Esse conservadorismo exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

O valor normalizado da opção exploratória quando tratada como opção simples e sem o risco geológico (Modelo de PS&S) é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. A diferenciação das expirações dos dois estágios demonstrou que o exercício da opção requer uma regra de decisão mais elaborada. O fato de o primeiro estágio estar *deep in the money* não implica necessariamente no exercício imediato da opção de exploração, como ocorre quando a opção composta tem expiração única. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo mais apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

A priorização de investimentos com a elevação da volatilidade em um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica é um critério superior em relação aos critérios que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades. A elevação da volatilidade implica em selecionar os projetos mais robustos economicamente, em decorrência da elevação do gatilho para o investimento imediato.

Elevar o gatilho para selecionar projetos implica no aumento da relação VPL/IA da carteira selecionada. Assim, selecionar projetos com VPL/IA gera um resultado mais coerente com a teoria de opções reais sem garantir, obviamente, que os projetos selecionados estão *deep in the money.*

Entretanto, priorizar investimentos com o auxílio de OR conforme descrito é uma ferramenta limitada, pois considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) parece ser uma solução mais acertada.

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. Viu-se que esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Considerando a solução ii $V_U > I > V_D$ por simplicidade (note que $I > V_U > V_D$ o ativo é abandonado em qualquer cenário e que se $V_U > V_D > I$ o ativo não seria abandonado nunca) chegou-se a:

$$V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

A inequação (5) mostra em que situação ainda vale a pena não abandonar. Considerando o aumento do número de períodos e a modelagem da incerteza representados na Figura 3, então:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \Rightarrow \text{ em (5)}$$

$$\frac{(1+r).U.\delta}{r} > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \Rightarrow (1+r).U.\delta.q > [I.(r+q) - \delta.(1+r)].r \Rightarrow$$

$$\delta.(1+r).(U.q - r) > I.(r+q).r \Rightarrow \boxed{\delta > \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}}$$

Então se δ é maior do que o termo à direita na última desigualdade, o decisor deve esperar pelo período seguinte para tomar a decisão de abandono. Para que δ represente a situação em que o abandono imediato é a melhor opção deve-se inverter o sinal da desigualdade. Então, seja δ^* gatilho que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar, a partir da última desigualdade pode-se escrever:

$$\boxed{\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua

probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica

Portfolio replicante (r*eplicating portfolio approach*)

Uma terceira forma de calcular o valor da opção de investir em t_1 (por exemplo, em Copeland e Antikarov, 2001, p.90-95 e Trigeorgis, 1996, p.72-77) é montar um *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção com Δ ações de um ativo gêmeo (*twin security*) e B títulos livres de risco (*bonds*). O ativo gêmeo seria um ativo financeiro que replicasse perfeitamente os *payoffs* do projeto de investimento.

Então na Figura 6 o *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção é formado por Δ ações do ativo gêmeo e B títulos livres de risco:

$$\Phi_0 = \Delta.V_o + B \therefore \Phi_1 = \Delta.V_1 + B.(1 + r_f)$$

Como o *portfolio* Φ replica os *payoffs* da opção, pode-se escrever:

(i) $\Delta.\overline{V}_U + B.(1 + r_f) = F_U$

(ii) $\underline{\Delta.\overline{V}_D + B.(1 + r_f) = F_D}$

(i) - (ii) $\Delta.(\overline{V}_U - \overline{V}_D) = F_U - F_D \Rightarrow \Delta = \dfrac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}$

Que é o resultado (11) obtido anteriormente. A quantidade de ativo livre de risco B pode ser obtida a partir das equações (i) ou (ii) acima:

$$B = \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} = \frac{F_D - \overline{V}_D.\Delta}{R_f}$$

Sejam U e D como definido anteriormente: $\overline{V}_U = U.V_0$ e $\overline{V_D} = D.V_0$. Considerando que o *portfolio* Φ replica a opção, então pelo argumento de não arbitragem, o preço da opção em t_0 é o mesmo preço do *portfolio* Φ em t_0:

$$E_0(F_1) = \Phi_0 = \Delta.V_0 + B \Rightarrow E_0(F_1) = \Delta.V_0 + \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U$$

Este último resultado é a equação (12), obtida por avaliação neutra ao risco. Logo substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14):

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)} \quad (14)$$

Programação dinâmica

A programação dinâmica é uma ferramenta geral de otimização dinâmica particularmente útil para lidar com incerteza. Consiste em reduzir uma seqüência de decisões em duas alternativas mutuamente excludentes: o valor da decisão imediata e a função de valor que contempla todas as decisões subseqüentes (Dixit e Pindick, p.93-94). Assim, em cada o período, o decisor simplesmente escolhe a estratégia de maior valor: exercer a opção (decisão imediata) ou esperar pela decisão subseqüente. Foi exatamente este o processo utilizado nos Exemplos 1 e 2 da Seção 2.2, escolhido por seu apelo intuitivo.

Se o horizonte de tempo é finito, essa ferramenta pode ser aplicada no penúltimo período, revelando o valor da opção neste momento. De posse destes dados, agora a mesma técnica pode ser aplicado no período imediatamente anterior, e assim retroceder-se até o presente, num processo denominado de *backward induction*. Se ao contrário, o horizonte de tempo é infinito, a situação fica relativamente simplificada por sua natureza recursiva que, a cada momento, leva a um problema idêntico ao original. Isso permite a caracterização teórica da solução e em alguns casos, soluções analíticas.

Reconsidere a Figura 6. O primeiro passo consiste em calcular o valor da opção de investir no segundo período é dado por $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e por $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$ nos estados *up* e *down* da natureza, onde $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$ e $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$. Retrocedendo para o primeiro período, o valor esperado de todos os cenários futuros possíveis é dado por $E_0(F_1) = [q.F_U + (1-q).F_D]/R$, onde q e $1-q$ são as probabilidades reais e R é a taxa de desconto apropriada, ajustada ao risco da OR. Cabe ao decisor então decidir entre o investimento imediato ou esperar pelo

segundo período: $Max[V_0, E_0(F_1)]$. Esta valoração foi feita considerando o mundo real, mas poderia ter sido elaborada no mundo neutro ao risco, utilizando-se então as probabilidades neutras ao risco q e $1-q$ dadas por (14) e a taxa livre de risco R_f. Então o valor da opção será dado por $Max[V_0, E_0(F_1)]$ onde $E_0(F_1) = [p.F_U + (1-p).F_D]/R_f$ (13), resultado idêntico aos anteriores.

A Programação Dinâmica é a segunda técnica extensivamente utilizada no livro de Dixit e pindick (1994) para valorar OR, alternativamente a ativos contingentes. Dixit (op.cit, p.120-121) discute o relacionamento entre as duas abordagens, vantagens e desvantagens, argumentando que os dois métodos juntos podem lidar com uma grande variedade de aplicações, embora uma ou outra possa em algum caso ser mais adequada.

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito

Seja $f(x)$ uma função e uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ que convirja para $f(x)$ num certo intervalo de convergência, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...$$

Derivando membro a membro verifica-se que as séries das derivadas de ordem n convergem no mesmo intervalo, então se pode calcular a_n para qualquer n em torno de $x = a$. Por exemplo, para $n = 3$:

$$f'''(x) = (a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...)''' \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (0 + 0 + 0 + 3.2.1.a_3.(x-a)^0 + ... + n.(n-1).(n-2).a_n.(a-a)^{n-3} + ... \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (3.2.1.a_3.1 + ... + 0 + ...) \Rightarrow f'''(a) = 3!.a_3 \Rightarrow a_3 = f'''(a)/3!$$

Generalizando escreve-se: $a_n = f^n(a)/n!$, onde f^n é a *n-ésima* derivada de $f(x)$, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$\Delta f(x) = \frac{f'(a)}{1!}.\Delta x + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(\Delta x)^n + ...$$

Fazendo com que $x \to a$, se obtém a expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f'(a).dx + \frac{f''(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t, então:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt$$

Aplicando a regra da cadeia e admitindo que as diferenciais parciais mistas sejam iguais (Teorema de Young), obtém-se:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 \qquad \text{já que} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}.dt.dx$$

Considerando a Expansão de Talyor (28), dF será dado por:

$$dF = [\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt] + \frac{1}{2!}.[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt] + \frac{1}{3!}.[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 ...$$

Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \Rightarrow dx^2 = a^2(x,t).dt^2 + 2.a(x,t).dt.b(x,t).dz + b^2(x,t).dz^2$$
$$dx^2 = 0 + 2.a(\cdot).b(\cdot).dt.\varepsilon.\sqrt{dt} + b^2(\cdot).(\varepsilon.\sqrt{dt})^2 \Rightarrow dx^2 = 2.a(\cdot).b(\cdot).\varepsilon.dt^{3/2} + b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt$$
$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e:}$$

$$dx^3 = dx^2.dx = b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt.(a(\cdot).dt + b(\cdot).\varepsilon.\sqrt{dt}) \Rightarrow$$
$$dx^3 == a(\cdot).b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt^2 + b^3(\cdot).\varepsilon^3.dt^{3/2} \Rightarrow \; dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - E^2(\varepsilon) = 1 \Rightarrow V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - (0)^2 = 1 \Rightarrow \; E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32)$$

Logo:

$$E(dz^2) = E(\varepsilon^2.dt) = E(\varepsilon^2).dt = 1.dt \Rightarrow E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33)$$ e:

$$V(dz^2) = V(\varepsilon^2.dt) = V(\varepsilon^2).dt^2 \therefore dt^2 = 0 \Rightarrow V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2.dt = dz^2 \sim N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).dt] \Rightarrow$$

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson

Na Seção 3.1.4 abordou-se a associação do Processo de Poisson ao Processo de Ito, o que faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta (Poisson) - (26): $dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq$.

Com isso, determinar o processo de uma função $H(x)$ exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86). Inicialmente, observa-se que a partir de (26) pode-se escrever (Brandão, Cap.3, Seção 2.7, p. 3-4):

$$dH = dH_{continuo} + dH_{discreto} \quad (83)$$

A parte continua pode ser obtida com o Lema de Ito apresentado anteriormente (35):

$$dH_{continuo} = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz]$$

Quanto à parte discreta $(dH_{discreto})$, suponha que o evento de Poisson ocorra em um intervalo $(t, t+dt)$, então $x_{t+dt} = x_t + u.g(x,t)$, onde u é o tamanho do salto que também pode ser aleatório. Com isso, $dH_{discreto}$ será:

$$dH_{discreto} = H(x_t + u.g(x,t), t) - H(x_t, t)$$

Retornado os dois resultados anteriores a (83):

$$dH = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz] + H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)$$

Aplicando o valor esperado, obtém-se:

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)] \Rightarrow$$

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E_u\{\lambda.dt.[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)]\} \quad (84)$$

Onde E_u é o valor esperado do tamanho do salto *u*, dado pela diferença do valor de $H(x,t)$ em pontos discretos diferentes.

Referências Bibliográficas

BARONI-ADESI, G; WHALEY, R.E. Efficient Analitic Approximation of American Option Value. **Journal of Finance**, 42, p.301-320. June 1987.

BERNANKE, B.S. Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment. **Quarterly Journal of Economics**, 98, p.85-106. February 1983.

BJERKSUND, P; EKERN, S. Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: From "Last Chance" to "Wait and See" Strategies. **Financial Management**, 19, p. 65-83. Autun 1990.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. Closed-Form Approximation of American Options. **Scandinavian Journal of Management**. 9, p.87-99, 1993.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. American exchange options and a put-call transformation: a note. **Journal of Business, Finance and Accounting**. 20, p.761-764. 1993b.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. **Closed Form valuation of American Options**. Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, Department of Finance and Management Science, Bergen, Norway. April 2002, 17p. Disponível em: http://www.nhh.no/for/seminars/previous/2002-fall/251002.pdf, acesso em 18/08/2006.

BLACK, F; SCHOLES,M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy.** 81, p. 637-654. 1973.

BRANDÃO, L. Tradução livre do Cap. 3 e 5 do livro Investment under Uncertainty, DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **,** 3rd ed, 1994, disponível em http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/, acesso em 03/04/2006.

BROADIE, M; DETEMPLE, J. American Options Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods. **Review of Financial Studies**. 9, n. 4, Winter, 1996, p.1211-1250.

COPELAND, T; ANTIKAROV. V. **Real Options: a practioner's guide**. 1st ed. USA: Texere, 2001, 372p

DETEMPLE, J. **American-Style Derivatives – Valuation and Computation** Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton (USA), 2006, 232p.

DIAS, M.A.G. **Investimento sob incerteza em Exploração e Produção de Petróleo.** 1996. 470p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. **Journal of Petroleum Science & Engineering**. 44, p.93-114. 2004.

DIAS, M.A.G. **Opções Reais Hibridas com Aplicações em Petróleo**. 2005. 509p. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. e ROCHA, K.M.C. Petroleum Concessions with Extendible. Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, Wassenaar-Leiden (Holanda), June 1999. Disponível versão revisada de janeiro de 2001 em: http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/. Acesso em: 17/04/2005.

DIAS, M.A.G. **Mean Reversion with Jumps Models**, p.3-4. Disponível em: http://www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm/. Acesso em: 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **First Hitting Time and Expected Discount Factor**. Disponível em: http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html. Acesso em : 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **Real Option Theory for Real Assets Portfolios: the Oil Exploration Case.** Working Paper, Depart. of Industrial Engineering, PUC-Rio, presented at the 10th Annual International Conference on Real Options, New York, June 2006, 37 p.

DICKEY, D.A., FULLER, W.A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with Unit Root. **Econometrica**, 49, 1057-1072. 1981.

DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **Investment under Uncertainty**. 3rd ed. USA: Princenton University Press, 1994, 468p.

GEMAN, E; EL KAROUI, N; ROBERT, J.C. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing. **Journal of Applied Probability**. 32, p.443-458. 1995.

GRUY, H.J; GRAB,F.A; WOOD, J.W. Determining the value of oil and gas in the ground. **World Oil CXCIV**. p.105-108. 1982.

HAUG, E.G. **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**. McGraw-Hill, 1998, 232 p.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. 5th ed. USA: Prentice Hall, 2003, 744p.

LAUGHTON, D.G., The management of flexibility in the upstream petroleum industry. **Energy Journal**. 19, p.83-114. January 1990.

MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**. 7, p.77-91. 1952.

MACMILLAN, L.W. Analytic Approximation for the American Put Option. **Advances in Futures and Options Research**. 1, p.119-139. 1986.

MCDONALD, R; SIEGEL, D. The Value of Waiting to Invest. **Quarterly Journal of Economics**, p.707-727. November 1986.

MCDONALD, R; SCHRODER, M. A parity result for American options. **Journal of Computational Finance.** Working paper, Northwestern University, 1990.

MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science.** 4, p.141-183. 1973.

MERTON, R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. **Journal of Financial Economics**. 3, p.125-144. 1976.

MERTON, R.C. (1990). **Continuous-Time Finance**. Blackwell Publishers Inc, Cambridge, MA, 1990 (revised edition, 1992), 734 pgs.

METCALF, G.E; K.A. HASSET (1995). Investment under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walks and Mean Reversion. **Journal of Economic Dynamics and Control**. 19, p.1471-1488. November 1995.

MOSZKOWICZ, V.N. **Validação do Critério de Avaliação de Projetos Utilizando a Teoria das Opções Reais**. 2003. 157p. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

MYERS, S.C. Determinants of Corporate Borrowing. **Journal of Financial Economics**. n. 5, p.147-175. November 1977.

PADDOCK, J.L; SIEGEL, D.R; SMITH, J.L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. **Quarterly Journal of Economics**. 103, p.479-508. August, 1988.

PICKLES, E., SMITH, J.L. Petroleum property evaluation: a binomial lattice implementation of option pricing theory. **Energy Journal**. 14 (2), p.1-26. 1993.

PINDYCK, R.S.; D.L. RUBINFELD. 1995. p.545-546. **Microeconomics**. Prentice-Hall, Inc., third edition, 1995, 700 p.

PINDYCK, R.S. The Long-Run Evolution of Energy Prices. **Energy Journal.** 20(2), p.1-27. 1999.

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JAFFE, J.F. **Finanças Corporativas**. 2ª ed. Editora Atlas, 2002, 776p.

SAMUELSON, P. Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuates Randomly. **Industrial Management Review**. p.41-49. Spring, 1965.

SCHWARTZ, E.S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **Journal of Finance.** 52(3), p.923-973. July, 1997.

SHIMKO, D.C. **Finance in Continuous Time. A Primer**. 1st ed. **Local** Kolb Publishing Company, 1992, 110 p.

TRIGEORGIS, L. **Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. 1st ed. 5th printing. USA: The MIT Press, 1996, 427p.

VARIAN, Hal R. **Microeconomia**. 6a ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003, 778p.

VOLLERT, Alexander. **A stochastic control framework for real options in strategic valuation**. 1st ed. USA: Birkhauser Boston, 2003, 266p.

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo

Os seguintes termos foram adotados nessa dissertação com o significado que se segue. Definições formais ou completas devem ser buscadas em literatura específica.

Acumulação de petróleo: Qualquer volume de petróleo acumulado em subsuperfície, independente de ser recuperável técnico ou economicamente.

Adensamento de malha: Programa de desenvolvimento complementar de um campo de petróleo, onde novos poços são perfurados entre os pré-existentes com a finalidade de aumentar o volume de petróleo a ser recuperado.

Bloco: Área delimitada geograficamente por um órgão regulador onde uma companhia de petróleo tem o direito de desenvolver atividades de exploração e produção. Objeto de um contrato de cessão de direitos de exploração ou produção.

Cabeça do poço: Local onde se encontra os equipamentos de superfície instaldos em um poço.

Campo de petróleo: Acumulação de petróleo em produção.

Contrato de concessão: Instrumento legal pelo qual um órgão regulador cede e define as condições de uso de uma área para exploração e produção em um regime de concessão.

Delimitação: Conjunto de atividades que se seguem ao descobrimento de uma acumulação de petróleo cujo objetivo é definir o volume de petróleo descoberto e sua produção.

Depleção: Perda de pressão em um reservatório em decorrência da produção.

Desenvolvimento: Conjunto de atividades que se seguem à delimitação, cujo objetivo é instalar a infra-estrutura necessária para a produção de uma acumulação de petróleo.

Desenvolvimento complementar: conjunto de atividades complementares ao desenvolvimento de um campo cujo objetivo é aumentar o volume de petróleo recuperado. O adensamento de malha é um exemplo.

Exploração: Conjunto de atividades responsáveis pela identificação e teste de situações geológicas que podem revelar a existência de uma acumulação de petróleo. A exploração num sentido mais amplo engloba a fase de exploração propriamente dita e a fase de delimitação.

Explotação ou Produção: Fase operacional de um campo de petróleo, ou seja, em que ocorre a produção contínua de petróleo. Durante a fase de produção podem ser realizados projetos de desenvolvimento complementar.

Fator de recuperação: Percentual do volume de petróleo acumulado em subsuperfície que pode ser recuperado de forma econômica.

Poços: Obra de engenharia resultante da perfuração de uma situação geológica de interesse. Há diferentes tipos de poços, por exemplo: Pioneiro ou exploratório, de delimitação, de produção, de injeção de fluidos ou gás, etc.

Poço seco: Qualquer poço de exploração, delimitação ou produção perfurado na expectativa de se tornar produtor de petróleo, mas cujo resultado foi negativo.

Porosidade: Volume de espaço vazio em uma rocha reservatório preenchido por petróleo, água ou gás.

Preenchimento, fator de: Proporção de uma rocha trapa preenchida por petróleo;

Prospecto exploratório: Situação geológica não perfurada cujo estudo indica a possibilidade de acumular petróleo. Todo prospecto visa testar uma ou mais trapas.

Recuperação primária e secundária, fator de: Representa o percentual do volume de petróleo existente em uma acumulação de petróleo que pode ser recuperado do reservatório. A recuperação primária é aquela que pode ser obtida sem técnicas especiais como a pressurização do reservatório. A secundária refere-se ao volume adicional que pode ser recuperado com o auxílio de tais técnicas.

Regime de concessão: Regime regulatório para a atividade de exploração e produção de petróleo onde uma das principais características é a participação governamental (*royalty*) como uma fração constante da receita bruta ou produção.

Reserva: Há vários tipos de reservas, de uma forma genérica, refere-se a um volume de petróleo cuja existência já é comprovada e cuja recuperação é economicamente viável.

Reserva não desenvolvida: Reserva cujo desenvolvimento ainda não foi realizado, ou seja, sem a infra-estrutura necessária à sua produção.

Rocha reservatório: Rocha cuja porosidade permite a acumulação de petróleo.

Saturação de óleo: Refere-se ao percentual da porosidade de uma rocha que é ocupado por óleo. A saturação de óleo, gás e água de um reservatório soma 100%.

Sísmica 2D e 3D: A sísmica refere-se a um conjunto de atividades cujo objeto é o imageamento da disposição e relação das rochas em subsuperfície. A sísmica 2D refere-se à técnica de imageamento em duas dimensões, enquanto que a 3D refere-se ao imageamento em três dimensões.

Sonda: Nesta dissertação, refere-se ao equipamento responsável pela perfuração de poços. A sonda pode ser terrestre ou estar instalada em uma plataforma ou navio. Também

Trapa: Refere-se a uma situação geológica favorável à acumulação de petróleo. Trata-se de uma armadilha natural capaz de aprisionar o petróleo que migra em subsuperfície. A trapa associadas a outros fatores como, por exemplo, a existência de reservatório, a existência de petróleo em uma área, etc., pode constituir-se em um prospecto exploratório.

Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE
Fundação Getúlio Vargas

Opções Reais em Decisões de Investimento em Exploração e Produção

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Finanças e Economia Empresarial

Aluno: André Avila Scartezini

Banca Examinadora:
Marco Antonio Guimarães Dias (Orientador; PUC-RIO/DEI)
Marco Bonomo (EPGE/FGV)
José Paulo Teixeira (PUC-RIO/DEI)

Rio de Janeiro
2006

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, afetadas pela minha ausência parcial durante os últimos três anos, colaboraram com seu desprendimento, tolerância e compreensão para a conclusão do meu curso de mestrado em finanças e economia empresarial.

Em especial, agradeço a Silvana Pedroni por seu apoio e companheirismo.

A Marco Antonio Guimarães Dias pela orientação.

A Marco Bonomo pela atenção despendida.

A Adauto Carneiro Pereira, pela oportunidade e incentivo.

A Adelson Antônio da Silva, por viabilizar a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores, minha admiração.

Dedico este trabalho à Petrobras.

Rio de Janeiro, julho de 2006.

Resumo

Este trabalho faz uma revisão dos principais conceitos que definem a Teoria de Opções Reais. Tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob incerteza aplicado a problemas de Exploração e Produção de petróleo (E&P). Foram priorizados modelos simples que podem ser facilmente implantados no dia a dia de uma empresa, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Os modelos discutidos são elaborados com Movimento Geométrico Browniano, que pode ser uma aproximação razoável para a modelagem de preços, a depender dos parâmetros considerados. Em particular, é apresentado um modelo de opção composta para exploração, que se revela mais apropriado por considerar o risco geológico e os estágios da opção com expiração diferenciada. A priorização de investimentos com auxílio de OR para uma carteira representativa de um *portfolio* de projetos de Produção também é testada, resultando numa maior relação VPL / Investimento da carteira selecionada.

Abstract

This work reviews the main concepts of real option theory. It intends to discuss the investment decision problem under uncertainty in petroleum Exploration and Production (E&P). Simple models including the classic Padock, Siegel and Smith (1998) were focused because they may be easily implemented in petroleum companies. All the models discussed consider the Geometric Brownian Motion (GBM) which may be a reasonable approach to modeling prices since appropriated parameters are considered. In particular, a compound option model to exploration and development is presented. It reveals to be more appropriated, mainly when considering both the geologic risk and stages with distinct expiration dates. The selection of projects with real options is also tested in a representative portfolio of development projects, which results in an increasing NPV-investment ratio of selected portfolio.

Sumário

Agradecimentos 3

Resumo 5

Abstract 6

Símbolos, Abreviaturas e Siglas 10

Lista de Figuras 12

Lista de Tabelas 13

1. Introdução 14

2. Conceitos Básicos de Opções Reais 18

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza 18

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money* 20

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias 30

2.4. Taxonomia de opções reais 33

2.4.1. Classificação gerencial 36

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração 38

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica 41

2.6. Introdução à valoração de opções reais 43

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) 44

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*) 48

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados 49

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo 50

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos 53

3.1. Processos estocásticos em finanças 53

3.1.1. Movimentos Brownianos 54

3.1.2. Reversão à média 58

3.1.3. Processos de saltos de Poisson 63

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*).....63

3.1.5. Reversão à média com saltos.....64

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras.....66

3.2. Lema de Ito.....67

3.3. Modelando o ativo subjacente.....70

3.3.1. Marketed Asset Disclaimer (MAD).....70

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente.....71

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos.....74

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB.....74

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica.....79

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração.....81

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB.....82

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993).....87

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas.....89

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção.....91

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P.....93

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo.....94

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*.....98

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P.....101

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão.101

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S).....104

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração.....109

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P).....119

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo 119

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S 125

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples ..131

6. Conclusões 139

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono 142

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica 144

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito 147

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson.....150

Referências Bibliográficas.....151

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo 156

Símbolos, Abreviaturas e Siglas

$a.a.$ = ao ano

B = Volume ou reserva de petróleo

bbl = unidade de volume de um barril, corresponde a cerca de 160,5 litros.

Cov = Operador de covariância

δ = Dividendo ou fluxo de caixa de um período t qualquer.

dz = Incremento de Wiener

$E\ (x)$ = Valor esperado.

FCD = Fluxo de Caixa Livre Descontado ou simplesmente Fluxo de Caixa Descontado.

FCL = Fluxo de Caixa Livre, não descontado.

I = Investimento.

IA = Investimento Atualizado.

μ = Taxa de desconto ajustada ao risco, dada, por exemplo, pelo CAPM.

MAB = Movimento Aritmético Browniano

MAD = *Market Asset Disclaimer*

MGB = Movimento Geométrico Browniano

MM = Abreviatura para milhão.

MRM = Movimento de Reversão à Média

$N(\mu,\sigma)$ = Distribuição normal de média μ e desvio padrão σ

OR = Opção Real ou Opções Reais

p = probabilidade neutra ao risco

q = probabilidade real ou objetiva

π_t = lucro (ou *payout*) no período t

π = prêmio de risco

r = Taxa de desconto não especificada.

$R = 1 + r$

r_f = Taxa de juros livre de risco (*risk free*).

$R_f = 1 + r_f$

$\rho_{AB} ou\ \rho(AB)$ = correlação de A com B

$\sigma_A\ ou\ \sigma(A)$ = desvio padrão de A

$\sigma_{AB} ou\ \sigma(AB)$ = covariância de A com B

$\sigma_A^2\ ou\ \sigma^2(A)$ = variância de A.

US$ = uma unidade de dólar americano.

VPL = Valor Presente Líquido.

$V(x)$ = Operador de variância

Lista de Figuras

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período. 22
Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período. 26
Figura 3 - Evolução do FCL 30
Figura 4 - Classificação das OR (adaptado de Trigeorgis, 1996). 35
Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003). 36
Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar. 46
Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. 55
Figura 8 – MGB. 57
Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999). 65
Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005). 95
Figura 11 – Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Dias, 2005). 103
Figura 12 – Opção de exploração com duas etapas. 113
Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1. 122
Figura 14 - Curva do valor crítico. 123
Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação dos Modelos. 125
Figura 16 – Valor dos dois estágios da opção de exploração IE-2. 128
Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2. 128
Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE. 129
Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE. 129
Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE. 130
Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2. 131
Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento. 137
Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado. 138

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor “verdadeiro” estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%. 86

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado. 133

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo. 135

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.135

1. Introdução

A valoração econômica para a tomada de decisão sobre projetos de investimento é afetada por incertezas econômicas, técnicas e pelas flexibilidades embutidas nos projetos. A incerteza econômica é exógena ao projeto afetando, por exemplo, a demanda, o preço do produto, os custos operacionais, a tributação, etc. A incerteza técnica é endógena ao projeto, relacionando-se a temas como tecnologia, capacidade de produção, desempenho, etc. As flexibilidades embutidas nos projetos por sua vez, criam a faculdade gerencial sobre o empreendimento, permitindo escolhas como o momento adequado (*timing)* para a decisão sobre o investimento, a alternativa de produção, a expansão, a parada temporária, a mudança de escopo, o abandono, o desinvestimento, etc. São escolhas disponíveis ao decisor na gerência de seus projetos e ativos reais, sendo por isso denominadas de opções reais (OR).

O termo opção real foi sugerido por Myers (1977) ao destacar que oportunidades de crescimento de uma empresa podiam ser vistas como opções dependentes de futuros investimentos discricionários da firma[1]. A abordagem de valoração econômica que contempla esses aspectos é denominada de teoria das opções reais e recentemente de análise de investimento sob incerteza.

A teoria de opções reais pode ser vista como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real (VPL) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência e quantidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos em toda a dissertação.

Assim, uma opção real é um direito, por isso uma opção e não uma obrigação, de realizar uma ação sobre um ativo real ou projeto, a um custo chamado preço de exercício, por um período de tempo pré-determinado, denominado de vida da opção. O preço de exercício é o custo do investimento, pois ocorre na expectativa

[1] O trabalho de Myers denominado “Determinants of Corporate Borrowing” tem o mérito de destacar que a visão de investimentos como opções poderia ter como a mais importante contribuição, a valoração de ativos reais (p.170). E estava certo.

de uma recompensa futura, seja pela geração de lucro ou pela redução de uma perda corrente no fluxo de caixa.

A maioria das decisões de investimentos possui características em comum, mas que ocorrem em diferentes intensidades. Destacam-se: O fato do investimento ser totalmente ou parcialmente irreversível; a incerteza sobre o retorno do investimento e a flexibilidade de se adiar a decisão em troca de se obter mais informações.

A teoria ortodoxa de decisão de investimento através do VPL (Valor Presente Líquido) não contempla as implicações decorrentes da interação entre essas três características que afetam a decisão ótima do investidor. O VPL não captura as flexibilidades disponíveis ao tomador de decisão, e por isso sistematicamente subestima o valor dos projetos (Copeland e Antikarov, 2001**,** p. 4-5). Além disso, o VPL ignora a possibilidade de perda, isso significa que o decisor que o utiliza ou é indiferente a este risco (neutro ao risco) ou realmente crê que pode se desfazer do investimento pelo seu valor original atualizado. A avaliação por opções reais se propõe a corrigir estas distorções.

Dixit e Pindick (1993, p. 6-7) discutem sobre a sub-avaliação implícita no VPL. Argumentam que o VPL assume que o investimento é reversível (de alguma forma poderia ser desfeito e recuperado) e representa uma decisão do tipo agora ou nunca. Embora muitas decisões de investimento tenham essas características, a maioria é pelo menos parcialmente irreversível e pode ser postergada, o que afeta profundamente a decisão de investir. Quando a firma exerce sua opção de investir, elimina de forma irreversível a possibilidade de esperar por novas informações que afetam o resultado do investimento e o momento ótimo para o investimento.

O valor da flexibilidade perdida é um custo de oportunidade que deve ser incluído no custo do investimento. Esse custo de oportunidade é muito sensível à incerteza associada ao futuro valor do projeto. Talvez isso ajude a explicar por que a teoria neoclássica de investimento falha empiricamente ao descrever o comportamento de investimento da firma. Seja por superestimar o efeito da taxa de juros e da política tributária sobre o nível de investimento, seja pelas empresas somente aprovarem seus projetos com VPL positivo descontando-os a taxas muito superiores ao seu custo de capital (*hurdle rates*) ou em cenários de *stress.* Essa

mesma incerteza também explica por que as firmas permanecem em seus negócios por longos períodos de prejuízo.

A faculdade gerencial de adaptar as decisões futuras às condições de mercado e às ações dos competidores aumenta o valor das oportunidades de investimento da firma, tanto por aproveitar o potencial de melhora dos projetos quanto por limitar perdas em relação às expectativas inicias de um gerenciamento passivo. Trigeorgis (1996, p.4) argumenta que a assimetria resultante da adaptabilidade gerencial revela um critério de investimento expandido ou estratégico com dois componentes: o tradicional VPL (estático, passivo) e o valor criado pela flexibilidade e interações estratégicas.

A abordagem por opções para o problema de valoração tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e das interações estratégicas. Esse valor manifesta-se tipicamente através das opções reais inerentes às oportunidades de investimento de capital, tendo como ativo subjacente o valor esperado descontado dos fluxos de caixa operacionais (Trigeorgis, 1996, p.4).

Assim uma oportunidade de investimento equivale a uma opção de compra financeira (*call*). De forma semelhante às financeiras, o valor das opções reais depende de pelo menos seis importantes variáveis: O valor do ativo de risco subjacente (projeto ou ativo real), o desvio padrão e os dividendos que podem ser obtidos através deste, o preço de exercício (valor do investimento ou desinvestimento), o tempo de expiração da opção e a taxa livre de risco (sob a hipótese de não arbitragem).

Essa dissertação tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob o ponto de vista teórico da ótica de opções reais, aplicados a problemas de Exploração e Produção de petróleo. Foi priorizado o foco em modelos simples que possam ser amplamente utilizados e facilmente implantados no dia a dia de uma empresa de petróleo. Para isso, o trabalho foi dividido em cinco partes. No Capítulo 2 são revistos os principais conceitos de opções reais em tempo discreto, incluindo o valor da redução da incerteza, a nova regra de decisao, taxonomia, valoração e a transição para tempo continuo. No Capítulo 3 amplia-se a discussão sobre opções reais para tempo e estados contínuos, incluindo processos estocásticos, Lema de Ito, modelagem do ativo subjacente, equações diferencias de

valoração, soluções analíticas, não analíticas e a aproximação de Bjerksund e Stensland (1993), além da simetria *call put*. No Capítulo 4 são discutidos dois modelos de valoração de opções simples de investimento em Exploração e Produção de petróleo, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Também é desenvolvido um modelo de opção composta, denominado de Modelo de Exploração. Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se alguns estudos de caso onde os modelos discutidos no capítulo anterior são comparados, além da discussão de priorização de investimentos com opções reais a partir de uma sugestão de Dias (1996). No Capítulo 6 são revistas e discutidas as conclusões.

A abordagem dessa dissertação é heurística. Eventuais erros são de responsabilidade do autor. Referências sobre todos os assuntos abordados são citadas ao longo de todo o texto.

Dias (2005, p.26-43) apresenta um bom resumo sobre a evolução bibliográfica do conhecimento na área de opções reais desde seus precursores na década de 70, passando pelos principais artigos das décadas de 80 e 90 bem como importantes livros textos e coletâneas de artigos publicados até a atualidade. Em seguida passa em revista ao crescente uso de opções reais em empresas e outras instituições, discutindo inclusive procedimentos para sua difusão e consolidação como ferramenta de trabalho. Vários exemplos verídicos disponíveis na literatura são apresentados, abordando tanto o uso de opções reais internamente às empresas como externamente nas negociações entre companhias e, por exemplo, com órgãos reguladores.

2. Conceitos Básicos de Opções Reais

A teoria de opções reais pode ser visto como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real dado pelo VPL (função objetivo) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência, quantidade e qualidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos neste capítulo.

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza

De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.8-9), investimentos são custos afundados quando são específicos da firma ou da indústria, como por exemplo, campanhas de publicidade ou equipamentos industriais especializados. No último caso, embora possa haver um valor de revenda, assim como ocorre com os equipamentos não específicos (veículos, computadores, etc.), os investimentos estão sujeitos à depreciação e outras forças de mercado que os tornam pelo menos parcialmente irreversíveis. De forma similar, ativos que possuem a opção de serem abandonados ou suspensos, incorrem em custos e ou investimentos irreversíveis caso essas opções sejam executadas.

Considerando a irreversibilidade dos investimentos e a incerteza relacionada aos fluxos de caixa futuros, a flexibilidade de esperar pela redução da incerteza pode gerar valor. A proposta de valoração pela teoria de opções reais é justamente capturar e quantificar este valor**.** Uma firma que tem uma oportunidade de gerar fluxos de caixa positivos ou, ao contrário abandonar fluxos de caixa negativos operantes, deve comparar os custos destas decisões com os possíveis benefícios de se esperar pela revelação de novas informações que reduzem ou eliminam as incertezas existentes no presente. Esse é o valor da espera pela redução da incerteza, permitindo a escolha ótima do decisor.

Copeland e Antikarov (2001**,** p.73-74) chamam a atenção para o fato de que o VPL poderia representar uma opção real particular, aquela que assume a inexistência de flexibilidade na tomada de decisão. Uma expressão usual para o VPL de um projeto em tempo discreto é dada por:

$$VPL = -I + \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$$

Na identidade acima I é o investimento, FCL é o fluxo de caixa livre e r a taxa de desconto. Nota-se que apenas um dos muitos caminhos possíveis ao FCL entre o início e o fim de um projeto é explicitamente considerado. A abordagem clássica do VPL usa somente a informação disponível no presente ignorando qualquer incerteza existente, recomendando o investimento caso seu valor seja positivo:

Regra de decisão do VPL: $Máx_{t=0}[0, E_0(V_T) - I]$ onde $E_0(V_T) = \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$.

O VPL ignora a incerteza, portanto desconsidera a possibilidade de perda em qualquer outro cenário que não seja o seu mundo determinístico. Isso significa que decidir com o VPL é ser indiferente ao risco (neutro ao risco), ou realmente crer que se pode desfazer do investimento pelo seu valor atualizado. A primeira alternativa seria considerar diferentes cenários para o projeto, cada qual com probabilidade P_j e valor presente $V_{T,j}$, sendo o valor esperado do projeto dado por: $E_0(V_T) = \sum_j P_j . V_{T,j}$. Essa técnica equivale a considerar uma árvore de decisão com a mesma regra do VPL, ou seja, que a decisão de investir é do tipo agora ou nunca e é feita com base em um valor esperado. Isso significa pressupor que o decisor ainda é neutro ao risco, pois embora possa reconhecer e quantificar a incerteza de um projeto através de cenários, ele se mostra indiferente ou passivo ao decidir com o valor monetário esperado (VME). Somente um novo paradigma pode levar o decisor à uma escolha que contemple o risco em suas decisões: Esperar pela redução da incerteza até que esta se torne equivalente à decisão imediata.

A abordagem por opções reais considera que a decisão é tomada quando a informação sobre o estado da natureza é revelada. Entre todas as alternativas mutuamente excludentes, escolhe-se a melhor. Assim, por exemplo, o valor do exercício (*payoff*) de uma de uma opção de investimento (*call* européia) é dado pelo valor esperado dos máximos (e não o máximo entre os valores esperados):

Regra de decisão de uma *call* européia: $E_0[Máx_{t=T}(0, V_T - I)]$

O valor das três abordagens na presença da flexibilidade de esperar somente será o mesmo se $E_0(V_T) = V_T$. Ou seja, na ausência de incerteza, o valor esperado em t_0 do valor futuro é igual ao valor futuro atualizado. De outra forma, decidir antecipadamente com o VPL equivale a supor que o investimento é reversível, ou seja, na medida em que um cenário desfavorável se concretize, o decisor sairia do negócio recuperando seu capital, o que não é real (Dixit e Pindick, 1994, p.28).

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money*

Como visto, a escolha ótima do decisor consiste em optar entre a decisão imediata ou esperar pela redução da incerteza, quando possível. Se nesta análise o decisor conclui que agir imediatamente é mais valioso do que esperar, diz-se que a opção real está madura ou *deep in the money*, e ele "mata" a opção ao agir. Se há maior valor na espera, o decisor deve adiar a decisão e manter a opção real ativa ou "viva".

Para se entender em que condições (regra de decisão) exercer ou manter uma opção real é mais vantajoso para a firma, são apresentados dois exemplos de decisão simples em tempo discreto: Em que condição a firma deve investir em um novo projeto e; Em que condição não deve abandonar um ativo real que apresenta VPL negativo.

Os exemplos são apresentados com a abordagem de valor esperado em árvores binomiais com nós de decisão e nós aleatórios. A utilização do valor esperado requer taxas de descontos adequadas ao ativo que está sendo descontado. Então para descontar o ativo subjacente usa-se uma taxa e ao descontar a opção outra. Além disso, a taxa de desconto de cada ativo deve variar ao longo da árvore com a incerteza ou estados da natureza. Este é um problema que não ocorre nos exemplos, pois são considerados apenas dois períodos e dois estados da natureza. Além disso, a taxa de desconto para a opção e para o ativo subjacente é considerada a mesma, mas essa premissa só é correta no mundo neutro ao risco, discutido na Seção 2.6.1. Portanto a taxa de desconto r utilizada nos dois exemplos é a rigor a taxa livre de risco (*risk free* - r_f) e probabilidade real q

é a rigor a probabilidade neutra ao risco p . Como os exemplos visam explorar as regras de decisão e o mundo neutro ao risco é discutido somente na Seção 2.6.1, preservou-se a notação r e q.

Exemplo 1: Opção de investimento com a flexibilidade de esperar por um período. Considere um projeto de investimento postergável por 1 período, cujo investimento I gera um fluxo de caixa V. No primeiro período t_0, o decisor pode escolher entre investir imediatamente e gerar um *payoff* positivo ou postergar a decisão para o segundo período (ver árvore de decisão - Figura 1). Se o decisor não tem a flexibilidade de adiar a decisão de investimento, ele encontra-se no ramo inferior da árvore e sua decisão de investir é com base na regra tradicional do VPL. Mas se o decisor dispõe da flexibilidade esperar e decidir sobre o investimento em t_1, ele pode escolher adiar a decisão para o segundo período (ramo superior da árvore). Em t_1 pode então observar o estado da natureza que se revela com as novas estimativas de Fluxo de Caixa Livre Descontado (FCD) do projeto. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*), o FCD do projeto apresenta valor V_U e caso contrário, V_D (estado da natureza pior ou *down*). Note que os estados da natureza V_U e V_D são os mesmos em qualquer ramo da árvore e que $V_U > V_D$. Após esperar, qualquer que seja o estado da natureza, a decisão de investir também é feita com base na regra do VPL. Demonstra-se em seguida em que condições o decisor racional que maximiza a riqueza da firma escolhe esperar por t_1 ou investir imediatamente.

Quando o decisor não dispõe da flexibilidade de esperar, sua decisão é do tipo investir agora ou nunca (ramo inferior). Considerando as probabilidades (reais) q e 1-q dos estados da natureza *up* e *down*, o VPL do projeto (V_0) em t_0 é dado pelo valor esperado do fluxo de caixa de t_1 ($E_0(V_1)$) descontado a uma taxa r apropriada, subtraído do investimento e somado do fluxo de caixa livre δ (dividendo) em t_0:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \text{, onde } E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} - I + \delta \qquad (1)$$

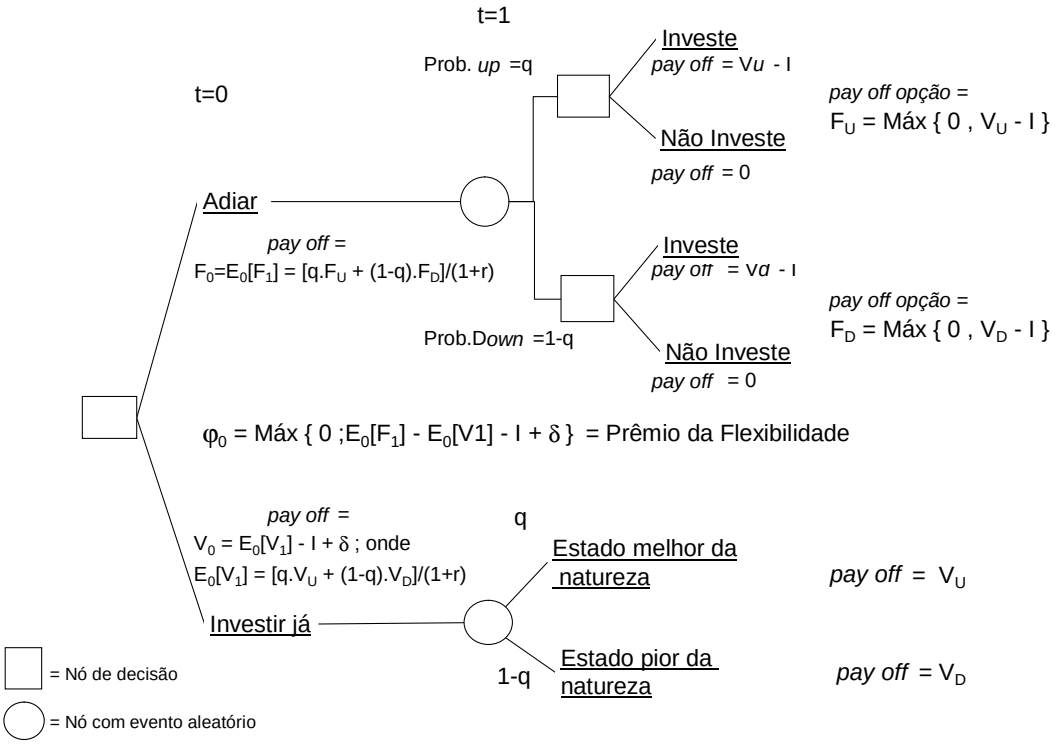

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período.

A regra de decisão será investir se $V_0 > 0$ ou desistir do projeto caso contrário. Mas com a flexibilidade de esperar, o decisor pode postergar a decisão e exercer a opção de investir em t_1 caso o projeto tenha *payoff* positivo ($V_1 - I > 0$). Portanto os *payoffs* da opção (F_1) nos dois estados da natureza possíveis em t_1 são:

$$F_U = Máx[0, V_U - I] \qquad \text{e} \qquad F_D = Máx[0, V_D - I]$$

A regra de decisão é investir se $F_1 > 0$. Nessa condição, diz-se que a opção está *in the money* e caso contrário, *out of the money*. O valor esperado de F_1 em t_0 é:

$$F_0 = E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} \qquad (2)$$

A decisão entre investir imediatamente ou esperar para decidir em t_1 é feita coma a escolha da alternativa de maior valor entre (1) e (2). Portanto, adiar a decisão de investir é mais valioso se:

$$(2) > (1) \Rightarrow (2) - (1) > 0 \Rightarrow E_0(F_1) - V_0 > 0$$

E o valor ou prêmio da flexibilidade de postergar (φ_0) a decisão de t_0 para t_1 será:

$$\varphi_0 = Máx\{0; E_0(F_1) - V_0\} = Máx\{0; \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} - \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + I - \delta\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = Máx\{0; \frac{q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)}{1+r}\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{(1+r)}.Máx\{0; q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)\}$$

A partir dessa equação pode-se explorar em que condição qualquer uma das variáveis torna a flexibilidade de postergar valiosa:

$$\varphi_0 > 0 \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) > 0$$

Pode-se também definir em que condições o decisor torna-se indiferente entre investir em t_0 ou esperar para decidir em t_1:

$$(2) = (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) = 0$$

Ou pelo contrário, definir em que condições investir imediatamente é mais vantajoso:

$$(2) < (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) < 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \quad (3)$$

Quando a relação (3) se verifica, diz-se que a opção está *deep in the money*, ou seja, o VPL (V_0) é de tal forma positivo que não vale a pena esperar. O custo de sacrificar o lucro imediato δ é maior do que o benefício esperar e tomar a decisão ótima após observar o estado da natureza em t_1.

Considerando q, I, r e δ dados, a inequação (3) será verdadeira a depender das relações entre F_U e F_D. Existem 3 situações a considerar: $F_U = F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D > 0$:

i) Supondo que: $F_U = F_D = 0 \Leftrightarrow V_D < V_U < I \Rightarrow E_0(V_1) < I \Rightarrow I - E_0(V_1) > 0$. Ou seja, a flexibilidade de esperar não tem valor, pois o decisor não investiria em t_1 qualquer que fosse o cenário revelado. Então, qual é a condição necessária para investir em t_0? Em (3):

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \;\Rightarrow\; q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} > (I-\delta) \Rightarrow \frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} - I + \delta > 0 \;\Rightarrow E_0(V_1) - I + \delta > 0 \Rightarrow$$

a) $V_0 > 0$ ou b) $\delta > I - E_0(V_1) > 0$

Então se a flexibilidade de esperar não tem valor ($F_U = F_D = 0$), a opção de investir reduz-se à regra tradicional do VPL ($V_0 > 0$) e o dividendo δ deve ser suficientemente positivo: $\delta > I - E_0(V_1) > 0$.

ii) Supondo que : $F_U = V_U - I > 0$ e que $F_D = 0$ ($V_D - I < 0 \Rightarrow I - V_D > 0$). Ou seja, em t_1 a opção está *in the money* no estado melhor da natureza e *out of the money* no estado pior da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \Rightarrow q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) + q.F_U \Rightarrow \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} - I + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.V_U + (1-q).V_D - I.(1+r)}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U - I)}{1+r} + \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > 0$$

$$\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$$

Ou seja, em t_0 a opção está *deep in the money* se a expressão $\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$ for verdadeira. Note que apesar de $F_U > 0$, em última

instância, investir ou não imediatamente não depende do que ocorrer no estado *up* da natureza.

iii) Supondo que $F_U > 0$ e $F_D > 0 \Leftrightarrow F_U = V_U - I$ e $F_D = V_D - I \Rightarrow V_U > I$ e $V_D > I$. Ou seja, em t_1 a opção de investimento está *in the money* qualquer que seja o estado da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I - \delta).(1+r) > 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - V_U + I) + (1-q).(V_D - V_D + I) > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow q.I + (1-q).I > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{I}{(1+r)} > I - \delta \Rightarrow \ \delta > I - \frac{I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Se a opção está *in the money* em qualquer cenário de t_1, estar *deep in the money* em t_0 implica que o dividendo seja maior que o valor presente do benefício da capitalização do investimento à taxa r, que é o custo de oportunidade de não investir imediatamente: $\delta > \frac{I.r}{(1+r)}$. Note que essa condição está inseirda na solução do caso ii).

Portanto, pode-se concluir que na opção de investimento, o VPL positivo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Em qualquer situação, o investimento imediato requer um prêmio maior do que o custo de oportunidade de não investir (esperar), exceto que a flexibilidade de esperar não tenha valor.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43) relata o resultado de *back-testing* (dados a partir de 1970) para uma companhia de petróleo que, hipoteticamente, na aprovação dos investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo, utilizasse opções reais no lugar do tradicional VPL. O teste considerou o cálculo do VPL *ex-post* de dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um Movimento Geométrico Browniano (Seção 3.1.1). Os resultados foram animadores: o VPL *ex-post* dos projetos com VPL >>0 apresentaram-se 16,6% superiores com o critério de OR e os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para um significativamente positivo na regra de OR. Esse resultado decorre da abordagem por OR exigir um prêmio adicional ao

tradicional VPL para o investimento imediato, que é o custo de oportunidade da flexibilidade de esperar. Com isso a probabilidade de um VPL negativo *ex post* considerando OR torna-se menor em relação ao tradicional VPL. É o benefício de se postergar a decisão evitando o investimento caso o estado da natureza revelado não seja favorável.

Exemplo 2: Opção de abandono com a flexibilidade de esperar por um período. Na literatura a opção de abandono é comumente tratada como o direito de vender um ativo por um valor terminal, cabendo ao decisor escolher o momento ótimo em um dado período. Nestes casos o valor da opção é positivo. Neste trabalho interessa especificamente opções de abando em que o decisor tem um custo ao abandonar o ativo, portanto a opção não tem necessariamente um valor positivo. Considere um ativo real operante que apresente um resultado operacional (δ) no primeiro período (t_0) e valor esperado do FCD futuro $E_0(V_1)$. O decisor pode então escolher entre abandonar o ativo imediatamente a um custo ou investimento ($I < 0$), ou postergar a decisão para o segundo período (t_1) - Figura 2, ramos superior e inferior da árvore de decisão respectivamente.

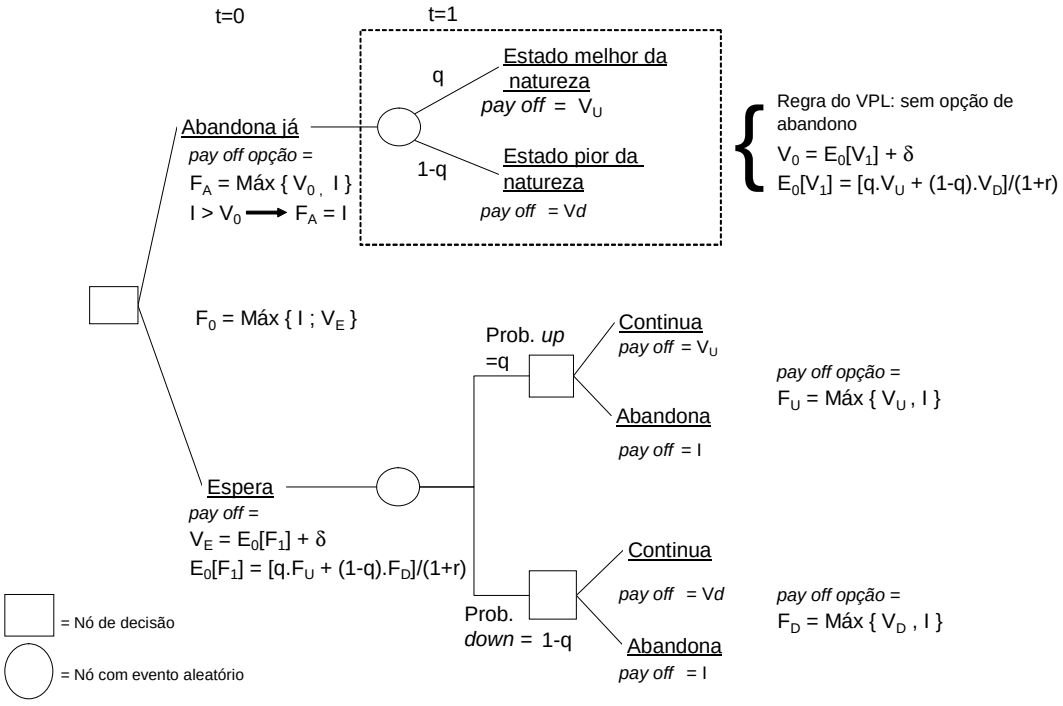

Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período.

O decisor que não tem a opção de abandono observa passivamente o valor de seu ativo real dado pela regra tradicional do VPL, representada dentro do quadro tracejado no ramo superior da árvore. Nesta situação, o VPL (V_0) do ativo é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) + \delta \qquad \text{e} \qquad E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)}$$

Se o decisor tem a opção de abandonar o ativo no primeiro período (o que corresponde a todo o ramo superior da árvore), o payoff F_A desta será:

$$F_A = Máx\{V_0, I\} \Rightarrow F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\}$$

Considerando I como o preço de exercício (constante) e V_0 como o preço do ativo subjacente (variável), observa-se que a opção de abandono equivale a uma opção de venda (*put*) financeira.

O decisor racional que maximiza o lucro da firma escolhe "abandonar já" se $I > V_0$:

$$I > V_0 \Rightarrow I - V_0 > 0 \Rightarrow \ Máx\{0, I - V_0\} = I - V_0 \Leftrightarrow$$

$$F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\} = V_0 + I - V_0 \Rightarrow \boxed{F_A = I}$$

Mas também é verdade que:

$$I > V_0 \therefore I < 0 \Rightarrow \boxed{V_0 < I < 0}$$

Esses dois resultados significam que o decisor só paga para abandonar um ativo se seu VPL for negativo e menor que o custo de abandono.

A flexibilidade de adiar a decisão para o segundo período t_1 é representada pelo ramo inferior da árvore da Figura 2. O decisor tem então a possibilidade de observar o estado da natureza que se revelará com novas estimativas do FCD para o ativo. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*) o FCD do ativo apresenta valor V_U e caso contrário V_D (estado da natureza pior ou *down*) – ou seja: $V_U > V_D$. Após esperar, os *payoffs* da opção de abandono nos dois estados da natureza em t_1 serão:

$$F_U = Máx\{V_U, I\} \text{ e } F_D = Máx\{V_D, I\} \Rightarrow$$

$$F_U = V_U + Máx\{0, I - V_U\} \text{ e } F_D = V_D + Máx\{0, I - V_D\}$$

O valor do ativo com a flexibilidade de abandonar em t_1 será:

$$V_E = E_0(F_1) + \delta \text{ onde } E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}$$

Uma firma que tem a oportunidade de abandonar um fluxo de caixa negativo imediatamente ($F_A = I$) deve comparar o custo I desta decisão com o valor do ativo com o benefício de esperar (V_E). O *payoff* da opção de abandono nos dois períodos (F_0) será:

$$F_0 = Máx\{V_E, I\} \Rightarrow F_0 = V_E + Máx\{0, I - V_E\}$$

Esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow Máx\{0, I - V_E\} = 0 \Rightarrow F_0 = V_E$$

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Este resultado define em que condição a opção de abandono não está *deep in the money* em t_0. Ou seja, interessa aqui definir em que circunstâncias vale mais ao decisor operar um FCD incerto do que pagar para abandoná-lo (inverter a desigualdade em (4) define a situação oposta: a opção de abandono imediato estaria *deep in the money*).

Se na inequação (4) q, r e δ são conhecidos, a escolha por esperar passa a depender das relações entre V_U, V_D e I, já que $F_U = Máx\{V_U, I\}$ e $F_D = Máx\{V_D, I\}$. Por construção $V_U > V_D$, então novamente há 3 situações a se examinar: $I > V_U > V_D$; $V_U > I > V_D$ e $V_U > V_D > I$:

i) $I > V_U > V_D$. Nesta situação, abandona-se o ativo em qualquer cenário de t_1 (e de t_0, pois $V_0 < 0$). Então, em que condições ainda sim é melhor esperar e abandonar em t_1 do que em t_0? Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.I + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{I}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow$$

$$\delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Isso significa que se o fluxo de caixa δ em t_0 for maior do que o valor presente da capitalização do investimento de abandono à taxa r, ainda sim vale a pena adiar o abandono.

ii) $V_U > I > V_D$. O ativo é mantido operante no cenário *up* e abandonado no cenário *down*. Então esperar por t_1 será vantajoso se:

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow q.V_U > (I-\delta).(1+r) - (1-q).I \Rightarrow$$

$$q.V_U > I.(1+r-1+q) - \delta.(1+r) \Rightarrow V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

Este resultado demonstra que se no cenário *up* o ativo não é abandonado, então para adiar o abandono de t_0 para t_1 é necessário que $V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q}$.

iii) $V_U > V_D > I$. O ativo é mantido operante nos cenários *up* e *down*, ou seja, não é abandonado em t_1. Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow V_E = V_0 > I$$

Esse resultado mostra que se esperar é mais valioso do que abandonar imediatamente ($V_E > I$), e que se em t_1 o ativo nunca é abandonado, então a opção de abandono é igual ao VPL em t_0 e o prêmio da flexibilidade de esperar é zero:

$$V_0 > I \Leftrightarrow F_A = Máx(V_0, I) = V_0 .$$

Portanto, pode-se concluir que na presença de uma opção real de abandono cujo preço de exercício seja um desembolso $I < 0$, o VPL negativo é uma condição necessária para a decisão de desinvestir em t_0, mas não suficiente. É preciso que o abandono imediato valha mais do que a flexibilidade de esperar, ou seja, a opção de abandono deve estar *deep in the money.* Esse termo pode parecer desconfortável já

que os FCD são negativos no exemplo. Mas considerando o jargão de opções, ele é adequado.

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias

Na Seção anterior discutiu-se em que termos uma opção de investimento (*call*) e outra de abandono (*put*) deveriam ou não ser exercidas imediatamente. O investimento necessário – um valor fixo (em geral) - corresponde ao preço de exercício da opção e o valor do projeto ou ativo real – variável - corresponde ao preço do ativo subjacente. O valor crítico ou gatilho é o preço do ativo subjacente que leva o decisor a optar pelo imediato investimento no projeto ou no imediato abandono do ativo. Ou seja, o gatilho é o preço que torna a opção *deep in the money*.

Para tornar o conceito mais claro, reconsidere Exemplo 1 da Seção anterior, mas suponha que o número de períodos é um valor N muito grande ($N \to \infty$). Entretanto, a incerteza quanto ao valor do projeto é resolvida de forma equivalente, ou seja, no segundo período. Sendo δ o FCL no primeiro período t_0, este pode evoluir em t_1 para um valor melhor $U.\delta$ caso ocorra o estado da natureza *up* ou para um valor pior $D.\delta$ caso o ocorra o estado *down*. Em qualquer cenário, permanece constante a partir de então (Figura 3).

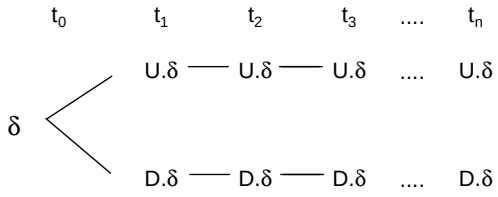

Figura 3 - Evolução do FCL a partir de t_0.

Pode-se escrever então que, se $N \to \infty$, os valores de V_U e V_D em t_1 serão:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{U.\delta}{r} + U.\delta = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \therefore V_D = \sum_{t=1}^{N} \frac{D.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{D.\delta}{r} + D.\delta = \frac{(1+r).D.\delta}{r}$$

Então o valor esperado de V_1 em t_0 será:

$$E_0(V_1) = \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta].(1+r)}{(1+r).r} \Rightarrow E_0(V_1) = \frac{q.U.\delta + (1-q).D.\delta}{r}$$

O VPL do projeto sem a flexibilidade de esperar é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \Rightarrow\ V_0 = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta]}{r} - I + \delta = \frac{q.\delta.(U-D) + D.\delta}{r} - I + \delta \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{\delta}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I \quad (6)$$

Se o decisor escolhe esperar e decidir sobre o projeto em t_1, a opção de investimento é dada por (2):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}, \text{ onde:}$$

$$F_U = Máx[V_U - I, 0] = Máx[\frac{U.\delta}{r}.(1+r) - I, 0] \therefore\ F_D = Máx[V_D - I, 0] = Máx[\frac{D.\delta}{r}.(1+r) - I, 0]$$

Suponha que $F_U > 0$ e $F_D = 0$ por simplicidade (se $F_U = F_D = 0$ não há opção em t_1 e se $F_U > F_D > 0$ a opção seria exercida em qualquer estado em t_1):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).0]}{(1+r)} = \frac{q.[(U.\delta / r).(1+r) - I]}{(1+r)} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{q.U.\delta}{r} - \frac{q.I}{1+r} \quad (7)$$

Então o gatilho será o FCL δ^* que torna a opção de investimento imediato mais valiosa do que a flexibilidade de adiar e decidir em t_1. No limite, o investimento imediato deve ser pelo menos tão valiosa quanto esperar, ou seja, o preço onde o decisor deixa de ser indiferente: (6) = (7):

$$V_0 = E_0(F_1) \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I = \frac{q.U.\delta^*}{r} - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta^*}{r}.(-q.D + r + D) = I - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[(1-q).D + r] = \frac{I.(1+r-q)}{1+r} \Rightarrow$$

$$\delta^* = \frac{r.I.(r + (1-q))}{(1+r).[(1-q).D + r]} \quad (8)$$

Em (8) pode-se observar que o valor do gatilho δ^* só depende do estado pior ou ruim da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho D do movimento para baixo do preço do ativo subjacente e de $(1-q)$. Esse fato é conhecido como Princípio das Más Notícias de Investimentos Irreversíveis (*bad news principle of irreversible investments*), termo foi cunhado por Bernanke (1983,

p.91-93, ver também Dixit e Pindick, 1994, p. 40). De acordo com Bernake esse resultado tem um apelo intuitivo: Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir (ou não) no período seguinte. Essa opção só tem valor caso haja uma probabilidade positiva do investimento não ser feito e da severidade da perda com o investimento irreversível. Ou seja, o valor da opção só depende do lado ruim da incerteza.

Note ainda que um pequeno aumento na probabilidade de um mal resultado não pode ser compensado por um ganho potencial com o lado bom ou positivo da incerteza. Observe também que o impacto do lado ruim sobre o valor de uma opção de investimento não depende das preferências ao risco do decisor. Assim eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. O Apêndice 1 demonstra que o gatilho δ^* que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar é dado por:

$$\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Até este momento discutiu-se o conceito de OR, exploraram-se as vantagens desta abordagem em relação ao VPL e exercitou-se a regra de decisão de um investidor considerando exemplos simples. A teoria de opções reais tem sido construída progressivamente a partir de contribuições de situações particulares, como bem evidencia o histórico da literatura. Com isso, uma taxonomia homogênea para OR ainda não é consenso, embora esforços rescentes apresentem significativos avanços. Na próxima Seção este assunto é discutido.

2.4. Taxonomia de opções reais

A abordagem do problema de decisão de investimento como opções reais tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e de suas interações estratégicas (ver adiante). Esse valor manifesta-se tipicamente através das flexibilidades embutidas nas oportunidades de investimento de capital.

Copeland e Antikarov (2001, p.12-13) classificam as opções reais primariamente pelo tipo de flexibilidade que oferecem. Assim a opção de diferir, esperar ou postergar é uma *call* americana sobre um projeto cujo início pode ser adiado. A opção de abandono de um projeto por um preço fixo é formalmente uma *put* americana, como o é a opção de contração, onde se vende uma parte do ativo por um preço fixo. A opção de expansão é o oposto da contração, e como a opção de extensão (prorrogação de um direito) são *calls* americanas. Opção de mudança de uso (*switch options*) a um preço fixo são *portfolios* de *calls* e *puts* americanas. As opções sobre opções são chamadas de opções compostas e incluem os projetos com investimentos em etapas ou fases, que oferecem a opção de abandonar ou diferir ao final de cada fase. Por fim, as *rainbow options* (opções arco-íris) são aquelas com múltiplas fontes de incerteza. Muitos problemas de decisão reais são opções arco-íris compostas (*compound rainbow options*), como ocorre na área de exploração e produção de petróleo. Essas situações são mais comuns do que parecem, por exemplo, basta considerar a incerteza no preço, na quantidade produzida e na taxa de desconto de qualquer investimento em fases.

Trigeorgis (1996, p.2-4) observa que as OR podem tanto ocorrer naturalmente (como opções de diferir, contratar, desativar, abandonar, etc.) como podem ser construídas a um custo desde o início de um projeto (opções como expansão de capacidade, crescimento, mudança de uso). Este autor também classifica as OR em categorias, destacando os tipos mais comuns, a indústria onde são mais importantes e alguns autores representativos que as analisaram. São elas: Opção de diferir, de investir em etapas (compostas), de mudança de escala (expandir, contrair, desativar ou reiniciar), de abandono, de mudança de uso (insumos, produtos, etc.), de crescimento (quando um investimento pode criar vários outros projetos) e opções múltiplas interagindo.

Dixit e Pindick (1994) por sua vez discutem pelo menos 13 tipos de OR diferentes e variações destas. Em sua maioria já foram citadas ou são variações das apresentadas nos parágrafos anteriores. Dias (1996, p.59-66) descreve os tipos de opções mais comuns observadas na literatura OR aplicadas à indústria do petróleo. Na Seção 4.1 o processo de Exploração e Produção de petróleo é discutido do ponto de vista de OR.

Não existe uma uniformidade absoluta para a taxonomia da OR. Por exemplo, o agrupamento denominado de opção de mudança de escala de Trigeorgis (*op. cit.*) é desmembrado em até quatro tipos pelos outros autores. Isso faz com que um mesmo tipo de opção receba diferentes nomes, por exemplo, opções compostas em geral têm o mesmo significado de opções seqüenciais de Dixit e Pindyck (*op. cit.*). Outro exemplo é a opção de diferir ou esperar em Copeland e Antikarov (op. cit), denominada de opção investir em Dixit e Pindick (op. cit).

A denominação “esperar” de Copeland e Antikarov é particularmente infeliz, pois esperar é um aspecto comum a toda OR até a sua data de expiração. De forma similar, alguém pode então argumentar que investir também é uma característica comum a vários tipos de opções, e com razão, mas na condição de preço de exercício, e não como meio de implantação de um projeto.

Uma outra dimensão do problema de valoração e decisão de investimentos pode ser percebida ao se considerar as interações estratégicas entre competidores (Trigeorgis, 1996, p.133-134). Se o impacto de um competidor restringe-se à captura de parte do valor do mercado de um projeto, então o decisor ainda encontra-se com o problema de maximização do valor da firma discutido nos itens anteriores, embora mais complexo. Neste caso, deve-se incorporar o impacto da competição na decisão de investimento, mas pode-se ignorar qualquer efeito interativo de ação e reação entre os competidores. Entretanto, se a decisão de investimento é sensível e contingente às decisões de outras firmas, então um tratamento mais complexo combinando Teoria de Jogos com Teoria de Opções Reais é necessário.

Trigeorgis (1996, p.142-149) sugere uma classificação para OR considerando as interações estratégicas entre competidores. Essa classificação, de acordo com o autor, visa destacar importantes características das oportunidades de investimento como opções sobre ativos reais. Sugere que três aspectos devem ser considerados

sob o ponto de vista de estratégia competitiva: o primeiro refere-se à exclusividade da propriedade e o efeito da competição sobre a habilidade da firma apropriar para si o valor da opção. Se a firma tem exclusividade sobre se e quando investir, ou seja, não é afetada pelos competidores, a opção é dita Proprietária, caso contrário, a opção é Compartilhada. A segunda questão estratégica refere-se às interações internas à oportunidade de investimento. Se a OR leva a outros investimentos ou outras opções subseqüentes, é então chamada de Composta. Com isso esse tipo de opção pode ter maior impacto estratégico sobre a firma, o que torna sua análise mais complexa. Por outro lado, se o projeto é analisado como um investimento isolado, a OR é dita Simples. A terceira questão estratégica refere-se ao momento e urgência da decisão. Projetos que necessitam de uma decisão imediata do tipo agora ou nunca são ditos em Expiração ou Expirando, mas se a decisão pode ser adiada, então a opção é chamada de Diferível ou Adiável.

A Figura 4 apresenta exemplos com os conceitos da classificação anterior, considerando diferentes estratégias e o valor da OR correspondentes.

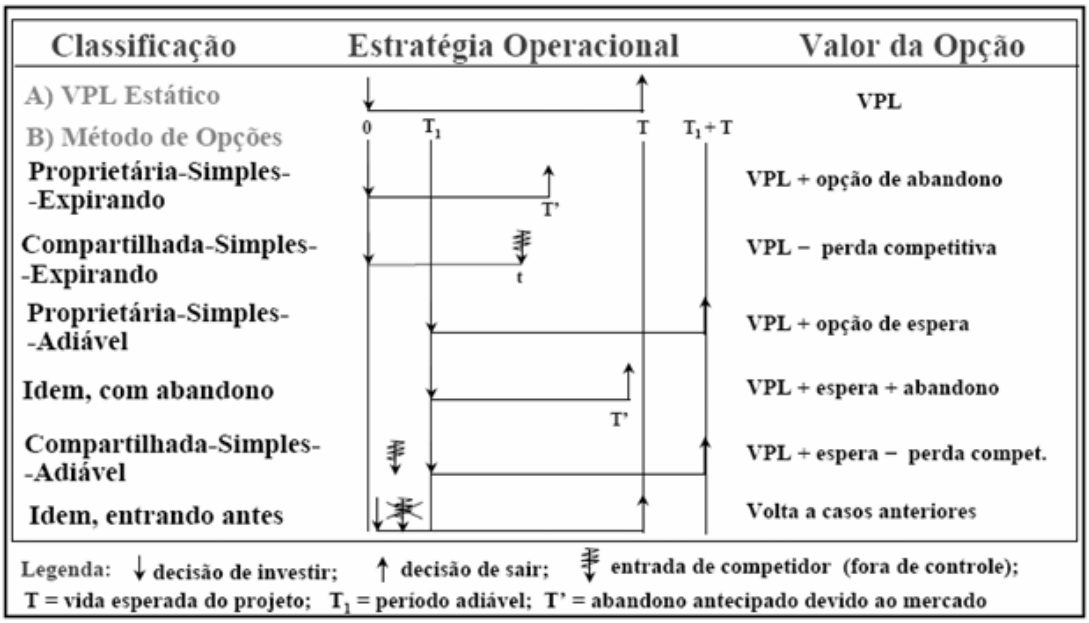

Figura 4 - Classificação das OR, interações estratégicas e valor da opção como a soma do VPL com o valor da "opção" dada pela flexibilidade e o efeito competitivo (adaptado de Trigeorgis, 1996, p.148).

No quadro da Figura 4, o item A representa o problema de capital budgeting tradicional enquanto o item B inclui seis exemplos com OR. Para uma opção proprietária, simples e em expiração com a flexibilidade de abandono em T<T', o

valor da OR é dado pelo VPL somado do valor de abandono. Para uma opção compartilhada, simples e em expiração, o investimento é feito imediatamente, mas a entrada de um competidor pode erodir o valor do projeto. Para uma opção proprietária, simples e adiável, o valor da opção depende da flexibilidade de adiar o investimento e da existência da possibilidade de abandono. Para uma opção compatilhada, simples e adiável, a entrada prévia de um competidor gera uma perda competitiva, mas que pode ser evitada caso a firma invista antes.

Vollert (2003, p.22-39) apresenta talvez a mais completa sistemática para OR, revendo e organizando a contribuição histórica de muitos autores a partir do trabalho pioneiro de Myers (1977, *op. cit.*). Apresenta duas classificações que contemplam a perspectiva gerencial e a perspectiva de valoração econômica. As duas abordagens são complementares na medida em que se propõe a relacionar as flexibilidades gerenciais (de orientação prática) com o instrumental teórico exigido para a valoração com OR, derivado da teoria de apreçamento de opções financeiras.

2.4.1. Classificação gerencial

A classificação gerencial de Vollert (op. cit.) pode ser bem compreendida através da decomposição do valor da firma em seu valor estático (dado pelo VPL tradicional) e o valor das diferentes flexibilidades gerenciais (Figura 5):

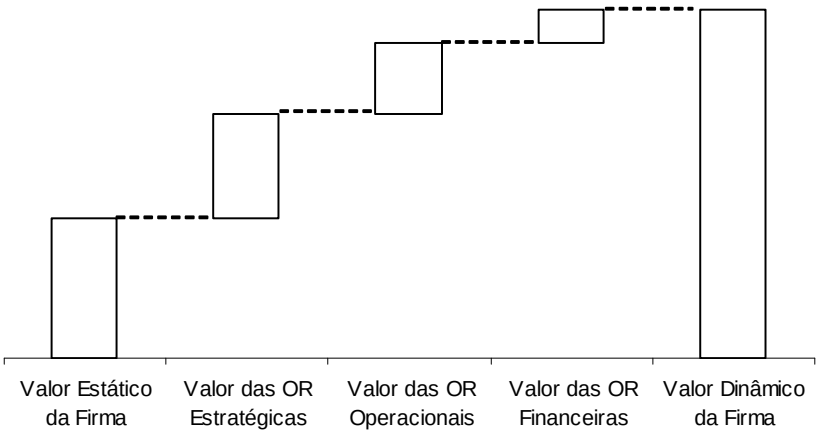

Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003, p.22).

Esta subdivisão é feita exclusivamente com o propósito taxonômico, já que o valor total das OR de um projeto, ativo ou firma é tipicamente não aditivo em decorrência das interações entre as OR**.**

Trigeorgis (1996, p.227-256) avalia a interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto – opções múltiplas (ou compostas na taxonomia de Copeland e Antikarov *op. cit*.). Demonstra que a interação entre duas opções pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo do valor do projeto. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto. Embora os valores das opções não sejam aditivos, em interações pequenas e simples a adição pode ser uma boa aproximação. O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são de tipos opostos (por exemplo, expandir e contrair) e tem uma separação finita, a probabilidade conjunta de exercício será pequena. Mas à medida que aumenta o intervalo cresce o valor da interação. Por outro lado, se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

O valor dinâmico da firma (Figura 5) é então dado pela composição do valor estático da firma com o valor das OR Estratégicas, Operacionais e Financeiras. As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desinvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio. As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. As OR Operacionais podem ser subdivididas em opções de insumo (*input options*), processo, produto (*output options*) e opções de expansão/contração. Há frequentemente uma estreita relação entre OR Estratégicas e Operacionais, pois, havendo alta flexibilidade nos ativos existentes, naturalmente surgem novas e futuras OR Estratégicas. As OR Financeiras, por fim, são aquelas relacionadas à

habilidade de modificar a estrutura de capital durante o curso de um projeto, agregando valor para a firma.

Neste trabalho, a opção de investir é o que na literatura se chama opção de diferir, mas é a mesma designação adotada por Dixit e Pindick (2004), e refere-se a uma OR estratégica. Por sua vez, a opção de abandono refere-se ao abandono irreversível de um ativo real, onde o preço de exercício é um custo.

Percebe-se que a classificação gerencial se preocupa mais em auxiliar o aspecto da nomenclatura de OR como tratado por Copeland e Antikarov (2001), Dixit e Pindick (2004 - que na verdade não se preocupam com este tema) e em parte por Trigeorgis (1996). Por sua vez, a classificação sob a perspectiva da valoração de Vollert tem um papel mais pró-ativo, na medida em que se preocupa em sistematizar os diferentes aspectos que afetam o valor de uma OR.

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração

A classificação com a perspectiva de valoração de Vollert (op. cit., p.26-33, Figuras 2.4 a 2.11) ocupa-se de aspectos específicos de OR a serem considerados para o apreçamento por opções. Dois grandes tópicos são considerados: Parâmetros de entrada para opções reais e as diferenças em relação às financeiras e; Limitações da analogia de OR com opções financeiras.

i - Parâmetros de entrada

Considerando os parâmetros de entrada para a valoração com OR, o primeiro importante aspecto a ser considerado são as fontes de incerteza. Vollert (op. cit.) sumariza as fontes de risco como tecnológico, *timing*, político, social, legal e econômico, sendo este último subdividido em valor do projeto, preço/custo, demanda, processo, taxa de câmbio e risco estratégico. Todos esses riscos afetam a lucratividade de um projeto e muitos deles ocorrem simultaneamente. Em aplicações práticas, as fontes de risco mais importantes são as que afetam seriamente o projeto (em intensidade e freqüência), e por isso devem ser priorizadas na modelagem do valor deste. Especial atenção deve ser dada aos riscos específicos da firma, que não são apreçados pelo mercado. Em seguida é preciso definir o instrumental matemático a ser utilizado para a modelagem do risco do ativo subjacente: se em tempo discreto ou contínuo; o tipo de processo estocástico a ser utilizado (Seção

3.1), e por fim, se o ativo subjacente é ou não transacionado no mercado e como isso pode ser contornado. A estimativa da volatilidade do processo estocástico pode ser feita com o auxílio de séries históricas ou com um modelo de equilíbrio como o CAPM.

A modelagem dos dividendos é igualmente importante, devendo se considerar a taxa, a periodicidade, se estocástico ou não, e o beneficiário dos pagamentos. Em relação a este ponto, em OR é preciso diferenciar entre os dividendos pagos ao detentor do ativo subjacente e os dividendos pagos ao detentor da opção. A taxa de retorno por sua vez, dever refletir a incerteza relacionada aos fluxos de caixa (*timing*, freqüência e intensidade). Esse problema é normalmente resolvido com um desconto na taxa de retorno via taxa de dividendo, explicando o baixo retorno observado em ativos reais em relação aos seus pares financeiros com estruturas de risco semelhantes. No caso de uma *commodiy* essa taxa é conhecida como *convenience yeld* e compensa os dividendos que deveriam ser recebidos pelo proprietário fisicamente detentor desta, mas não pelo detentor de um contrato sobre a mesma. A *convenience yeld* pode ser determinada no mercado de contratos futuro e *foward* ou por uma estrutura a termo desta taxa, caso seja estocástica no modelo de valoração.

Outros dois parâmetros indispensáveis são: o preço de exercício e a taxa livre de risco. Em OR estes parâmetros podem variar durante a vida da opção, podendo ser modelados por processos estocásticos. O último parâmetro a ser considerado é justamente a vida da opção, ou maturidade. Em OR, esse parâmetro pode estar relacionado à vida do ativo subjacente e, em ambos os casos, a maturidade pode ser classificada como perpétua, limitada ou desconhecida.

ii - Limitações da analogia de OR com opções financeiras

Considerando as limitações da analogia de OR com opções financeiras, Vollert (op. cit., p.34-39) destaca cinco aspectos: Urgência na decisão, competitividade da situação (ou do mercado), resolução da incerteza, efeito tempo de atraso e interações inter e intra-projetos.

O aspecto urgência da decisão de Vollert (op. cit., p. 34) corresponde à classificação segundo as interações estratégicas de Trigeorgis (1996, p.133-134)

apresentada anteriormente (ver Figura 4). O aspecto competitividade da situação refere-se ao nível de competição do mercado à que pertence a OR (tanto as exclusivas como as compartilhadas). Se o mercado é competitivo, o impacto da competitividade deve ser modelado exogenamente, por exemplo, com saltos de Poisson (ver Seção 3.1.3). Em situações de oligopólio, ao contrário, a modelagem da competição é endógena e pode considerar modelos dinâmicos de teoria de jogos[2].

O impacto da resolução da incerteza por sua vez, inverte-se se o risco é transacionado no mercado ou se é exclusivo da firma. O aumento do preço do risco transacionado no mercado aumenta o valor da OR, mas o oposto ocorre com o risco privado (por exemplo, a incerteza técnica, ver Seção 2.5). Isso torna importante a separação entre esses dois tipos de risco em modelos de OR. Um segundo aspecto importante é entender como a incerteza é resolvida ao longo da vida de uma OR. Os riscos transacionados no mercado (por exemplo, o preço de uma *commodiy*) em geral resolvem-se naturalmente com o tempo. Mas em relação ao risco privado, frequentemente ocorre o oposto, de forma que o detentor da OR não só não observa a resolução da incerteza como tem que investir para a sua redução. São as denominadas opções de aprendizagem (*learning options*), que representam importantes ferramentas gerencias tanto para limitar o risco de perda como para influenciar a incerteza de forma favorável à firma.

O efeito tempo de atraso ou resposta refere-se à defasagem entre a decisão de investir e o início do fluxo de caixa (*time lags*), o que pode durar de poucos dias até vários anos em OR. Naturalmente, este efeito pode ter um alto impacto na valoração e decisão ótima sobre um projeto. Isso torna valioso para a firma a segmentação do projeto em fases, o que pode trazer várias vantagens como a geração de novas opções (inclusive de aprendizagem) e a redução do efeito tempo de atraso para um primeiro fluxo de caixa.

[2] Em OR compostas, o exercício antecipado de uma ou mais etapas pode gerar valor, enquanto que em OR simples, o exercício antecipado pode ser necessário mesmo destruindo a opção. Jogos de opções têm se tornado um ativo campo de pesquisa com o objetivo de capturar o componente estratégico das OR (ver Vollert, 2003, p.36, Trigeorgis, 1996, p.133-134 e Dias, 2005, p.360-402).

Finalmente, as interações inter e intra-projetos refere-se às opções compostas de um mesmo projeto e às interações entre OR de diferentes projetos. Dada a não aditividade das OR, a modelagem a ser construída deve considerar simultaneamente todos esses aspectos, inclusive eventuais sinergias. Vollert (op. cit, p.39) alerta que a interdependência pode resultar em modelos excessivamente complexos. Sugere então que sejam ignoradas as flexibilidades menos importantes em ordem de um modelo operacional, cujos erros são geralmente pequenos.

A classificação sob a perspectiva de valoração de Vollert é bastante útil na medida em que pode auxiliar na construção de modelos de valoração com OR como uma espécie de guia no mapeamento de aspectos relevantes[3]. Conhecendo-se melhor a OR a valorar, pode-se realizar esta tarefa com a técnica ou abordagem mais adequada, entre as várias disponíveis.

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica

Em finanças, tradicionalmente se diferencia dois tipos de risco, denominados de risco de mercado (ou sistemático ou não diversificável) e de risco específico (ou diversificável). O risco de mercado está relacionado aos movimentos da economia em geral, decorrendo de acontecimentos aleatórios que afetam todos os ativos. O risco específico por sua vez relaciona-se à firma e o tipo de negócio em que está envolvida, podendo ser eliminado através da diversificação.

Os riscos de mercado e específico também geram incerteza sobre o valor econômico de projetos e ativos reais. Nos exemplos apresentados na Seção 2.2, a flexibilidade de esperar e o caráter opcional do investimento ou abandono em t_1 mostraram que essa incerteza possui valor, estimulando ou reduzindo a disposição de investir. A incerteza pode ser subdividida em incerteza econômica e incerteza técnica[4].

---

[3] A preocupação de Vollert com uma boa sistemática se justifica na medida em que seu livro, *A Stochastic Control Framework for Real Options in Strategic Valuation* (2003), concentra-se num modelo geral dedicado a capturar as interações entre OR intra-projetos (*switching options*, reversíveis ou não) e inter-projetos (interações competitivas endógenas e exógenas).

[4] Um terceiro tipo de incerteza tem sido considerado em OR. Denominada de estratégica, contempla a incerteza decorrente da interação estratégica entre competidores e entre projetos. Ver Seção 2.4.2 uma breve discussão, Vollert (2003, Cap.5) ou Dias (2005, Cap.4)

A incerteza econômica é exógena à firma, afetando negativamente as decisões de investimentos na medida em que estimula a espera, postergando projetos com VPL positivo. Quanto maior o horizonte temporal, maior é a incerteza econômica.

A Incerteza técnica é endógena ao processo de decisão da firma e não é correlacionada aos movimentos da economia. Mas conviver com a incerteza técnica pode ser uma escolha gerencial inadequada para a tomada de decisão, pois se contempla cenários desfavoráveis que reduzem o valor esperado do ativo básico da OR, adiando o exercício da opção.

Assim, a incerteza técnica cria um incentivo para o investimento em fases em busca de informação. Por isso, decisões de investimento com incerteza técnica são chamadas de opções de aprendizagem: A empresa aprende com esse tipo de investimento, permitindo, por exemplo, o melhor dimensionamento do projeto (ver Dixit e Pindick, 1994, p.47-48 e p.345-347). Assim, a redução da incerteza técnica cria um benefício adicional denominado de valor-sombra (*shadow value*), que não é diretamente mensurado pelo FCD.

É interessante notar que uma mesma variável pode ter os dois tipos de incerteza. No exemplo dado por Dixit e Pindick (*op. cit.*) o custo de um projeto pode ter tanto incerteza associada ao preço de insumos e facilidades de produção (incerteza econômica, risco específico) quanto à quantidade que será utilizada (incerteza técnica - risco de dimensionamento incorreto).

Dias (1996, p.36) destaca a diferença entre um investidor que detém uma carteira de ativos financeiros e um decisor que detém uma carteira de projetos e ativos reais: “O investidor não pode tomar vantagem da incerteza técnica para maximizar sua riqueza, o melhor que pode fazer é diversificar a sua carteira, de forma a tornar irrelevante esse risco e outros riscos específicos. Já o gerente pode agir, revisando a sua alocação de recursos, de forma a tomar vantagem da incerteza técnica e maximizar o valor da firma”. Por outro lado, o gerente ou decisor não tem a mesma flexibilidade do investidor para diversificar sua carteira e assim poder minimizar ou eliminar o risco específico.

Como a incerteza técnica independe do risco de mercado (é um risco diversificável), sua correlação com o retorno do *portfolio* de mercado é nula. Isso faz

com que o prêmio de risco exigido por este risco seja zero (Dias, 2005, p.135-137). Assim, enquanto que os processos estocásticos relacionados à incerteza econômica devem ter a tendência ajustada pela subtração de um prêmio de risco, as distribuições de probabilidade da incerteza técnica permanecem inalteradas. Por isso, a combinação de incertezas técnicas com incerteza de mercado em modelos de OR pode se dar de uma forma mais simples se for usado um método neutro ao risco. Pode-se usar a taxa livre de risco para descontar processos estocásticos neutros ao risco das variáveis de mercado, combinados com as distribuições de probabilidade das incertezas técnicas, que já são naturalmente neutras ao risco.

Dias (2005, Cap.3) trata a incerteza técnica com Teoria da Informação. A análise de valor da informação (VOI – *value of information*[5]) considera a aquisição de informação para a redução da incerteza (variância) em um processo seqüencial de revelação com expectativas condicionais. Propõe uma medida de aprendizagem probabilística associada ao conceito de distribuição de revelações.

2.6. Introdução à valoração de opções reais

O valor de uma opção real é dado pela soma do valor do projeto sem a opção (VPL tradicional) com o valor (prêmio) da flexibilidade embutida no projeto[6]:

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio da flexibilidade (10)

O apreçamento de OR é baseado no conhecimento sobre seus pares financeiros. Apesar das analogias entre estes dois tipos de opções, há diferenças importantes (Trigeorgis, 1996, p.127-129). Opções e ativos financeiros são negociados em um mercado eficiente a um custo mínimo. Opções e ativos reais podem ser pouco ou não negociáveis, especialmente se as opções são compartilhadas. Opções reais de domínio público são ainda mais complexas considerando as interações estratégicas entre as firmas, envolvendo investimentos preventivos e a criação de barreiras de entrada. Por outro lado, opções proprietárias

[5] O VOI é a diferença entre o valor da decisão informada e o valor da decisão à priori (sem a informação): VOI = VDI − VDP.

[6] Note que aqui se considera apenas uma única opção real associada a um projeto. Como discutido na Seção 2.4, a não aditividade das opções de um mesmo projeto ou quando interagem estando em projetos diferentes, a rigor, exige uma adaptação semântica da expressão (10):

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio líquido resultante das interações das flexibilidades (10).

como patentes podem ser facilmente negociáveis. Outras opções reais só podem ser vendidas se em conjunto com o ativo subjacente. Os custos de transação por sua vez não são desprezíveis, podendo mesmo inviabilizar um negócio. Mas o fato das opções reais não terem um mercado desenvolvido e suas conseqüências, não representa uma barreira para a sua valoração com o instrumental de opções financeiras.

O valor de uma opção real é a soma do VPL tradicional com o prêmio da flexibilidade (equação 10). Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2) discutiu-se em que condições o decisor deveria optar por esperar ou exercer a opção imediatamente, mas não sobre a estimativa das variáveis envolvidas. Por exemplo, como são calculadas as probabilidades dos estados da natureza? Como quantificar o valor do ativo subjacente nos estados *up* e *down* da natureza? Que taxa de desconto deve-se utilizar?

Não é fácil saber a taxa de desconto a ser aplicada sobre os *payoffs* esperados da opção no mundo real. Inicialmente sabe-se que uma opção é mais arriscada do que seu ativo subjacente (possui maior incerteza), exigindo por isso uma taxa de desconto maior. Se a opção for transacionada no mercado, seu valor é conhecido e pode-se obter de forma inversa a taxa de desconto a ser utilizada. Mas existem alternativas mais simples de apreçamento de opções que dispensam esta estimativa e de outras variáveis, como por exemplo, as probabilidades reais dos estados da natureza.

Algumas das estratégias de apreçamento mais conhecidas envolvem a construção de *portfolios* que permitem chegar ao valor da opção. Apresenta-se nesta dissertação a equivalência entre três alternativas desse tipo de valoração: Avaliação neutra ao risco, ativos contingentes (*contigent claims*) e *portfolios* replicantes. Segue-se uma quarta opção de apreçamento com programação dinâmica (há outras alternativas para o apreçamento de OR, ver, por exemplo, Seção 3.5). Embora a demonstração seja feita heuristicamente e a partir de um caso simples, o resultado é perfeitamente geral.

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*)

A valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) é um princípio fundamental para o apreçamento de opções financeiras (Hull, 2003, p.202-204). Este princípio

afirma que o preço de uma opção em um mundo neutro ao risco é correto também para o mundo real. Todos os investidores "tornam-se" indiferentes (neutro) ao risco e com isso não requerem mais prêmio de risco, o que torna o retorno esperado de qualquer ativo financeiro igual à taxa livre de risco[7].

A avaliação neutra ao risco de opções financeiras decorre do argumento de não arbitragem e também é válida para OR. Reconsidere a opção de investimento com a flexibilidade de adiar do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora o projeto paga dividendos δ_1 em t_1. O valor do projeto pode então evoluir de V_0 para $V_U + \delta_U$ ou $V_D + \delta_D$ conforme o estado da natureza. De forma similar o valor da opção pode variar para F_U e F_D - Figura 6.

A Figura 6 equivale ao ramo superior da Figura 1, mas com as probabilidades neutras ao risco p e $1-p$ dos estados da natureza up e down. Na Figura 1, o ramo inferior da árvore representou a decisão imediata, dada pela regra do VPL. Ao compará-lo com o ramo da superior da mesma Figura se explorou a regra de decisão considerando a flexibilidade de adiar. Note que o valor da opção foi dado pelo ramo superior, e a diferença entre os valores presentes dos dois ramos representa o prêmio da flexibilidade da equação (10).

[7] Note que o método não supõe que os investidores sejam neutros ao risco.

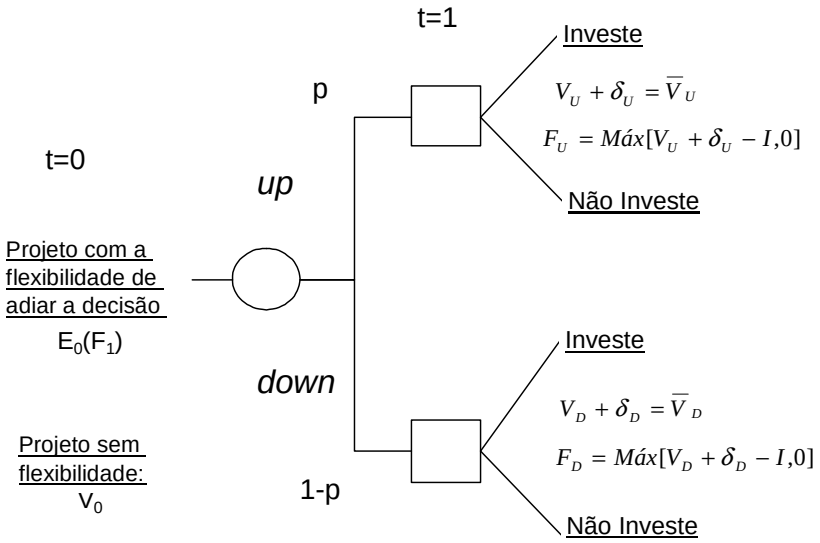

Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar.

Considere um *portfolio* (Φ) composto por uma posição longa na opção de investimento e uma curta em Δ unidades do ativo subjacente[8] (V_0). Para calcular o número Δ de ativos subjacentes que torne o *portfolio* sem risco, o valor deste deve ser o mesmo nos dois estados da natureza *up* e *down*:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D} \quad (11)$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Como o *portfolio* é sem risco o seu valor em t_0 é igual ao seu valor em t_1 descontado à taxa livre de risco (r_f):

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_1}{1+r_f} = \frac{\Phi_U}{1+r_f} \Rightarrow E_0(F_1) - \Delta.V_0 = \frac{F_U - \Delta.\overline{V}_U}{R_f} \Rightarrow$$

[8] A rigor, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. Poderia ser uma ação, um contrato futuro ou um *portfolio* dinâmico de ativos continuamente ajustado, de forma que seja obtida a perfeita correlação com o ativo da OR (Dixit e Pindick, 1994, p.117). A hipótese do *Market Asset Disclaimer* (MAD) propõe que este ativo seja o VPL do próprio projeto da OR – ver Seção 3.3.1. Nesta Seção adota-se o MAD para a demonstração proposta.

$$E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U \quad (12)$$

Onde $R_f = 1 + r_f$. Seja U e D tal que:

$$U = \frac{\overline{V}_U}{V_0} = \frac{V_U + \delta_U}{V_0} \Rightarrow \overline{V}_U = U.V_0 \therefore D = \frac{\overline{V}_D}{V_0} = \frac{V_D + \delta_D}{V_0} \Rightarrow \overline{V_D} = D.V_0$$

Usando (11), U e D em (12), tem-se:

$$E_0(F_1).R_f = \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.V_0.R_f + F_U - \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.U.V_0 \Rightarrow$$

$$E_0(F_1).R_f.(U-D) = R_f.(F_U - F_D). + F_U.(U-D) - U.(F_U - F_D) \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + \frac{(U - R_f)}{(U-D)}.\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + [1 - \frac{(R_f - D)}{(U-D)}].\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \text{ onde:} \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U-D)} \quad (14)$$

O preço da opção com a flexibilidade de esperar é dado por (13). Note que não depende das probabilidades reais q e $1-q$ dos estados da natureza nem do valor esperado do projeto, logo independe do grau de aversão ao risco do decisor. Isso implica que o preço da opção no mundo real é igual ao preço no mundo neutro ao risco. Mas o resultado (13) também sugere que o valor da opção de esperar por t_1 é o valor esperado de seus *payoffs* nos estados *up* e *down* com probabilidades p e $1-p$. Essas probabilidades são denominadas de probabilidades neutras ao risco e tem valor dado por (14). Note que anular o dividendo na demonstração ($\delta_U = \delta_D = 0$) apenas altera U, D e as probabilidades neutra ao risco p e $1-p$, sendo o resultado idêntico ao apresentado por Hull (*op. cit.*). Incluir dividendo em t_0 também não altera o resultado demonstrado, apenas que U e D devem considerar $V_0 + \delta_0$ como denominador.

Também se pode calcular o valor esperado do ativo subjacente $E_1(V_1)$ com as probabilidades neutras ao risco (14) em t_1:

$$E_1(V_1) = p.U.V_0 + (1-p).D.V_0 \Rightarrow E_1(V_1) = p.(U-D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow$$

$$E_1(V_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.(U-D).V_0 + D.V_0 = (R_f - D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow \boxed{E_1(V_1) = (1+r_f).V_0}$$

Este resultado demonstra que, no mundo neutro ao risco, o preço de qualquer ativo cresce à taxa livre de risco.

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*)

A segunda forma que se apresenta para calcular o valor da opção, aqui denominada de *ativos contingentes*, corresponde à adotada extensivamente por Dixit e Pindick em seu livro *Investment Under Uncertainty* (1994). Estes autores a denominam de *Contingent Claims* com o uso de *Spanning Assets***.**

Seja um *portfolio* Φ composto pela opção de investimento (Figura 6) e Δ ativos subjacentes[9], de tal forma que seu valor é constante em qualquer estado da natureza:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}} \quad (11)^{10}$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Sendo o *portfolio* sem risco, o seu valor cresce à taxa livre de risco, de outra forma haveria arbitragem. Então:

$$d\Phi = r_f.\Phi_0.dt\,.$$

Mas a variação de valor de um *portfolio* também é dada pelo ganho de capital e dividendo distribuído, então:

$$d\Phi = [dF - \Delta.(dV + d\delta)].dt$$

Igualando as duas equações e discretizando:

---

[9] A rigor, ver nota de rodapé 7, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. A hipótese do *Market Asset Disclaimer* – ver Seção 3.3.1 – é adotada nesta Seção pelo seu apelo intuitivo.

[10] A equação (11) é conhecida como delta *hedging* por sinalizar ao detentor da posição curta de uma opção a quantidade de ativos subjacentes que deve deter de forma a criar uma estratégia de *hedging* sem risco.

$$[(F_1 - F_0) - \Delta.((V_1 - V_0) + \delta_1)].(t_1 - t_0) = r_f.\Phi_0.(t_1 - t_0) \Rightarrow$$
$$F_1 - F_0 - \Delta.V_1 + \Delta.V_0 - \Delta.\delta_1 = r_f.F_0 - r_f.\Delta.V_0 \Rightarrow$$
$$F_1 - \Delta.(V_1 + \delta_1) + (1 + r_f).\Delta.V_0 = (1 + r_f).F_0 \Rightarrow \Phi_1 + R_f.\Delta.V_0 = R_f.F_0$$

Como o *portfolio* é sem risco, então:

$$\Phi_1 = \Phi_U = F_U - \Delta.\overline{V}_U \Rightarrow \boxed{F_U - \Delta.\overline{V}_U + R_f.\Delta.V_0 = E_0(F_1).R_f}$$

Esta última expressão é novamente a equação (12). Logo, substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14).

$$\boxed{E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f}} \text{ (13) onde: } \boxed{p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)}} \text{ (14)}$$

O apreçamento por *portfolio* replicante e a programação dinâmica levam aos mesmos resultados (13) e (14), e encontram-se demonstrados no Apêndice 2.

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados

Demonstrou-se nas Seções 2.6.1 e 2.6.2 e no Apêndice 2 que a avaliação neutra ao risco, por *contingent claims*, por *portfolios* replicantes e por programação dinâmica são equivalentes na medida em que levam ao mesmo resultado. As três primeiras técnicas consistem em criar *portfolios* com o objetivo de valorar opções considerando a eficiência de mercado e a ausência de arbitragem. Mas as semelhanças param por aí.

As avaliações neutras ao risco e por *contingent claims* consideram *portfolios* formados pela opção e um ativo perfeitamente correlacionado com o projeto. Os *portfolios* são montados de tal forma que apresentam valor constante em qualquer estado da natureza, portanto são sem risco. O *portfolio* replicante é constituído pelo ativo subjacente e títulos livre de risco, tendo como objetivo replicar os *payoffs* da opção, por isso é um *portfolio* com risco.

A avaliação neutra ao risco calcula o valor da opção considerando que o *portfolio* em t_1 descontado à taxa livre de risco é igual ao valor do *portfolio* em t_0. A valoração por *contingent claims* considera que o ganho de capital mais dividendo recebidos entre t_0 e t_1 é igual ao valor do *portfolio* em t_0 capitalizado à taxa livre de

risco. Por fim, o *portfolio* replicante por modelar o comportamento da OR, tem o mesmo valor do que esta em t_0.

A programação dinâmica aparenta ser mais simples, já que não monta nenhum *portfolio*, apenas utiliza o conceito de valor esperado e que a utilidade do decisor seja crescente com o lucro. Mas depende das probabilidades reais e da taxa ajustada ao risco da opção μ, que podem ser verdadeiramente desconhecidas. Alternativamente, a programação dinâmica pode ser aplicada no mundo neutro ao risco, utilizando as probabilidades neutras ao risco e a taxa livre de risco. Neste caso assume indiretamente todas as premissas desta valoração.

Na próxima Seção desenvolve-se a teoria da programação dinâmica para um modelo de vários períodos e seu caso limite em tempo contínuo. Para isso utiliza-se o contexto do Exemplo 1 (Seção 2.2), novamente por sua simplicidade e sem perda de generalidade.

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo

Para ativos financeiros em que informação, negócios e mudanças de preços ocorrem a todo instante, aplicar finanças em tempo contínuo soa natural. Para problemas de *capital budgeting*, a abordagem em tempo contínuo é em muitos casos pelo menos tão razoável quanto considerar fluxos de caixa anuais (Vollert, 2003, p.50), mas com a vantagem de utilizar os resultados da literatura de opções financeiras para valorar OR.

Dixit e Pindick (1994, p.98-106) apresentam uma didática transição do problema de apreçamento de OR de dois para muitos períodos e daí para tempo contínuo. Os pontos mais relevantes são destacados em seguida.

Reconsidere o contexto da decisão do problema de investimento do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora com vários períodos e onde a incerteza segue um processo de Markov, ou seja, não depende de seu histórico passado (ver Seção 3.1). Seja x_t a variável de estado que descreve a situação atual da firma e como esta afeta sua opção de investimento e, seja u_t a variável de controle que descreve as escolhas disponíveis ao decisor: Investir ou esperar. As variáveis x_t e u_t afetam tanto o lucro do período corrente $\pi_t(x_t, u_t)$ (ou dividendo - $\delta_t(x_t, u_t)$), quanto a

distribuição de probabilidade dos futuros estados da natureza. O objetivo do decisor é escolher a seqüência de controles u_t que maximize o valor esperado da firma, ativo ou projeto - $F_t(x_t, u_t)$:

$$F_t(x_t) = \underset{u_t}{Máx} \{\pi_t(x_t, u_t) + E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (15)$$

A equação (15) é denominada de Equação Geral de Bellman e representa o princípio da otimização de Bellman para vários períodos em tempo discreto. O termo $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$ é denominado de valor de continuação (*continuation value*) e representa do ponto de vista do período t, o valor esperado das escolhas ótimas futuras ($u_{t+1}, u_{t+2}, ...$). A variável de controle u_t então é escolhida de forma que $F_t(x_t)$ seja máximo. Isso representa exatamente o *backward induction* da programação dinâmica, iniciada no último período T até $t+1$ ($u_{t+T}, ..., u_{t+2}, u_{t+1}$), e por fim em t com a escolha de u_t.

Se o horizonte de tempo é infinito (mas ainda com intervalos discretos), o decisor enfrenta o mesmo problema em qualquer data e a equação de Bellman é comum a todos os períodos, dependendo somente de x_t:

$$F(x_t) = \underset{u_t}{Máx}\{\pi(x_t, u_t) + E_t[F(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (16)$$

A equação (16) é uma equação funcional não linear (pois é recursiva) que neste caso tem solução única (Dixit e Pindick, 1664, p.102). A boa notícia é que há uma solução prática simples. Iniciando de uma estimativa qualquer para o valor verdadeiro da função - $F^1(x_t)$ - escolhe-se a variável de controle ótima u^1. Retornando u^1 ao lado direito de (16), obtém-se uma segunda estimativa – agora calculada – do valor verdadeiro da função: $F^2(x_t)$. Repetindo-se o processo continuamente converge-se para o verdadeiro valor da função. A convergência é garantida pelo fator de desconto $1/(1+r)$ que é menor do que 1.

Suponha agora que a duração de cada período de tempo Δt tenda a zero. O lucro e o fator de desconto devem ser considerados como taxas, de forma que a equação (15) é reescrita:

$$F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t)|x,u]/(1+r.\Delta t)\}$$

Multiplicando por $1+r.\Delta t$ e rearranjando:

$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - F(x,t)]\} \Rightarrow$$
$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[\Delta F]\}$$

Dividindo por Δt e tomando este tendendo a zero, obtém-se a equação de Bellman para tempo contínuo:

$$r.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t) + E[dF]/dt\} \quad (17)$$

A equação (17) mostra que o retorno do ativo medido sobre uma função de valor ($r.F(x,t)$) é a soma do seu lucro (ou dividendo) imediato com a taxa esperada de ganho de capital. A igualdade reflete a condição de não arbitragem e para isso, o ativo deve ser otimamente gerenciado (o que é dado pela maximização em relação às escolhas disponíveis ao decisor: u).

A equação (17) é uma formulação generalizada do problema de valoração em tempo contínuo. Neste trabalho, essa função é uma OR cujo valor dependente de uma ou mais variáveis de risco (estocásticas) associadas ao ativo subjacente da opção. Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2), a incerteza relacionada ao ativo subjacente foi descrita pelos estados da natureza das árvores binomiais. Entretanto, esse é um tratamento insatisfatório, pois a incerteza vista como cenários discretos não corresponde à realidade de muitos problemas reais. Por outro lado, descrever a incerteza associada ao ativo subjacente (x) com processos estocásticos contínuos (dx) é relativamente simples. Igualmente importante é obter o processo estocástico da OR (dF) derivado do(s) processo(s) estocástico(s) do ativo subjacente, o que se faz usando o de Lema de Ito. Resta então resolver a equação diferencial do valor da OR (dF) de forma satisfatória. Estes são temas tratados no próximo Capítulo.

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos

A abordagem apresentada para processos estocásticos e o Lema de Ito nesta dissertação são heurísticas

3.1. Processos estocásticos em finanças

Um processo estocástico é uma função que dá a probabilidade com que uma variável estará em um estado i e em um instante $t \in [t_o, T]$. Assim o processo estocástico pode descrever a evolução aleatória de uma variável com o tempo (ver Figura 7, Seção 3.1.1). Cada caminho possível da variável aleatória é uma coleção de observações: $X = \{X(t), t \in [t_0, T]\}$, onde $X(t)$ é a observação da variável aleatória X no estado da natureza i vigente no instante t **.**

Essa aleatoriedade é que habilita os processos estocásticos para a modelagem da incerteza sobre a evolução de uma variável como, por exemplo, o preço de um ativo. Assim, um processo estocástico envolve pelo menos uma variável aleatória que, se muda de valor em intervalos de tempo conhecidos ou fixos, caracteriza um processo de tempo discreto. Se a variável muda em qualquer instante t o processo é dito continuo no tempo. Por outro lado, se a variável aleatória assume um conjunto de valores descontínuos, que representam os estados da natureza, o processo é dito de variável discreta. Se ao contrário, a variável pode assumir qualquer valor em um dado intervalo, o processo é dito de variável continua (os estados da natureza são contínuos). Um processo estocástico pode ainda ser classificado (grosseiramente) como estacionário se possui estatísticas constantes por longos períodos de tempo, ou não-estacionário, quando ocorre o contrário. Assim, por exemplo, em todo o Capítulo 2 os exemplos apresentados são processos estocásticos estacionários com variável e tempo discretos.

Uma importante característica para processos estocásticos é a propriedade de Markov**.** Um processo é dito de Markov quando sua distribuição de probabilidade em qualquer instante futuro não depende de seu histórico passado. De outra forma, a única informação relevante para a distribuição de probabilidade futura é a informação do momento presente.

Em seguida são apresentados os principais processos estocásticos contínuos utilizados em opções reais[11] destacados em Dixit e Pindick (1994, Cap. 3) e detalhados por Brandão (Cap. 3). Dentre estes, fundamental é o Processo de Wiener, que por sua simplicidade, funciona como um elemento de construção para outros processos mais realistas e sofisticados.

3.1.1. Movimentos Brownianos

O Processo de Wiener ou movimento Browniano é um processo estocástico em tempo contínuo com três importantes propriedades:

I – É um processo de Markov.

II – As mudanças no processo δz para qualquer intervalo de tempo Δt são normalmente distribuídas e a variância cresce linearmente com o tempo. Por definição:

$$\delta z = \varepsilon.\sqrt{\delta t} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \;\Rightarrow \delta z \sim N(0,\sqrt{\delta t})$$

Onde ε segue uma Normal padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão um. Assim o valor esperado de z é sempre zero e sua variância é δt.

III – Apresenta variações ou incrementos δz independentes por unidade δt de tempo, ou seja, possui correlação serial nula: $Corr(\delta z_i, \delta z_j) = 0$.

$$Corr(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{Cov(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{Var(\delta z_i)}.\sqrt{Var(\delta z_j)}} \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{\delta t}.\sqrt{\delta t}} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t}, \varepsilon_j.\sqrt{\delta t})}{\delta t} = \frac{E\{[\varepsilon_i.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t})].[\varepsilon_j.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_j.\sqrt{\delta t})]}{\delta t} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\delta t.E\{[\varepsilon_i - 0].[\varepsilon_j - 0]\}}{\delta t} = E[\varepsilon_i].E[\varepsilon_j] = 0.0 \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = 0$$

Onde: $\rho =$ Correlação, $\sigma(\delta z_i, \delta z_j) =$ Covariância e $\sigma^2 =$ Variância.

[11] Conforme comentado ao final da Seção 2.7, os processos de variável discreta são comumente insatisfatórios para a descrição dos fatores de risco do ativo subjacente, motivo pelo qual são preteridos daqui por diante.

Na medida em que se consideram intervalos de tempo progressivamente menores, no limite $\delta t \to 0$, o processo torna-se continuo no tempo, pode-se escrever que:

$$dz = \varepsilon.\sqrt{dt} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \therefore dz \sim N(0,\sqrt{dt})$$

Onde dz é denominado incremento de Wiener. O fato de este processo ter a propriedade de Markov e de $dt \to 0$ (o que em geral torna $|dz| = |\varepsilon.\sqrt{dt}| >> dt$) faz com que o caminho da variável dz seja irregular e "quebradiço" (Figura 7). Por isso, no Processo de Wiener a variável estocástica não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional, o que demanda o uso do cálculo estocástico:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Além disso, duas outras propriedades decorrem (Hull, 2003, p.219):

I – O comprimento esperado do caminho percorrido pela variável z é infinito para qualquer intervalo de tempo;

II – O número esperado de vezes que z iguala qualquer valor em particular em qualquer intervalo de tempo é infinito.

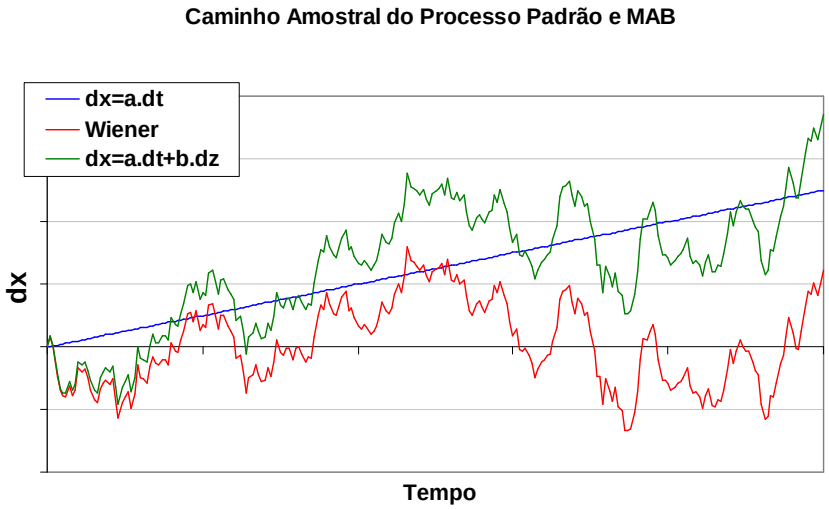

Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. A reta em azul representa a tendência do MAB.

Embora o Processo de Wiener tenha propriedades que pareçam restritivas do ponto de vista prático, trata-se uma ferramenta muito útil na modelagem de muitas

variáveis que mudam de forma continua e estocástica com o tempo. Adaptações podem ser necessárias, como por exemplo, para modelar preços que em geral não podem ser negativos (neste caso assume-se que o logaritmo do preço é normalmente distribuído – ver adiante).

A adaptação mais simples do Processo de Wiener é a inclusão de uma tendência ou *drift*, denominado de Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Aritmético Browniano (MAB) ou Movimento Browniano com D*rift* (Figura 7).

$$dx = \alpha.dt + \sigma.dz \quad (18)$$ sendo α e σ constantes.

Onde α é o *drift*, σ a volatilidade e dz é o incremento de Wiener. O Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, conforme mostrado, por exemplo, por Dixit e Pindick para um MAB (1994, p.68-70).

As variações dx do MAB - (18) - seguem uma distribuição normal com média $\alpha.dt$ e variância $\sigma^2.dt$: $dx \sim N(\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt})$:

$$E(dx) = E(\alpha.dt + \sigma.dz) = E(\alpha.dt) + E(\sigma.dz) = \alpha.dt + \sigma.E(dz) \Rightarrow$$
$$E(dx) = \alpha.dt + \sigma.0 \Rightarrow E(dx) = \alpha.dt$$

$$\sigma^2(dx) = V(dx) = V(\alpha.dt + \sigma.dz) = V(\alpha.dt) + V(\sigma.dz) + 2.Cov(\alpha.dt, \sigma.dz) \Rightarrow$$
$$V(dx) = 0 + \sigma^2.dt + 2.0 = \sigma^2.dt \Rightarrow \sigma(dx) = \sigma.\sqrt{dt}$$

Pode-se observar na Figura 7 que no curto prazo a volatilidade é determinante para o movimento Browniano enquanto que no longo prazo a tendência é que define o processo. Isso se deve ao fato da volatilidade crescer com $\sqrt{dt}$ e a média com dt. Se o dt é pequeno então $\sqrt{dt} >> dt$, mas à medida que dt cresce a relação se inverte: $\sqrt{dt} << dt$.

Um processo mais generalizado denominado de Processo de Ito ou Movimento Browniano Generalizado pode ser definido a partir do MAB, substituindo as constantes α e σ por funções não aleatórias de x e t.

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz$$

O valor esperado do Processo de Ito é dado por $E(dx) = a(x,t).dt$, e a variância é dada por $\sigma^2(dx) = b^2(x,t).dt$, sendo que $a(x,t).dt$ é a taxa instantânea de tendência ou *drift* e $b(x,t).\sqrt{dt}$ é a taxa instantânea de variância.

Um caso particular especialmente importante do Processo de Ito é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), obtido fazendo $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$ (Figura 8), sendo α e σ constantes:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz \quad (19) \quad \text{e} \quad dx \sim N[\alpha.x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

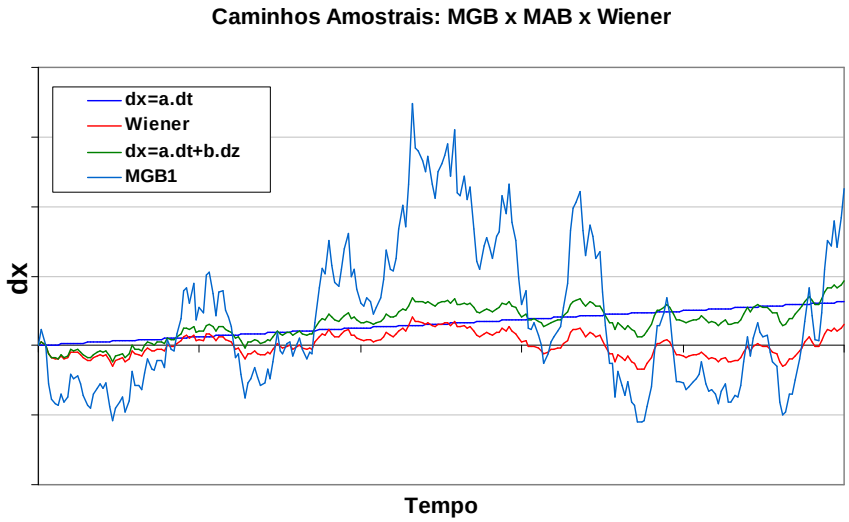

Figura 8 – MGB em relação ao Wiener padrão e ao MAB da Figura 7.

O MGB também é um processo estocástico não estacionário em que o valor esperado de dx depende do valor de x no momento inicial. Considerando que $\sigma = 0$, a equação (19) deixa de ser um processo estocástico e pode-se utilizar o cálculo diferencial convencional, então:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt; \quad \text{Mas: } d\ln x = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow d\ln x = \alpha.dt \Rightarrow$$

$$\int_0^x d\ln x = \int_0^t \alpha.dt \Rightarrow \ln(x_t / x_0) = \alpha.(t-0) \Rightarrow x_t / x_0 = \exp(\alpha.t) \Rightarrow x_t = x_0.\exp(\alpha.t)$$

Se $\sigma \neq 0$ é preciso utilizar o Lema de Ito do cálculo diferencial estocástico para definir o processo estocástico de $d\ln x$. Como se verá adiante (Seção 3.2.1),

$d \ln x$ é normalmente distribuídos e segue um o Processo de Wiener Generalizado dado por:

$$d \ln x = (\alpha - \sigma^2 / 2).dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \text{e} \quad d \ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2 / 2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Considerando um intervalo de tempo Δt, então:

$$\ln x_t \sim N[\ln x_{0+}(\alpha - \sigma^2 / 2).\Delta t, \sigma.\sqrt{\Delta t}] \therefore \text{ Se } Y = \ln x_t \Rightarrow x_t = e^Y \Rightarrow E(x_t) = E(e^Y)$$

E a variância de x_t será: $Var(x_t) = E(x_t)^2 - E^2(x_t) = E(e^{2Y}) - E^2(e^Y)$.

Ou seja, tanto o valor esperado quanto a variância de x_t são funções de $E(e^Y)$. Brandão (Cap.3, p.22-24) demonstra que:

$$E(x_t) = x_0.e^{(\alpha.t)} \quad \text{e} \quad Var(x_t) = x_0^2.e^{(2.\alpha.t)}.(e^{(\sigma^2.t)} - 1)$$

3.1.2. Reversão à média

Processos estocásticos que tendem a divergir do ponto de origem com o passar do tempo podem não ser adequados para algumas variáveis econômicas. O preço de *commodities* como petróleo e cobre, por exemplo, embora possam variar de forma aleatória no curto prazo em resposta a desequilíbrios de mercado, no longo tendem a reverter na direção do custo marginal de produção (Dixit e Pindick, 1994, p.74) ou alguma média que reflita o preço de equilíbrio de mercado. Processos com essa característica são denominados de Modelos de Reversão à Média (MRM).

Essa média no caso de uma *commodity* inclui o custo marginal de produção, a remuneração ao risco e o chamado "custo de utilização" (*user cost*) quando se trata de um recurso não-renovável, crescente com o tempo devido ao efeito da exaustão (Pindyck & Rubinfeld, 1995, p.545-546, apud Dias, 1996, p.109). Quanto mais competitivo for o mercado, maior deve ser a velocidade de reversão à média. No entanto, a velocidade de reversão também depende das restrições tecnológicas[12] do bem a ser produzido. Na indústria do petróleo, tipicamente de capital intensivo, as restrições tecnológicas somadas à existência um cartel atuante (OPEP) implicam

[12] A natureza impõe restrições tecnológicas de forma que apenas algumas combinações de insumos constituem formas viáveis de produzir certa quantidade de produtos. As alternativas viáveis são denominados de conjunto de produção, cuja fronteira ou limite descreve a função de produção (Varian, 2003, p.344).

numa velocidade de reversão à média muito lenta, conforme se observa nas séries históricas de preço do petróleo.

Há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média. Responder a essa pergunta implica na análise de séries históricas de preços. Dixit e Pindick (1994, p.77-78) sugerem e realizam esta análise com o teste de raiz unitária de Dickey e Fuller (1981, apud Dixit e Pindick op.cit) sobre séries históricas longas de preços de petróleo. Considerando uma série de 120 anos, estes autores concluem pela reversão à média. Mas ao considerarem séries de 30 ou 40 anos não conseguem rejeita a hipótese de *random walk*. Essa parece ser a situação de muitas variáveis econômicas, qual seja, é difícil estatisticamente distinguir entre *random walk* e reversão à média com dados de 30 ou 40 anos. Como resultado, estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos. A favor do MGB, porém, conta a simplicidade analítica, motivo pelo qual este processo é o mais adotado na literatura (Dias, 1996, p.106).

Existem vários MRM sendo que, os mais utilizados, podem ser divididos em dois grupos (Dias, 1996, p.116). O primeiro grupo agrega os MRM baseados no Processo de Ornstein-Uhlenbeck, sendo mais utilizado em aplicações econômicas. O segundo grupo, mais utilizado no mercado financeiro, deriva da equação de MRM descrita em Shimko (1992, pg.11).

O processo reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck apresenta algumas variações. O modelo mais simples é denominado de MRM Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck :

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.dz \quad (21) \qquad \text{e} \qquad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde η é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é o nível para que x tende a reverter. O Processo de Ornstein-Uhlenbeck apresenta a propriedade de Markov, embora seus incrementos não sejam independentes. Observe que se $x > \bar{x}$ então dx tende a ser negativo (dz é uma distribuição simétrica) e por isso x caminha na direção de $\bar{x}$. Se ocorrer $x < \bar{x}$, dx tende a ser positivo e novamente x tende a $\bar{x}$.

Note que quanto maior η, maior o efeito da convergência dada por $\bar{x} - x$, por isso η é denominado de "velocidade" de reversão. A média e variância deste processo podem ser obtidas a partir das equações de kolmogorov e são dadas por (ver demonstração em Dixit e Pindick, 1994, p.90-91):

$$E[x] = \bar{x} + (x - \bar{x}).e^{-\eta.t} \quad \text{e} \quad V[x - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2.\eta}.(1 - e^{-2.\eta.t})$$

Observe que se trata de um processo convergente, pois se $t \to \infty$ então $E[x] = \bar{x}$ e a variância converge para um valor constante: $V[x - \bar{x}] = \sigma^2 / 2.\eta$. Caso $\eta \to \infty$ novamente $E[x] = \bar{x}$, mas a variância ao contrário tende para zero. Por fim se $\eta \to 0$ o processo se transforma num Movimento Browniano simples: $E[x] = x$ e $V[x] = \sigma^2.t$.

Dixit e Pindick (1994, p.76) observam que a equação (21) é a versão em tempo contínuo de um processo auto-regressivo de 1ª ordem em tempo discreto – AR(1). Isso significa que seus parâmetros podem então ser estimados a partir de dados históricos em tempo discreto.

O MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck é o modelo mais popular deste grupo por vários motivos, como não gerar preços negativos, por sua similaridade com o MGB e por ter uma solução analítica para o problema da opção de investimento com expiração infinita (Dixit e Pindyck, 1994, p.161-163). A equação deste modelo é dada por:

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz \quad \text{e} \quad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

Note que a diferença para o MGB é que a tendência α é substituída por $\eta.(\bar{x} - x)$, que é justamente o termo de reversão. Com isso, a solução do problema de investimento de Dixit e Pindick (op. cit) com o MGB se estende ao MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck com alguns ajustes.

Metcalf e Hassett (1995) comparam o retorno de um investimento considerando o MGB e MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck para a modelagem do preço de um produto ou o valor de um ativo. Neste sentido apresentam uma

equação que generaliza os processos estocásticos de reversão à média e Browniano:

$$\frac{dx}{x} = \{\alpha + [\eta.(\bar{x}.e^{\alpha.t} - x)]\}.dt + \sigma.dz \quad (22)$$

Note que se $\alpha = 0$ obtém-se o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck dado por (20). Se $\eta = 0$ obtém-se o MGB (19). O termo $e^{\alpha.t}$ é uma inovação em relação aos MRM anteriores refletindo a expectativa de que a média de longo prazo $\bar{x}$ varie com o tempo (crescente se $\alpha > 0$ e vice-versa).

A outra classe de processo de reversão à média, como dito, deriva da equação de Shimko (1992, p.11):

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.x^{\gamma}.dz \quad (23) \qquad \text{e} \qquad dx = N \sim [\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.x^{\gamma}.\sqrt{dt}]$$

Essa classe de processos de MRM possui o mesmo valor esperado de dx, mas a variância cresce com o expoente γ. Note que se γ é nulo, obtém-se o MRM de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético (21).

Trata-se de uma classe de processos também bem difundida na literatura com diferentes aplicações (ver Dias, 1996, p.119-120).

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo o fato de convergir para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado. Preços crescentes estimulam a entrada de novos concorrentes, o que aumenta a oferta e estimula a sua redução. Simetricamente, preços muito baixos eliminam os competidores com maiores custos, reduzindo a oferta, o que estimula a recuperação do nível de preços.

Entretanto, Metcalf e Hassett (1995) mostram numericamente que o nível de investimento agregado obtido com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck no lugar do MGB é estatisticamente o mesmo para um range de parâmetros representativo. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva

de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck, obtido a partir da Equação (22) fazendo a tendência (α) igual à zero: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$. O MGB também é obtido a partir de (22) com tendência (α) e velocidade de reversão (η) nulas: $dx = \sigma.x.dz$. Em outras palavras, em seu estudo estes autores fazem com que tanto o MGB quanto o MRM apresentem a mesma tendência ou *drift*, no caso nula. De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM, intuitivamente espera-se que os preços gerados pelo primeiro irão necessariamente dominar o MRM.

A estabilização da variância com o tempo no MRM geométrico (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com o MGB, limita o valor da flexibilidade de esperar. Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir em relação aos Movimentos Brownianos. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM significa que preços mais altos são alcançados com menor freqüência (Efeito Preços), o que induz a uma redução do nível de investimentos. Os autores mostram que estes dois efeitos se tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, os autores argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza[13].

Dixit e Pindyck, (1994, p.161-167) também discutem os efeitos decorrentes da adoção do MRM. Adicionalmente, argumentam que a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o exercício da opção de investir. Segundo estes autores, o efeito resultante do MRM é menos óbvio do que o do MGB**.**

[13] Este resultado foi obtido em um modelo onde a função de produção apresenta retorno decrescente de escala, o que ocorre, por exemplo, em projetos de produção de petróleo. Entretanto, se o retorno de escala é constante e os custos são convexos, os efeitos preços altos e variância se somam e aumentam o nível de investimentos.

3.1.3. Processos de saltos de Poisson

Choques na oferta de um produto podem causar descontinuidades nos níveis de preços praticados. Por exemplo, a entrada de um novo competidor em um mercado pouco competitivo aumentando a oferta, ou ao contrário, conflitos armados e instabilidades políticas reduzindo a oferta, podem causar respectivamente queda ou aumento brusco nos preços correntes. Assim algumas variáveis econômicas podem apresentar infreqüentes, mas discretos saltos em seu valor, sendo modeladas por um Processo de Poisson (Dixit e Pindick, 1994, p.85).

O Processo de Poisson é um processo que apresenta uma variável dq que modela saltos de tamanho u fixo ou variável, correlacionado a x ou não, onde a probabilidade de ocorrência ($\lambda.dt$) do salto é dada por uma de taxa de chegada λ por unidade de tempo dt com distribuição de Poisson:

$$dq = \begin{cases} u & com\ probabilidade\ \ \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade\ \ 1-\lambda.dt \end{cases} \quad (24) \Rightarrow$$

$$E(dq) = u.\lambda.dt + 0.(1-\lambda).dt \Rightarrow \boxed{E(dq) = u.\lambda.dt} \quad (25)$$

Note que a distribuição de probabilidade, o valor esperado e a variância de dq são contínuos no tempo, mas dq não. Por analogia com o Processo de Ito, dx pode ser escrito como:

$$\boxed{dx = f(x,t).dt + g(x,t).dq}$$

Por exemplo, se o valor do salto depender do valor corrente de x, então poderia se ter $g(x,t) = x$, sendo dq definido como em (24) e $f(x,t)$ representaria uma tendência determinística. Um salto é dito degenerado quando a variável pode somente pular para um valor fixo e então permanece neste para sempre.

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*)

Também denominados de Processos de Poisson-Gaussianos, os processos de difusão com saltos resultam da combinação de um Processo de Poisson com um Processo de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86):

$$\boxed{dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq} \quad (26)$$

Esta associação faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta e não diferenciável no tempo (Poisson). Com isso, determinar o processo de uma função H(x) exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (ver Apêndice 4).

O retorno de um processo de difusão com saltos não é normalmente distribuído. No exemplo acima, o Processo de Poisson provoca uma alteração no valor da média e da variância, e a distribuição torna-se assimétrica**.** Se o tamanho do salto u também for aleatório, as caudas da distribuição também se tornam mais grossas.

A adição de um Processo de Poisson ao Processo de Ito retrata uma maior incerteza sobre a evolução de dx. A possibilidade de saltos aleatórios de tamanho u (positivo ou negativo) aumenta a incerteza sobre a variável modelada. O aumento do risco reduz o valor de um ativo na medida em que aumenta a taxa de desconto exigida pelo investidor. No caso da adição de um Processo de Poisson, esse incremento é dado exatamente pela taxa de chegada do salto λ (ver, por exemplo, Dixit e Pindick, 1994, p.87). Este resultado é bastante geral. A adição do parâmetro λ eleva o valor do gatilho e torna a regra de decisão mais conservadora (Dixit e Pindyck, 1994, p.201).

3.1.5. Reversão à média com saltos

Resultante da combinação de um MRM com um processo de Poisson, a reversão à média com saltos pode ser entendido como um caso particular de um Processo de Poisson-Gaussiano (26) onde $a(x,t) = \eta.(x - \bar{x})$. Por exemplo, considere o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck com saltos, então:

$$dx = \eta.x.(x - \bar{x}).dt + \sigma.x.dz + x.dq \Rightarrow \quad dx / x = \eta.(x - \bar{x}).dt + \sigma.dz + dq \quad (27)$$

Onde $dz\ e\ dq$ usualmente são considerados independentes. Note que, de (25), $E(dq) = u.\lambda.dt$, então ao subtrair-se $u.\lambda$ da tendência em (27), obtém-se um MRM com saltos compensado, cuja tendência não é mais afetada pelo Processo de Poisson:

$$dx / x = [\eta.(x - \bar{x}) - u.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Esse MRM com Saltos de Poisson Compensados, onde $-u.\lambda$ é o termo de compensação, tem vantagens práticas sendo algumas vezes usados na literatura, como por Dias e Rocha (1999) para a simulação do processo estocástico do preço do petróleo.

A reversão à média com saltos é um modelo particularmente importante para simular os preços de algumas *commodities* e taxa de juros. Esse processo combina o conceito de equilíbrio de preços de mercado para *commodities* (reversão à média) com o conceito de oscilação de preços apresentado por Merton (1976, apud Dias e Rocha *op. cit.*), segundo o qual a chegada de informações anormais gera choques estocásticos discretos, modelados pelo processo de Poisson.

Em seu artigo, Dias e Rocha (op.cit) adotam o seguinte MRM com Saltos de Poisson Compensados para o preço do petróleo (P):

$$dP / P = [\eta.(\overline{P} - P) - K.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Onde $K = E(\phi - 1)$ e dq é definido de forma similar a (24):

$$dq = \begin{cases} \phi - 1 & com\ probabilidade \quad \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade \quad 1 - \lambda.dt \end{cases}$$

Os saltos apresentam de tamanho ϕ variável com probabilidade de ocorrência $\lambda.dt$ com distribuição de Poisson. Os saltos ϕ tem uma distribuição de probabilidade especial com média $K + 1$ representada por duas normais truncadas, uma para saltos para cima (*jump up*) e outra com saltos para baixo (*jump down*) – Figura 9:

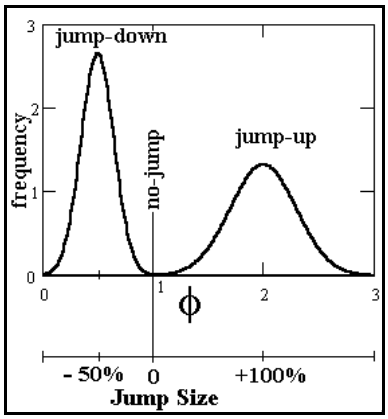

Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999, p.5).

Em caso de salto, há a probabilidade de 50% deste ser para cima e 50% para baixo. No caso de ser para cima, os preços são esperados dobrar e em caso de ser para baixo os preços são esperados reduzir pela metade.

As duas principais desvantagens do processo de reversão com saltos é que, não se pode construir um *portfolio* sem risco quando se considera saltos e a dificuldade em se estimar os vários parâmetros necessários. O primeiro problema conceitualmente é o mais importante, pois não se pode construir um *hedge* perfeito utilizado no apreçamento de opções por *ativos contingentes*, por exemplo**.** Mas existem alternativas para contornar esta situação, como também para superar as dificuldades encontradas nas estimativas dos parâmetros (Dias, p.3-4, www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm).

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras

Processos estocásticos com limites superiores ou inferiores impostos são ditos com barreiras. Estes processos são particularmente importantes para opções financeiras com barreiras (ver Hull, 2003, p.439-441), mas também encontram aplicação em OR.

Sob o ponto de vista econômico, as barreiras podem ser utilizadas para simular mecanismos de equilíbrio de mercado (entrada e saída de competidores), limites regulatórios ou mesmo a atuação de cartéis. Há três tipos de barreiras: refletoras, absorventes e elásticas. As barreiras refletoras são aquelas que, quando atingidas, devolvem a variável para o mesmo nível ou valor do momento anterior ao toque. As barreiras absorventes, ao contrário, quando atingidas absorvem a variável estocástica eliminando sua aleatoriedade. No MGB ($dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$), o limite $x = 0$ funciona como uma barreira absorvente, pois, se atingido em um tempo t', então $dx = 0$ e $x = 0$ para todo $t > t'$. As curvas de gatilho de OR também funcionam como barreiras absorventes, pois uma vez atingidas pela variável aleatória, levam ao exercício da opção. As barreiras elásticas por sua vez, são aquelas que se apresentam parcialmente absorventes ou parcialmente elásticas.

Dixit e Pindick (1994, p. 83-84) demonstram que um MAB com barreiras refletoras (superior e inferior) converge no longo prazo com densidade de

probabilidade exponencial, cujo valor esperado depende do sinal da tendência. Este resultado não se altera se a barreira inferior é relaxada quando a tendência é positiva ou se a barreira superior é relaxada quando a tendência é negativa. Bjerksund e Stensland (1993) propõem uma aproximação analítica para a opção de compra americana utilizando uma barreira absorvente superior, as qual é uma aproximação da curva de gatilho (ver Seção 3.5.1).

3.2. Lema de Ito

Na Seção 3.1.1, ao introduzir o Processo de Wiener, discutiu-se que devido à propriedade de Markov e de $dt \to 0$, o caminho da variável dz é continuo em relação ao tempo, mas não diferenciável no sentido convencional:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Todos os processos estocásticos apresentado até agora que apresentam o incremento de Wiener herdam essa característica. Assim, determinar o processo estocástico de uma função que dependa de um outro processo não diferenciável no sentido convencional demanda o uso do cálculo estocástico.

O Lema de Ito permite diferenciar ou integrar funções desse tipo, sendo mais conhecido na forma que se aplica a um processo estocástico de Ito. Pode ser entendido a partir da expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f^{'}(a).dx + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^{n}(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t. Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:então dF será dado por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e } \quad dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32); \; E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33) \text{ e } V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \; \varepsilon^2.dt \; = dz^2 \; \sim \; N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

O Apêndice 3 apresenta a demonstração de todos os resultados mostrados nesta Seção, da equação (28) à (35). Modificações são necessárias para outros processos estocásticos. O Apêndice 4 mostra a versão que considera um processo de Poisson.

Verifica-se agora verificar o resultado (20). Seja x o preço de um ativo que segue um MGB: $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Para um período de tempo dt suficientemente pequeno, é razoável que a variação percentual do preço do ativo

(taxa de retorno dx/x) independa do seu nível de preço (Hull, 2003, p.223), seguindo portanto um MAB:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt + \sigma.dz \qquad \Rightarrow \frac{dx}{x} \sim N[\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde α e σ são a tendência e volatilidade da taxa de retorno. Para determinar o processo estocástico do logaritmo do preço toma-se o Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz$$

Sendo $F(x,t) = \ln(x)$ e $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Então $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$:

$$d\ln x = [\alpha.x.\frac{1}{x} + 0 - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}.\sigma^2.x^2].dt + \frac{1}{x}.\sigma.x.dz] \Rightarrow$$

$$d\ln x = [\alpha - \frac{1}{2}.\sigma^2].dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \Rightarrow d\ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2/2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Ou seja, embora $d\ln x$ e dx/x sigam distribuições normais com a mesma volatilidade σ, apresentam tendências diferentes tais que $E(dx/x) > E(d\ln x)$. Esse resultado é decorrente da desigualdade de Jensen[14], dada pela presença da segunda derivada parcial de *F(x)* no Lema de Ito. Como $\ln x$ é côncava, então $\partial^2 F/\partial x^2 < 0$, portanto $[\alpha - \sigma^2/2].dt \leq \alpha.dt$.

Os diferentes processos estocásticos apresentados e o Lema de Ito são instrumentos adequados para a representação estocástica do ativo subjacente e da função de valor de uma opção. Mas é preciso detalhar um pouco melhor o que é o ativo subjacente transacionado no mercado de uma opção real e discutir como modelar seu processo estocástico.

---

[14] Se F(x) é uma função convexa então E[F(x)] ≥ F{E(x)], a expectativa existe e é finita. Demonstração: Seja a expansão de Taylor (28) em torno de x e na forma discreta, onde *f(x)* é convexa: *f"(x)>0,* então:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}.(\Delta x)^2 > f'(x).\Delta x \Rightarrow E[f(x+\Delta x)] > E[f(x) + f'(x).\Delta x] \Rightarrow$$

$$E[f(x+\Delta x)] > f(x) + f'(x).E[\Delta x], \text{ fazendo } \Delta x \to 0 \text{ obtém-se: } E[f(x)] > f(x).$$

3.3. Modelando o ativo subjacente

Avaliar opções reais com várias fontes de incerteza pode ser uma tarefa complicada ou impraticável. Mesmo com duas fontes, pode ser difícil resolver solucionar uma modelagem que considere a correlação entre os processos estocásticos envolvidos. Por isso, seria muito proveitoso algum tipo de simplificação que torne possível reduzir várias fontes de incerteza em uma única.

Para evitar este problema, Copeland e Antikarov (2001, p. 219) assumem duas premissas: A primeira, denominada *Marketed Asset Disclaimer,* consiste em utilizar o valor (V) do projeto implantado como se fosse um ativo financeiro transacionado no mercado; A segunda, consiste em utilizar o teorema de que qualquer preço adequadamente antecipado flutua randomicamente (Samuelson, 1965). Isso significa que, independente do padrão de fluxo de caixa que se espere de um projeto, as mudanças em seu VPL irão seguir um passeio aleatório (*random walk*). Esse teorema permite que qualquer conjunto de variáveis com incerteza possa, via Simulação de Monte Carlo, produzir uma estimativa de V estocástico, cujo desvio padrão é então o de um passeio aleatório. Assim, Copeland e Antikarov (op.cit.) utilizam este teorema para dizer que V pode seguir um MGB, aproximadamente.

3.3.1. *Marketed Asset Disclaimer* (MAD)

Na Seção 2.6 se discutiu diferentes abordagens (e sua equivalência) para se calcular o valor de uma OR com o instrumental desenvolvido para opções financeiras. Isso foi possível através da montagem de diferentes *portfolios* que incluíam um ativo subjacente ou um ativo gêmeo do projeto, supostamente transacionados no mercado financeiro. Mas que ativo financeiro teria um fluxo de caixa perfeitamente correlacionado com o de um projeto em todos os estados da natureza?

A resposta é simples: Nenhum, pois isso é praticamente impossível. Inicialmente, as aplicações de OR usaram os preços de *commodities* mundiais como aproximações para o ativo subjacente. Mas assumir que a volatilidade do projeto subjacente sem flexibilidade é a mesma de uma *commodity* é uma premissa um tanto arbitrária. Por outro lado, o que poderia ser mais bem correlacionado com um projeto do que o próprio projeto? Então parece razoável a premissa de que o VPL

tradicional (sem flexibilidades) de um projeto é o melhor estimador não viesado do valor de mercado deste mesmo projeto, caso ele fosse transacionado. Essa premissa é denominada de *Marketed Asset Disclaimer* (MAD) por Copeland e Antikarov (2001, p.94-95) e é bastante utilizada na valoração de OR.

Estes autores destacam que o MAD não faz nenhuma premissa mais forte do que aquelas utilizadas na estimativa do VPL. A premissa mais importante adotada ao utilizar o VPL, tão óbvia que por isso talvez passe despercebida ao decisor, é admitir que a distribuição de retorno do VPL é bem correlacionada com o projeto o suficiente para ser utilizada[15]. Mas isso é o melhor que se pode fazer, e também por isso é razoável assumir que o valor presente de um projeto implantado seria o valor que este assumiria no mercado caso fosse transacionado (Copeland e Antikarov, op. cit.). Portanto, um decisor que utiliza o VPL para valorar seus projetos não faz nenhuma premissa adicional ao utilizar o mesmo VPL como ativo subjacente.

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente

Samuelson (1965, apud Copeland e Antikarov, 2001, p.222-227) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado. Se os investidores têm informação completa sobre o fluxo de caixa e toda a informação já está embutida no preço corrente da ação, então as expectativas serão atingidas e os investidores irão receber exatamente o seu custo de capital, independente do padrão de fluxo de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório[16] (Copeland e Antikarov, 2001,

[15] Note que a rigor, saber o VPL do projeto pressupõe conhecer a distribuição de probabilidade real dos estados da natureza e a taxa de desconto do projeto sem flexibilidade a cada instante *t*.

[16] Conforme citado na Seção 3.1.1, um Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, ver um exemplo em Dixit e Pindick (1994**,** p.68-70).

p.222). Então riscos (de *timing,* políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente. Porém, em alguns casos, pode ser útil ter uma determinada incerteza isolada das demais, individualizando alguma decisão específica, como por exemplo, aquelas relacionadas às incertezas técnicas[17] (Seção 2.5).

Samuelson (op. cit) prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Seja x_t uma variável aleatória de preço tal que seu preço *spot* na data de hoje s_t seja constante: $E(s_0) = x_0$ e $\sigma^2(s_0) = 0$. Suponha que o preço *spot* siga um processo dado por: $s_{t+1} = a.s_t + \sigma.\varepsilon_t$ onde $\varepsilon_t \sim N[0,1]$. Então, o valor esperado será $E(s_{t+1}) = a.s_t$ enquanto que a variância será:

$$V(s_{t+1}) = E(s_{t+1}^2) - E^2(s_{t+1}) = E[a^2.s_t^2 + 2.a.s_t.\sigma.\varepsilon_t + \sigma^2.\varepsilon_t^2] - a^2.s_t^2 = \sigma^2.E(\varepsilon_t^2)$$

Usando o resultado (32): $E(\varepsilon_t^2) = 1$, então: $V(s_{t+1}) = \sigma^2$.

Nos períodos seguintes o valor esperado será:

$$s_{t+2} = a.s_{t+1} + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a.(a.s_t + \sigma.\varepsilon_t) + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \Rightarrow$$
$$E(s_{t+2}) = E(a^2.s_t) + E[\sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})] \Rightarrow \; E(s_{t+2}) = a^2.E(s_t)$$

Observando três períodos à frente:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow E(s_{t+3}) = a^3.E(s_t).$$

E a variância será:

---

[17] Se a incerteza econômica sobre o preço de um ativo segue um movimento Browniano, sua volatilidade cresce com o tempo (ver Seção 4.1.1). O contrário ocorre com a incerteza técnica, maior no início de um projeto, diminui à medida que a firma investe em informação. Uma OR com essa característica é denominada de opção de aprendizagem (*learning option*), um tipo especial de opção composta "arco-íris" (*rainbow compound option*).

$$V(s_{t+2}) = E[s_{t+2} - E(s_{t+2})]^2 = E\{a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) - E[a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})]\}^2.$$

Com o resultado (32), chega-se a: $V(s_{t+2}) = \sigma^2.(a^2 + 1)$.

De forma similar verifica-se que $V(s_{t+3}) = \sigma^2.(a^4 + a^2 + 1)$, e assim por diante. O último termo entre parênteses forma uma série cuja convergência depende de a. Se $a > 1$ a variância diverge aceleradamente; Se $a = 1$, a variância passa a ser $V(s_{t+T}) = \sigma^2.T$ e tem-se um processo de Wiener padrão: $\varepsilon_t \sim N[0, \sigma.\sqrt{t}] = \sigma.\sqrt{t}.N[0,1] = \sigma.dz$; Por fim, se $a < 1$, a variância é convergente: $V(s_{t+T}) = \sigma^2 / (1 - a^2)$ - Copeland e Antikarov (*op. cit.*, p.225).

O preço futuro de $T = 3$ observado em t é o valor esperado em t do preço *spot* para $T = 3$, dado por:

$$F_3^t = E_t(s_{t+3}) = a^3.E_t(s_t) \Rightarrow F_3^t = a^3.s_t$$

No momento seguinte $t+1$: $F_3^{t+1} = E_{t+1}(s_{t+3})$, então:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow$$
$$E_{t+1}(s_{t+3}) = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + 0 + 0 \Rightarrow F_3^{t+1} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1}$$

Note que o termo de aleatório em $t+1$ agora é um valor observável de forma que $E_{t+1}(\varepsilon_{t+1})$ é substituído por ε_{t+1}. Mas o valor esperado da mudança no valor esperado do preço futuro em t é igual a zero:

$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = E_t[a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} - a^3.s_t] = \sigma.a^2.E_t[\varepsilon_{t+1}] = \sigma.a^2.0 \Rightarrow$$
$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = 0$$

Então mesmo que o preço *spot* mude ao longo do tempo, o preço esperado de um contrato futuro não muda. Isto resulta do fato destes contratos serem escritos para refletir a expectativa de um preço em um ponto no tempo, e isso não depende do caminho que o preço segue até lá. Assim, como a informação sobre o preço *spot* na maturidade do contrato é randômico e não viezado ($\varepsilon_t \sim N[0,1]$), o preço de um futuro é um passeio aleatório com tendência zero**.**

Copeland e Antikarov (2001, p.233-236) estudam três indústrias entre 1991 e 1999 em busca de evidências empíricas do teorema de Samuelson. Testam a ciclicidade de medidas de retorno e encontram resultados consistentes com o teorema. Entretanto, referem-se a outros estudos acadêmicos mais sofisticados que verificam dependência temporal, mas argumentam que poucos destes são significantes após dedução de custos de transação e ajustes ao risco. Com isso, se posicionam a favor do uso do teorema de Samuelson com propósitos práticos.

Adicionalmente ao teorema de Samuelson, em favor do MGB há o fato deste ser matematicamente mais simples do que outros processos estocásticos, além de ser estatisticamente equivalente a modelos mais sofisticados como o de reversão à média em intervalos com até 30 ou 40 anos (ver Seção 3.1.2). Por isso o MGB é o modelo estocástico mais empregado para modelar a incerteza não só em projetos, como em toda a literatura de economia e finanças. (Dias, 1996, p.106).

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos

Na Seção 2.7 demonstrou-se para um exemplo simples discreto a equivalência entre diferentes técnicas como ativos contingentes (*contingent claims*) e programação dinâmica. Conforme comentado, essa equivalência é uma propriedade geral válida inclusive com variáveis contínuas, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (1994, p.108-124). Por isso, a partir deste ponto da dissertação, faz-se a opção pela valoração por ativos contingentes (*contingent claims*) pelo seu significado econômico e o uso do argumento de não arbitragem, conceitos consagrados em finanças[18].

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB

A oportunidade gerada por uma OR é um ativo que tem valor. Se esta oportunidade for um ativo transacionado no mercado, seu preço será conhecido.

[18] Existem várias outras alternativas para resolver problemas de otimização sob incerteza. Dois exemplos são o método integral e o método evolucionário. O método integral é particularmente útil para opções perpétuas. Soma integrais estocásticas para apreçar OR em que os limites de integração são os tempos de parada ótima, quando o processo estocástico toca a curva de gatilho (ver exemplo Dixit e Pindick, 1994, Cap.9). O método evolucionário utiliza algoritmos genéticos para evoluir soluções a partir de uma estimativa inicial da curva de gatilho até se aproximar do ótimo, podendo ser combinada com SMC. (ver Dias, 2005, p.450-457 - opções evolucionárias).

Mas mesmo que não seja, seu valor pode ser calculado através de um *portfolio* de ativos transacionados que replique perfeitamente o retorno do projeto em qualquer momento futuro e em qualquer estado da natureza. Então o valor do projeto será o valor deste *portfolio*, caso contrário há uma oportunidade de arbitragem. Está implícita nesta premissa que, a firma gerencia a OR da forma mais eficiente possível, pois, de outra forma, não se elimina a oportunidade de fazer arbitragem.

Seja V o valor de um projeto segue um MGB, então:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (36)^{19}$$

O uso de ativos contingentes (*contingent claims*) requer a premissa de que as mudanças estocásticas em V sejam modeladas por um *portfolio* ou ativo gêmeo transacionado na economia. Esse *portfolio* pode ser composto por ativos financeiros como ações, por *commodities* (transacionadas no mercado à vista e futuro) ou mesmo artigos manufaturados**.**

Seja x o ativo ou *portfolio* perfeitamente correlacionado com V (a correlação de x e V com o *portfolio* de mercado são iguais: $\rho_{xm} = \rho_{vm}$), então seu processo estocástico será dado por:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$$

Note que a volatilidade σ e a tendência α de x e V são exatamente as mesmas, afinal o *portfolio* e o projeto são idênticos por construção. Seja então μ a taxa esperada de retorno do investidor que detém este ativo ou *portfolio* gêmeo. Então μ também é a taxa ajustada ao risco exigida pelo investidor que detém a oportunidade de investimento V. De acordo com o CAPM μ é dado por: $\mu = r_f + \phi.\rho_{xm}.\sigma$ onde $\phi = (r_m - r_f)/\sigma_m$ é o *market price of risk* e $\phi.\rho_{xm}.\sigma$ é o prêmio de risco π, então: $\mu = r_f + \pi$. Mas o retorno do projeto também é dado pela

---

[19] Dixit e Pindick (1994, p136-137) alertam que a equação (36) é uma abstração da realidade para a maioria dos projetos. Seja por exemplo por não contemplar a possibilidade de desativar ou abandonar um projeto, seja por não permitir valores negativos para *V* (o que ocorre na realidade), ou mesmo por não ser o MGB o processo teoricamente mais adequado para modelar *V*. Mas ainda sim o MGB é útil numa série de situações onde a equação (36) reflita a expectativa da firma sobre o valor do projeto, ou pelo menos do preço do bem produzido. Adicionalmente há de se considerar que o MGB estatisticamente não pôde ser rejeitado em favor do MRM para períodos de 30 a 40 anos e a sua simplicidade analítica, fazendo-o um sucesso na literatura (ver Seção 3.1.2).

soma da taxa de ganho de capital α com a taxa de dividendos δ: $\mu = \alpha + \delta$. Igualando as duas equações obtém-se:

$$\mu = \alpha + \delta = r_f + \pi \Rightarrow \qquad \alpha - \pi = r_f - \delta \text{ [20]} \quad (37)$$

A taxa de dividendos δ desempenha um importante papel sobre o exercício de uma opção. Para uma opção de compra financeira, se $\delta = 0$, a opção nunca é exercida antes da maturidade[21]. Isso se deve a dois motivos: Como não há custo em manter a opção de compra ($\delta = 0$), manter a opção viva no lugar do ativo subjacente funciona (até a expiração) como um seguro contra quedas do preço do ativo subjacente abaixo do preço de exercício e; Adiar o exercício permite capitalizar o investimento (preço de exercício) à taxa livre de risco até a expiração. Para a opção de investimento esta propriedade se repete[22]. Se $\delta > 0$, a taxa de retorno do projeto α (equação 43x) é menor do que a taxa de retorno μ (equação 44x) exigida pelo investidor, havendo um custo em manter a opção viva. Assim δ é um custo de oportunidade em adiar o início de um projeto que deve ser descontado do benefício da espera dado pela opção. Por outro lado, se δ é suficientemente grande, o valor da flexibilidade de adiar a decisão de investimento torna-se muito pequeno e a opção real torna-se *deep in the money*.

Para calcular o valor da opção real F considere um *portfolio* Φ dado por uma posição longa na opção e uma posição curta em n unidades do ativo gêmeo ou do projeto V, sob a hipótese do MAD (Seção 3.3.1): $\Phi = F - n.V$.

Seja n escolhido de tal forma que o *portfolio* seja livre de risco. Então num intervalo de tempo infinitesimal dt o retorno exigido pelo investidor será a taxa livre de risco: $r_f.\Phi.dt = r_f.(F - n.V).dt$.

---

[20] Ver expressão equivalente em Dixit e Pindick, 1994, p.118, equações 22 e 23.

[21] Hull (2003, p.175-176) oferece uma demonstração desta propriedade com exemplos numéricos, a qual decorre basicamente de argumentos de não arbitragem.

[22] A taxa de dividendo δ também pode ser interpretada de outras formas. Por exemplo, pode refletir: o custo para a firma da entrada de outros competidores no mercado; o FCL do projeto ou; a *convenience yeld* quando o ativo gêmeo é uma *commodity* – ver Seção 3.4.2. O valor agregado ou médio da *convenience yield* também pode ser medida no mercado *spot* e futuro de uma *commodity*.

O retorno do *portfolio* também é dado pela soma do retorno dos ativos da carteira. O retorno da opção (que não paga dividendos) é dado pelo ganho de capital dF. O retorno do projeto é dado pela soma do ganho de capital com os dividendos ($dV + \delta.V.dt$). Então o retorno da carteira Φ será: $dF - n.(dV + \delta.V.dt)$. Igualando as duas expressões:

$$dF - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \quad (38)$$

Substituindo x pelo ativo subjacente V na equação (31) do Lema de Ito, obtém-se:

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.dV^2 \quad (31)$$

Mas também se viu em (29) que $dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt$ e em (32) que $E(\varepsilon^2) = 1$, então $dx^2 = \sigma^2.x^2.dt$ ou de forma mais genérica:

$$dx^2 = b^2(x,t).dt \quad (39)$$

Considerando que $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ (36), então $dV^2 = \sigma^2.V^2.dt$. Substituindo dV^2 na equação (31) anterior e esta em (38):

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt \Rightarrow$$

$$F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \Rightarrow$$

$$(F_v - n).dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0$$

Como o *portfolio* Φ é sem risco e o primeiro termo da expressão acima com dV tem risco ($dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$), este deve ser nulo, então:

$$(F_v - n).dV = 0 \Rightarrow F_v - n = 0 \Rightarrow n = F_v = \partial F / \partial V$$

Note que este resultado é o mesmo *delta hedging* obtido na Seção 2.7 na forma discreta - equação (11). Retornando este resultado à última equação diferencial, dividindo por dt e rearranjando os termos:

$$0.dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

A equação (40) é a conhecida equação diferencial parcial (EDP) de Black & Scholes & Merton (B&S&M)[23] com dividendos contínuos. Note que na sua dedução, embora tenha sido citada a opção de investimento como exemplo, não foi assumida nenhuma premissa sobre o tipo da opção envolvida, se *call* ou *put*, se americana ou européia. Portanto, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ.

A valoração por ativos contingentes requer a existência de um conjunto de ativos transacionados no mercado diversificados o suficiente, de tal forma que seja possível montar um *portfolio* que não só replique o risco do projeto como também seja perfeitamente correlacionado com este. Esta é uma premissa exigente que não é feita na valoração com programação dinâmica, que simplesmente considera a valoração de risco subjetiva do tomador de decisão (Dixit e Pindick, 1994, p.121).

Apesar desta diferença significativa, a equação diferencial obtida por programação dinâmica correspondente à EDP (40) é dada por:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + \alpha.F_v.V - \mu.F = -F_t$$ [24]

As diferenças entre a EDP da programação dinâmica em relação à EDP de contingentes são duas[25]: A taxa de desconto ajustada o risco μ (exógena) no lugar da taxa livre de risco (decorrente do equilíbrio no mercado de capitais); A tendência α do mundo real no lugar da tendência neutra ao risco $(r_f - \delta)$. Em outras

[23] Originalmente a equação de Black & Scholes não previa dividendos (δ=0), tendo este sido incorporado por Merton (ver, por exemplo, Hull, 2003, p.243).

[24] Ver Dixit e Pindick, 1994, p.109. Considerando π(x,t)=0 , a EDP do valor da firma sem fluxo de caixa imediato é idêntica a de uma oportunidade de investimento.

[25] Ver Seção 3.5.5 para analogia com a forma discreta.

palavras, pode-se avaliar o projeto descontando-o à taxa livre de risco imaginando que este segue um MGB com *drift* $(r_f - \delta)$ neutro ao risco.

Note que, pela equação (45), no mundo real $\alpha - \pi = r_f - \delta$. Mas no mundo neutro ao risco (e também com um *portfolio* Φ livre de risco), o retorno exigido pelo investidor é a taxa livre de risco. Desta forma o processo estocástico do ativo subjacente assume uma nova tendência $\alpha' = r_f - \delta = \alpha - \pi$, como ocorre na equação (40). Da equação (36), o MGB neutro ao risco será dado por:

$$dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz \Rightarrow \qquad dV = (r - \delta).V.dt + \sigma.V.dz \quad (41)$$

Como dito, a equação (40) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ de um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB com dividendos contínuos δ. O que permitirá adaptar a equação (40) para uma *call* ou *put*, americana ou européia, finita ou perpétua e o valor do seu *payoff* são as condições de contorno, necessárias para sua solução.

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica

Nesta Seção descreve-se o modelo apresentado por Dixit e Pindick (1994, p.147-150) para o problema da firma que precisa decidir o momento ótimo para exercer a opção de investir em um projeto cujo prazo de expiração é infinito (*call* americana perpétua).

A oportunidade de investimento possui duas características fundamentais (ver Seção 2.1): O investimento é pelo menos parcialmente irreversível, ou seja, é um custo afundado (*sunk cost*) que não pode ser recuperado; A decisão de investimento pode ser postergada de forma que a firma tem a flexibilidade de esperar e verificar como se comporta a(s) fonte(s) de incerteza(s) de um projeto antes de comprometer recursos irreversivelmente. Considere o custo do investimento I conhecido e fixo, e que o processo estocástico do valor do projeto seja dado pela equação (36): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$. Uma das implicações do MGB é que uma vez que o valor do projeto valha zero, dV e V sempre serão zero (barreira absorvente). Em conseqüência a opção de investir perderá seu valor:

$$V = 0 \Rightarrow dV = \alpha.0.dt + \sigma.0.dz = 0 \Rightarrow V + dV = 0 \Leftrightarrow F(V = 0) = 0 \quad (42)$$

Se o tempo de expiração é infinito e os termos α, σ e V não dependerem explicitamente do tempo, então o valor da opção também não dependerá (Dixit e Pindick, 1994, p.107). Isso significa que $\partial F / \partial t = F_t = 0$, $F_v = F'$ e $F_{vv} = F''$, e a EDP (40) torna-se a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = 0 \quad (43)$$

Como visto na Seção 2.4, para uma opção de investimento a cada instante t há um valor V^* abaixo do qual continuar esperando é a decisão ótima e vice-versa. Com isso é possível definir uma curva de $V = V^*(t)$ - curva de gatilho – a partir da qual a decisão ótima é investir. Nesta curva a opção de investir vale exatamente o VPL do projeto:

$$F^*(V^*(t), t) = V^*(t) - I \quad (44)$$

Essa condição é denominada de *value matching condition* e a curva definida por $V^*(t)$ é denominada de "fronteira" livre (*free boundary).*

A *value matching condition* é necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. A segunda condição necessária, denominada de contato alto ou de contato suave (*smooth pasting condition*), é que na "fronteira" livre o valor da opção e do VPL devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^*:

$$F_v(V^*(t), t) = (V^*(t) - I)_v \Rightarrow F_v(V^*(t), t) = 1 \quad (45)$$

Essa condição não é facilmente percebida, mas pode ser verificada graficamente com certa facilidade, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (2004, p.130-131).

Então o valor de uma opção de investimento americana perpétua é dado pela equação (43) sujeita às condições de contorno dadas pelas equações (42), (44) e (45):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).n.V - r_f.F = 0 \qquad (43)$$

$$F(V=0) = 0 \qquad (42)$$

$$F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I \qquad (44)$$

$$F_v(V^*(t),t) = 1 \qquad (45)$$

A EDO (43) possui solução analítica definida dada por (ver Brandão, Cap.5, p.8-14):

$F(V) = A.V^{\beta_1}$ (46) onde $A = (V^* - I)/(V^*)^{\beta 1}$ (47);

$\beta_1 = 1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2]^2 + 2.r_f/\sigma^2}$ (48) e $V^* = \beta_1.I/(\beta_1 - 1)$ (49)

Note que o valor do gatilho dado por (49) não depende de t pois a opção é perpétua.

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração

Ao contrário da opção de investimento perpétua, o tempo de expiração agora é finito e, embora os termos α e σ possam ser constantes, o valor do projeto e o valor da opção de investir são variáveis com o tempo. Com isso $F_t \neq 0$ e a EDO (40) permanece inalterada. As condições de contorno (42), (44) e (45) continuam válidas, havendo uma quarta condição adicional: Na expiração da OR de investir, vale a regra do VPL tradicional:

Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

A EDP (40) para uma opção americana de compra com $\delta > 0$[26] não apresenta solução analítica. Dixit e Pindick (1994, p.401), entretanto, chamam atenção para o fato de que o valor do gatilho de uma OR é pouco sensível ao tempo de expiração quando este é superior a dois anos. Neste tipo de situação, sugerem que a solução

[26] Opções americanas de compra sem dividendos nunca são exercidas antecipadamente (ver Seção 4.5.1 e nota de rodapé 21). Nesta situação equiparam-se a opções européias e a EDP (40) toma as soluções originalmente apresentadas por Blak e Sholes – ver, por exemplo, Hulll, 2003, p. 246.

analítica para uma opção de compra americana perpétua (equações 54 e 55) pode ser uma aproximação razoável.

Entretanto, existem várias alternativas mais precisas para o problema de valoração de uma OR, aqui genericamente denominadas de soluções não analíticas.

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB

A EDP (49) de Black & Sholes & Merton (B&S&M) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ. Mas soluções analíticas nem sempre existem e, na ausência destas, existem alternativas com métodos numéricos e as aproximações analíticas. Na prática, a solução deve ser escolhida com base nas características do derivativo e na precisão desejada.

Hull (2003, p.392-427) e Trigeorgis (1996, p.305-339) destacam e discutem (os mesmos) três métodos numéricos para aplicações em opções financeiras e reais: Simulação de Monte Carlo (SMC), árvores (binomiais, trinomiais, etc. – métodos gradeados) e diferenças finitas.

A SMC é relativamente simples e flexível, além de permitir o uso da avaliação neutra ao risco. Por funcionar do início para o fim da vida da opção (*foward*), adapta-se bem para opções européias, para derivativos com várias variáveis de estado e com complexidade no cálculo dos *payoffs*. A solução com árvores, extensivamente adotada no livro de Copeland e Antikarov (2001), simula os processos estocásticos subjacentes. Geralmente são mais simples, intuitivas e flexíveis para lidar com diferentes processos estocásticos como difusão, saltos ou reversão à média, sempre a partir dos preços do presente. Mas a valoração sempre é feita a partir da expiração para o início da vida da opção, a exemplo do que ocorre no cálculo por diferenças finitas. Ambos os métodos lidam bem tanto com opções do tipo americanas como européias, mas ficam limitados quando os *payoffs* dependem de alguma forma do histórico passado (por exemplo, opções do tipo *lookback*[27]) ou do valor corrente. Além disso, tornam-se progressivamente mais complicadas à medida que aumenta o

[27] *Look back options* são opções cujo *payoff* depende do valor máximo ou mínimo atingido pelo ativo subjacente durante a vida da opção. Ver Hull (2003, p.441-442).

número de variáveis envolvidas. Os métodos de diferenças finitas (explícito e implícito) resolvem a equação diferencial convertendo-a em uma equação de diferenças. O método explícito é muito parecido com uma árvore trinomial enquanto que o implícito, embora mais complicado, não apresenta os problemas de convergência[28] do primeiro.

As aproximações analíticas têm a vantagem de tornar os cálculos instantâneos e permitir uma interpretação clara da relação entre as variáveis envolvidas. Por esses motivos essa é a técnica adotada nesta dissertação. Consiste em adaptar o problema de apreçamento de derivativos e obter uma expressão analítica que se aproxima satisfatoriamente da solução verdadeira da EDP (49) e suas condições de contorno. Existem várias aproximações analíticas para opções americanas. A mais conhecida delas (Hull, 2003, p.427) é a aproximação quadrática de MacMillan (1986), estendida por Barone-Adesi e Whaley (1987), que pode ser utilizada para *calls* e *puts* sobre diversos ativos financeiros e OR. Esta aproximação se baseia na premissa de que o preço de uma opção americana é dado pelo preço de uma européia adicionado de um prêmio pela possibilidade do exercício antecipado. Como essas duas opções satisfazem a mesma equação diferencial (49), este prêmio ou diferença também deve satisfazê-la. Hull (2003, p. 433-434) apresenta resumidamente esta aproximação, que pode também ser vista com um pouco mais de detalhe em Dias (1996, p.217-220).

Broadie e Detemple (1996) desenvolvem limites inferiores e superiores para o preço de opções americanas e apresentam duas aproximações (LBA e LUBA) para o valor destas com base nestes limites. O *Lower Bound Approximationa* (LBA) apresenta Raiz do erro Quadrático Médio (RQM – ver adiante) de 0,1% para um range grande de parâmetros, considerando uma amostra de 2271 opções. O *Lower and Upper Bound Approximation* (LUBA) apresenta RQM de 0,02%. Esses erros foram medidos em relação à estimativa do método binomial com 15000 nós, assumido como o valor verdadeiro da opção por sua convergência.

O RQM é uma medida de erro definida como:

[28] Uma solução é estável se é finita e é convergente se tende para as condições de contorno adequadamente. Uma solução estável e convergente é dita consistente se ela é realmente uma aproximação do problema original (Trigeorgis, 1996, op cit).

$$RQM = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \quad (51) \quad \text{com} \quad e_i = \frac{C_i}{C} - 1$$

Onde e_i é o erro relativo *i*-ésimo valor estimado C_i da opção em relação ao seu valor "real" C e n é o número de estimativas. Para tornar o erro relativo significativo, os valores da opção C_i inferiores a 0,5 são desconsiderados.

Broadie e Detemple (op. cit.) também comparam a precisão e velocidade de cálculo de suas duas estimativas com diversos métodos conhecidos, inclusive o de Barone-Adesi e Whaley. Apesar de sistematicamente apresentarem-se mais rápidos que os demais, o LBA e o LUBA são relativamente complicados de implementar, o que segundo os autores, favoreceria binomiais com desempenho similar. A aproximação de Baroni-Adesi e Whaley apresentou um RQM de 0,6% para opções com maturidade inferior a um ano, e de cerca de 2% para maturidades superiores.

O erro crescente da aproximação de Barone-Adesi e Whaley desfavorece o seu uso para OR em que o tempo de expiração é de vários anos. Bjerksund e Stensland (1993) propuseram uma alternativa de aproximação analítica mais acurada para opções americanas (Haug, 1998). Baseia-se na imposição de uma estratégia de exercício factível, porém não ótima, através de um preço de exercício antecipado único e constante, aqui denominado de modelo de um período.

Bjerksund e Stensland (2002) apresentam uma generalização do seu modelo inicial dividindo o tempo até a maturidade em dois períodos, cada qual com um preço constante de exercício. O segundo período apresenta duração e preço de exercício menor do que o primeiro, refletindo a perda de valor da opção até sua expiração. Os autores comparam os seus modelos de um e dois períodos com o valor calculado por uma binomial com 3201 pontos, a qual é assumida como o valor verdadeiro da opção. Os resultados indicam que os dois modelos calculam valores muito próximos ou idênticos, entretanto o modelo de dois períodos apresenta uma estimativa mais acurada do valor verdadeiro de opções americanas.

Este teste numérico foi realizado com os mesmos parâmetros adotados no artigo de Barone-Adesi e Whaley (1987), o que permite comparar o desempenho das duas aproximações para várias opções de compra e de venda com expiração inferior a 6 meses. O resultado desta análise não favorece nenhuma das duas

aproximações, já que uma ou outra aproximação apresenta menor ou maior RQM a depender do valor verdadeiro da opção adotado: Diferenças finitas no artigo de Baroni-Adesi e Whaley ou binomial no de Bjerksund e Stensland. Os RQM observados variam entre 0,52% e 0,82% para opções de compra e entre 0,92% e 1,14% para opções de venda.

Bjerksund e Stensland (2002) também utilizam os mesmos parâmetros para opções com expiração de 3 anos (ver Tabela 401). Calculado o RQM para o modelo de um período (de menor precisão), se encontrou valores de 0,62% e 0,73% para *call e puts* respectivamente. Estes números são bem inferiores ao RQM de 2% reportados por Broadie e Detemple (op. cit.) em sua análise com a aproximação de Baroni-Adesi e Whaley para opções com expiração superior a um ano.

Esses resultados revelam que, para o conjunto de dados considerados, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período[29] apresentam uma performance superior em relação ao de Baroni-Adesi e Whaley ao não divergir o RQM com o aumento do prazo de expiração para 3 anos, o que está de acordo com os resultados obtidos por Haug (1998),

Adicionalmente, deve-se ter em mente que as aproximações de Bjerksund e Stensland representam limites inferiores (acurados) para o valor verdadeiro da opção americana, o que se por um lado tem a desvantagem de antecipar de forma insignificante o exercício ótimo, por outro tem a vantagem de revelar o sinal do erro da estimativa do valor da opção.

Embora a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período apresente performance melhor do que a de Baroni-Adesei e Whaley, também possui limitações. Testes de sensibilidade mostram que, quando a taxa de dividendos é menor ou igual à taxa livre de risco ($\delta \leq r_f$), o valor crítico e o valor da opção convergem para os valores da opção perpétua à medida que se aumenta o prazo de expiração. Entretanto, à medida que cresce a diferença entre a taxa de dividendos e a taxa livre de risco, há uma perda progressiva de precisão com o aumento do tempo de expiração da opção.

[29] Naturalmente o mesmo vale para o modelo de Bjerksund e Stensland com dois subperíodos, que é mais preciso do que o de um período.

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor "verdadeiro" estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%.

			Call Americana			Put Americana		
Parâmetros da opção		Preço Ativo Base	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = (B&S/ Binomial - 1	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = B&S/ Binomial – 1
K =	100	80	2,34	2,30	-1,71%	25,66	25,61	-0,19%
r_f =	0,08	90	4,75	4,71	-0,84%	20,08	20,04	-0,20%
σ =	0,2	100	8,49	8,44	-0,59%	15,50	15,47	-0,19%
T =	3	110	13,79	13,74	-0,36%	11,80	11,78	-0,17%
δ =	0,12	120	20,88	20,85	-0,14%	8,89	8,87	-0,22%
K =	100	80	3,98	3,95	-0,75%	22,21	22,12	-0,41%
r_f =	0,08	90	7,25	7,20	-0,69%	16,21	16,14	-0,43%
σ =	0,2	100	11,70	11,64	-0,51%	11,70	11,64	-0,51%
T =	3	110	17,31	17,24	-0,40%	8,37	8,31	-0,72%
δ =	0,8	120	24,01	23,93	-0,33%	5,93	5,89	-0,67%
K =	100	80	6,88	6,88	0,00%	20,35	20,32	-0,15%
r_f =	0,08	90	11,49	11,49	0,00%	13,50	13,43	-0,52%
σ =	0,4	100	17,21	17,21	0,00%	8,94	8,86	-0,89%
T =	3	110	23,84	23,84	0,00%	5,91	5,83	-1,35%
δ =	0,4	120	31,17	31,16	-0,03%	3,90	3,83	-1,79%
K =	100	80						
r_f =	0,08	90				11,70	11,67	-0,26%
σ =	0,2	100	Sem exercício antecipado			6,93	6,90	-0,43%
T =	3	110				4,16	4,12	-0,96%
δ =	0	120				2,51	2,48	-1,20%
- Média do erro relativo				-0,42%			-0,56%	
- Desvio Padrão do erro relativo				0,46%			0,47%	
- Raiz do erro Quadrático Médio (RQM)				0,62%			0,73%	

A precisão satisfatória da aproximação analítica de Bjerksund e Stensland para OR, a sua superioridade em relação à aproximação de Barone-Adesi e Whaley, somados à maior simplicidade analítica do modelo de um período (em relação ao modelo de dois períodos), são os motivos da opção por esta aproximação nesta dissertação.

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993)

Bjerksund e Stensland assumem o modelo de Black & Sholes & Merton com uma taxa livre de risco positiva, onde o preço do ativo subjacente V segue um MGB ($dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz$) em relação à medida equivalente de Martingale (mundo neutro ao risco - $\alpha' = r_f - \delta$). Considere I como o preço de exercício (investimento) e X o nível de preço (gatilho) antecipado (estratégia não ótima) em que o decisor opta por exercer a OR ($X > I$).

Dada esta estratégia factível e não ótima, o preço de uma opção americana de compra fica reduzido a dois componentes: (i) Uma opção de compra européia do tipo *up-and-out*[30] (para cima e para fora) com uma barreira de nocaute[31] (*knock-out barrier*) dada por X, *strike* I e maturidade T; (ii) Um *payoff* $X - I$ que é recebido se a opção é exercida antes da maturidade. Então, o valor aproximado da opção americana ($\bar{c}$) é dado por:

$$\bar{c}(V,I,T,r_f,\alpha,\sigma,X) = \nu(X).V^{\beta_1} - \nu(X).\varphi(V,T|\beta_1,X,X) + \varphi(V,T|1,X,X) - \varphi(V,T|\beta_1,I,X) - I.\varphi(V,T|0,X,X) + I.\varphi(V,T|0,I,X) \quad (52)$$

Onde os dois primeiros termos do lado direito da igualdade representam o *payoff* $X - I$ e os quatro últimos o valor da *call* européia *up-and-out*. Os termos $\nu(X), \beta_1$ e $\varphi(V,T|\gamma,H,X)$ são dados por:

$$\nu(X) = (X - I).X^{-\beta_1}$$

$$\beta_1 = (1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2) + \sqrt{((r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2.r_f/\sigma^2} \quad (48)$$

30 Uma call do tipo *up-and-out* (c_{uo}) é uma opção com barreira que deixa de existir quando o preço do ativo subjacente aumenta até um nível pré-estabelecido, superior ao preço inicial. Reciprocamente, a *call* do tipo *up-and-in* (c_{ui}) é aquela que passa a existir quando o preço pré-estabelecido do ativo subjacente é atingido. Note que $c = c_{uo+} c_{ui}$. (Ver Hull 2003, p.438-441).

31 Nível de preço que se atingido pelo ativo subjacente, implica no exercício imediato da opção, ou seja, no qual o decisor "mata" a OR.

$$\varphi(V,T|\gamma,H,X)=\exp(\lambda.T).\{N[\frac{-\ln(V/H)+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]-$$
$$(X/S)^{\kappa}.N[\frac{-\ln(X^2/(V.H))+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]$$

Note que as variáveis γ e H de acordo com a equação (52) podem assumir os seguintes valores: $\gamma \in \{\beta_1,0,1\}$ e $H \in \{X,I\}$. Os termos λ e κ são dados por:

$$\lambda=-r_f+\gamma.(r_f-\delta)+1/2.\gamma.(\gamma-1).\sigma^2$$ [32] e $$\kappa=2.(r_f-\delta)/\sigma^2+(2\gamma-1)$$

Com a estratégia não ótima de adotar um preço de exercício antecipado (gatilho) X, o valor obtido para a opção representa um limite inferior para o verdadeiro valor. As investigações numéricas apresentadas pelos autores (Bjerksund e Stensland, 2002, op. cit.) mostram que essa estimativa pode servir como uma aproximação acurada do verdadeiro valor (como se observa nas diversas tabelas comparativas apresentadas no artigo, tanto para *calls* como *puts*). Bjerksund e Stensland (2002, op. cit.) apresentam uma nova estimativa para o valor do gatilho antecipado X, ligeiramente modificada em relação ao trabalho de 1993:

$$X_t=B_0+(B_\infty-B_0).\{1-\exp[h(t)]\} \quad (53)$$

$$h(t)=-((r_f-\delta).t+2.\sigma\sqrt{t}).\frac{I^2}{(B_\infty-B_0).B_0} \quad \text{com:}$$

$$B_\infty=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}.I \text{ e } B_0=Máx\{I,\frac{r_f}{\delta}.I\} \quad (54)$$

Onde B_∞ representa o gatilho da opção de compra americana perpétua, equações (49) - Seção 3.4.2. A equação (53) tem papel destacado nesta dissertação, pois será com ela que serão construídas as curvas de gatilho apresentadas no Capítulo 5.

A curva de gatilho da opção de investimento americana é contínua no intervalo [0,T), mas pode ser descontínua em T quando $r_f > \delta$ - ver (54). Assim o

[32] O valor de λ adotado, a exemplo do que fazem Bjerksund e Stensland é o apresentado no artigo de 2002, em detrimento do original apresentado em 1993.

limite perto da expiração é dado por $\lim_{t \to T-}(X_t) = Máx[I, (r_f / \delta).I]$ e na expiração é igual a I.

Os resultados obtidos até aqui para opções de compra americana, perpétuas ou com expiração finita, também podem ser aplicadas para opções de venda. Esse desdobramento torna-se relativamente simples considerando a simetria entre *calls* e *puts* americanas.

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas

A simetria entre opções de compra e venda (PCS – *Put-call syimetry*) é uma propriedade de opções americanas segundo a qual, o preço de uma opção de venda pode ser obtido a partir da troca entre parâmetros da opção de compra correspondente. De acordo com Detemple (2006, Cap.3, p.67-104), que apresenta e aprofunda os resultados mais recentes das pesquisas sobre o assunto, esta simetria foi originalmente demonstrada por McDonald e Schroder (1990) e Bjerksund e Stensland (1993b) em tempo discreto e contínuo respectivamente.

Trata-se de uma importante propriedade das opções, pois permite que o mesmo algoritmo possa ser utilizado para apreçar e determinar as regras ótimas de exercício para opções de compra e de venda, mesmo na ausência de simetria no preço do ativo subjacente ou na presença de descontinuidades (Geman et al, 1995, apud Detemple *op. cit.*). Em alguns casos, a PCS reduz o número de variáveis necessárias para o apreçamento de opções, além de permitir *insights* sobre o relacionamento econômico entre contratos,

A homogeneidade de grau 1 da função de *payoff* de uma opção (em relação ao preço do ativo subjacente e ao preço de exercício) faz com que a PCS decorra da simples troca de numerário. Com o novo numerário, o apreçamento também pode ser feito por *contingent claims* com os mesmos *portfolios* replicantes. Isso significa que a opção simétrica também pode ser avaliada em uma economia auxiliar com o novo numerário e uma taxa de juros ajustada, na qual o apreçamento da opção satisfaz as mesmas equações de apreçamento. Essas características também permitem a extensão da PCS para contratos mais complexos sobre um ou mais ativos. Para o propósito desta dissertação, será suficiente a discussão do modelo sobre um MGB.

Considere uma opção de compra americana sobre um MGB neutro ao risco, como na Equação (41): $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$, com r_f, δ e σ constantes. Na Seção 3.5 discutiu-se brevemente que o preço deste derivativo pode ser visto como o preço de uma *call* européia $c(V_t, I, r_f, \delta, t)$ definido por Black e Sholes (1973) e Merton (1973) somado por um prêmio pela possibilidade de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$:

$$C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = c(V_t, I, r_f, \delta, t) + \Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (55)$$

Onde $C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é o preço de uma *call* americana e $B^c(\cdot)$ é a "fronteira" livre (*free boundary)* da opção de compra que soluciona a seguinte integral recursiva:

$$B_\tau^c - I = C(B_t^c, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (56), \text{ sujeito a: } B_T^c - I = Máx(I, I.r_f / \delta) \quad (57)$$

Seja $B^c(I, r_f, \delta, t)$ a solução da equação (56).

O prêmio de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é definido como:

$$\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = \int_t^T \Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c).d\tau \quad (58), \text{ onde:}$$

$$\Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c) = \delta.V_t.\exp[-\delta.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t)] - r_f.I.\exp[-r_f.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) - \sigma.\sqrt{\tau - t}] \quad (59).$$

Onde $N[\cdot]$ é a probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão e:

$$d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) = \frac{\ln(V_t / B_\tau^c) + (r_f - \delta + 0{,}5.\sigma^2).(\tau - t)}{\sigma.\sqrt{(\tau - t)}} \quad (60)$$

A equação (58) não tem solução analítica, motivo pelo qual a opção americana de compra também não tem. De acordo com McDonald e Schroder (apud Detemple, *op. cit.*) as equações correspondentes para uma opção de venda americana podem ser obtidas a partir do conjunto de equações (55) a (60), fazendo uma simples troca de variáveis. Este resultado é enunciado pelo seguinte teorema (Detemple, *op. cit.*, p.72):

Teorema: Considere opções de venda e compra americanas com preço de exercício I e expiração T idênticos, escritos sobre um ativo V_t que segue um MGB neutro ao risco $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$. Sejam $P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(\cdot))$ e $C(V, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ as respectivas funções de preço e $B^P(I, r_f, \delta, \cdot)$ e $B^C(V, r_f, \delta, \cdot)$ os correspondentes preços críticos. Então:

$$P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(I, r_f, \delta, \cdot)) = C(I, V, \delta, r_f, t, B^c(V, \delta, r_f, \cdot)) \quad (61)$$

E para todo $t \in \{0, T\}$:

$$B^P(I, r_f, \delta, t) = \frac{V.I}{B^c(V, \delta, r_f, t)} \quad (62)$$

Assim, o valor de uma *put* americana é o mesmo de uma *call* também americana com preço de exercício V e expiração T, numa economia com taxa de juros livre de risco δ, na qual o ativo subjacente, sob medida neutra ao risco, segue um MGB com dividendos r_f, volatilidade σ e valor inicial I. Além disso, a curva de gatilho da *put* americana é dada pelo inverso da curva de gatilho da *call* multiplicado pelo produto $V.I$ - Equação (62).

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção

Em situações de planejamento de investimentos duas informações são preciosas para projetos que não se encontram *deep in the money*: Quando se espera que a opção de investimento se torne apta ao exercício e; Qual é a probabilidade deste exercício ocorrer.

O tempo esperado de toque é o tempo esperado para que uma variável que segue um processo estocástico alcance um certo valor, no caso a curva de gatilho, quando então a opção deve ser exercida (Dias, p.1-2, http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html). O tempo esperado de toque é matematicamente definido como:

$$T^* = \inf\{t \geq 0; V \geq V^*\}$$

Ao contrário do que ocorre no apreçamento de opções, o tempo esperado de toque depende da tendência real (α) do processo estocástico. Como visto na Seção 3.5.1, a curva de gatilho real pode ser calculada com o processo estocástico neutro ao risco (*drift* $\alpha - \pi = r - \delta$), mas utilizar este mesmo processo implica em erro na resposta às duas questões. O tempo esperado de toque calculado com o processo neutro ao risco seria maior do que o verdadeiro valor e a probabilidade de exercício seria menor do que a verdadeira. Com um menor *drift*, o processo estocástico demora mais tempo para tocar a barreira da curva de gatilho pela primeira vez, e no caso de uma OR finita, toca menos vezes a barreira até a expiração.

A exemplo do que ocorre com as opções de investimento (Seções 3.4.2 e 3.5), o tempo esperado de toque possui uma solução analítica para opções perpétuas, mas não para as opções com expiração finita. Métodos numéricos podem resolver este problema. Dias (op.cit.) sugere a adoção de Simulação de Monte Carlo por ser mais simples dado que, a curva de gatilho pode ser determinada com antecedência e precisão satisfatória utilizando-se aproximações analíticas (Seção 3.5.1, no caso do MGB).

Para isso basta simular o processo estocástico real um número grande de vezes e observar quantas vezes a opção é exercida. A razão entre o número de exercícios e o número de simulações fornece uma estimativa amostral da probabilidade de exercício da opção. Dado o exercício, a média condicional dos tempos de toque é uma estimativa amostral do tempo esperado de toque. Este é o procedimento adotado na Seção 5. 3.

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P

A indústria de petróleo consiste de uma cadeia de atividades de produção, transformação e comercialização de hidrocarbonetos líquidos e gasosos em uma variedade de produtos de tecnologia. De forma simplificada, as atividades neste setor envolvem ativos reais de exploração e produção de petróleo, transporte, refino, distribuição, comercialização, petroquímica, fertilizantes, geração de energia elétrica, etc. As empresas atuam em um ou vários elos (segmentos) da cadeia simultaneamente, tornando-se progressivamente integradas. As grandes corporações têm se diversificado ainda mais, rompendo os limites tradicionais da indústria petrolífera e adotando o conceito de empresas de energia.

Na ausência de um mercado suficientemente desenvolvido para os ativos reais da indústria do petróleo, a otimização dinâmica e contínua de um *portfolio* de ativos reais revela-se onerosa e limitada em relação ao que ocorre com os ativos financeiros. Por esses motivos os investimentos em projetos e vendas de ativos reais devem ser bem fundamentados, de um lado avaliando-se o impacto sobre o *portfolio* da companhia e de outro, certificando-se sobre o valor das flexibilidades embutidas nos ativos. Do ponto de vista de gestão de *portfolio*, as principais OR a serem consideradas são opções de investimento, desinvestimento e abandono.

No contexto do *portfolio* de uma empresa de petróleo com ativos reais de diversos segmentos, modelos de OR mais gerais e simples tornam-se valiosos: Se por um lado estes modelos podem ser adaptados com facilidade diferente ativos do *portfolio,* por outro facilitam a sua implementação dentro da organização.

São discutidos em seguida modelos de OR simples e compostas de ativos de exploração e produção de petróleo, que por serem os ativos básicos das grandes corporações do setor, apresentam uma literatura mais desenvolvida.

Na Seção 4.1 são discutidos os principais tipos de OR na área de exploração e produção de petróleo. Na Seção 4.2 são revistos os principais argumentos que justificam a adoção do MGB para o preço do ativo subjacente. Considerando a hipótese de *Marketed Asset Disclaimer* (Seção 3.3.1), as OR serão modeladas tendo como ativo subjacente os próprios projetos de investimento ou ativos reais já em operação. Na Seção 4.3 são discutidos alguns modelos de OR da área de E&P. O

Anexo I apresenta um pequeno glossário de termos técnicos da área de petróleo citados neste texto.

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo

A Exploração e Produção (E&P) de petróleo é a base ou o primeiro elo da cadeia de atividades da indústria do petróleo[33]. A Exploração é o conjunto de atividades de pesquisa que visam identificar e testar situações geológicas favoráveis à acumulação de petróleo. Uma vez confirmada a existência de petróleo em uma área, segue-se um conjunto de atividades denominadas de delimitação (*appraisal*) que visam diminuir a incerteza sobre o volume de hidrocarboneto descoberto e sua produtividade. Obtidos novamente resultados favoráveis, executa-se outro conjunto de atividades que visam permitir a produção comercial de petróleo, denominada de desenvolvimento da produção (*development*). Ao longo ou ao final desta fase, o campo de petróleo passa a produzir em escala e de forma contínua, iniciando a fase de produção. Durante a fase de produção, podem surgir vários novos projetos de investimento que visam aumentar o volume recuperável de petróleo, sua produtividade ou o retorno do ativo em produção com a redução de custos operacionais. A Figura 10 mostra de forma esquemática as principais OR em projeto típico de E&P de petróleo.

Dias (1996, p.64-65) descreve as principais OR relacionadas ao processo E&P de petróleo, transcritos a seguir:

Quando se tem apenas uma área potencialmente petrolífera (bloco), eventualmente com mapas de sísmica 2D, existe apenas uma probabilidade "p" de se descobrir petróleo, e em caso de haver a descoberta, a reserva esperada é "B". Aqui se poderia subdividir essa opção em duas: opção de explorar (investir em um poço pioneiro) e opção de delimitar (em caso de descoberta, investir em poços delimitadores e em sísmica de detalhe e/ou 3D). O direito de explorar esse bloco pode ser oriundo de um monopólio estatal (opção perpétua) ou de uma concessão governamental obtido por licitação (lease). Em ambos os casos, esse direito é uma opção de exploração, que se exercida (através do pagamento do investimento em exploração) pode levar à descoberta (ou não) de petróleo e à delimitação do campo,

[33] No Anexo 1 encontra-se um pequeno glossário de termos da indústria de petróleo utilizados nesta dissertação.

obtendo-se as chamadas "reservas não-desenvolvidas", além de obter uma outra opção, a de explotar (produzir) o campo. Uma característica dessa fase é que a incerteza técnica é mais relevante que a incerteza econômica.

Uma vez descoberto e delimitado o campo, o gerente tem a opção de explotar (ou de produzir, ou de desenvolver o campo). Através do exercício dessa opção (pagando o custo de investimento no desenvolvimento do campo), o gerente transforma o ativo "reserva não-desenvolvida" em "reserva desenvolvida" (jazida produzindo ou pronta para tal). Além disso, com o exercício dessa opção se obtém novas opções: as opções de expandir a produção (ex.: projetos de desenvolvimento complementar, ou de adensamento de malha, ou de recuperação secundária/métodos especiais), além das opções de interromper provisoriamente a produção e até de abandonar o campo.

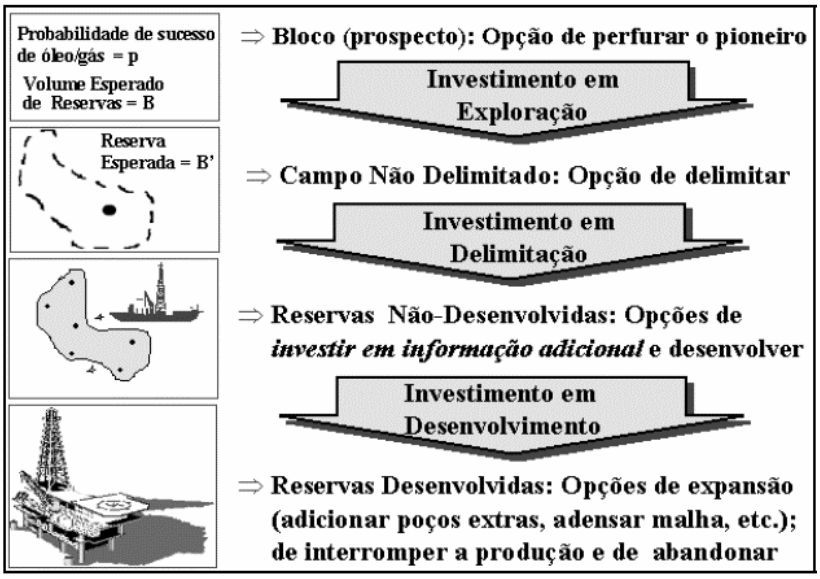

Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005, p.45).

As opções de exploração, delimitação e desenvolvimento da produção são OR estratégicas[34] de investimentos seqüenciais que podem ser avaliadas em conjunto ou isoladamente. Se uma concessão encontra-se na fase exploratória ou de delimitação, a decisão de investimento é uma opção de compra composta (o

[34] As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desenvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio (ver Seção 2.4.1).

sucesso na exploração cria a opção de delimitação e o sucesso desta cria a opção de desenvolvimento). Então o decisor somente deve exercer a primeira opção de investimento se as opções subseqüentes também estiverem *deep in the money*. De outra forma, se a OR de exploração estiver *deep in the money*, mas as OR de delimitação ou de produção não estiverem, é mais vantajoso para a empresa aplicar o recurso deste investimento no mercado financeiro e esperar do que exercer a primeira opção imediatamente e ficar aguardando o *timing* do exercício da segunda.

Deste ponto de vista, a OR de exploração é uma opção americana de compra composta sobre uma opção americana simples de delimitação (*call on call*). A opção de delimitação também é uma americana de compra composta sobre a opção de desenvolvimento, que por sua vez é uma *call* americana simples. Na Seção 4.3.3 é discutido um modelo para opções de exploração compostas**.**

Opções de expandir, interromper (parada temporária) ou abandonar a produção são OR operacionais[35]. Uma opção de expandir a produção ou qualquer outra que aumente a lucratividade de um campo de petróleo já em produção pode ser tratada como uma *call* americana simples, cuja expiração ocorre dentro do período de produção (no Brasil, 27 anos). Opções de interromper provisoriamente a produção (parada temporária) podem ocorrer se há a esperança de se voltar a produzir economicamente[36]. Por fim, as opções de abandonar ou vender um campo de petróleo são *puts* americanas, podendo ser avaliadas por um mesmo modelo. A diferença básica entre elas será o preço de exercício. No abandono este preço é um custo, exceto que haja algum valor residual suficientemente alto (ver Exemplo 2 da Seção 2.2 para a discussão da regra de decisão). Já opção de venda o preço de exercício é uma receita, portanto um valor positivo.

Em projetos de E&P ocorre a estreita relação entre OR estratégicas e operacionais descrita por Trigeorgis (1996, p.227-256, ver Seção 2.6.1). As várias flexibilidades que podem ocorrer em um campo de petróleo fazem com que surjam

---

[35] As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. Ver Seção 3.4.1.

[36] O custo de desmobilização temporária, preservação, e retomada da produção são determinantes nessa decisão. Em campos pouco atrativos pode ser preferível produzir com máxima terceirização e contratos de curto prazo de forma a ter um valor atraente para a opção de parada temporária (Dias, 1996, p.61).

novas e futuras OR. Naturalmente, diversas combinações entre elas são factíveis, criando opções múltiplas ou compostas. A interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto.

O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

Bjerksund e Ekern (1990, p.77-79) avaliam através de um exemplo numérico o impacto adicional da opção de abandono e parada temporária sobre uma opção de desenvolvimento perpétua. O efeito dessas opções adicionais é reduzir o valor crítico (gatilho) para se iniciar o projeto de investimento, sendo pouco maior para a opção de parada temporária. Porém, destacam que o efeito dessas flexibilidades adicionais na redução do preço de petróleo crítico foi pequeno: 1,8% ou de US$ 20,00/bbl para US$ 19.64/bbl.

O maior impacto sobre o projeto foi justamente a introdução da flexibilidade de adiar a decisão de investimento. Então o viés introduzido ao se ignorar as opções adicionais seria desprezível. Parâmetros como a volatilidade σ e a taxa de dividendos δ podem ser mais importantes do que complicar modelos com opções adicionais. Mesmo sob o risco de generalizar um caso particular, Bjerksund e Ekern (*op. cit.*) destacam que o exemplo sugere que maior foco na opção de investimento é melhor do que a adição de novas flexibilidades. Dias (2005, p.77) destaca que a opção de abandono se torna mais valiosa em opções de investimento quando os preços estão baixos.

Laughton (1998, apud Dias 2004) avaliando opções de exploração revela que embora o valor destas aumente tanto com a incerteza sobre o preço do petróleo quanto com a incerteza sobre o volume a ser descoberto, elas tem efeito diferentes sobre o investimento. A incerteza do preço tem efeito de adiar o exercício das

opções enquanto que a incerteza do volume tem efeito de incentivar o investimento em informação, isto é, o exercício de opções de aprendizagem (ver Seção 2.5).

Do ponto de vista desta dissertação, está-se mais interessado em OR estratégicas. Qualquer que seja o tipo de opção considerada, o processo estocástico escolhido para modelar o valor do ativo subjacente é o MGB. Os argumentos que justificam esta adoção são revistos a seguir.

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*

Sob a hipótese do MAD, o ativo subjacente de um projeto de E&P é o preço de uma reserva de petróleo desenvolvida, que por sua vez é muito dependente do preço do petróleo. Sobre este tema, há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média.

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo a convergência para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado.

Independente de qual seja a resposta final a essa questão, o MGB encontra na literatura diversos argumentos teóricos e empíricos que justificam sua adoção, tanto para modelar o preço do ativo subjacente quanto para modelar o preço do petróleo. Estes argumentos foram apresentados ao longo do Capítulo 3 e são reapresentados em conjunto a seguir.

O efeito do uso do MRM sobre a decisão de investimento é duplo. Como modelo estacionário, a convergência da variância com o tempo limita o valor da flexibilidade de esperar (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com os movimentos Brownianos**.** Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM faz com que preços mais altos sejam atingidos menos vezes (Efeito Preços), o que reduz o nível de investimentos. Além disso, a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o

exercício da opção de investir (ver Dixit e Pindyck, 1994, p.161-167). O efeito resultante do MRM é, portanto, menos óbvio do que o do MGB**.**

Metcalf e Hassett (1995, ver Seção 3.1.2) testam numericamente se o nível de investimento agregado obtido com o MGB se altera com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$, enquanto que o MGB é dado por: $dx = \sigma.x.dz$. Ou seja, em seu estudo os autores consideram o MRM e o MGB com mesma tendência α nula (ver equação (22)). De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM os preços gerados pelo primeiro tendem a dominar o MRM com o passar do tempo.

Os autores mostram que os Efeitos Variância e Preços tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza.

Dixit e Pindick (1994, p.77-78, ver Seção 3.1.2) realizam a análise de séries históricas longas de preços de petróleo. Concluem pela reversão à média ao considerar séries de preços com 120 anos, mas não conseguem rejeitar a hipótese de *random walk* ao considerarem séries de 30 ou 40 anos. Estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos.

Samuelson (1965, ver Seção 3.3.2) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado, na medida em que os investidores têm informação completa sobre estes fluxos de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas

como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos. Samuelson prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório (Copeland e Antikarov, 2001, p.222). Então riscos (de timing, políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente.

Dias (2005, p61-70) discute o impacto da utilização do MGB em OR no lugar de MRM para o processo estocástico do preço do petróleo. Inicialmente repete o teste de Dixit e Pindick (1994, *op. cit.*) para os preços real e nominal do petróleo no período 1970-2004, e também não consegue rejeitar o MGB. Em seguida discute dois artigos importantes sobre o assunto (Pindikc, 1999 e Schwartz, 1997) e conclui que o MGB é uma boa aproximação em muitos casos, mas pode ser inadequado quando o preço à vista estiver longe do nível de equilíbrio de longo prazo. Por fim faz duas recomendações: Em OR em que se precisa considerar tanto o curto quanto o longo prazo, modelos mais realistas são mais adequados, mas para análises de longo prazo ou em estudos onde apenas um mapeamento razoável do preço do petróleo é necessário, o MGB pode ser adotado.

A análise do conjunto de argumentos expostos permite concluir que o MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente, a depender dos parâmetros considerados. O efeito da estabilização da variância no MRM incentivando o investimento pode ser compensado pelo efeito da maior volatilidade do MGB. Por fim, resta o teorema de Samuelson (1965) que estimula a adoção do MGB quando o ativo subjacente possui fontes múltiplas de incerteza.

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P

Existem diversos modelos na literatura para apreçamento de OR em projetos de exploração e produção de petróleo. Esses modelos dependem do valor presente da reserva desenvolvida V, que sob a hipótese do MAD é o ativo subjacente. Uma função que calcule V pode então ser utilizada e explicitar as variáveis das incertezas econômicas e técnicas.

Dias (2005, p. 73-75) destaca três alternativas para o cálculo de V com complexidade crescente: Usar uma função simples que considere as variáveis chaves; Utilizar SMC para as variáveis de risco em planilhas de fluxo de caixa e; Combinar planilhas com outros sistemas como simuladores de reservatório que tratam a incerteza técnica mais adequadamente.

Os modelos para apreçamento de OR em projetos de E&P têm sido desenvolvidos para resolver problemas específicos destes projetos, em geral com gradual complexidade. Dias (2004, p.99-102 e 2005, p.83-132), apresenta um resumo da literatura de OR em petróleo. A seguir são apresentados três modelos simples que envolvem decisões de investimento e abandono de ativos reais.

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão

O Modelo de Negócios (*Business Model,* ver Dias, 2004, p.96-98) é uma aproximação para o valor de uma reserva desenvolvida de petróleo sob regimes de contratos de concessão. Trata-se de uma aproximação útil e adequada para o apreçamento de opções de investimento simples, especialmente se o VPL do projeto é previamente conhecido.

O valor do exercício ou *payoff* de uma opção real de investimento simples sobre o desenvolvimento de uma acumulação de petróleo é dado pela diferença entre o valor presente da reserva desenvolvida V e o investimento de desenvolvimento I :

$$VPL = V - I \quad (63)$$

O investimento I é o valor atualizado do fluxo de investimentos líquidos de benefícios fiscais como depreciação. O valor atualizado da reserva desenvolvida V para contratos de concessão de E&P pode ser aproximado por uma função linear do preço do petróleo P (isso é facilmente verificável com uma análise de sensibilidade).

Uma aproximação muito razoável e simples é considerar que V é proporcional ao volume recuperável de hidrocarbonetos (B) existente na acumulação, à qualidade econômica da reserva (q) e ao preço de petróleo:

$$V = q.B.P \quad (64)$$

A qualidade econômica da reserva q depende de uma série de parâmetros geológicos que afetam a produtividade da rocha reservatório, das propriedades físicas do petróleo a ser produzido, da carga de impostos, custos operacionais e da taxa de desconto apropriada para a atualização monetária. A aproximação definida na equação (64) é denominada por Dias (2004) de Modelo de Negócios (*Business Model*). Essa designação é uma alusão ao fato de que a relação $q.P$ corresponder ao valor do barril de petróleo (na cabeça do poço) negociado no mercado de reservas desenvolvidas nos Estados Unidos, onde assume um valor médio de 1/3 (ou seja, $q = 1/3$, também conhecida como regra do 1/3 - Gruy et al, 1982, apud Dias, 2004).

Um segundo e simples modelo também apresentado por Dias (op. cit.), denominado de Fluxo de Caixa Rígido (*Rigid Cash Flow Model*) considera uma parte do custo operacional atualizado como fixo:

$$V = q'.B.P - C$$

Em ambos os modelos, os valores de q' e q'' são obtidos a partir dos VPL calculados em planilhas eletrônicas. A diferença básica entre eles é sintetizada pela inclinação da reta do VPL em função do preço do petróleo (Figura 11):

O Modelo de Negócios é menos sensível ao preço do petróleo e implica que há uma correlação perfeita entre este último e os custos operacionais. Na prática é um modelo que gera valores conservadores para OR, o que poderia levar ao exercício prematuro de opções. Tem sido utilizado em algumas circunstâncias por diversos autores, embora não seja exatamente um consenso na literatura. Mas é inegável que sua simplicidade gera algumas vantagens: Pode ser utilizado como uma primeira aproximação para o valor da OR; Pode ser facilmente empregado em escala para problemas simples com OR e; Pode ser útil no sentido de difundir o uso de OR dentro de uma empresa. Naturalmente que, não é um modelo adequado para

a tomada de decisão em investimentos relevantes ou para problemas mais complexos que envolvam mais de uma variável estocástica, incertezas técnicas e estratégicas ou diversas OR interagindo.

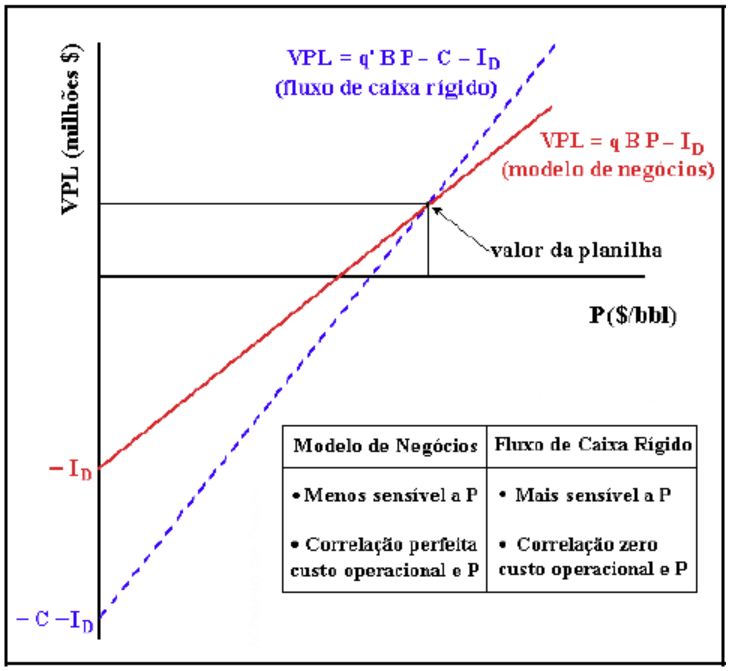

Figura 11 – Comparação entre os Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Fonte: Dias, 2005, p.79).

Se o preço do petróleo segue um MGB (19), então $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Considerando o Modelo de Negócios (64), o processo estocástico do valor presente da reserva desenvolvida V pode ser calculado com o Lema de Ito (35):

$$V = q.B.P \quad \therefore \quad dV = [\alpha.P.\frac{\partial V}{\partial P} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}.P.\sigma^2].dt + \frac{\partial V}{\partial P}.\sigma.P.dz.$$ Então:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = q.B; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow dV = \alpha.q.B.P.dt + \sigma.q.B.P.dz \Leftrightarrow$$

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \quad (66)$$

Então a EDP de B&S&M para uma opção F qualquer sobre o valor da reserva desenvolvida que segue um MGB será a equação (40) - ver Seção 3.4.1 – com $V = q.B.P$, então:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida $V = q.B.P$ que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção é de desenvolvimento de um campo de petróleo é perpétua, vale então a solução analítica da Seção 3.4.2. Se ao contrário tem expiração finita, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Por fim, em se tratando de opções de venda, as soluções permanecem válidas sendo suficiente inverter as variáveis V com I e r com δ (Seção 3.6).

O Modelo de Negócios também pode ser facilmente adaptado para opções compostas de exploração (Seção 4.3.3). Uma alternativa mais elaborada a este primeiro modelo é o clássico trabalho de Paddock, Siegel e Smith (1998), apresentado a seguir.

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S)

O modelo de Paddock, Siegel e Smith - PS&S (1988)[37] é uma aproximação um pouco mais elaborada (em relação ao modelo anterior) para opções de desenvolvimento de reservas de petróleo, porém sem perder simplicidade e a semelhança com a EDP (40) de Black & Sholes & Merton. Basicamente trata algumas variáveis por unidade de volume e considera o efeito da exaustão de uma reserva.

PS&S argumentam que para uma opção de E&P não é suficiente conhecer o processo estocástico do valor de uma reserva desenvolvida, é preciso também conhecer o equilíbrio de mercado deste ativo. Para isso caracterizam o comportamento dos preços de reservas desenvolvidas e demonstram como integrar este modelo com técnicas de apreçamento de opções, valorando a opção de desenvolvimento e depois a de exploração.

[37] Ver também Dixit e Pindick, 1994, p.396-403 e Dias, 1996, p.211-222.

Em equilíbrio, o retorno esperado de uma reserva desenvolvida (dividendos e ganho de capital) deve compensar o custo de oportunidade de investir em tal reserva. Seja B_t o volume de petróleo, V_t o valor de uma unidade de volume de reserva desenvolvida (US$/bbl) e R_t o *payoff* instantâneo por unidade de tempo, então os autores assumem que:

$$\frac{R_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \quad (67)$$

Onde μ_v é a taxa ajustada ao risco requerida por um mercado de capitais em equilíbrio sobre uma *security* que replique perfeitamente a reserva desenvolvida. O *payoff* R_t é dado pela soma dos lucros da produção de petróleo $\pi_t.(-dB_t)$ com o ganho de capital da reserva ainda não produzida $d(B_t.V_t)$. O sinal negativo deve-se à variação de reserva ser negativa com a produção, mas o lucro não.

$$R_t.dt = \pi_t.(-dB_t) + d(B_t.V_t) \quad (68)$$

Onde π_t é a taxa de lucro por unidade de volume. A reserva não produzida de um campo de petróleo em produção pode ser bem representada por uma função exponencial decrescente com o tempo de produção, então:

$$B_t = B_{t-1}.\exp(-\gamma.\Delta t) \Rightarrow \ln B_t = \ln B_{t-1} - \gamma.\Delta t \Rightarrow \Delta \ln B_t = -\gamma.\Delta t$$

Na forma diferencial, quando $\Delta t \to 0$:

$$d\ln B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t / B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t = -\gamma.B_t.dt \quad (69)$$

Onde γ é a taxa de caimento da reserva B_t de petróleo por unidade de tempo (não estocástico). Substituindo (69) em (68) e considerando que $d(B_t.V_t) = B_t.dV_t + V_t.dB_t$:

$$R_t.dt = \gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt \quad (70)$$

Substituindo o resultado (70) em (67), obtém-se:

$$\frac{\gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$\frac{dV_t}{V_t} + \frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} - \gamma.dt = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow \frac{dV_t}{V_t} = -\frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} + \gamma.dt + \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = (-\gamma.\pi_t + \gamma.V_t + \mu_v.V_t).dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = [\mu_v - \gamma.(\pi_t / V_t - 1)].V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$dV_t = (\mu_v - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz$ (71) e $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$ (72)

Onde δ_t é a taxa de *payout* ou dividendos da produção de uma unidade de reserva de petróleo desenvolvida, cujo valor segue o MGB da equação (71), supondo μ_v, δ_t *e* σ_v constantes. A tendência deste MGB é a taxa de ganho de capital da reserva desenvolvida: $\alpha_v = \mu_v - \delta_t$. Em equilíbrio, nenhum agente manterá uma reserva desenvolvida sem produção, pois neste caso a taxa de retorno será a taxa de ganho de capital ($\mu_v - \delta_t$), que é menor do que a taxa requerida pelo mercado sobre o ativo (μ_v).

Considerando a equação (71), o valor da opção de desenvolvimento de uma unidade de reserva e a regra ótima de decisão podem ser determinados. Para isso monta-se um *portfolio* sem risco, composto pela opção de desenvolvimento F e n partes do ativo gêmeo (reserva desenvolvida V). Como o valor da reserva segue um MGB, seguindo-se os mesmos passos da Seção 3.4.1, chega-se à EDP (40) de B&S&M:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente a equação é genérica e serve para qualquer opção sobre o ativo básico (uma unidade de reserva desenvolvida). As condições de contorno é que definirão o tipo de OR:

$F(V=0) = 0$ (42) $\qquad F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I$ (44)

$F_v(V^*(t),t) = 1$ (45) $\qquad$ Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

As três primeiras condições de contorno são para opções de compra americanas perpétuas (adicionalmente em (40) F_t=0). As quatro condições em conjunto definem são para opções de compra americanas com expiração finita. A

condição (42) é um limite econômico que funciona como uma barreira absorvente para o MGB de V - equação (71), ver Seção 3.1.6. A condição (44) define o *payoff* do exercício da opção no valor crítico V^* enquanto que (45) é a condição de otimização de contato suave (*smooth paste condition* – ver Seção 3.4.2). Por fim, a condição (50) indica que, na expiração do direito de desenvolvimento, vale a regra do VPL. As soluções obtidas nas Seções 3.4.2 e 3.5.1 também continuam válidas, com algumas diferenças.

O valor da opção e o valor crítico serão obtidos em unidades monetárias por unidade de reserva desenvolvida. O investimento também deve ser considerado por unidade de volume. A taxa de dividendos δ_t tem uma expressão particular dada pela equação (72) ($\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$). Note que δ_t varia com o tempo (depende da taxa de lucro π_t e do valor de uma unidade de reserva desenvolvida V_t) enquanto que na EDP (40) é constante. Será necessário então estimar uma taxa de dividendos média e assumi-la constante.

O modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para um projeto não implantado. Isso significa que o processo neutro ao risco da reserva não desenvolvida poderá ter uma tendência neutra ao risco ($\alpha_v^{'} = r_f - \delta$) negativa. Em princípio, esse resultado é plausível, pois o custo de oportunidade δ de se adiar a produção pode realmente ser maior que a taxa livre de risco. Mas uma tendência muito negativa pode não ser conveniente, pois pode significar também que o processo estocástico real tem uma tendência real negativa: $\alpha_v < 0$ (ver Seção 5.1).

Se isso ocorrer, significa que o preço da reserva desenvolvida cai com o tempo. Isso só é plausível para uma opção de desenvolvimento se há uma expectativa de redução contínua no preço futuro do petróleo ou se os custos de produção estiverem aumentando continuamente. De uma outra forma, é questionável depreciar a opção de desenvolvimento pela perda de volume que ocorreria se ela estivesse em produção, por que simplesmente o volume da reserva ainda é constante.

PS&S (*op. cit.*) também discutem a opção de exploração. Os autores assumem que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, evitando complicações como o momento ótimo para exercer a opção de desenvolvimento, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única. Isso seria equivalente a fazer os investimentos de exploração e de desenvolvimento esperados ($\bar{I}_E$ e $\bar{I}_D$) em conjunto e receber o valor presente da reserva desenvolvida $\bar{B}$ esperada:

$$VPL_{Exp} = \bar{B}.V - (\bar{I}_E + \bar{I}_D) \quad (73) \text{ com: } \quad \bar{B} = \int B.df(B) \quad \text{e} \quad \bar{I}_D = \int B.I_D.df(B)$$

Onde VPL_{Exp} [38] é o VPL esperado de uma oportunidade exploratória sem risco geológico, V é o valor de uma unidade de reserva desenvolvida e $f(B)$ é a distribuição de probabilidade do volume aleatório de petróleo B a ser descoberto[39].

Considerando que o volume esperado $\bar{B}$ é constante e que a opção de exploração é homogênea de grau 1, então o seu valor pode ser representado como:

$$\bar{B}.E(V, T-t, S) \quad \text{com} \quad S = (\bar{I}_E + \bar{I}_D)/\bar{B} = E + D$$

Sendo que $E(V, T-t, S)$ é o valor corrente para uma opção de exploração sobre uma unidade de reserva desenvolvida com investimento unitário combinado de exploração e desenvolvimento S. A opção de exploração pode então ser resolvida como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento de PS&S.

Se a curva do valor crítico de uma opção de investimento em função do tempo para a expiração $T-t$ for normalizada, ou seja, definida pela relação entre o valor do projeto implantado e o investimento necessário (δ, σ e r_f são constantes), então ela será única (Merton, 1973, apud PS&S, *op. cit.*, p.489). Assim, toda vez que

---

[38] O VPL_{Exp} é uma aproximação grosseira do VME, Valor Monetário Esperado, um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração, estando para os projetos de exploração como está o VPL para projetos de desenvolvimento. A regra de decisão é investir se VME>0.

[39] PS&S não usam o termo VPL_{Exp}, apenas dizem que exercer a opção de exploração pode ser vista como o lado direito da equação (73), esclarecendo na página 491 que seu modelo é válido somente na ausência de incerteza geológica.

a opção exploração estiver *deep in the money* ($V/S \geq V^*/S$), também estará a opção de desenvolvimento pois $V/D > V/S$ (onde $D = \overline{I}_D / \overline{B}$).

A técnica de PS&S para opções exploratórias fornece um valor elevado para a opção, mas qualitativamente inferior. Isso se deve tanto por desconsiderar a incerteza geológica sobre a existência de petróleo, como por suprimir flexibilidades ao colapsar as opções de exploração com a de desenvolvimento. Este assunto será retomado na Seção 5.2, quando se compara os modelos de opção de exploração simples e composta.

Por fim é preciso notar que o Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios podem ser adotados em conjunto. Enquanto o primeiro se preocupa e capturar o efeito da depleção natural de um campo de petróleo através da taxa de dividendos do ativo subjacente, o segundo propõe que o valor de uma reserva seja função linear do preço do petróleo, e por isso segue um MGB derivado a partir deste.

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração

Na Seção 4.1, discutiu-se que a OR de exploração é uma opção americana composta, pois se trata de uma opção de investimento sobre uma opção de desenvolvimento de um campo de petróleo (*call on call*). Até a primeira data de exercício T_1, se o detentor da opção de exploração realizar o investimento exploratório I_E e confirmar a existência do campo de petróleo, ele adquire a opção de desenvolvimento com expiração T_2 ($T_2 \geq T_1$ - medidos em relação à mesma data) e preço de exercício igual ao investimento de desenvolvimento I_D.

Porém, um decisor racional que maximiza o lucro da firma só exercerá a primeira opção da exploração antes da expiração se, além desta estar *deep in the money*, a opção de desenvolvimento também estiver. Dias (2006) argumenta que se a opção de desenvolvimento não estiver *deep in the money,* ao exercer a primeira opção, o decisor obtém na melhor das hipóteses a opção de desenvolvimento, que não será exercida até estar madura. Neste caso, o decisor obtém um melhor retorno ao postergar o primeiro investimento exploratório I_E por um intervalo dt e aplicar o capital exploratório à taxa livre de risco r_f antes que a segunda opção fique

madura. Desta forma, aufere o retorno $I_E.r_f.dt$ sem perder qualquer benefício (dividendo) da opção de desenvolvimento por manter viva a primeira opção. De outra forma, o decisor pode arbitrar postergando o exercício da primeira opção e aplicando o capital exploratório à taxa livre de risco até que ambas as opções estejam maduras. Esta característica também é valida para uma *call on call* financeira americana.

Mas há uma diferença fundamental da OR composta de exploração em relação a uma *call on call* financeira: O fato de se exercer a primeira opção não garante a aquisição da segunda, pois há o risco de não se descobrir o campo de petróleo, ou como se diz com o jargão de E&P, o poço pode ser "seco" (*dry hole*). Na opção composta financeira este risco não existe, ou seja, ao exercer a primeira opção o investidor necessariamente adquire a segunda. A forma tradicional com que a indústria de E&P lida com este risco na tomada de decisão é considerar o valor do campo de petróleo desenvolvido e os investimentos necessários ponderados pelas probabilidades de sucesso e fracasso exploratório.

Dixit e Pindick (1994, p.319-328) discutem o problema de investimentos seqüenciais contínuos ou discretos, que podem ser interrompidos ou suspensos, temporariamente ou definitivamente, como equivalente ao problema de opções compostas. Para o investimento em fases discretas, dado o processo estocástico do preço, os autores derivam o valor do projeto, da opção e do preço crítico para a última fase como uma opção simples. Em seguida demonstram que o valor da opção da fase anterior e o novo preço crítico apresentam equação diferencial e condições de contorno similares à última fase, mas com a diferença de que o *payoff* da fase mais nova depende do valor da opção na fase subseqüente. Esta técnica deve ser repetida sequencialmente até a primeira fase (*backward*), obtendo-se o valor da opção composta.

Os autores então argumentam que o preço de exercício é decrescente da primeira para a última fase, em decorrência da redução progressiva do investimento a ser afundado. Com isso, se o primeiro estágio estiver *deep in the money*, o segundo estágio também estará. Entretanto não mencionam que esta regra é inequívoca se, e somente se, os investimentos seqüenciais tiverem a mesma expiração ou forem perpétuas. No exemplo apresentado no livro, todas as opções de

investimento são consideradas perpétuas e apresentam solução analítica. Mas este não é o caso de uma opção exploratória, onde as fases podem ter expiração diferenciada e as opções não tem solução analítica.

Então, percebe-se que o problema de uma opção composta de exploração, por sua natureza, deve e pode ser tratado de uma forma diferenciada em relação ao seu par financeiro. A solução que se apresenta adiante preserva a natureza do problema de decisão da exploração como uma opção composta, ao contrário do Modelo de PS&S.

O Modelo de PS&S (Seção 5.3.2) para opções exploratórias assume que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única com a mesma expiração. Também considera o volume esperado $\overline{B}$ constante (sem incerteza) e ignora o risco geológico (probabilidade de sucesso)[40], resolvendo a opção de exploração como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento. Por esses motivos, essa técnica fornece um valor qualitativamente inferior para a opção de exploração, como será visto na Seção 5.2. Assim, um modelo que resgate algumas das simplificações acima sem perder praticidade é propício. Uma alternativa é apresentada a seguir, sendo denominado de Modelo de Exploração (MDE).

As principais diferenças do MDE serão reconsiderar o problema de exploração como opção composta de duas fases (exploração e desenvolvimento), observar os diferentes períodos de expiração e ponderar o risco geológico. Entretanto, a incerteza técnica sobre o volume descoberto será desconsiderada, de forma que o volume a descobrir esperado será considerado constante. Por simplicidade, o investimento de delimitação é considerado como parte do desenvolvimento.

[40] O risco e a incerteza geológica representam, respectivamente, a possibilidade de existir ou não petróleo em um prospecto exploratório e, em caso afirmativo, a quantidade de petróleo existente. O risco geológico é estimado através da probabilidade de sucesso geológico. A incerteza sobre o volume pode ser obtida por SMC a partir das distribuições dos parâmetros que definem o volume da acumulação (volume de rocha da trapa, porosidade, preenchimento, saturação de óleo, fator de recuperação, etc.). O produto destes fatores gera a distribuição do volume recuperável, cuja média é o volume esperado a descobrir.

O MDE é elaborado considerando o conceito do Valor Monetário Esperado (VME), um indicador que considera o risco geológico de um projeto exploratório – ver Figura 12.

O Valor Monetário Esperado (VME) é um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração de petróleo, cuja regra de decisão é investir se VME>0. Desempenha um papel equivalente ao do VPL para projetos de desenvolvimento. O VME é um valor esperado por ponderar o valor econômico de um projeto exploratório pelo risco geológico, considerando os cenários de sucesso e de fracasso:

$$VME = Ps.(V - I_E - I_D) - (1 - Ps).I_E = Ps.V - Ps.I_D - I_E \Rightarrow .$$

$$VME = Ps.V - (I_E + Ps.I_D) \quad \text{ou} \quad VME = Ps.(V - I_D) - I_E \quad (74)$$

Onde Ps é a probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*), $1 - Ps$ a probabilidade de fracasso, V o valor presente da "reserva"[41] desenvolvida, I_E o investimento atualizado em exploração do primeiro estágio e I_D o investimento atualizado do desenvolvimento no segundo estágio. Os investimentos e a probabilidade de sucesso são considerados constantes. Seja então:

$$V_E = Ps.(V - I_D) \quad (75) \qquad \Rightarrow VME = V_E - I_E \quad (76)$$

Onde V_E é definido como o valor esperado atualizado do projeto exploratório perfurado ("explorado"). Note a semelhança da equação (76) com a equação (63): $VPL = V - I$. Assim o problema da decisão com o VME é similar ao problema da decisão com o VPL, mas com a vantagem de preservar e ponderar a decisão pelo risco geológico, indissociável do investimento em exploração.

[41] A rigor, para prospectos exploratórios, o termo V é o valor presente do volume a descobrir desenvolvido, já que o termo reserva é tecnicamente inadequado neste caso.

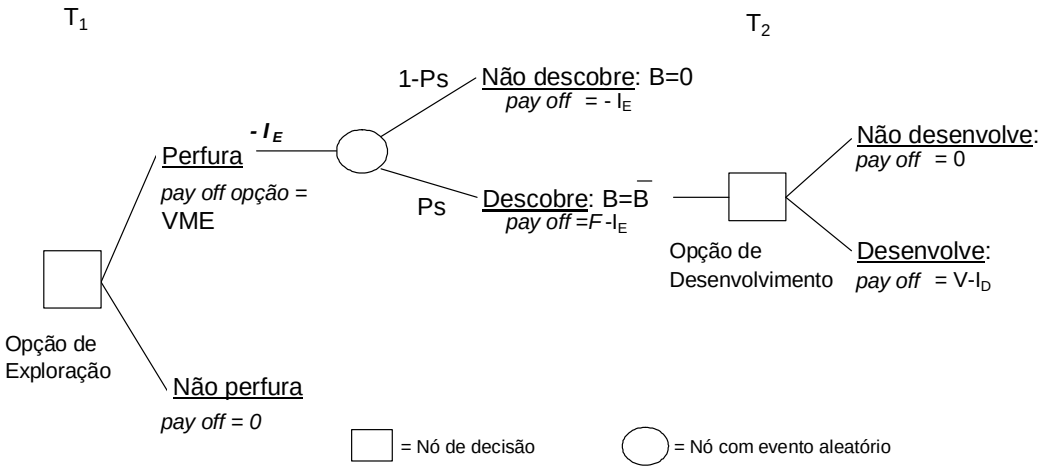

Figura 12 – Árvore de decisão de uma opção de exploração com duas etapas: exploração e desenvolvimento.

Suponha que o processo estocástico do valor da reserva desenvolvida seja um MGB:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (77)$$

No Modelo de Negócios essa relação – Equação (66) - depende do MGB do preço do petróleo ($dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$) e é obtida aplicando-se o Lema de Ito à equação (64): $V = q.B.P$. Em favor de uma maior generalidade, no MDE apenas admite-se que o preço da reserva desenvolvida siga um MGB[42]. Considerando que $V_E = Ps.(V - I_D)$ (75), o valor esperado atualizado do prospecto exploratório perfurado e desenvolvido será dado pelo Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \Rightarrow$$

$$dV_E = [\alpha.V.\frac{\partial V_E}{\partial V} + \frac{\partial V_E}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2}.V.\sigma^2].dt + \frac{\partial V_E}{\partial V}.\sigma.V.dz$$. Então, de (75):

$$\frac{\partial V_E}{\partial V} = Ps \;;\; \frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V_E}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \; dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \qquad (78)$$

[42] Esta premissa é fortalecida pelo teorema de Samuelson (1965) apresentado na Seção 4.3.2. Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório.

Ou, de forma equivalente:

$$\Rightarrow\ dV_E = Ps.(\alpha.V.dt + \sigma.V.dz) \Rightarrow .\ dV_E = Ps.dV \quad (79).$$

A equação (79) revela que o processo estocástico de V_E também é um MGB, múltiplo do MGB da "reserva" desenvolvida. Então, no problema da opção composta de exploração, as duas opções dependem de um mesmo processo estocástico dV [43].

A estratégia de valoração da opção composta de investimento de Dixit e Pindick (*op. cit.*) pode agora ser aplicada, pois as duas opções dependem do mesmo processo estocástico da "reserva" desenvolvida. A solução inicia pelo segundo estágio, ou seja, a opção simples de desenvolvimento. A EDP é exatamente a mesma obtida na Seção 3.4.1, a exemplo do que ocorreu para a opção de desenvolvimento no Modelo de Negócios (Seção 4.3.1), mas com a ressalva que o MGB é dado pela equação (77) e não necessariamente o do preço do petróleo, conforme já discutido. As condições de contorno são as mesmas apresentadas em detalhe nas Seções 3.4.2 e 3.4.3 para uma opção de investimento simples e revisitadas na Seção 4.3.2 com o Modelo de PS&S.

Como visto (Seção 3.4.1), a EDP é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida V que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção de desenvolvimento do campo de petróleo tem expiração T_2, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Com isso o valor da opção de desenvolvimento (F) e o seu valor crítico (V^*) podem ser calculados.

O passo seguinte é montar a EDP de B&S&M (40) do primeiro estágio da opção de investimento sobre o MGB da equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$. Adequando as variáveis para a opção de exploração (E), tem-se:

---

[43] No modelo de Negócios, em última instância, as duas opções dependem do processo estocástico do preço do petróleo: $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Combinando as equações (64) $V = q.\overline{B}.P$ ($B = \overline{B}$) com a equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.(\alpha.P.dt + \sigma.P.dz) \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.dP$.

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 E}{\partial V_E^2}.\sigma^2.{V_E}^2.dt + (r_f - \delta).\frac{\partial E}{\partial V_E}.V_E - r_f.E = -\frac{\partial E}{\partial t} \quad (80)$$

Como visto, a equação é genérica e vale para qualquer derivativo $E(V_E,t)$ que não pague dividendos, escrito sobre V_E, que segue o MGB $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. As condições de contorno são as similares às vistas nas Seções 3.4.2 e 3.4.3, mas com algumas diferenças.

A primeira condição de contorno decorre do fato de $V = 0$ continuar sendo uma barreira absorvente:

$$E(V = 0) = 0$$

A segunda condição afirma que na curva de gatilho do primeiro estágio (V^{**}), a opção de investir vale o VME do projeto ($VME = Ps.(V - I_D) - I_E$ - (74)), onde o valor da "reserva" não desenvolvida $(V - I_D)$ é dada pela opção de desenvolvimento (*value matching condition*):

$$E(V^{**}) = Ps.F(V^{**}) - I_E$$

A terceira condição denominada de contato alto ou suave (*smooth pasting condition*) define que no valor de gatilho o valor das duas opções devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^{**}.

$$E_v(V^{**}) = Ps.F_v(V^{**})$$

A quarta condição afirma que na expiração do primeiro estágio, vale a regra do VME tradicional, com o valor da reserva desenvolvida dado pela opção de desenvolver. Para $t = T_1$:

$$E(V) = Máx[Ps.F(V) - I_E;0]$$

A EDP (80) e condições de contorno do MDE tratam a opção de exploração como composta e preservam o risco geológico na decisão de investimento, mas não

possui solução analítica. Para contornar este problema sugere-se uma aproximação simples, ao se considerar sempre que $F = V - I_D$.

Essa aproximação só não é a solução verdadeira quando $V < V^*$, ou seja, o segundo estágio não está *deep in the money* e portanto, o primeiro não deve ser exercido imediatamente. Essa regra de decisão é inequívoca e para uma opção de exploração, é mais importante do que o valor calculado desta ser exato ou não. Por isso utilizar $F = V - I_D$ como uma aproximação inferior do valor verdadeiro da opção (pois: $V < V^* \Rightarrow F > V - I_D$). A taxa de dividendos (δ) e a volatilidade (σ) para apreçar $E(V)$ serão as mesmas do ativo subjacente.

Com esta simplificação, os dois estágios da opção de exploração passam a depender de vários parâmetros comuns ($r_f, \delta, \sigma \; e \; dV$), diferenciando-se quanto ao ativo subjacente e preço de exercício: $V_E \; x \, V$ e $(I_E + Ps.I_D) \; x \, I_D$. Quanto à expiração, os dois estágios podem ter prazos iguais ou diferentes[44]: $T_1 = T_2$ ou $T_1 < T_2$.

Se os dois estágios da opção tiverem mesma expiração ($T_1 = T_2$) e a probabilidade de sucesso for um, a curva do valor crítico normalizado (V^* / I) será única, já que todos demais parâmetros para sua definição ($r_f, \delta, e \; \sigma$) são iguais (Merton, 1973, apud PS&S, 1998, p.489). Então, como a opção de desenvolvimento apresenta maior relação V / I do que o primeiro estágio da opção de exploração, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a opção de desenvolvimento será a primeira a tornar-se *deep in the money,* independente do valor da probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*):

---

[44] Embora para uma opção de compra composta financeira T1<T2 seja uma premissa óbvia, este não é o caso de uma opção de exploração. Um contrato de exploração cede o direito explorar uma área para uma firma por um período limitado, ao final do qual a firma pode declarar a comercialidade de eventuais descobertas. Desta forma pode-se considerar que na opção de exploração T1=T2. Em outras situações, o contrato de exploração é dividido em etapas, ao final das quais, a empresa é obrigada a devolver uma parte da área. Isso cria incentivos para sejam perfurados poços que auxiliem na definição da área que se deseja reter, fazendo com que a opção de perfuração do pioneiro (exploração propriamente dita) apresente expiração menor do que a da opção de desenvolvimento: T1<T2. Em outras situações, o investimento em poços pioneiros é obrigatório, o que reduz o problema do primeiro estágio à regra do VME e preserva a opção de desenvolvimento, caso haja uma descoberta.

$$\frac{V}{I_D} > \frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Então se $T_1 = T_2$ a condição ótima de exercício $V > V^{**} > V^{*}$ está garantida e a simplificação proposta $F = V - I_D$ é a solução verdadeira.

Se $T_1 < T_2$, cada uma das opções terá sua própria curva de gatilho (V^* / I) e a opção que apresentar maior relação V / I não será necessariamente a primeira a tornar-se *deep in the money*. O primeiro toque irá depender da relação entre os valores dos investimentos de exploração, desenvolvimento, da probabilidade de sucesso e da magnitude da relação $T_1 < T_2$.

Quatro combinações de resultados em relação às maturidades são possíveis para as opções do primeiro e segundo estágio da opção de exploração: *deep x deep; out x deep; deep x out* e; *out x out.* Novamente, se o segundo estágio estiver maduro (*deep x deep* e *out x deep*) a aproximação $F = V - I_D$ é o valor exato, e em caso contrário (*deep x out* e *out x out*), é um valor inferior ao verdadeiro F.

A regra de decisão será a seguinte:

- Se ocorrer o 1º caso (*deep x deep*), a opção deve ser exercida imediatamente;
- Se ocorrer um dos demais casos (*out x deep, out x out* ou *deep x out*) o decisor deve aguardar que os dois estágios estejam *deep* simultaneamente. Caso isso não ocorra*,* na data de expiração do primeiro estágio, o decisor dever então decidir sobre o exercício da opção com a regra do VME.

Então, a opção de composta E de exploração pode ser agora valorada com o instrumental de uma opção simples sobre uma opção de desenvolvimento F_D, preço de exercício $I_E + Ps.I_D$, gatilho $.V^{**}$ e expiração T_1. A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1 continua válida.

O exercício é necessariamente ótimo para a firma maximizadora do lucro se os dois estágios da opção de exploração estiverem *deep in the money* simultaneamente*.* Se os dois estágios têm a mesma data de expiração, essa condição ocorrerá necessariamente toda vez que a o primeiro estágio estiver

maduro. Caso o primeiro estágio da opção expire antes do segundo, o decisor deve verificar se as duas opções estão *deep in the money* para o exercício, em caso contrário deve aguardar. Por fim, nas expirações do primeiro e segundo estágios, o decisor decide com base na regra do VME e VPL respectivamente.

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P)

Este Capítulo tem como objetivo discutir os conceitos e modelos abordados ao longo da dissertação através de exemplos numéricos. Na Seção 5.1 são comparados e discutidos os resultados obtidos para uma opção de desenvolvimento com os Modelos de Negócio e Paddock, Siegel e Smith (PS&S). Na Seção 5.2 são comparados e discutidos os resultados obtidos com o Modelo de Exploração e com o Modelo de PS&S para um projeto exploratório. Na Seção 5.3 segue uma discussão sobre um problema de *portfolio*: Priorização de investimentos com OR.

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo

Nesta Seção aborda-se em detalhe o caso de um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo terrestre sob regime de concessão. Considere uma descoberta de acumulação de petróleo já delimitada denominada de ID-1, com 13,8 milhões de bbl de petróleo recuperáveis em 11 anos de produção. A oportunidade de investimento pode ser declarada comercial pela empresa a qualquer momento, em um prazo máximo de 1 ano. O órgão regulador então, avalia o projeto de desenvolvimento do campo e o cronograma proposto pela empresa. Caso seja aprovado, a empresa recebe a autorização para implantar o projeto e o direito de produzir na área por 20 anos. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O investimento atualizado necessário para o desenvolvimento da reserva (I_D) é de US$ 62,5 milhões (MM), e o valor presente da reserva desenvolvida (V) calculado em planilha eletrônica é US$ 69,2 MM. Com isso, o projeto ID-1 apresenta VPL de US$ 6,7 MM, o que de acordo com a regra clássica do VPL, é o suficiente para o investimento imediato. Mas a empresa ainda conta com a flexibilidade de adiar por até 1 ano a tomada de decisão, e observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida. De acordo com a teoria de OR, o decisor deve apenas investir imediatamente se o projeto estiver *deep in the money*, ou com um valor suficientemente alto (maior ou igual do que o gatilho) que torne desvantajosa a espera.

O valor a OR e do gatilho serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1, considerando inicialmente o Modelo de PS&S, e em seguida com o Modelo de Negócios. Para isso será necessário estimar os demais parâmetros necessários ao apreçamento da OR: σ, r_f e δ.

PS&S (1988, p.496-497) sugerem que a volatilidade (σ) do preço de uma reserva desenvolvida poderia ser estimada a partir de séries históricas, mas que infelizmente não são satisfatórias nem mesmo para os Estados Unidos, onde há um mercado mais desenvolvido. Apontam como solução utilizar o resultado de Gruy et al. (1982) que sugerem uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Com isso utilizam a volatilidade da taxa de variação do preço do petróleo como uma estimativa para a volatilidade da taxa de variação do preço de uma unidade de reserva desenvolvida. De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.400), a volatilidade do preço do petróleo entre os anos 60 e início dos 90 teria sido na ordem de 15%, mas estimativas da indústria podem ser maiores. Consideram que um range razoável seria entre 15% e 25%, por isso adota-se a média de 20% como caso base nesta dissertação. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%[45].

A taxa de dividendos do Modelo de PS&S é dada pela equação (72): $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$, tendo sido estimada de forma semelhante à descrita por Dixit e Pindick (1994, p.399). A taxa de declínio exponencial da reserva γ foi estimada ajustando-se uma curva exponencial à curva de produção do projeto ID-1. A reserva é recuperada de forma acelerada (são apenas 11 anos de produção) e com forte depleção, gerando uma taxa de declínio de 29% ao ano. O lucro π_t foi estimado a partir do fluxo de caixa, deduzidos custos operacionais (53%), *royalties* (13,4%) e impostos (18%, líquido de benefícios fiscais e depreciação). Todos estes percentuais são sobre a receita bruta:

$$\pi_t = (1 - Royalty - Opex).(1 - Tax) = (1 - 13{,}4\% - 53\%).(1 - 18\%) = 27{,}7\%$$

[45] A taxa livre de risco estimada foi a do país onde se encontra o projeto ID-1, pois a empresa detentora da OR também é sediada neste país, tomando e aplicando recursos no mercado interno.

O valor da reserva desenvolvida V_t considerada por PS&S (*op. cit.*) e Dixit e Pindick (*op. cit.*) foi a regra do 1/3 de Gruy et al (*op. cit.*). Considerando que o projeto ID-1 encontra-se em um mercado não desenvolvido como o americano e sujeito a um regime fiscal e regulatório diferente, é mais adequado estimar V_t a partir da equação (64): $V = q.B.P \Rightarrow q = V/(B.P) = 21{,}3\%$. Retornando à equação (72):

$$\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1) = 0{,}29.(0{,}277.P / 0{,}213.P - 1) \Rightarrow \delta_t = 10{,}4\%\ a.a.$$

O MGB neutro ao risco do preço de um barril de reserva desenvolvida do projeto ID-1 será então dado por:

$$dV_t = (r - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow dV_t = -0{,}044.V.dt + 0{,}2.V.dz$$

Este MGB apresenta uma tendência neutra ao risco bastante negativa, decorrente da elevada taxa de dividendos encontrada com o Modelo de PS&S. No mundo real, a tendência irá depender da relação entre a taxa ajustada ao risco μ exigida por um investidor que detivesse a oportunidade de desenvolvimento e a taxa de dividendos δ. De acordo com a equação (37):

$$\alpha - \pi = r_f - \delta \Rightarrow \alpha = r_f + \pi - \delta \Rightarrow \alpha = \mu - \delta$$

No caso do prospecto ID-1, se a taxa ajustada ao risco for de, por exemplo, 9%, significa que a tendência real é negativa: $\alpha = \mu - \delta = 9\% - 10{,}4\% \Rightarrow \alpha = -1{,}4\%$. Então, se $\mu < \delta$, o preço no mundo real de uma unidade de reserva desenvolvida tenderá a decrescer com o tempo. Mas isso só faz sentido se, de fato, a reserva estiver em depleção (com custos crescentes) ou se o preço do petróleo for decrescente, demais parâmetros constantes. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo de PS&S sobre o preço de petróleo ou sobre custos, não faz sentido que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a tendência de preço de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

Com este contra exemplo, argumenta-se que o Modelo de PS&S deve ser utilizado com cuidado para opções de desenvolvimento de campos de petróleo quando $\mu < \delta$.

Todos os parâmetros determinados, o valor da opção com expiração de 1 ano é de US$ 7,7 milhões, portanto, maior do que o VPL de 6,7 milhões. Isso significa

que, ao contrário da regra de decisão com o VPL, o projeto ID-1 não deve ser declarado comercial imediatamente. O prêmio da flexibilidade de diferir a decisão e observar como evolui o valor da reserva desenvolvida do projeto vale US$ 1 milhão. Se a expiração para a declaração de comercialidade fosse igual a 9 anos, o valor da opção de desenvolvimento sobe para US$ 9,7 MM e o prêmio da flexibilidade vale US$ 3 MM. Esse exercício dá a dimensão da sensibilidade do valor da OR de desenvolvimento ao tempo de expiração. A Figura 13 apresenta o valor da opção em função do valor presente da reserva desenvolvida do projeto com expiração de 1 ano, e a sensibilidade para a expiração de 9 anos.

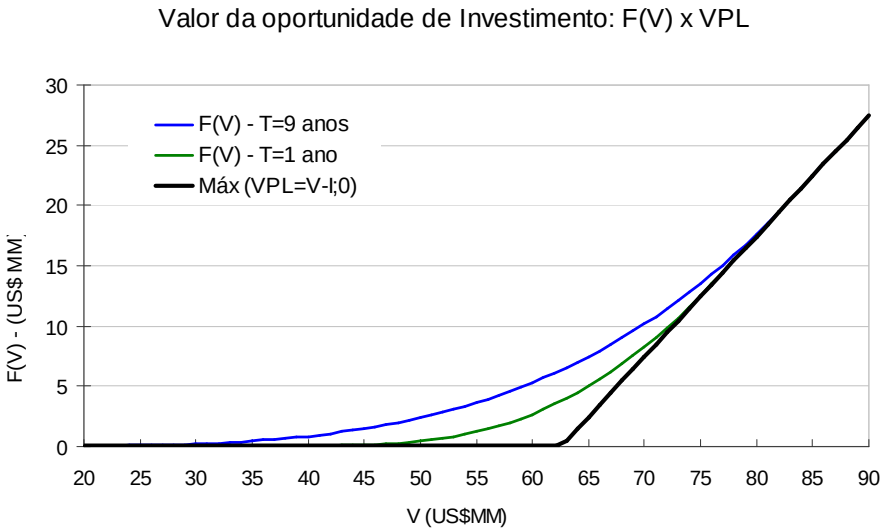

Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1 em função do valor presente da reserva desenvolvida.

Note que o valor da OR domina a regra de decisão do VPL até o ponto em que a curva da opção toca e se funde com a reta do VPL. Este ponto representa o valor crítico da reserva desenvolvida, situação em que o investimento deve ser imediato. Naturalmente que, se o decisor tivesse, por exemplo, 9 anos para decidir sobre o investimento, sua flexibilidade seria maior implicando num valor maior para a opção e seu valor crítico.

O valor crítico do projeto ID-1 é dado pelas equações (53) e (54), visto na Seção 3.5.1. Com o prazo de 1 ano para a expiração da opção de declaração da comercialidade, o valor crítico é de US$ 76,3 MM. Reduzindo progressivamente o prazo da expiração até que se torne zero, pode-se calcular como evolui o valor do

gatilho ao longo do tempo, todos os demais parâmetros constantes. A curva gerada é denominada de curva de gatilho (Figura 14). Observa-se que o valor crítico diminui progressivamente até a data de expiração, quando se torna igual ao valor preço de exercício (ou investimento, de US$ 62,5 MM).

Com esse conjunto de resultados, o decisor deve adiar a declaração de comercialidade do projeto ID-1 até que essa opção se torne *deep in the money* no prazo de 1 ano. Este exemplo deixa de forma clara a superioridade da valoração e decisão com OR.

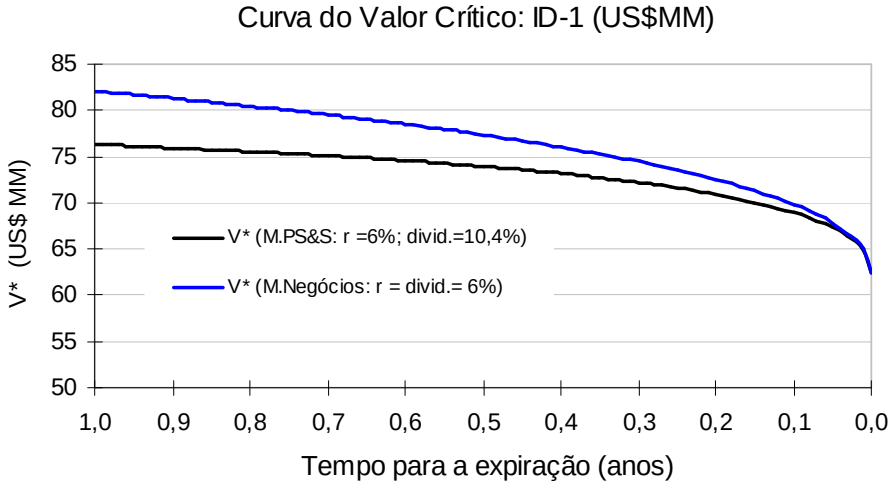

Figura 14 - Curva do valor crítico em função da expiração do Modelo de PS&S. Observa-se o efeito da redução da taxa de dividendos, obtida para o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (1993).

O exercício com o projeto ID-1 demonstrou a necessidade de uma quantidade significativa de informação e premissas na estimativa dos parâmetros para o cálculo da taxa de dividendos. Desta forma, outras alternativas mais simples para a estimativa de δ podem ser necessárias e/ou convenientes.

Dias (2004, p.101) destaca duas alternativas para estimar a taxa de dividendos. Como o preço de uma reserva desenvolvida é proporcional ao preço do óleo na boca do poço, a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.4.2):

$$Spot = Futuro(t).\exp(-(r_f - \delta).\Delta t)$$

Onde $Spot$ é o preço spot do óleo em t_0 e $Futuro(t)$ é o preço futuro do óleo para entrega na data t. A segunda alternativa é uma regra útil e prática para OR proposta por Pickles e Smith (1993). Estes autores concluem que, se ignorada a volatilidade de curto prazo, a taxa de conveniência δ em situações "normais" de mercado é equivalente à taxa livre de risco. Em situações de choques, esta taxa pode variar significativamente no curto prazo, mas tendem a um nível de equilíbrio no longo prazo, sendo portanto estável para projetos de longa duração como os de E&P. Assim os autores sugerem que, em OR, inicialmente se adote como valor "normal" da taxa de conveniência o valor da taxa livre de risco.

Adotar a sugestão de Pickles e Simith (*op. cit.*) desfigura o Modelo de PS&S. Adota-se então o Modelo de negócios onde o valor presente da reserva desenvolvida V é função linear do preço do petróleo e segue o MGB dado pela equação (66): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$, onde $V = q.B.P$ (64).

Reconsidere a opção de desenvolvimento do projeto ID-1, mas assumindo que a taxa livre de risco e a taxa de dividendo são iguais a 6%. O valor da opção de desenvolvimento com expiração de um ano sobe de US$ 7,7MM para US$ 8,9 MM, elevando o prêmio da flexibilidade de US$ 1 MM para US$ 2,2 MM. O valor do gatilho também aumenta, de US$ 76,3 para 82,0 MM, diminuindo a probabilidade de exercício de 75% para 70% e aumentando o tempo esperado de 5 para 7 meses.

Todos estes resultados são consistentes com a redução da taxa de dividendos, que aumenta o valor da opção, o prêmio da flexibilidade e o valor de gatilho, mas diminui a probabilidade do exercício. As Figuras 14 e 15 apresentam a comparação entre os resultados obtidos com PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (op.cit).

Os resultados obtidos são particulares da opção sobre o projeto ID-1, mas as relações descritas são gerais. Os dois critérios de avaliação da opção de desenvolvimento são válidos e consistentes, especialmente no que diz respeito à superioridade com OR sobre a técnica do VPL. A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. O Modelo de Negócios tem a vantagem de evitar o efeito indesejado da perda de valor do projeto não implantado quando a taxa de caimento da reserva é

muito elevada. No caso do projeto ID-1, gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto, o que é adequado dado a baixa relação entre o VPL e o investimento atualizado (10,7%). Entretanto, esse conservadorismo não altera o resultado da decisão no momento da expiração da opção, quando volta a valer a regra do VPL, mas exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

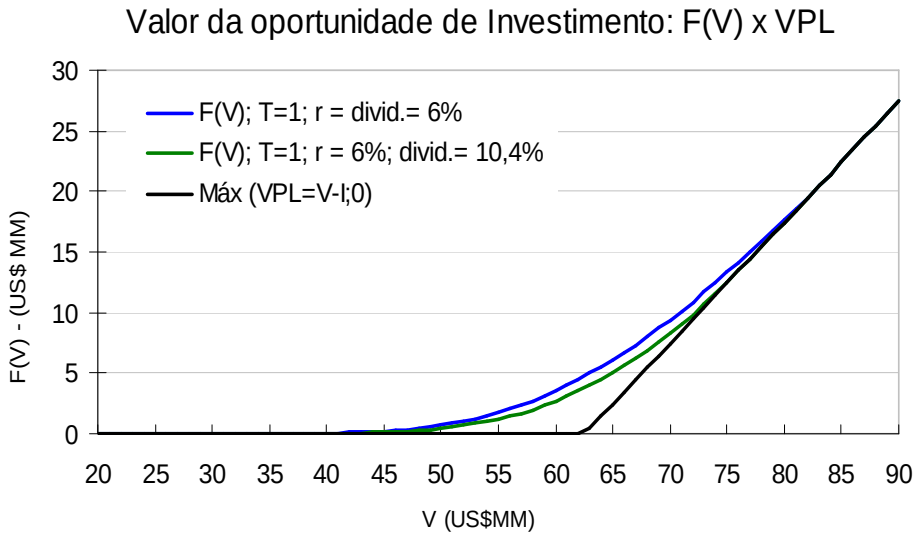

Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação do valor das opções do Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (*op. cit.*).

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S

Nesta Seção se aplica o Modelo de Exploração (MDE) elaborado na Seção 4.3.3 para o problema de decisão em um projeto de exploração. Os resultados são então comparados com a abordagem do Modelo de PS&S para exploração. Diferente do que foi feito na Seção anterior, as opções também são avaliadas na forma sugerida por Merton (1973, apud PS&S, 1988, p.489), ou seja, considerando o valor do ativo subjacente dividido pelo respectivo investimento.

Considere um prospecto exploratório terrestre denominado de IE-2 com um volume de petróleo a descobrir de 25 milhões de bbl recuperáveis. A oportunidade de investimento encontra-se sob um contrato de concessão dividido em dois períodos. Ao final do primeiro período que encerra em 1 ano, a empresa é obrigada a devolver 50% da área sob concessão e para isso, pretende perfurar o prospecto IE-2 para auxiliar a definição da área que irá reter. O segundo período de concessão

expira em 4 anos, ao final do qual, a empresa deve definir sobre o desenvolvimento de uma eventual descoberta e devolver ao órgão regulador o restante da área exploratória. Isso significa que a empresa tem duas decisões a tomar: Primeiro decidir no prazo de 1 ano se exercerá ou não a opção de perfuração do prospecto exploratório, e em seguida deve definir entre os anos 2 e 4 se irá exercer a opção de desenvolver, em caso de sucesso exploratório. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O poço exploratório (I_E) irá custar US$ 3,4 milhões (MM) e tem probabilidade de sucesso (Ps) de 20%. Em caso de um resultado positivo, o investimento de desenvolvimento (I_D) do novo campo é de US$ 82,3 MM, e o valor da reserva desenvolvida (V) é de US$ 126,4 MM. O indicador tradicional de decisão de investimento em um projeto de exploração é o VME, dado pela equação (74) $VME = Ps.(V - I_D) - I_E$, que apresenta valor de US$ 5,4 MM. Isso significa que, do ponto de vista tradicional, o prospecto exploratório pode ser perfurado imediatamente já que é positivo.

Do ponto de vista de OR, a decisão é uma opção composta de exploração. Como visto na Seção 4.3.3, o decisor apenas deve investir imediatamente se ambos os estágios da opção estiverem *deep in the money*. Nesta situação, caso ocorra a descoberta, o campo deve ser desenvolvido imediatamente, e em caso de fracasso exploratório, encerra-se o projeto. Caso um dos estágios não esteja *deep in the money* o decisor deve observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida e aguardar a condição necessária. Se até a expiração da primeira fase esta não ocorrer, a empresa deve decidir com a regra do VME. Em caso de descoberta, o decisor adquire a opção de desenvolvimento com nova expiração, que novamente só deve se deve ser exercida quando estiver *deep in the money*. Caso isto não ocorra até o final do novo período, na expiração volta a valer a regra do VPL.

O valor a OR e do valor crítico (gatilho) serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1. Os demais parâmetros necessários ao apreçamento das OR (σ, r_f e δ) são estimados de forma idêntica à Seção anterior (5.4.1). PS&S (1988, p.496-497) sugerem utilizar o resultado de Gruy

et al. (1982), os quais apontam uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Dixit e Pindick (1994, p.400) consideram o range de 15% a 25% como razoável para a volatilidade do preço do petróleo, por isso adota-se a média de 20%. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%. Dias (2004, p.101) destaca que a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.6.2). Pickles e Smith (1993) sugerem que em OR se use, inicialmente, a taxa livre de risco como o valor da *convenience yeld.* Segundo os autores, esta estimativa é razoável como equilíbrio de longo prazo.

A análise do prospecto IE-2 é realizada na forma *backward*, iniciando pela opção simples de desenvolvimento, que apresenta valor de US$ 44,1 MM e gatilho (V^*) de US$ 123,2 MM. Como o gatilho está abaixo do valor atual da reserva desenvolvida de US$ 126,4 MM, significa que a opção já se encontra *deep in the money*. Já a opção composta de exploração apresenta valor de US$ 5,5 MM com gatilho (V^{**}) de US$ 130,3 MM. Como o gatilho está acima do valor atual da reserva desenvolvida (US$ 126,4 MM), significa que não está madura. Neste cenário, a regra de decisão recomenda que a empresa não invista imediatamente, ao contrário, aguarde até que o primeiro estágio também esteja *deep in the money*.

A Figura 16 compara o valor das opções de desenvolvimento e de exploração em relação à regra de decisão dos seus pares VPL e VME. A diferença entre os valores das duas opções deve-se ao efeito de achatamento dos valores provocado pela ponderação do valor da “reserva” exploratória perfurada e desenvolvida com a probabilidade de sucesso. A Figura 17 apresenta o mesmo gráfico, mas com os valores das opções normalizados pelo investimento. Note que as curvas do VPL e do VME são graficamente coincidentes em decorrência da normalização. A Figura 18 apresenta as curvas de gatilho dos dois estágios em valores absolutos. Note que as duas curvas se cruzam em torno do tempo de 0,5 anos, separando duas regiões do gráfico. À esquerda deste ponto, a curva de gatilho do primeiro estágio (exploração *strictu sensu*) é maior do que a da curva do segundo estágio (desenvolvimento), enquanto que à direita ocorre o contrário. Isso significa que até 0,5 anos, toda vez que a exploração estiver *deep in the money*, o desenvolvimento também estará, podendo a opção composta ser exercida imediatamente. A partir de

então, o fato do primeiro estágio estar *deep in the money* já não é suficiente para o exercício imediato.

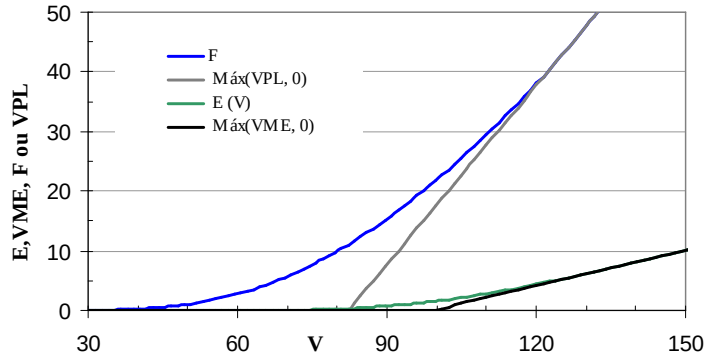

Figura 16 – Valor em US$ Milhões dos dois estágios da opção de exploração IE-2.

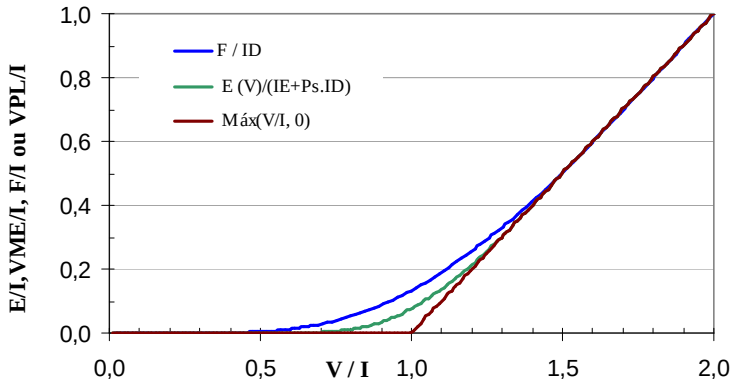

Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2, primeiro e segundo estágios.

Conforme discutido na Seção 4.3.3, o MDE se diferencia do Modelo de PS&S para exploração por tratar esta opção como composta, preservar o risco geológico e observar expirações diferentes para os dois estágios da opção, quando houver. Para permitir a comparação, admitiu-se que as taxas de dividendos são iguais nos dois modelos (6%), enquanto que os valores em US$/bbl de PS&S já estão convertidos para US$ MM nos gráficos. Assim o valor da opção com a abordagem de PS&S é obtido sobre o valor da reserva desenvolvida considerando como preço de exercício a soma dos investimentos em exploração e desenvolvimento. A opção de exploração apresenta valor de US$ 40,7 MM com gatilho de US$ 112,4 MM, estando desde já *deep in the money*.

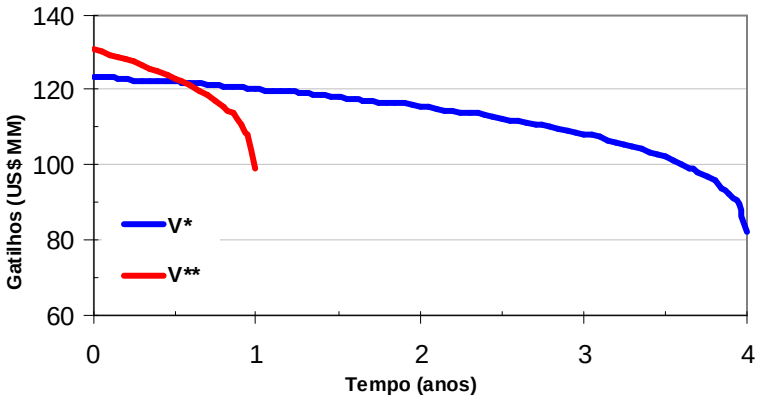

Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE.

A Figura 19 compara o gráfico do valor da opção de exploração do prospecto IE-2 calculado pelo MDE com a abordagem de PS&S. O fato do Modelo de PS&S não considerar a probabilidade de sucesso faz com que a opção exploratória tenha um valor exageradamente alto em relação ao MDE, mas com preço de exercício muito inferior (US$ 112,4 contra US$ 130,3 milhões do MDE), já que apresenta uma relação V/I mais elevada.

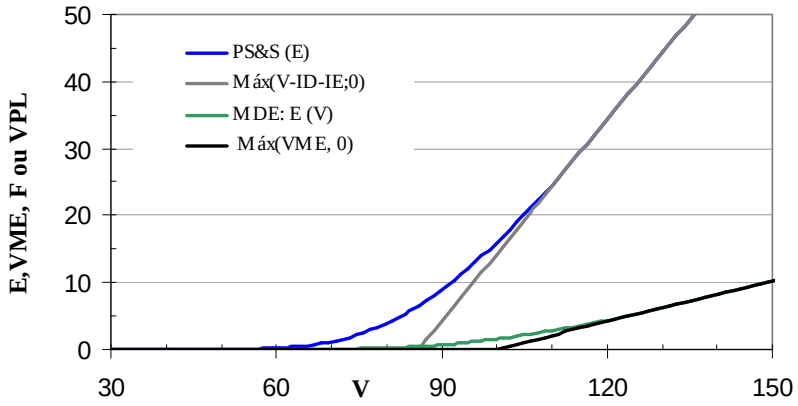

Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE.

A Figura 20 apresenta as curvas de gatilho geradas com os dois modelos. As curvas são paralelas pelo fato dos modelos estarem avaliando um único projeto, ou seja, todos parâmetros são iguais (r_f, σ, δ e T_1), exceto o preço de exercício.

Se o valor da opção é considerado normalizado, a curva do valor crítico normalizado (V^*/I) será única (Figura 21), conforme discutido na Seção 4.3.3 (Merton, 1973, apud PS&S, 1988, p.489). Então, como o modelo de PS&S apresenta maior relação V/I do que o MDE, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a abordagem de PS&S para a opção de exploração será a primeira a tornar-se *deep in the money*, independente do valor da probabilidade de sucesso ($Ps \in [0,1)$):

$$\frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Isso significa que no MDE o valor crítico da opção será sempre maior do que na abordagem de PS&S, portanto apresenta sua curva de valor crítico também sempre maior (Figura 20).

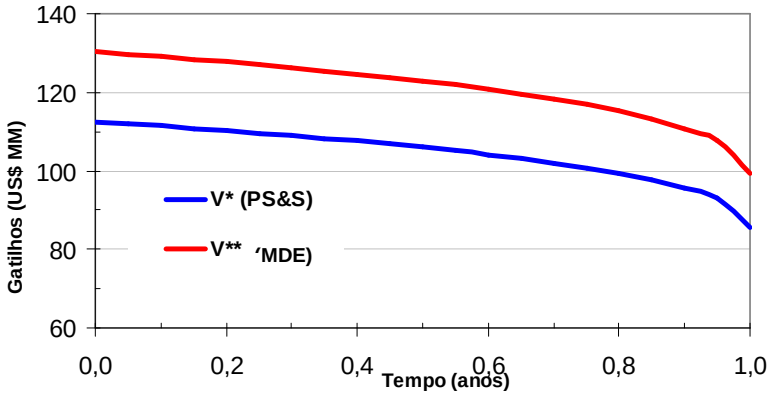

Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE.

A análise deste exemplo demonstrou vários aspectos teóricos discutidos na Seção 4.3.3. Em particular observou-se que o valor da opção exploratória quando tratada como opção simples é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. Também se verificou que ignorar a probabilidade de sucesso geológico implica em um valor crítico menor. Por fim, a diferenciação das expirações dos dois estágios

demonstrou que o exercício do segundo estágio não implica necessariamente no exercício do primeiro, gerando uma regra de decisão mais elaborada do que a de uma opção simples ou composta com uma única expiração. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

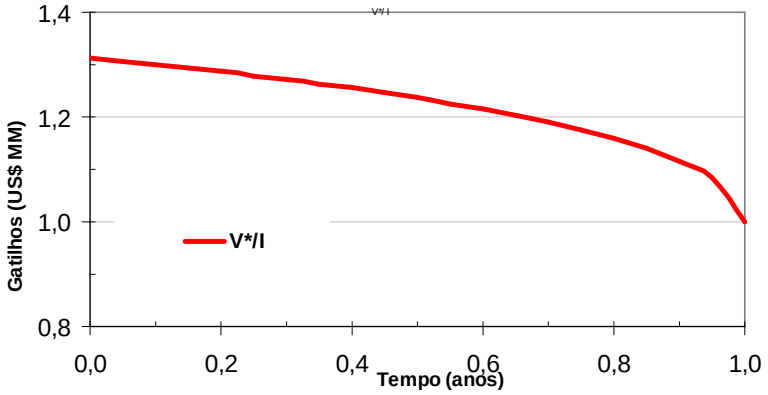

Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2.

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples

No processo de planejamento, uma empresa se depara periodicamente com o problema da priorização de investimentos em um *portfolio* de projetos. São muitos os critérios disponíveis ao decisor para a escolha do conjunto adequado de projetos (ver, por exemplo, Ross *et al*, 2002, Cap.6). Em geral envolvem indicadores tradicionais como o VPL, o *payback*, a TIR, o EVA (*Expected Value Added*), índices de rentabilidade como o VPL/IA (Investimentos Atualizados), etc. Estes indicadores são frequentemente utilizados de forma isolada ou em conjunto, compondo um *ranking* ou alguma função a qual o decisor deseja maximizar, sujeita a uma ou mais restrições como financeiras, de insumos, de equipamentos, etc. Mas por mais sofisticado que se torne este processo, pesa o fato de estar fundamentado em um fluxo de caixa, descontado ou não, que ignora as flexibilidades embutidas em um projeto, capturadas com OR.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43, ver Seção 2.2) relata o exemplo de uma companhia que tradicionalmente utiliza o VPL na aprovação dos

investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo. Realizou um teste *ex-post* da regra de decisão do VPL contra a regra de decisão de OR considerando dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um MGB. Os resultados revelam que o critério de OR apresenta um VPL *ex-post* para os projetos com VPL>>0 16,6% superior, enquanto que os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para significativamente positivo. Este resultado indica que um critério de priorização que considere a valoração com OR deve ser superior àqueles que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades.

Dias (1996, p.247) sugere a adoção de OR para a priorização de investimentos em uma carteira de projetos. Inicialmente, a empresa deve investir apenas naqueles projetos que já estão *deep in the money*. Caso seja necessário reduzir ainda mais investimentos devido a alguma restrição, recomenda que se utilize a volatilidade do preço do petróleo (comum a todos os projetos) como variável de priorização da carteira. Para isso basta aumentar progressivamente a volatilidade até que haja um subconjunto de projetos *deep in the money* que se enquadre na restrição[46].

Nesta Seção testa-se este critério para a priorização de projetos de um *portfolio* de oportunidades de investimentos em projetos de produção de petróleo, avaliados como OR simples – *call* americanas – e sujeitos a restrições orçamentárias. Adota-se o Modelo de Negócios (valor da reserva desenvolvida é função linear do preço do petróleo - Seção 4.3.1) combinado com o Modelo de PS&S para a estimativa da taxa de dividendos (Seção 4.3.2). A volatilidade será a do preço do petróleo, que segue um MGB.

Considere uma carteira com 27 de projetos de investimento em campos de petróleo sob regime de concessão. A Tabela 2 na sua metade esquerda lista o valor do projeto desenvolvido (V), o investimento atualizado (IA ou I), o VPL e a

[46] O ajuste da volatilidade pode ser feito de forma diferenciada. Por exemplo, poderia afetar apenas os projetos que estejam em um determinado país onde haja uma maior instabilidade regulatória. Também pode ser motivado por outras razões como, por exemplo, a expectativa do gerente, acionista ou *debitholder* sobre o comportamento dos preços futuros, o que afetaria o resultado da firma, seu valor de mercado e até sua capacidade de honrar seus financiamentos.

expiração para cada uma das oportunidades de investimento. De acordo com a regra clássica do VPL, dos 27 projetos, 23 apresentam-se positivos e por isso estariam aptos a serem implementados imediatamente.

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado.

Projetos		*V* em 2006	Invest. ou Preço Exercício	VPL (payoff)	Tempo de expiração	Gatilho V* em 2006	Valor da OR (F) (σ=20%)	Prêmio da flexibilid. (F-V) (σ=20%)	Deep in the money? (σ=20%)	Data esperada Exercício (σ=20%)	Probab. de Exercício (σ=20%)
		US$MM	US$MM	US$MM	Anos	US$MM	US$MM	US$MM		Ano	
1	P01	1083,2	450,4	632,9	3	629,6	632,9	0,0	Sim	2006	100%
2	P02	875,4	742,6	132,8	2	1006,6	149,8	17,0	Não	2007	75%
3	P03	243,0	215,6	27,4	2	292,2	35,5	8,0	Não	2007	66%
4	P04	1364,2	900,2	464,0	4	1285,3	464,0	0,0	Sim	2006	100%
5	P05	477,1	783,3	-306,2	4	1118,4	6,8	312,9	Não	2009	10%
6	P06	994,7	799,1	195,5	2	1083,2	203,5	7,9	Não	2007	84%
7	P07	1687,7	957,9	729,9	2	1298,4	729,9	0,0	Sim	2006	100%
8	P08	2995,7	1252,9	1742,7	5	1816,9	1742,7	0,0	Sim	2006	100%
9	P09	2302,0	892,8	1409,2	4	1274,7	1409,2	0,0	Sim	2006	100%
10	P10	492,3	258,5	233,8	3	361,4	233,8	0,0	Sim	2006	100%
11	P11	847,9	875,4	-27,5	3	1223,8	78,1	105,6	Não	2008	43%
12	P12	1102,9	260,2	842,8	3	371,5	842,8	0,0	Sim	2006	100%
13	P21	484,2	124,2	360,0	2	168,4	360,0	0,0	Sim	2006	100%
14	P22	38,4	78,9	-40,6	1	101,4	0,0	40,6	Não	2007	0%
15	P23	1105,6	285,1	820,5	3	398,6	820,5	0,0	Sim	2006	100%
16	P24	105,6	213,1	-107,4	3	297,9	0,2	107,7	Não	2009	2%
17	P25	55,3	39,2	16,1	2	53,2	16,1	0,0	Sim	2006	100%
18	P26	597,9	504,7	93,2	8	753,9	123,9	30,7	Não	2009	66%
19	P27	3059,7	485,2	2574,5	7	719,1	2574,5	0,0	Sim	2006	100%
20	P28	1906,0	795,6	1110,4	6	1167,7	1110,4	0,0	Sim	2006	100%
21	P29	241,6	85,7	155,9	7	127,0	155,9	0,0	Sim	2006	100%
22	P30	301,5	78,1	223,4	8	116,7	223,4	0,0	Sim	2006	100%
23	P31	29,5	28,9	0,6	3	40,4	3,3	2,7	Não	2008	49%
24	P32	37,6	36,7	0,9	3	51,3	4,3	3,4	Não	2008	50%
25	P33	59,2	13,9	45,3	2	18,8	45,3	0,0	Sim	2006	100%
26	P34	37,6	15,6	22,0	2	21,2	22,0	0,0	Sim	2006	100%
27	P35	17,6	3,5	14,1	4	5,0	14,1	0,0	Sim	2006	100%
	Total	22.543,4	11.177,3	11.366,1							

Mas se tratadas as oportunidades de investimento como OR, os resultados são bem diferentes. O valor do projeto desenvolvido é o preço do ativo subjacente (hipótese do MAD, Seção 3.3.1) e o VPL é o *payoff* do exercício da opção. Para o cálculo do valor da OR foi considerada a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993, Seção 3.5.1). A taxa de dividendos considerada foi de 4% a.a. (única para todos os projetos), tendo sido calculada de acordo com a equação (72)

do modelo de Paddock, Siegel e Smith (Seção 4.3.2). Foi considerada uma taxa de declínio de reserva 10%, custo de 30% e impostos de 34%. As datas e probabilidades esperadas de exercício forma calculadas de acordo com a Seção 3.7.

A volatilidade considerada é novamente a média do intervalo sugerido Dixit e Pindick (1994, p.400): 20%. Com estes dados foram calculados o preço de exercício antecipado (gatilho), o valor da OR, o prêmio da flexibilidade de adiar o investimento e a data provável de exercício de cada uma das OR. Os resultados obtidos estão dispostos na metade direita da Tabela 2. Observa-se que apenas 17 projetos encontram-se *deep in the money*, o que reduz o montante de investimento requerido pela regra do VPL em 25% , de US$ 9226,6 MM para US$ 6899,0 MM.

A Tabela 3 compara o efeito do aumento da volatilidade sobre o *portfolio* em análise em dois cenários distintos: 30% e 40%. Os dois cenários de volatilidade foram escolhidos somente com o objetivo de avaliar a eficácia desta estratégia de seleção de projetos.

O que se observa é que com volatilidade de 30% e 40% o numero de projetos *deep in the money* reduz de 17 para 15 e 13 projetos respectivamente. Então, no *portfolio* em questão, dobrar a volatilidade reduz a carteira em 4 projetos. O número de projetos cortados depende do perfil dos projetos da carteira e da intensidade da redução necessária. No caso em questão, a redução foi eficaz na medida em que elevar a volatilidade para 30% e 40% reduziu o investimento para 65% e 51% em relação ao requerido pela regra do VPL (100%) - Tabela 4.

A Tabela 4 permite uma avaliação clara da eficácia da estratégia de aumentar a volatilidade do preço do petróleo para a seleção de um *portfolio* de projetos de investimento. A partir da regra do VPL>0, compara a redução de investimento e VPL obtidos com os projetos selecionados com volatilidades de 20%, 30% e 40%. A terceira e quintas colunas revelam respectivamente a redução dos investimentos e do VPL da carteira com a priorização com OR. Com volatilidade de 40%, o *portfolio* selecionado manteve 84% do VPL>0 inicial gastando metade do investimento.

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo.

Projetos		Deep in the money ? σ=20%	Data esperada Exercício σ=20%	Probab. de Exercício σ=20%	Deep in the money ? σ=30%	Data esperada Exercício σ=30%	Probab. de Exercício σ=30%	Deep in the money? σ=40%	Data esperada Exercício σ=40%	Probab. de Exercício σ=40%
			(ano)			(ano)			(ano)	
1	P01	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
4	P04	**Sim**	2006	100%	Não	2007	100%	Não	2008	67%
7	P07	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	Não	2006	93%
8	P08	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	1%	**Sim**	2006	100%
9	P09	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
10	P10	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	6%	Não	2006	91%
12	P12	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	52%	**Sim**	2006	100%
13	P21	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
15	P23	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
17	P25	**Sim**	2006	100%	Não	2007	46%	Não	2007	72%
19	P27	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
20	P28	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
21	P29	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
22	P30	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
25	P33	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
26	P34	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
27	P35	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
6	P06	Não	2007	84%	Não	2007	100%	Não	2007	60%
2	P02	Não	2007	75%	Não	2007	100%	Não	2007	54%
3	P03	Não	2007	66%	Não	2007	100%	Não	2007	51%
14	P22	Não	2007	0%	Não	2007	100%	Não	2007	2%
24	P32	Não	2008	50%	Não	2008	0%	Não	2008	42%
23	P31	Não	2008	49%	Não	2008	0%	Não	2008	40%
11	P11	Não	2008	43%	Não	2008	83%	Não	2008	38%
18	P26	Não	2009	66%	Não	2010	45%	Não	2010	45%
5	P05	Não	2009	10%	Não	2009	39%	Não	2009	16%
16	P24	Não	2009	2%	Não	2009	100%	Não	2009	8%
	Total Sim	17			15			13		

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.

Critério de corte de projetos:	Investimento		VPL da carteira		VPL/IA
VPL >0	9226,6	100%	11847,7	100%	1,28
OR deep (σ=20%)	6899,0	75%	11397,2	96%	1,65
OR deep (σ=30%)	5959,6	65%	10917,1	92%	1,83
OR deep (σ=40%)	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
OR (σ=20%) com VPL	4929,7	53%	9229,9	78%	1,87
VPL/IA=1,39	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
VPL/IA=0,9	5001,8	54%	10187,3	86%	2,04

Na quinta linha da Tabela 4, apresentam-se os resultados de um critério misto: OR com volatilidade de 20% seguida da priorização com o VPL. A estratégia de combinar OR com o *V** também permitiu reduzir o investimento ao nível desejado (53%), entretanto se obteve um nível inferior de VPL: 78% do VPL>0, revelando-se como uma estratégia inferior.

Os resultados obtidos estão de acordo com o esperado. Utilizar OR como filtro para a seleção de projetos é um procedimento valoroso. Embora possa requerer cenários de volatilidade exagerados, o procedimento tem a vantagem de ser conservador na medida em que seleciona os projetos mais robustos ou mais *deep in the money*. Isso fica muito claro ao se analisar a coluna de VPL/IA da Tabela 4, onde a melhor relação é obtida com a máxima volatilidade.

Dixit e Pindick (1994, p.155, Figura 5.4) caracterizam graficamente a relação do valor crítico ou gatilho com a volatilidade: $\partial V^* / \partial \sigma > 0$. Então, se o investimento for considerado constante, aumentar o gatilho através do aumento da volatilidade implica num aumento proporcional na relação V^* / I. Admitindo que o investimento seja o valor atualizado ($I = IA$) e que o projeto esteja *deep in the money* ($V \geq V^*$), então:

$$VPL = V - I \Rightarrow V = VPL + I \therefore V \geq V^* \Rightarrow VPL + I \geq V^* \Rightarrow VPL \geq V^* - I \Rightarrow$$
$$\frac{VPL}{I} \geq \frac{V^* - I}{I} \Rightarrow \qquad \frac{VPL}{IA} \geq \frac{V^*}{I} - 1 \qquad (81)$$

Esse resultado significa que elevar o gatilho para selecionar projetos previamente *deep in the money,* implica no aumento da relação VPL / IA da carteira selecionada.

Este resultado é ainda um pouco mais geral: Dado um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica, os investimentos são constantes e o valor crítico normalizado V^* / I é desconhecido, selecionar projetos com VPL/IA tem efeito similar ao aumento da volatilidade na priorização com OR. Este critério é limitado, pois não se sabe se os projetos estão *deep in the money* ou não. Mas na ausência de uma valoração com OR, a seleção de projetos com o VPL/IA é uma aproximação inicial melhor do que, por exemplo, o VPL. No *portfolio* analisado com volatilidade de 20%, a razão VPL/IA

crítica ou de corte encontra-se entre 0,9 e 1,39, pois, o projeto P10 (VPL/IA=0,9) não está *deep in the money* enquanto que o P08 sim (VPL/IA=1,39).

As Figuras 22 e 23 exemplificam o efeito da priorização dos projetos com OR sobre a previsão de produção e investimentos com a elevação da volatilidade, observando-se as datas prováveis de exercício e a expiração das OR.

A regra do VPL positivo implica num cronograma de produção e investimento mais agressivos do que aqueles obtidos com OR, que são abrandados pelo gatilho da regra de decisão. Assim, se a firma deseja gerenciar seu planejamento minimizando a probabilidade de perda, deve investir considerando as datas de exercício apresentadas na Tabela 2. No caso de se desejar atender à demanda de um mercado (Figura 22) pode adequar seu cronograma adiando os projetos com menor probabilidade de exercício (com menor razão V^* / I) até as respectivas datas de expiração, gerando uma curva de produção ajustada à demanda projetada.

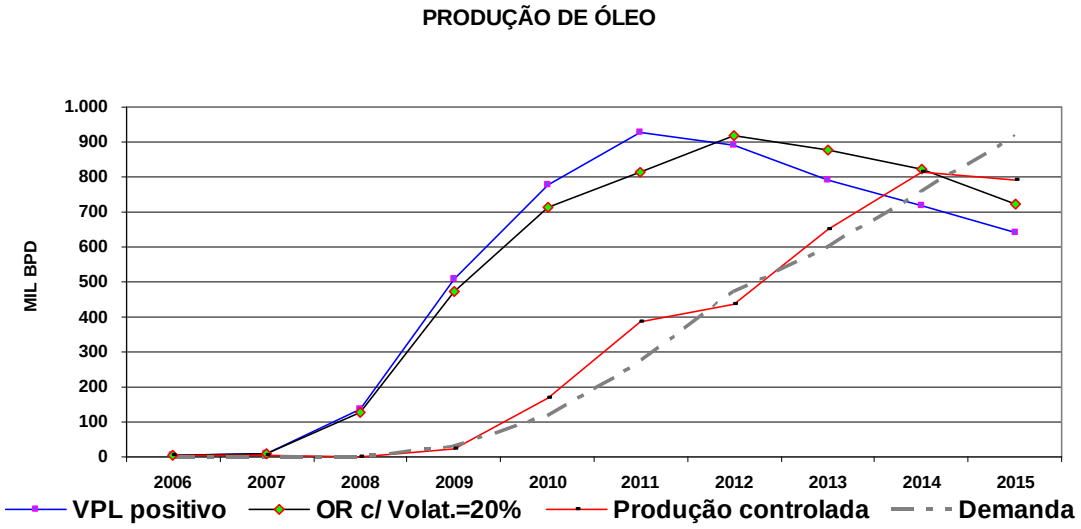

Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento.

A Figura 23 apresenta os investimentos dos projetos como fluxos e em valores nominais, ao contrário da Tabela 2 que apresenta os mesmos dados de forma pontual e atualizados para 2006. Uma observação mais cuidadosa revela que o efeito da priorização sobre o cronograma de investimentos se dilui quando os investimentos são visto como fluxos, mas esse é um efeito presente qualquer que seja o critério de priorização adotado. O perfil das curvas de investimento denota a

implantação dos projetos de desenvolvimento. Tipicamente, há um pico no dispêndio dos recursos durante a perfuração de poços e implantação das facilidades de produção, que então diminuem gradativamente com o início e declínio da produção, quando os investimentos visam amenizar o efeito da depleção das jazidas.

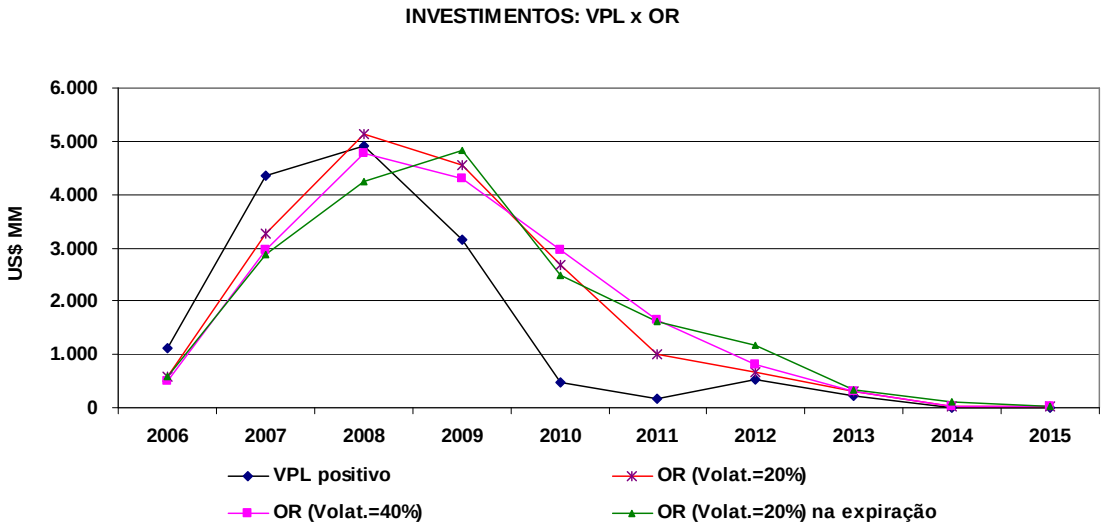

Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado.

Assim, aumentar a volatilidade de um *portfolio* de OR que dependem de uma variável estocástica comum é um procedimento mais eficaz do que o VPL ou o VPL/IA na priorização de projetos à medida que aumenta a robustez da carteira selecionada. Este procedimento também deve ser melhor do qualquer outro critério que se baseie unicamente em um fluxo de caixa positivo devido ao prêmio exigido para o exercício antecipado das opções. Não sendo possível a avaliação por OR, o decisor pode utilizar o *ranking* com VPL/IA como uma primeira aproximação do resultado com OR, embora isso possa levar a investimentos em projetos imaturos.

Por fim cabe ressaltar que, embora o resultado obtido com OR na priorização de investimentos seja animador, apresenta eficácia restrita. Priorizar investimentos da forma descrita, embora aumente o valor esperado do VPL *ex-post* do *portfolio*, considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) pode ser uma solução mais acertada.

6. Conclusões

A dissertação deixou clara a superioridade da Teoria de Opções Reais como ferramenta de decisão sobre investimentos em relação ao tradicional VPL e o VME.

Em uma opção de investimento/abandono, o VPL positivo/negativo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Na presença de incerteza e flexibilidades, o investimento/abandono imediato requer um prêmio maior do que o valor da espera pela evolução da incerteza.

Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir em um momento seguinte. Adiar só tem valor caso haja uma probabilidade positiva de uma perda irreversível, situação em que o investimento não deve ser feito imediatamente. Eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

O MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente a depender dos parâmetros considerados.

A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) apresenta-se como um limite inferior acurado para o valor verdadeiro de uma opção americana de compra com expiração finita, onde o ativo básico segue um MGB. A comparação desta aproximação analítica com a de Baroni-Adesi e Whaley (1987) para opções com expiração superior a um ano revelou que, para o conjunto de dados considerados pelos autores, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland apresentam uma performance superior ao não divergir a Raiz do erro Quadrático Médio - RQM.

A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. Os Modelos de Negócios e de Paddock, Siegel e Smith (1988) para opções de desenvolvimento são válidos e consistentes. Mas o modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para uma reserva não desenvolvida. Isso significa que até mesmo o processo real da reserva não desenvolvida pode ter tendência negativas: $\mu < \delta$. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo sobre o preço

de petróleo ou sobre custos, é questionável que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a depreciação de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

O Modelo de Negócios tem o mérito de ser de fácil aplicação, o que pode contribuir muito para a implantação da cultura de tomada de decisões com OR. Essa facilidade operacional ainda agrega outras vantagens: Permite lidar com facilidade com um grande número de projetos simultaneamente, oferecendo uma resposta rápida ao decisor. Entretanto seu uso deve ser limitado a decisões mais simples.

No caso do projeto ID-1, o Modelo de Negócios gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto. Esse conservadorismo exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

O valor normalizado da opção exploratória quando tratada como opção simples e sem o risco geológico (Modelo de PS&S) é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. A diferenciação das expirações dos dois estágios demonstrou que o exercício da opção requer uma regra de decisão mais elaborada. O fato de o primeiro estágio estar *deep in the money* não implica necessariamente no exercício imediato da opção de exploração, como ocorre quando a opção composta tem expiração única. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo mais apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

A priorização de investimentos com a elevação da volatilidade em um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica é um critério superior em relação aos critérios que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades. A elevação da volatilidade implica em selecionar os projetos mais robustos economicamente, em decorrência da elevação do gatilho para o investimento imediato.

Elevar o gatilho para selecionar projetos implica no aumento da relação VPL/IA da carteira selecionada. Assim, selecionar projetos com VPL/IA gera um resultado mais coerente com a teoria de opções reais sem garantir, obviamente, que os projetos selecionados estão *deep in the money.*

Entretanto, priorizar investimentos com o auxílio de OR conforme descrito é uma ferramenta limitada, pois considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) parece ser uma solução mais acertada.

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. Viu-se que esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Considerando a solução ii $V_U > I > V_D$ por simplicidade (note que $I > V_U > V_D$ o ativo é abandonado em qualquer cenário e que se $V_U > V_D > I$ o ativo não seria abandonado nunca) chegou-se a:

$$V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

A inequação (5) mostra em que situação ainda vale a pena não abandonar. Considerando o aumento do número de períodos e a modelagem da incerteza representados na Figura 3, então:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \Rightarrow \text{ em (5)}$$

$$\frac{(1+r).U.\delta}{r} > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \Rightarrow (1+r).U.\delta.q > [I.(r+q) - \delta.(1+r)].r \Rightarrow$$

$$\delta.(1+r).(U.q - r) > I.(r+q).r \Rightarrow \boxed{\delta > \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}}$$

Então se δ é maior do que o termo à direita na última desigualdade, o decisor deve esperar pelo período seguinte para tomar a decisão de abandono. Para que δ represente a situação em que o abandono imediato é a melhor opção deve-se inverter o sinal da desigualdade. Então, seja δ^* gatilho que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar, a partir da última desigualdade pode-se escrever:

$$\boxed{\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua

probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica

Portfolio replicante (r*eplicating portfolio approach*)

Uma terceira forma de calcular o valor da opção de investir em t_1 (por exemplo, em Copeland e Antikarov, 2001, p.90-95 e Trigeorgis, 1996, p.72-77) é montar um *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção com Δ ações de um ativo gêmeo (*twin security*) e B títulos livres de risco (*bonds*). O ativo gêmeo seria um ativo financeiro que replicasse perfeitamente os *payoffs* do projeto de investimento.

Então na Figura 6 o *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção é formado por Δ ações do ativo gêmeo e B títulos livres de risco:

$$\Phi_0 = \Delta.V_o + B \therefore \Phi_1 = \Delta.V_1 + B.(1 + r_f)$$

Como o *portfolio* Φ replica os *payoffs* da opção, pode-se escrever:

(i) $\Delta.\overline{V}_U + B.(1 + r_f) = F_U$

(ii) $\underline{\Delta.\overline{V}_D + B.(1 + r_f) = F_D}$

(i) - (ii) $\Delta.(\overline{V}_U - \overline{V}_D) = F_U - F_D \Rightarrow \Delta = \dfrac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}$

Que é o resultado (11) obtido anteriormente. A quantidade de ativo livre de risco B pode ser obtida a partir das equações (i) ou (ii) acima:

$$B = \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} = \frac{F_D - \overline{V}_D.\Delta}{R_f}$$

Sejam U e D como definido anteriormente: $\overline{V}_U = U.V_0$ e $\overline{V_D} = D.V_0$. Considerando que o *portfolio* Φ replica a opção, então pelo argumento de não arbitragem, o preço da opção em t_0 é o mesmo preço do *portfolio* Φ em t_0:

$$E_0(F_1) = \Phi_0 = \Delta.V_0 + B \Rightarrow E_0(F_1) = \Delta.V_0 + \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U$$

Este último resultado é a equação (12), obtida por avaliação neutra ao risco. Logo substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14):

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)} \quad (14)$$

Programação dinâmica

A programação dinâmica é uma ferramenta geral de otimização dinâmica particularmente útil para lidar com incerteza. Consiste em reduzir uma seqüência de decisões em duas alternativas mutuamente excludentes: o valor da decisão imediata e a função de valor que contempla todas as decisões subseqüentes (Dixit e Pindick, p.93-94). Assim, em cada o período, o decisor simplesmente escolhe a estratégia de maior valor: exercer a opção (decisão imediata) ou esperar pela decisão subseqüente. Foi exatamente este o processo utilizado nos Exemplos 1 e 2 da Seção 2.2, escolhido por seu apelo intuitivo.

Se o horizonte de tempo é finito, essa ferramenta pode ser aplicada no penúltimo período, revelando o valor da opção neste momento. De posse destes dados, agora a mesma técnica pode ser aplicado no período imediatamente anterior, e assim retroceder-se até o presente, num processo denominado de *backward induction*. Se ao contrário, o horizonte de tempo é infinito, a situação fica relativamente simplificada por sua natureza recursiva que, a cada momento, leva a um problema idêntico ao original. Isso permite a caracterização teórica da solução e em alguns casos, soluções analíticas.

Reconsidere a Figura 6. O primeiro passo consiste em calcular o valor da opção de investir no segundo período é dado por $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e por $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$ nos estados *up* e *down* da natureza, onde $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$ e $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$. Retrocedendo para o primeiro período, o valor esperado de todos os cenários futuros possíveis é dado por $E_0(F_1) = [q.F_U + (1-q).F_D]/R$, onde q e $1-q$ são as probabilidades reais e R é a taxa de desconto apropriada, ajustada ao risco da OR. Cabe ao decisor então decidir entre o investimento imediato ou esperar pelo

segundo período: $Max[V_0, E_0(F_1)]$. Esta valoração foi feita considerando o mundo real, mas poderia ter sido elaborada no mundo neutro ao risco, utilizando-se então as probabilidades neutras ao risco q e $1-q$ dadas por (14) e a taxa livre de risco R_f. Então o valor da opção será dado por $Max[V_0, E_0(F_1)]$ onde $E_0(F_1) = [p.F_U + (1-p).F_D]/R_f$ (13), resultado idêntico aos anteriores.

A Programação Dinâmica é a segunda técnica extensivamente utilizada no livro de Dixit e pindick (1994) para valorar OR, alternativamente a ativos contingentes. Dixit (op.cit, p.120-121) discute o relacionamento entre as duas abordagens, vantagens e desvantagens, argumentando que os dois métodos juntos podem lidar com uma grande variedade de aplicações, embora uma ou outra possa em algum caso ser mais adequada.

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito

Seja $f(x)$ uma função e uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ que convirja para $f(x)$ num certo intervalo de convergência, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...$$

Derivando membro a membro verifica-se que as séries das derivadas de ordem n convergem no mesmo intervalo, então se pode calcular a_n para qualquer n em torno de $x = a$. Por exemplo, para $n = 3$:

$$f'''(x) = (a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...)''' \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (0 + 0 + 0 + 3.2.1.a_3.(x-a)^0 + ... + n.(n-1).(n-2).a_n.(a-a)^{n-3} + ... \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (3.2.1.a_3.1 + ... + 0 + ...) \Rightarrow f'''(a) = 3!.a_3 \Rightarrow a_3 = f'''(a)/3!$$

Generalizando escreve-se: $a_n = f^n(a)/n!$, onde f^n é a *n-ésima* derivada de $f(x)$, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$\Delta f(x) = \frac{f'(a)}{1!}.\Delta x + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(\Delta x)^n + ...$$

Fazendo com que $x \to a$, se obtém a expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f'(a).dx + \frac{f''(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t, então:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt$$

Aplicando a regra da cadeia e admitindo que as diferenciais parciais mistas sejam iguais (Teorema de Young), obtém-se:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 \qquad \text{já que} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}.dt.dx$$

Considerando a Expansão de Talyor (28), dF será dado por:

$$dF = [\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt] + \frac{1}{2!}.[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt] + \frac{1}{3!}.[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 ...$$

Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \Rightarrow dx^2 = a^2(x,t).dt^2 + 2.a(x,t).dt.b(x,t).dz + b^2(x,t).dz^2$$
$$dx^2 = 0 + 2.a(\cdot).b(\cdot).dt.\varepsilon.\sqrt{dt} + b^2(\cdot).(\varepsilon.\sqrt{dt})^2 \Rightarrow dx^2 = 2.a(\cdot).b(\cdot).\varepsilon.dt^{3/2} + b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt$$
$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e:}$$

$$dx^3 = dx^2.dx = b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt.(a(\cdot).dt + b(\cdot).\varepsilon.\sqrt{dt}) \Rightarrow$$
$$dx^3 == a(\cdot).b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt^2 + b^3(\cdot).\varepsilon^3.dt^{3/2} \Rightarrow \; dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - E^2(\varepsilon) = 1 \Rightarrow V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - (0)^2 = 1 \Rightarrow \; E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32)$$

Logo:

$$E(dz^2) = E(\varepsilon^2.dt) = E(\varepsilon^2).dt = 1.dt \Rightarrow E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33)$$ e:

$$V(dz^2) = V(\varepsilon^2.dt) = V(\varepsilon^2).dt^2 \therefore dt^2 = 0 \Rightarrow V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2.dt = dz^2 \sim N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).dt] \Rightarrow$$

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson

Na Seção 3.1.4 abordou-se a associação do Processo de Poisson ao Processo de Ito, o que faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta (Poisson) - (26): $dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq$.

Com isso, determinar o processo de uma função $H(x)$ exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86). Inicialmente, observa-se que a partir de (26) pode-se escrever (Brandão, Cap.3, Seção 2.7, p. 3-4):

$$dH = dH_{continuo} + dH_{discreto} \quad (83)$$

A parte continua pode ser obtida com o Lema de Ito apresentado anteriormente (35):

$$dH_{continuo} = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz]$$

Quanto à parte discreta $(dH_{discreto})$, suponha que o evento de Poisson ocorra em um intervalo $(t, t+dt)$, então $x_{t+dt} = x_t + u.g(x,t)$, onde u é o tamanho do salto que também pode ser aleatório. Com isso, $dH_{discreto}$ será:

$$dH_{discreto} = H(x_t + u.g(x,t), t) - H(x_t, t)$$

Retornado os dois resultados anteriores a (83):

$$dH = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz] + H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)$$

Aplicando o valor esperado, obtém-se:

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)] \Rightarrow$$

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E_u\{\lambda.dt.[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)]\} \quad (84)$$

Onde E_u é o valor esperado do tamanho do salto *u*, dado pela diferença do valor de $H(x,t)$ em pontos discretos diferentes.

Referências Bibliográficas

BARONI-ADESI, G; WHALEY, R.E. Efficient Analitic Approximation of American Option Value. **Journal of Finance**, 42, p.301-320. June 1987.

BERNANKE, B.S. Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment. **Quarterly Journal of Economics**, 98, p.85-106. February 1983.

BJERKSUND, P; EKERN, S. Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: From "Last Chance" to "Wait and See" Strategies. **Financial Management**, 19, p. 65-83. Autun 1990.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. Closed-Form Approximation of American Options. **Scandinavian Journal of Management**. 9, p.87-99, 1993.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. American exchange options and a put-call transformation: a note. **Journal of Business, Finance and Accounting**. 20, p.761-764. 1993b.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. **Closed Form valuation of American Options**. Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, Department of Finance and Management Science, Bergen, Norway. April 2002, 17p. Disponível em: http://www.nhh.no/for/seminars/previous/2002-fall/251002.pdf, acesso em 18/08/2006.

BLACK, F; SCHOLES,M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy.** 81, p. 637-654. 1973.

BRANDÃO, L. Tradução livre do Cap. 3 e 5 do livro Investment under Uncertainty, DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **,** 3rd ed, 1994, disponível em http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/, acesso em 03/04/2006.

BROADIE, M; DETEMPLE, J. American Options Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods. **Review of Financial Studies**. 9, n. 4, Winter, 1996, p.1211-1250.

COPELAND, T; ANTIKAROV. V. **Real Options: a practioner's guide**. 1st ed. USA: Texere, 2001, 372p

DETEMPLE, J. **American-Style Derivatives – Valuation and Computation** Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton (USA), 2006, 232p.

DIAS, M.A.G. **Investimento sob incerteza em Exploração e Produção de Petróleo.** 1996. 470p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. **Journal of Petroleum Science & Engineering**. 44, p.93-114. 2004.

DIAS, M.A.G. **Opções Reais Hibridas com Aplicações em Petróleo**. 2005. 509p. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. e ROCHA, K.M.C. Petroleum Concessions with Extendible. Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, Wassenaar-Leiden (Holanda), June 1999. Disponível versão revisada de janeiro de 2001 em: http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/. Acesso em: 17/04/2005.

DIAS, M.A.G. **Mean Reversion with Jumps Models**, p.3-4. Disponível em: http://www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm/. Acesso em: 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **First Hitting Time and Expected Discount Factor**. Disponível em: http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html. Acesso em : 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **Real Option Theory for Real Assets Portfolios: the Oil Exploration Case.** Working Paper, Depart. of Industrial Engineering, PUC-Rio, presented at the 10th Annual International Conference on Real Options, New York, June 2006, 37 p.

DICKEY, D.A., FULLER, W.A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with Unit Root. **Econometrica**, 49, 1057-1072. 1981.

DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **Investment under Uncertainty**. 3rd ed. USA: Princenton University Press, 1994, 468p.

GEMAN, E; EL KAROUI, N; ROBERT, J.C. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing. **Journal of Applied Probability**. 32, p.443-458. 1995.

GRUY, H.J; GRAB,F.A; WOOD, J.W. Determining the value of oil and gas in the ground. **World Oil CXCIV**. p.105-108. 1982.

HAUG, E.G. **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**. McGraw-Hill, 1998, 232 p.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. 5th ed. USA: Prentice Hall, 2003, 744p.

LAUGHTON, D.G., The management of flexibility in the upstream petroleum industry. **Energy Journal**. 19, p.83-114. January 1990.

MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**. 7, p.77-91. 1952.

MACMILLAN, L.W. Analytic Approximation for the American Put Option. **Advances in Futures and Options Research**. 1, p.119-139. 1986.

MCDONALD, R; SIEGEL, D. The Value of Waiting to Invest. **Quarterly Journal of Economics**, p.707-727. November 1986.

MCDONALD, R; SCHRODER, M. A parity result for American options. **Journal of Computational Finance.** Working paper, Northwestern University, 1990.

MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science.** 4, p.141-183. 1973.

MERTON, R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. **Journal of Financial Economics**. 3, p.125-144. 1976.

MERTON, R.C. (1990). **Continuous-Time Finance**. Blackwell Publishers Inc, Cambridge, MA, 1990 (revised edition, 1992), 734 pgs.

METCALF, G.E; K.A. HASSET (1995). Investment under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walks and Mean Reversion. **Journal of Economic Dynamics and Control**. 19, p.1471-1488. November 1995.

MOSZKOWICZ, V.N. **Validação do Critério de Avaliação de Projetos Utilizando a Teoria das Opções Reais**. 2003. 157p. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

MYERS, S.C. Determinants of Corporate Borrowing. **Journal of Financial Economics**. n. 5, p.147-175. November 1977.

PADDOCK, J.L; SIEGEL, D.R; SMITH, J.L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. **Quarterly Journal of Economics**. 103, p.479-508. August, 1988.

PICKLES, E., SMITH, J.L. Petroleum property evaluation: a binomial lattice implementation of option pricing theory. **Energy Journal**. 14 (2), p.1-26. 1993.

PINDYCK, R.S.; D.L. RUBINFELD. 1995. p.545-546. **Microeconomics**. Prentice-Hall, Inc., third edition, 1995, 700 p.

PINDYCK, R.S. The Long-Run Evolution of Energy Prices. **Energy Journal.** 20(2), p.1-27. 1999.

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JAFFE, J.F. **Finanças Corporativas**. 2ª ed. Editora Atlas, 2002, 776p.

SAMUELSON, P. Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuates Randomly. **Industrial Management Review**. p.41-49. Spring, 1965.

SCHWARTZ, E.S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **Journal of Finance.** 52(3), p.923-973. July, 1997.

SHIMKO, D.C. **Finance in Continuous Time. A Primer**. 1st ed. **Local** Kolb Publishing Company, 1992, 110 p.

TRIGEORGIS, L. **Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. 1st ed. 5th printing. USA: The MIT Press, 1996, 427p.

VARIAN, Hal R. **Microeconomia**. 6a ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003, 778p.

VOLLERT, Alexander. **A stochastic control framework for real options in strategic valuation**. 1st ed. USA: Birkhauser Boston, 2003, 266p.

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo

Os seguintes termos foram adotados nessa dissertação com o significado que se segue. Definições formais ou completas devem ser buscadas em literatura específica.

Acumulação de petróleo: Qualquer volume de petróleo acumulado em subsuperfície, independente de ser recuperável técnico ou economicamente.

Adensamento de malha: Programa de desenvolvimento complementar de um campo de petróleo, onde novos poços são perfurados entre os pré-existentes com a finalidade de aumentar o volume de petróleo a ser recuperado.

Bloco: Área delimitada geograficamente por um órgão regulador onde uma companhia de petróleo tem o direito de desenvolver atividades de exploração e produção. Objeto de um contrato de cessão de direitos de exploração ou produção.

Cabeça do poço: Local onde se encontra os equipamentos de superfície instaldos em um poço.

Campo de petróleo: Acumulação de petróleo em produção.

Contrato de concessão: Instrumento legal pelo qual um órgão regulador cede e define as condições de uso de uma área para exploração e produção em um regime de concessão.

Delimitação: Conjunto de atividades que se seguem ao descobrimento de uma acumulação de petróleo cujo objetivo é definir o volume de petróleo descoberto e sua produção.

Depleção: Perda de pressão em um reservatório em decorrência da produção.

Desenvolvimento: Conjunto de atividades que se seguem à delimitação, cujo objetivo é instalar a infra-estrutura necessária para a produção de uma acumulação de petróleo.

Desenvolvimento complementar: conjunto de atividades complementares ao desenvolvimento de um campo cujo objetivo é aumentar o volume de petróleo recuperado. O adensamento de malha é um exemplo.

Exploração: Conjunto de atividades responsáveis pela identificação e teste de situações geológicas que podem revelar a existência de uma acumulação de petróleo. A exploração num sentido mais amplo engloba a fase de exploração propriamente dita e a fase de delimitação.

Explotação ou Produção: Fase operacional de um campo de petróleo, ou seja, em que ocorre a produção contínua de petróleo. Durante a fase de produção podem ser realizados projetos de desenvolvimento complementar.

Fator de recuperação: Percentual do volume de petróleo acumulado em subsuperfície que pode ser recuperado de forma econômica.

Poços: Obra de engenharia resultante da perfuração de uma situação geológica de interesse. Há diferentes tipos de poços, por exemplo: Pioneiro ou exploratório, de delimitação, de produção, de injeção de fluidos ou gás, etc.

Poço seco: Qualquer poço de exploração, delimitação ou produção perfurado na expectativa de se tornar produtor de petróleo, mas cujo resultado foi negativo.

Porosidade: Volume de espaço vazio em uma rocha reservatório preenchido por petróleo, água ou gás.

Preenchimento, fator de: Proporção de uma rocha trapa preenchida por petróleo;

Prospecto exploratório: Situação geológica não perfurada cujo estudo indica a possibilidade de acumular petróleo. Todo prospecto visa testar uma ou mais trapas.

Recuperação primária e secundária, fator de: Representa o percentual do volume de petróleo existente em uma acumulação de petróleo que pode ser recuperado do reservatório. A recuperação primária é aquela que pode ser obtida sem técnicas especiais como a pressurização do reservatório. A secundária refere-se ao volume adicional que pode ser recuperado com o auxílio de tais técnicas.

Regime de concessão: Regime regulatório para a atividade de exploração e produção de petróleo onde uma das principais características é a participação governamental (*royalty*) como uma fração constante da receita bruta ou produção.

Reserva: Há vários tipos de reservas, de uma forma genérica, refere-se a um volume de petróleo cuja existência já é comprovada e cuja recuperação é economicamente viável.

Reserva não desenvolvida: Reserva cujo desenvolvimento ainda não foi realizado, ou seja, sem a infra-estrutura necessária à sua produção.

Rocha reservatório: Rocha cuja porosidade permite a acumulação de petróleo.

Saturação de óleo: Refere-se ao percentual da porosidade de uma rocha que é ocupado por óleo. A saturação de óleo, gás e água de um reservatório soma 100%.

Sísmica 2D e 3D: A sísmica refere-se a um conjunto de atividades cujo objeto é o imageamento da disposição e relação das rochas em subsuperfície. A sísmica 2D refere-se à técnica de imageamento em duas dimensões, enquanto que a 3D refere-se ao imageamento em três dimensões.

Sonda: Nesta dissertação, refere-se ao equipamento responsável pela perfuração de poços. A sonda pode ser terrestre ou estar instalada em uma plataforma ou navio. Também

Trapa: Refere-se a uma situação geológica favorável à acumulação de petróleo. Trata-se de uma armadilha natural capaz de aprisionar o petróleo que migra em subsuperfície. A trapa associadas a outros fatores como, por exemplo, a existência de reservatório, a existência de petróleo em uma área, etc., pode constituir-se em um prospecto exploratório.

Escola de Pós-Graduação em Economia - EPGE
Fundação Getúlio Vargas

Opções Reais em Decisões de Investimento em Exploração e Produção

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Finanças e Economia Empresarial

Aluno: André Avila Scartezini

Banca Examinadora:
Marco Antonio Guimarães Dias (Orientador; PUC-RIO/DEI)
Marco Bonomo (EPGE/FGV)
José Paulo Teixeira (PUC-RIO/DEI)

Rio de Janeiro
2006

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, afetadas pela minha ausência parcial durante os últimos três anos, colaboraram com seu desprendimento, tolerância e compreensão para a conclusão do meu curso de mestrado em finanças e economia empresarial.

Em especial, agradeço a Silvana Pedroni por seu apoio e companheirismo.

A Marco Antonio Guimarães Dias pela orientação.

A Marco Bonomo pela atenção despendida.

A Adauto Carneiro Pereira, pela oportunidade e incentivo.

A Adelson Antônio da Silva, por viabilizar a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores, minha admiração.

Dedico este trabalho à Petrobras.

Rio de Janeiro, julho de 2006.

Resumo

Este trabalho faz uma revisão dos principais conceitos que definem a Teoria de Opções Reais. Tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob incerteza aplicado a problemas de Exploração e Produção de petróleo (E&P). Foram priorizados modelos simples que podem ser facilmente implantados no dia a dia de uma empresa, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Os modelos discutidos são elaborados com Movimento Geométrico Browniano, que pode ser uma aproximação razoável para a modelagem de preços, a depender dos parâmetros considerados. Em particular, é apresentado um modelo de opção composta para exploração, que se revela mais apropriado por considerar o risco geológico e os estágios da opção com expiração diferenciada. A priorização de investimentos com auxílio de OR para uma carteira representativa de um *portfolio* de projetos de Produção também é testada, resultando numa maior relação VPL / Investimento da carteira selecionada.

Abstract

This work reviews the main concepts of real option theory. It intends to discuss the investment decision problem under uncertainty in petroleum Exploration and Production (E&P). Simple models including the classic Padock, Siegel and Smith (1998) were focused because they may be easily implemented in petroleum companies. All the models discussed consider the Geometric Brownian Motion (GBM) which may be a reasonable approach to modeling prices since appropriated parameters are considered. In particular, a compound option model to exploration and development is presented. It reveals to be more appropriated, mainly when considering both the geologic risk and stages with distinct expiration dates. The selection of projects with real options is also tested in a representative portfolio of development projects, which results in an increasing NPV-investment ratio of selected portfolio.

Sumário

Agradecimentos 3

Resumo 5

Abstract 6

Símbolos, Abreviaturas e Siglas 10

Lista de Figuras 12

Lista de Tabelas 13

1. Introdução 14

2. Conceitos Básicos de Opções Reais 18

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza 18

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money* 20

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias 30

2.4. Taxonomia de opções reais 33

2.4.1. Classificação gerencial 36

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração 38

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica 41

2.6. Introdução à valoração de opções reais 43

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) 44

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*) 48

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados 49

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo 50

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos 53

3.1. Processos estocásticos em finanças 53

3.1.1. Movimentos Brownianos 54

3.1.2. Reversão à média 58

3.1.3. Processos de saltos de Poisson 63

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*).....63

3.1.5. Reversão à média com saltos.....64

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras.....66

3.2. Lema de Ito.....67

3.3. Modelando o ativo subjacente.....70

3.3.1. Marketed Asset Disclaimer (MAD).....70

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente.....71

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos.....74

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB.....74

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica.....79

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração.....81

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB.....82

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993).....87

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas.....89

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção.....91

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P.....93

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo.....94

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*.....98

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P.....101

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão.101

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S).....104

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração.....109

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P).....119

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo 119

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S 125

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples ..131

6. Conclusões 139

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono 142

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica 144

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito 147

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson.....150

Referências Bibliográficas.....151

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo 156

Símbolos, Abreviaturas e Siglas

$a.a.$ = ao ano

B = Volume ou reserva de petróleo

bbl = unidade de volume de um barril, corresponde a cerca de 160,5 litros.

Cov = Operador de covariância

δ = Dividendo ou fluxo de caixa de um período t qualquer.

dz = Incremento de Wiener

$E\ (x)$ = Valor esperado.

FCD = Fluxo de Caixa Livre Descontado ou simplesmente Fluxo de Caixa Descontado.

FCL = Fluxo de Caixa Livre, não descontado.

I = Investimento.

IA = Investimento Atualizado.

μ = Taxa de desconto ajustada ao risco, dada, por exemplo, pelo CAPM.

MAB = Movimento Aritmético Browniano

MAD = *Market Asset Disclaimer*

MGB = Movimento Geométrico Browniano

MM = Abreviatura para milhão.

MRM = Movimento de Reversão à Média

$N(\mu,\sigma)$ = Distribuição normal de média μ e desvio padrão σ

OR = Opção Real ou Opções Reais

p = probabilidade neutra ao risco

q = probabilidade real ou objetiva

π_t = lucro (ou *payout*) no período t

π = prêmio de risco

r = Taxa de desconto não especificada.

$R = 1 + r$

r_f = Taxa de juros livre de risco (*risk free*).

$R_f = 1 + r_f$

$\rho_{AB} ou\ \rho(AB)$ = correlação de A com B

$\sigma_A\ ou\ \sigma(A)$ = desvio padrão de A

$\sigma_{AB} ou\ \sigma(AB)$ = covariância de A com B

$\sigma_A^2\ ou\ \sigma^2(A)$ = variância de A.

US$ = uma unidade de dólar americano.

VPL = Valor Presente Líquido.

$V(x)$ = Operador de variância

Lista de Figuras

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período. 22
Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período. 26
Figura 3 - Evolução do FCL 30
Figura 4 - Classificação das OR (adaptado de Trigeorgis, 1996). 35
Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003). 36
Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar. 46
Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. 55
Figura 8 – MGB. 57
Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999). 65
Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005). 95
Figura 11 – Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Dias, 2005). 103
Figura 12 – Opção de exploração com duas etapas. 113
Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1. 122
Figura 14 - Curva do valor crítico. 123
Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação dos Modelos. 125
Figura 16 – Valor dos dois estágios da opção de exploração IE-2. 128
Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2. 128
Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE. 129
Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE. 129
Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE. 130
Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2. 131
Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento. 137
Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado. 138

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor “verdadeiro” estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%. 86

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado. 133

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo. 135

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.135

1. Introdução

A valoração econômica para a tomada de decisão sobre projetos de investimento é afetada por incertezas econômicas, técnicas e pelas flexibilidades embutidas nos projetos. A incerteza econômica é exógena ao projeto afetando, por exemplo, a demanda, o preço do produto, os custos operacionais, a tributação, etc. A incerteza técnica é endógena ao projeto, relacionando-se a temas como tecnologia, capacidade de produção, desempenho, etc. As flexibilidades embutidas nos projetos por sua vez, criam a faculdade gerencial sobre o empreendimento, permitindo escolhas como o momento adequado (*timing)* para a decisão sobre o investimento, a alternativa de produção, a expansão, a parada temporária, a mudança de escopo, o abandono, o desinvestimento, etc. São escolhas disponíveis ao decisor na gerência de seus projetos e ativos reais, sendo por isso denominadas de opções reais (OR).

O termo opção real foi sugerido por Myers (1977) ao destacar que oportunidades de crescimento de uma empresa podiam ser vistas como opções dependentes de futuros investimentos discricionários da firma[1]. A abordagem de valoração econômica que contempla esses aspectos é denominada de teoria das opções reais e recentemente de análise de investimento sob incerteza.

A teoria de opções reais pode ser vista como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real (VPL) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência e quantidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos em toda a dissertação.

Assim, uma opção real é um direito, por isso uma opção e não uma obrigação, de realizar uma ação sobre um ativo real ou projeto, a um custo chamado preço de exercício, por um período de tempo pré-determinado, denominado de vida da opção. O preço de exercício é o custo do investimento, pois ocorre na expectativa

[1] O trabalho de Myers denominado “Determinants of Corporate Borrowing” tem o mérito de destacar que a visão de investimentos como opções poderia ter como a mais importante contribuição, a valoração de ativos reais (p.170). E estava certo.

de uma recompensa futura, seja pela geração de lucro ou pela redução de uma perda corrente no fluxo de caixa.

A maioria das decisões de investimentos possui características em comum, mas que ocorrem em diferentes intensidades. Destacam-se: O fato do investimento ser totalmente ou parcialmente irreversível; a incerteza sobre o retorno do investimento e a flexibilidade de se adiar a decisão em troca de se obter mais informações.

A teoria ortodoxa de decisão de investimento através do VPL (Valor Presente Líquido) não contempla as implicações decorrentes da interação entre essas três características que afetam a decisão ótima do investidor. O VPL não captura as flexibilidades disponíveis ao tomador de decisão, e por isso sistematicamente subestima o valor dos projetos (Copeland e Antikarov, 2001**,** p. 4-5). Além disso, o VPL ignora a possibilidade de perda, isso significa que o decisor que o utiliza ou é indiferente a este risco (neutro ao risco) ou realmente crê que pode se desfazer do investimento pelo seu valor original atualizado. A avaliação por opções reais se propõe a corrigir estas distorções.

Dixit e Pindick (1993, p. 6-7) discutem sobre a sub-avaliação implícita no VPL. Argumentam que o VPL assume que o investimento é reversível (de alguma forma poderia ser desfeito e recuperado) e representa uma decisão do tipo agora ou nunca. Embora muitas decisões de investimento tenham essas características, a maioria é pelo menos parcialmente irreversível e pode ser postergada, o que afeta profundamente a decisão de investir. Quando a firma exerce sua opção de investir, elimina de forma irreversível a possibilidade de esperar por novas informações que afetam o resultado do investimento e o momento ótimo para o investimento.

O valor da flexibilidade perdida é um custo de oportunidade que deve ser incluído no custo do investimento. Esse custo de oportunidade é muito sensível à incerteza associada ao futuro valor do projeto. Talvez isso ajude a explicar por que a teoria neoclássica de investimento falha empiricamente ao descrever o comportamento de investimento da firma. Seja por superestimar o efeito da taxa de juros e da política tributária sobre o nível de investimento, seja pelas empresas somente aprovarem seus projetos com VPL positivo descontando-os a taxas muito superiores ao seu custo de capital (*hurdle rates*) ou em cenários de *stress.* Essa

mesma incerteza também explica por que as firmas permanecem em seus negócios por longos períodos de prejuízo.

A faculdade gerencial de adaptar as decisões futuras às condições de mercado e às ações dos competidores aumenta o valor das oportunidades de investimento da firma, tanto por aproveitar o potencial de melhora dos projetos quanto por limitar perdas em relação às expectativas inicias de um gerenciamento passivo. Trigeorgis (1996, p.4) argumenta que a assimetria resultante da adaptabilidade gerencial revela um critério de investimento expandido ou estratégico com dois componentes: o tradicional VPL (estático, passivo) e o valor criado pela flexibilidade e interações estratégicas.

A abordagem por opções para o problema de valoração tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e das interações estratégicas. Esse valor manifesta-se tipicamente através das opções reais inerentes às oportunidades de investimento de capital, tendo como ativo subjacente o valor esperado descontado dos fluxos de caixa operacionais (Trigeorgis, 1996, p.4).

Assim uma oportunidade de investimento equivale a uma opção de compra financeira (*call*). De forma semelhante às financeiras, o valor das opções reais depende de pelo menos seis importantes variáveis: O valor do ativo de risco subjacente (projeto ou ativo real), o desvio padrão e os dividendos que podem ser obtidos através deste, o preço de exercício (valor do investimento ou desinvestimento), o tempo de expiração da opção e a taxa livre de risco (sob a hipótese de não arbitragem).

Essa dissertação tem como objetivo discutir o problema da decisão de investimento sob o ponto de vista teórico da ótica de opções reais, aplicados a problemas de Exploração e Produção de petróleo. Foi priorizado o foco em modelos simples que possam ser amplamente utilizados e facilmente implantados no dia a dia de uma empresa de petróleo. Para isso, o trabalho foi dividido em cinco partes. No Capítulo 2 são revistos os principais conceitos de opções reais em tempo discreto, incluindo o valor da redução da incerteza, a nova regra de decisao, taxonomia, valoração e a transição para tempo continuo. No Capítulo 3 amplia-se a discussão sobre opções reais para tempo e estados contínuos, incluindo processos estocásticos, Lema de Ito, modelagem do ativo subjacente, equações diferencias de

valoração, soluções analíticas, não analíticas e a aproximação de Bjerksund e Stensland (1993), além da simetria *call put*. No Capítulo 4 são discutidos dois modelos de valoração de opções simples de investimento em Exploração e Produção de petróleo, incluindo o clássico de Paddock, Siegel e Smith (1988). Também é desenvolvido um modelo de opção composta, denominado de Modelo de Exploração. Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se alguns estudos de caso onde os modelos discutidos no capítulo anterior são comparados, além da discussão de priorização de investimentos com opções reais a partir de uma sugestão de Dias (1996). No Capítulo 6 são revistas e discutidas as conclusões.

A abordagem dessa dissertação é heurística. Eventuais erros são de responsabilidade do autor. Referências sobre todos os assuntos abordados são citadas ao longo de todo o texto.

Dias (2005, p.26-43) apresenta um bom resumo sobre a evolução bibliográfica do conhecimento na área de opções reais desde seus precursores na década de 70, passando pelos principais artigos das décadas de 80 e 90 bem como importantes livros textos e coletâneas de artigos publicados até a atualidade. Em seguida passa em revista ao crescente uso de opções reais em empresas e outras instituições, discutindo inclusive procedimentos para sua difusão e consolidação como ferramenta de trabalho. Vários exemplos verídicos disponíveis na literatura são apresentados, abordando tanto o uso de opções reais internamente às empresas como externamente nas negociações entre companhias e, por exemplo, com órgãos reguladores.

2. Conceitos Básicos de Opções Reais

A teoria de opções reais pode ser visto como um problema de otimização sob incerteza. Na maioria dos casos práticos deseja-se maximizar o valor de um projeto ou ativo real dado pelo VPL (função objetivo) sujeito a opções relevantes (flexibilidades), incerteza de mercado (preços, custos, etc.) e incertezas técnicas (por exemplo, a existência, quantidade e qualidade de petróleo em uma possível descoberta). Os conceitos básicos desta teoria são revistos e discutidos neste capítulo.

2.1. A espera para a decisão com a redução da incerteza

De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.8-9), investimentos são custos afundados quando são específicos da firma ou da indústria, como por exemplo, campanhas de publicidade ou equipamentos industriais especializados. No último caso, embora possa haver um valor de revenda, assim como ocorre com os equipamentos não específicos (veículos, computadores, etc.), os investimentos estão sujeitos à depreciação e outras forças de mercado que os tornam pelo menos parcialmente irreversíveis. De forma similar, ativos que possuem a opção de serem abandonados ou suspensos, incorrem em custos e ou investimentos irreversíveis caso essas opções sejam executadas.

Considerando a irreversibilidade dos investimentos e a incerteza relacionada aos fluxos de caixa futuros, a flexibilidade de esperar pela redução da incerteza pode gerar valor. A proposta de valoração pela teoria de opções reais é justamente capturar e quantificar este valor**.** Uma firma que tem uma oportunidade de gerar fluxos de caixa positivos ou, ao contrário abandonar fluxos de caixa negativos operantes, deve comparar os custos destas decisões com os possíveis benefícios de se esperar pela revelação de novas informações que reduzem ou eliminam as incertezas existentes no presente. Esse é o valor da espera pela redução da incerteza, permitindo a escolha ótima do decisor.

Copeland e Antikarov (2001**,** p.73-74) chamam a atenção para o fato de que o VPL poderia representar uma opção real particular, aquela que assume a inexistência de flexibilidade na tomada de decisão. Uma expressão usual para o VPL de um projeto em tempo discreto é dada por:

$$VPL = -I + \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$$

Na identidade acima I é o investimento, FCL é o fluxo de caixa livre e r a taxa de desconto. Nota-se que apenas um dos muitos caminhos possíveis ao FCL entre o início e o fim de um projeto é explicitamente considerado. A abordagem clássica do VPL usa somente a informação disponível no presente ignorando qualquer incerteza existente, recomendando o investimento caso seu valor seja positivo:

Regra de decisão do VPL: $Máx_{t=0}[0, E_0(V_T) - I]$ onde $E_0(V_T) = \sum_{t=1}^{N} \frac{E(FCL_t)}{(1+r)^t}$.

O VPL ignora a incerteza, portanto desconsidera a possibilidade de perda em qualquer outro cenário que não seja o seu mundo determinístico. Isso significa que decidir com o VPL é ser indiferente ao risco (neutro ao risco), ou realmente crer que se pode desfazer do investimento pelo seu valor atualizado. A primeira alternativa seria considerar diferentes cenários para o projeto, cada qual com probabilidade P_j e valor presente $V_{T,j}$, sendo o valor esperado do projeto dado por: $E_0(V_T) = \sum_j P_j . V_{T,j}$. Essa técnica equivale a considerar uma árvore de decisão com a mesma regra do VPL, ou seja, que a decisão de investir é do tipo agora ou nunca e é feita com base em um valor esperado. Isso significa pressupor que o decisor ainda é neutro ao risco, pois embora possa reconhecer e quantificar a incerteza de um projeto através de cenários, ele se mostra indiferente ou passivo ao decidir com o valor monetário esperado (VME). Somente um novo paradigma pode levar o decisor à uma escolha que contemple o risco em suas decisões: Esperar pela redução da incerteza até que esta se torne equivalente à decisão imediata.

A abordagem por opções reais considera que a decisão é tomada quando a informação sobre o estado da natureza é revelada. Entre todas as alternativas mutuamente excludentes, escolhe-se a melhor. Assim, por exemplo, o valor do exercício (*payoff*) de uma de uma opção de investimento (*call* européia) é dado pelo valor esperado dos máximos (e não o máximo entre os valores esperados):

Regra de decisão de uma *call* européia: $E_0[Máx_{t=T}(0, V_T - I)]$

O valor das três abordagens na presença da flexibilidade de esperar somente será o mesmo se $E_0(V_T) = V_T$. Ou seja, na ausência de incerteza, o valor esperado em t_0 do valor futuro é igual ao valor futuro atualizado. De outra forma, decidir antecipadamente com o VPL equivale a supor que o investimento é reversível, ou seja, na medida em que um cenário desfavorável se concretize, o decisor sairia do negócio recuperando seu capital, o que não é real (Dixit e Pindick, 1994, p.28).

2.2. A nova regra de decisão com opções reais: Projetos *deep in the money*

Como visto, a escolha ótima do decisor consiste em optar entre a decisão imediata ou esperar pela redução da incerteza, quando possível. Se nesta análise o decisor conclui que agir imediatamente é mais valioso do que esperar, diz-se que a opção real está madura ou *deep in the money*, e ele "mata" a opção ao agir. Se há maior valor na espera, o decisor deve adiar a decisão e manter a opção real ativa ou "viva".

Para se entender em que condições (regra de decisão) exercer ou manter uma opção real é mais vantajoso para a firma, são apresentados dois exemplos de decisão simples em tempo discreto: Em que condição a firma deve investir em um novo projeto e; Em que condição não deve abandonar um ativo real que apresenta VPL negativo.

Os exemplos são apresentados com a abordagem de valor esperado em árvores binomiais com nós de decisão e nós aleatórios. A utilização do valor esperado requer taxas de descontos adequadas ao ativo que está sendo descontado. Então para descontar o ativo subjacente usa-se uma taxa e ao descontar a opção outra. Além disso, a taxa de desconto de cada ativo deve variar ao longo da árvore com a incerteza ou estados da natureza. Este é um problema que não ocorre nos exemplos, pois são considerados apenas dois períodos e dois estados da natureza. Além disso, a taxa de desconto para a opção e para o ativo subjacente é considerada a mesma, mas essa premissa só é correta no mundo neutro ao risco, discutido na Seção 2.6.1. Portanto a taxa de desconto r utilizada nos dois exemplos é a rigor a taxa livre de risco (*risk free* - r_f) e probabilidade real q

é a rigor a probabilidade neutra ao risco p . Como os exemplos visam explorar as regras de decisão e o mundo neutro ao risco é discutido somente na Seção 2.6.1, preservou-se a notação r e q.

Exemplo 1: Opção de investimento com a flexibilidade de esperar por um período. Considere um projeto de investimento postergável por 1 período, cujo investimento I gera um fluxo de caixa V. No primeiro período t_0, o decisor pode escolher entre investir imediatamente e gerar um *payoff* positivo ou postergar a decisão para o segundo período (ver árvore de decisão - Figura 1). Se o decisor não tem a flexibilidade de adiar a decisão de investimento, ele encontra-se no ramo inferior da árvore e sua decisão de investir é com base na regra tradicional do VPL. Mas se o decisor dispõe da flexibilidade esperar e decidir sobre o investimento em t_1, ele pode escolher adiar a decisão para o segundo período (ramo superior da árvore). Em t_1 pode então observar o estado da natureza que se revela com as novas estimativas de Fluxo de Caixa Livre Descontado (FCD) do projeto. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*), o FCD do projeto apresenta valor V_U e caso contrário, V_D (estado da natureza pior ou *down*). Note que os estados da natureza V_U e V_D são os mesmos em qualquer ramo da árvore e que $V_U > V_D$. Após esperar, qualquer que seja o estado da natureza, a decisão de investir também é feita com base na regra do VPL. Demonstra-se em seguida em que condições o decisor racional que maximiza a riqueza da firma escolhe esperar por t_1 ou investir imediatamente.

Quando o decisor não dispõe da flexibilidade de esperar, sua decisão é do tipo investir agora ou nunca (ramo inferior). Considerando as probabilidades (reais) q e 1-q dos estados da natureza *up* e *down*, o VPL do projeto (V_0) em t_0 é dado pelo valor esperado do fluxo de caixa de t_1 ($E_0(V_1)$) descontado a uma taxa r apropriada, subtraído do investimento e somado do fluxo de caixa livre δ (dividendo) em t_0:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \text{, onde } E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} - I + \delta \qquad (1)$$

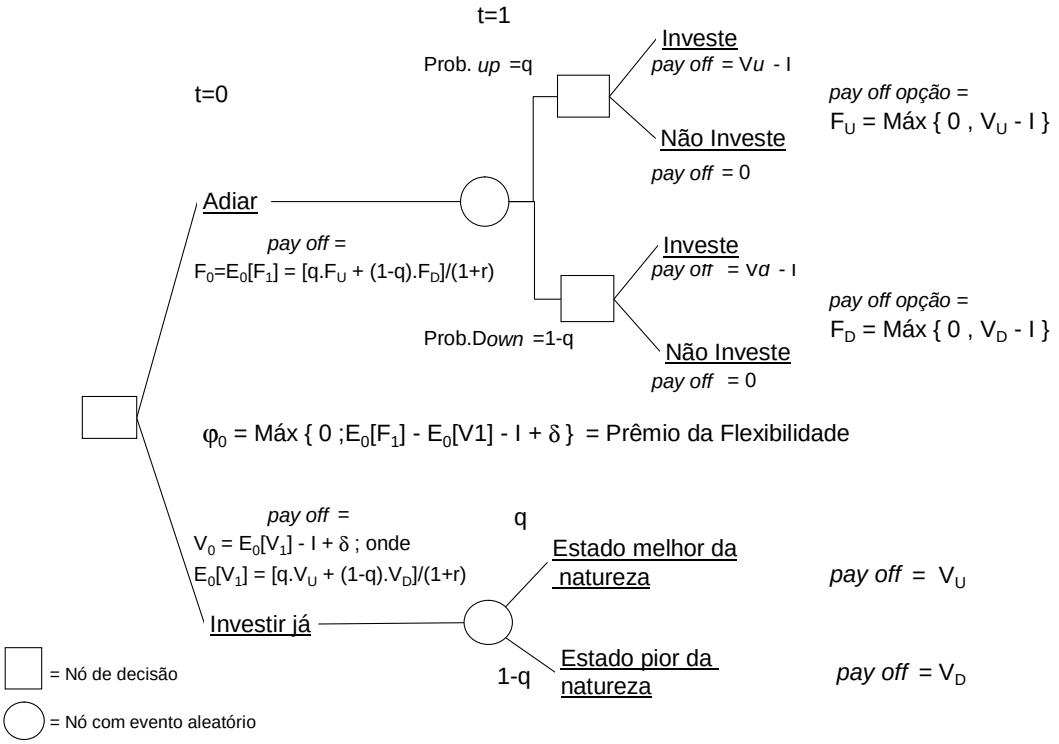

Figura 1 - Árvore binomial de uma opção de investimento com a flexibilidade de adiar por um período.

A regra de decisão será investir se $V_0 > 0$ ou desistir do projeto caso contrário. Mas com a flexibilidade de esperar, o decisor pode postergar a decisão e exercer a opção de investir em t_1 caso o projeto tenha *payoff* positivo ($V_1 - I > 0$). Portanto os *payoffs* da opção (F_1) nos dois estados da natureza possíveis em t_1 são:

$$F_U = Máx[0, V_U - I] \qquad \text{e} \qquad F_D = Máx[0, V_D - I]$$

A regra de decisão é investir se $F_1 > 0$. Nessa condição, diz-se que a opção está *in the money* e caso contrário, *out of the money*. O valor esperado de F_1 em t_0 é:

$$F_0 = E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} \qquad (2)$$

A decisão entre investir imediatamente ou esperar para decidir em t_1 é feita coma a escolha da alternativa de maior valor entre (1) e (2). Portanto, adiar a decisão de investir é mais valioso se:

$$(2) > (1) \Rightarrow (2) - (1) > 0 \Rightarrow E_0(F_1) - V_0 > 0$$

E o valor ou prêmio da flexibilidade de postergar (φ_0) a decisão de t_0 para t_1 será:

$$\varphi_0 = Máx\{0; E_0(F_1) - V_0\} = Máx\{0; \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} - \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + I - \delta\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = Máx\{0; \frac{q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)}{1+r}\} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{(1+r)}.Máx\{0; q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r)\}$$

A partir dessa equação pode-se explorar em que condição qualquer uma das variáveis torna a flexibilidade de postergar valiosa:

$$\varphi_0 > 0 \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) > 0$$

Pode-se também definir em que condições o decisor torna-se indiferente entre investir em t_0 ou esperar para decidir em t_1:

$$(2) = (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) = 0$$

Ou pelo contrário, definir em que condições investir imediatamente é mais vantajoso:

$$(2) < (1) \Rightarrow q.(F_U - V_U) + (1-q).(F_D - V_D) + (I-\delta).(1+r) < 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \quad (3)$$

Quando a relação (3) se verifica, diz-se que a opção está *deep in the money*, ou seja, o VPL (V_0) é de tal forma positivo que não vale a pena esperar. O custo de sacrificar o lucro imediato δ é maior do que o benefício esperar e tomar a decisão ótima após observar o estado da natureza em t_1.

Considerando q, I, r e δ dados, a inequação (3) será verdadeira a depender das relações entre F_U e F_D. Existem 3 situações a considerar: $F_U = F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D = 0$; $F_U > 0$ e $F_D > 0$:

i) Supondo que: $F_U = F_D = 0 \Leftrightarrow V_D < V_U < I \Rightarrow E_0(V_1) < I \Rightarrow I - E_0(V_1) > 0$. Ou seja, a flexibilidade de esperar não tem valor, pois o decisor não investiria em t_1 qualquer que fosse o cenário revelado. Então, qual é a condição necessária para investir em t_0? Em (3):

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \;\Rightarrow\; q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} > (I-\delta) \Rightarrow \frac{q.(V_U) + (1-q).(V_D)}{(1+r)} - I + \delta > 0 \;\Rightarrow E_0(V_1) - I + \delta > 0 \Rightarrow$$

a) $V_0 > 0$ ou b) $\delta > I - E_0(V_1) > 0$

Então se a flexibilidade de esperar não tem valor ($F_U = F_D = 0$), a opção de investir reduz-se à regra tradicional do VPL ($V_0 > 0$) e o dividendo δ deve ser suficientemente positivo: $\delta > I - E_0(V_1) > 0$.

ii) Supondo que : $F_U = V_U - I > 0$ e que $F_D = 0$ ($V_D - I < 0 \Rightarrow I - V_D > 0$). Ou seja, em t_1 a opção está *in the money* no estado melhor da natureza e *out of the money* no estado pior da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) - (I-\delta).(1+r) > 0 \Rightarrow q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$q.(V_U) + (1-q).(V_D) > (I-\delta).(1+r) + q.F_U \Rightarrow \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} - I + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.V_U + (1-q).V_D - I.(1+r)}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow$$

$$\frac{q.(V_U - I)}{1+r} + \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > \frac{q.(V_U - I)}{(1+r)} \Rightarrow \frac{(1-q).(V_D - I) - I.r}{1+r} + \delta > 0$$

$$\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$$

Ou seja, em t_0 a opção está *deep in the money* se a expressão $\delta > \frac{I.r + (1-q).(I - V_D)}{1+r} > 0$ for verdadeira. Note que apesar de $F_U > 0$, em última

instância, investir ou não imediatamente não depende do que ocorrer no estado *up* da natureza.

iii) Supondo que $F_U > 0$ e $F_D > 0 \Leftrightarrow F_U = V_U - I$ e $F_D = V_D - I \Rightarrow V_U > I$ e $V_D > I$. Ou seja, em t_1 a opção de investimento está *in the money* qualquer que seja o estado da natureza. Em (3):

$$q.(V_U - F_U) + (1-q).(V_D - F_D) - (I - \delta).(1+r) > 0 \Rightarrow$$

$$q.(V_U - V_U + I) + (1-q).(V_D - V_D + I) > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow q.I + (1-q).I > (I - \delta).(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{I}{(1+r)} > I - \delta \Rightarrow \ \delta > I - \frac{I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \ \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Se a opção está *in the money* em qualquer cenário de t_1, estar *deep in the money* em t_0 implica que o dividendo seja maior que o valor presente do benefício da capitalização do investimento à taxa r, que é o custo de oportunidade de não investir imediatamente: $\delta > \frac{I.r}{(1+r)}$. Note que essa condição está inseirda na solução do caso ii).

Portanto, pode-se concluir que na opção de investimento, o VPL positivo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Em qualquer situação, o investimento imediato requer um prêmio maior do que o custo de oportunidade de não investir (esperar), exceto que a flexibilidade de esperar não tenha valor.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43) relata o resultado de *back-testing* (dados a partir de 1970) para uma companhia de petróleo que, hipoteticamente, na aprovação dos investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo, utilizasse opções reais no lugar do tradicional VPL. O teste considerou o cálculo do VPL *ex-post* de dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um Movimento Geométrico Browniano (Seção 3.1.1). Os resultados foram animadores: o VPL *ex-post* dos projetos com VPL >>0 apresentaram-se 16,6% superiores com o critério de OR e os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para um significativamente positivo na regra de OR. Esse resultado decorre da abordagem por OR exigir um prêmio adicional ao

tradicional VPL para o investimento imediato, que é o custo de oportunidade da flexibilidade de esperar. Com isso a probabilidade de um VPL negativo *ex post* considerando OR torna-se menor em relação ao tradicional VPL. É o benefício de se postergar a decisão evitando o investimento caso o estado da natureza revelado não seja favorável.

Exemplo 2: Opção de abandono com a flexibilidade de esperar por um período. Na literatura a opção de abandono é comumente tratada como o direito de vender um ativo por um valor terminal, cabendo ao decisor escolher o momento ótimo em um dado período. Nestes casos o valor da opção é positivo. Neste trabalho interessa especificamente opções de abando em que o decisor tem um custo ao abandonar o ativo, portanto a opção não tem necessariamente um valor positivo. Considere um ativo real operante que apresente um resultado operacional (δ) no primeiro período (t_0) e valor esperado do FCD futuro $E_0(V_1)$. O decisor pode então escolher entre abandonar o ativo imediatamente a um custo ou investimento ($I < 0$), ou postergar a decisão para o segundo período (t_1) - Figura 2, ramos superior e inferior da árvore de decisão respectivamente.

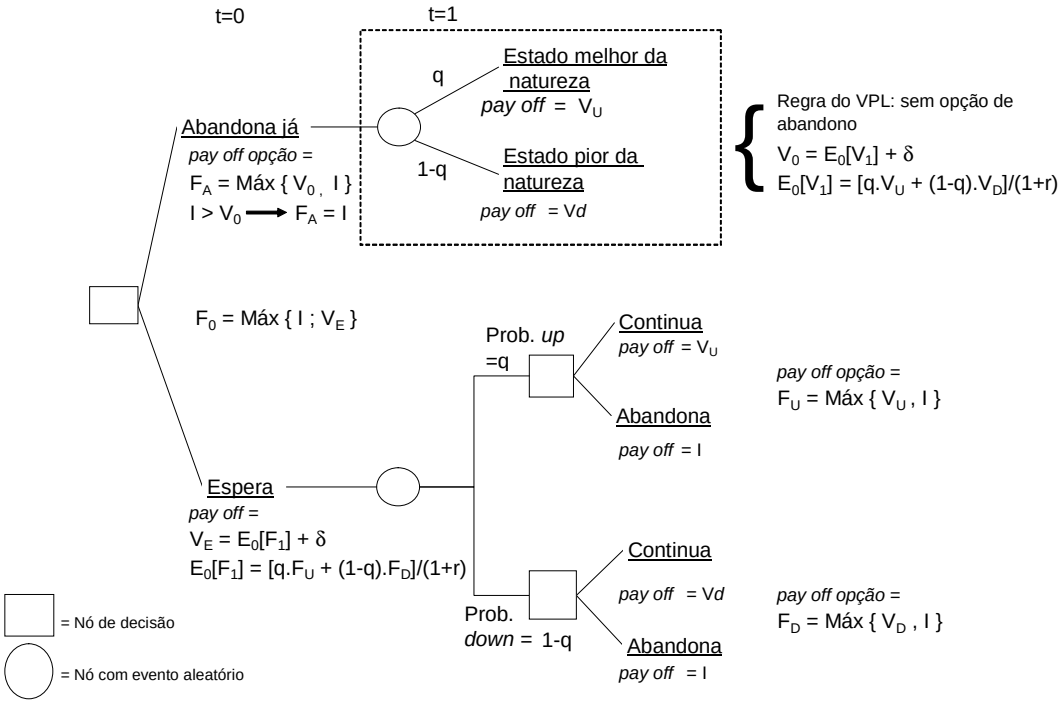

Figura 2 - Opção de abandono: Decisão entre o abandono imediato e a espera pela opção de abandono no segundo período.

O decisor que não tem a opção de abandono observa passivamente o valor de seu ativo real dado pela regra tradicional do VPL, representada dentro do quadro tracejado no ramo superior da árvore. Nesta situação, o VPL (V_0) do ativo é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) + \delta \qquad \text{e} \qquad E_0(V_1) = \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)}$$

Se o decisor tem a opção de abandonar o ativo no primeiro período (o que corresponde a todo o ramo superior da árvore), o payoff F_A desta será:

$$F_A = Máx\{V_0, I\} \Rightarrow F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\}$$

Considerando I como o preço de exercício (constante) e V_0 como o preço do ativo subjacente (variável), observa-se que a opção de abandono equivale a uma opção de venda (*put*) financeira.

O decisor racional que maximiza o lucro da firma escolhe "abandonar já" se $I > V_0$:

$$I > V_0 \Rightarrow I - V_0 > 0 \Rightarrow \ Máx\{0, I - V_0\} = I - V_0 \Leftrightarrow$$

$$F_A = V_0 + Máx\{0, I - V_0\} = V_0 + I - V_0 \Rightarrow \boxed{F_A = I}$$

Mas também é verdade que:

$$I > V_0 \therefore I < 0 \Rightarrow \boxed{V_0 < I < 0}$$

Esses dois resultados significam que o decisor só paga para abandonar um ativo se seu VPL for negativo e menor que o custo de abandono.

A flexibilidade de adiar a decisão para o segundo período t_1 é representada pelo ramo inferior da árvore da Figura 2. O decisor tem então a possibilidade de observar o estado da natureza que se revelará com novas estimativas do FCD para o ativo. Caso os fatos evoluam de forma favorável (estado da natureza melhor ou *up*) o FCD do ativo apresenta valor V_U e caso contrário V_D (estado da natureza pior ou *down*) – ou seja: $V_U > V_D$. Após esperar, os *payoffs* da opção de abandono nos dois estados da natureza em t_1 serão:

$$F_U = Máx\{V_U, I\} \text{ e } F_D = Máx\{V_D, I\} \Rightarrow$$

$$F_U = V_U + Máx\{0, I - V_U\} \text{ e } F_D = V_D + Máx\{0, I - V_D\}$$

O valor do ativo com a flexibilidade de abandonar em t_1 será:

$$V_E = E_0(F_1) + \delta \text{ onde } E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}$$

Uma firma que tem a oportunidade de abandonar um fluxo de caixa negativo imediatamente ($F_A = I$) deve comparar o custo I desta decisão com o valor do ativo com o benefício de esperar (V_E). O *payoff* da opção de abandono nos dois períodos (F_0) será:

$$F_0 = Máx\{V_E, I\} \Rightarrow F_0 = V_E + Máx\{0, I - V_E\}$$

Esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow Máx\{0, I - V_E\} = 0 \Rightarrow F_0 = V_E$$

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Este resultado define em que condição a opção de abandono não está *deep in the money* em t_0. Ou seja, interessa aqui definir em que circunstâncias vale mais ao decisor operar um FCD incerto do que pagar para abandoná-lo (inverter a desigualdade em (4) define a situação oposta: a opção de abandono imediato estaria *deep in the money*).

Se na inequação (4) q, r e δ são conhecidos, a escolha por esperar passa a depender das relações entre V_U, V_D e I, já que $F_U = Máx\{V_U, I\}$ e $F_D = Máx\{V_D, I\}$. Por construção $V_U > V_D$, então novamente há 3 situações a se examinar: $I > V_U > V_D$; $V_U > I > V_D$ e $V_U > V_D > I$:

i) $I > V_U > V_D$. Nesta situação, abandona-se o ativo em qualquer cenário de t_1 (e de t_0, pois $V_0 < 0$). Então, em que condições ainda sim é melhor esperar e abandonar em t_1 do que em t_0? Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.I + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{I}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow$$

$$\delta > \frac{I.(1+r) - I}{(1+r)} \Rightarrow \delta > \frac{I.r}{(1+r)}$$

Isso significa que se o fluxo de caixa δ em t_0 for maior do que o valor presente da capitalização do investimento de abandono à taxa r, ainda sim vale a pena adiar o abandono.

ii) $V_U > I > V_D$. O ativo é mantido operante no cenário *up* e abandonado no cenário *down*. Então esperar por t_1 será vantajoso se:

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).I]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow q.V_U > (I-\delta).(1+r) - (1-q).I \Rightarrow$$

$$q.V_U > I.(1+r-1+q) - \delta.(1+r) \Rightarrow V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

Este resultado demonstra que se no cenário *up* o ativo não é abandonado, então para adiar o abandono de t_0 para t_1 é necessário que $V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q}$.

iii) $V_U > V_D > I$. O ativo é mantido operante nos cenários *up* e *down*, ou seja, não é abandonado em t_1. Em (4):

$$\frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.V_U + (1-q).V_D]}{(1+r)} + \delta > I \Rightarrow V_E = V_0 > I$$

Esse resultado mostra que se esperar é mais valioso do que abandonar imediatamente ($V_E > I$), e que se em t_1 o ativo nunca é abandonado, então a opção de abandono é igual ao VPL em t_0 e o prêmio da flexibilidade de esperar é zero:

$$V_0 > I \Leftrightarrow F_A = Máx(V_0, I) = V_0 .$$

Portanto, pode-se concluir que na presença de uma opção real de abandono cujo preço de exercício seja um desembolso $I < 0$, o VPL negativo é uma condição necessária para a decisão de desinvestir em t_0, mas não suficiente. É preciso que o abandono imediato valha mais do que a flexibilidade de esperar, ou seja, a opção de abandono deve estar *deep in the money.* Esse termo pode parecer desconfortável já

que os FCD são negativos no exemplo. Mas considerando o jargão de opções, ele é adequado.

2.3. Conceito de gatilho e o Princípio das Más Notícias

Na Seção anterior discutiu-se em que termos uma opção de investimento (*call*) e outra de abandono (*put*) deveriam ou não ser exercidas imediatamente. O investimento necessário – um valor fixo (em geral) - corresponde ao preço de exercício da opção e o valor do projeto ou ativo real – variável - corresponde ao preço do ativo subjacente. O valor crítico ou gatilho é o preço do ativo subjacente que leva o decisor a optar pelo imediato investimento no projeto ou no imediato abandono do ativo. Ou seja, o gatilho é o preço que torna a opção *deep in the money*.

Para tornar o conceito mais claro, reconsidere Exemplo 1 da Seção anterior, mas suponha que o número de períodos é um valor N muito grande ($N \to \infty$). Entretanto, a incerteza quanto ao valor do projeto é resolvida de forma equivalente, ou seja, no segundo período. Sendo δ o FCL no primeiro período t_0, este pode evoluir em t_1 para um valor melhor $U.\delta$ caso ocorra o estado da natureza *up* ou para um valor pior $D.\delta$ caso o ocorra o estado *down*. Em qualquer cenário, permanece constante a partir de então (Figura 3).

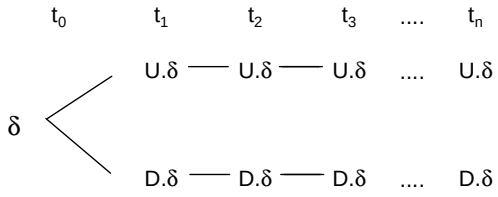

Figura 3 - Evolução do FCL a partir de t_0.

Pode-se escrever então que, se $N \to \infty$, os valores de V_U e V_D em t_1 serão:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{U.\delta}{r} + U.\delta = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \therefore V_D = \sum_{t=1}^{N} \frac{D.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{D.\delta}{r} + D.\delta = \frac{(1+r).D.\delta}{r}$$

Então o valor esperado de V_1 em t_0 será:

$$E_0(V_1) = \frac{q.V_U + (1-q).V_D}{1+r} = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta].(1+r)}{(1+r).r} \Rightarrow E_0(V_1) = \frac{q.U.\delta + (1-q).D.\delta}{r}$$

O VPL do projeto sem a flexibilidade de esperar é dado por:

$$V_0 = E_0(V_1) - I + \delta \Rightarrow\ V_0 = \frac{[q.U.\delta + (1-q).D.\delta]}{r} - I + \delta = \frac{q.\delta.(U-D) + D.\delta}{r} - I + \delta \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{\delta}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I \quad (6)$$

Se o decisor escolhe esperar e decidir sobre o projeto em t_1, a opção de investimento é dada por (2):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)}, \text{ onde:}$$

$$F_U = Máx[V_U - I, 0] = Máx[\frac{U.\delta}{r}.(1+r) - I, 0] \therefore\ F_D = Máx[V_D - I, 0] = Máx[\frac{D.\delta}{r}.(1+r) - I, 0]$$

Suponha que $F_U > 0$ e $F_D = 0$ por simplicidade (se $F_U = F_D = 0$ não há opção em t_1 e se $F_U > F_D > 0$ a opção seria exercida em qualquer estado em t_1):

$$E_0(F_1) = \frac{[q.F_U + (1-q).0]}{(1+r)} = \frac{q.[(U.\delta / r).(1+r) - I]}{(1+r)} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{q.U.\delta}{r} - \frac{q.I}{1+r} \quad (7)$$

Então o gatilho será o FCL δ^* que torna a opção de investimento imediato mais valiosa do que a flexibilidade de adiar e decidir em t_1. No limite, o investimento imediato deve ser pelo menos tão valiosa quanto esperar, ou seja, o preço onde o decisor deixa de ser indiferente: (6) = (7):

$$V_0 = E_0(F_1) \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[q.(U-D) + (r+D)] - I = \frac{q.U.\delta^*}{r} - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta^*}{r}.(-q.D + r + D) = I - \frac{q.I}{1+r} \Rightarrow \frac{\delta^*}{r}.[(1-q).D + r] = \frac{I.(1+r-q)}{1+r} \Rightarrow$$

$$\delta^* = \frac{r.I.(r + (1-q))}{(1+r).[(1-q).D + r]} \quad (8)$$

Em (8) pode-se observar que o valor do gatilho δ^* só depende do estado pior ou ruim da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho D do movimento para baixo do preço do ativo subjacente e de $(1-q)$. Esse fato é conhecido como Princípio das Más Notícias de Investimentos Irreversíveis (*bad news principle of irreversible investments*), termo foi cunhado por Bernanke (1983,

p.91-93, ver também Dixit e Pindick, 1994, p. 40). De acordo com Bernake esse resultado tem um apelo intuitivo: Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir (ou não) no período seguinte. Essa opção só tem valor caso haja uma probabilidade positiva do investimento não ser feito e da severidade da perda com o investimento irreversível. Ou seja, o valor da opção só depende do lado ruim da incerteza.

Note ainda que um pequeno aumento na probabilidade de um mal resultado não pode ser compensado por um ganho potencial com o lado bom ou positivo da incerteza. Observe também que o impacto do lado ruim sobre o valor de uma opção de investimento não depende das preferências ao risco do decisor. Assim eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. O Apêndice 1 demonstra que o gatilho δ^* que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar é dado por:

$$\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Até este momento discutiu-se o conceito de OR, exploraram-se as vantagens desta abordagem em relação ao VPL e exercitou-se a regra de decisão de um investidor considerando exemplos simples. A teoria de opções reais tem sido construída progressivamente a partir de contribuições de situações particulares, como bem evidencia o histórico da literatura. Com isso, uma taxonomia homogênea para OR ainda não é consenso, embora esforços rescentes apresentem significativos avanços. Na próxima Seção este assunto é discutido.

2.4. Taxonomia de opções reais

A abordagem do problema de decisão de investimento como opções reais tem o potencial de conceituar e quantificar o valor do gerenciamento ativo e de suas interações estratégicas (ver adiante). Esse valor manifesta-se tipicamente através das flexibilidades embutidas nas oportunidades de investimento de capital.

Copeland e Antikarov (2001, p.12-13) classificam as opções reais primariamente pelo tipo de flexibilidade que oferecem. Assim a opção de diferir, esperar ou postergar é uma *call* americana sobre um projeto cujo início pode ser adiado. A opção de abandono de um projeto por um preço fixo é formalmente uma *put* americana, como o é a opção de contração, onde se vende uma parte do ativo por um preço fixo. A opção de expansão é o oposto da contração, e como a opção de extensão (prorrogação de um direito) são *calls* americanas. Opção de mudança de uso (*switch options*) a um preço fixo são *portfolios* de *calls* e *puts* americanas. As opções sobre opções são chamadas de opções compostas e incluem os projetos com investimentos em etapas ou fases, que oferecem a opção de abandonar ou diferir ao final de cada fase. Por fim, as *rainbow options* (opções arco-íris) são aquelas com múltiplas fontes de incerteza. Muitos problemas de decisão reais são opções arco-íris compostas (*compound rainbow options*), como ocorre na área de exploração e produção de petróleo. Essas situações são mais comuns do que parecem, por exemplo, basta considerar a incerteza no preço, na quantidade produzida e na taxa de desconto de qualquer investimento em fases.

Trigeorgis (1996, p.2-4) observa que as OR podem tanto ocorrer naturalmente (como opções de diferir, contratar, desativar, abandonar, etc.) como podem ser construídas a um custo desde o início de um projeto (opções como expansão de capacidade, crescimento, mudança de uso). Este autor também classifica as OR em categorias, destacando os tipos mais comuns, a indústria onde são mais importantes e alguns autores representativos que as analisaram. São elas: Opção de diferir, de investir em etapas (compostas), de mudança de escala (expandir, contrair, desativar ou reiniciar), de abandono, de mudança de uso (insumos, produtos, etc.), de crescimento (quando um investimento pode criar vários outros projetos) e opções múltiplas interagindo.

Dixit e Pindick (1994) por sua vez discutem pelo menos 13 tipos de OR diferentes e variações destas. Em sua maioria já foram citadas ou são variações das apresentadas nos parágrafos anteriores. Dias (1996, p.59-66) descreve os tipos de opções mais comuns observadas na literatura OR aplicadas à indústria do petróleo. Na Seção 4.1 o processo de Exploração e Produção de petróleo é discutido do ponto de vista de OR.

Não existe uma uniformidade absoluta para a taxonomia da OR. Por exemplo, o agrupamento denominado de opção de mudança de escala de Trigeorgis (*op. cit.*) é desmembrado em até quatro tipos pelos outros autores. Isso faz com que um mesmo tipo de opção receba diferentes nomes, por exemplo, opções compostas em geral têm o mesmo significado de opções seqüenciais de Dixit e Pindyck (*op. cit.*). Outro exemplo é a opção de diferir ou esperar em Copeland e Antikarov (op. cit), denominada de opção investir em Dixit e Pindick (op. cit).

A denominação “esperar” de Copeland e Antikarov é particularmente infeliz, pois esperar é um aspecto comum a toda OR até a sua data de expiração. De forma similar, alguém pode então argumentar que investir também é uma característica comum a vários tipos de opções, e com razão, mas na condição de preço de exercício, e não como meio de implantação de um projeto.

Uma outra dimensão do problema de valoração e decisão de investimentos pode ser percebida ao se considerar as interações estratégicas entre competidores (Trigeorgis, 1996, p.133-134). Se o impacto de um competidor restringe-se à captura de parte do valor do mercado de um projeto, então o decisor ainda encontra-se com o problema de maximização do valor da firma discutido nos itens anteriores, embora mais complexo. Neste caso, deve-se incorporar o impacto da competição na decisão de investimento, mas pode-se ignorar qualquer efeito interativo de ação e reação entre os competidores. Entretanto, se a decisão de investimento é sensível e contingente às decisões de outras firmas, então um tratamento mais complexo combinando Teoria de Jogos com Teoria de Opções Reais é necessário.

Trigeorgis (1996, p.142-149) sugere uma classificação para OR considerando as interações estratégicas entre competidores. Essa classificação, de acordo com o autor, visa destacar importantes características das oportunidades de investimento como opções sobre ativos reais. Sugere que três aspectos devem ser considerados

sob o ponto de vista de estratégia competitiva: o primeiro refere-se à exclusividade da propriedade e o efeito da competição sobre a habilidade da firma apropriar para si o valor da opção. Se a firma tem exclusividade sobre se e quando investir, ou seja, não é afetada pelos competidores, a opção é dita Proprietária, caso contrário, a opção é Compartilhada. A segunda questão estratégica refere-se às interações internas à oportunidade de investimento. Se a OR leva a outros investimentos ou outras opções subseqüentes, é então chamada de Composta. Com isso esse tipo de opção pode ter maior impacto estratégico sobre a firma, o que torna sua análise mais complexa. Por outro lado, se o projeto é analisado como um investimento isolado, a OR é dita Simples. A terceira questão estratégica refere-se ao momento e urgência da decisão. Projetos que necessitam de uma decisão imediata do tipo agora ou nunca são ditos em Expiração ou Expirando, mas se a decisão pode ser adiada, então a opção é chamada de Diferível ou Adiável.

A Figura 4 apresenta exemplos com os conceitos da classificação anterior, considerando diferentes estratégias e o valor da OR correspondentes.

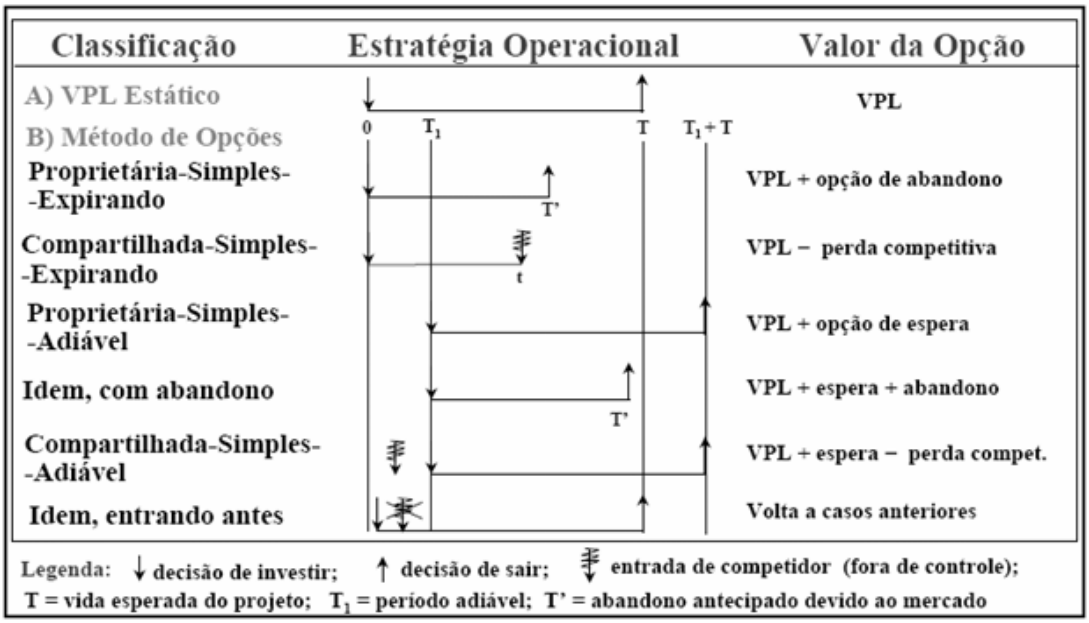

Figura 4 - Classificação das OR, interações estratégicas e valor da opção como a soma do VPL com o valor da "opção" dada pela flexibilidade e o efeito competitivo (adaptado de Trigeorgis, 1996, p.148).

No quadro da Figura 4, o item A representa o problema de capital budgeting tradicional enquanto o item B inclui seis exemplos com OR. Para uma opção proprietária, simples e em expiração com a flexibilidade de abandono em T<T', o

valor da OR é dado pelo VPL somado do valor de abandono. Para uma opção compartilhada, simples e em expiração, o investimento é feito imediatamente, mas a entrada de um competidor pode erodir o valor do projeto. Para uma opção proprietária, simples e adiável, o valor da opção depende da flexibilidade de adiar o investimento e da existência da possibilidade de abandono. Para uma opção compatilhada, simples e adiável, a entrada prévia de um competidor gera uma perda competitiva, mas que pode ser evitada caso a firma invista antes.

Vollert (2003, p.22-39) apresenta talvez a mais completa sistemática para OR, revendo e organizando a contribuição histórica de muitos autores a partir do trabalho pioneiro de Myers (1977, *op. cit.*). Apresenta duas classificações que contemplam a perspectiva gerencial e a perspectiva de valoração econômica. As duas abordagens são complementares na medida em que se propõe a relacionar as flexibilidades gerenciais (de orientação prática) com o instrumental teórico exigido para a valoração com OR, derivado da teoria de apreçamento de opções financeiras.

2.4.1. Classificação gerencial

A classificação gerencial de Vollert (op. cit.) pode ser bem compreendida através da decomposição do valor da firma em seu valor estático (dado pelo VPL tradicional) e o valor das diferentes flexibilidades gerenciais (Figura 5):

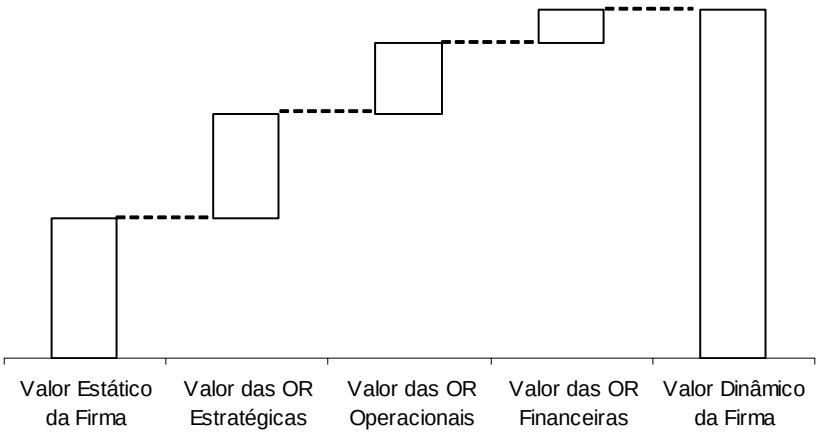

Figura 5 - Fontes de valor da firma (Vollert, 2003, p.22).

Esta subdivisão é feita exclusivamente com o propósito taxonômico, já que o valor total das OR de um projeto, ativo ou firma é tipicamente não aditivo em decorrência das interações entre as OR**.**

Trigeorgis (1996, p.227-256) avalia a interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto – opções múltiplas (ou compostas na taxonomia de Copeland e Antikarov *op. cit*.). Demonstra que a interação entre duas opções pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo do valor do projeto. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto. Embora os valores das opções não sejam aditivos, em interações pequenas e simples a adição pode ser uma boa aproximação. O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são de tipos opostos (por exemplo, expandir e contrair) e tem uma separação finita, a probabilidade conjunta de exercício será pequena. Mas à medida que aumenta o intervalo cresce o valor da interação. Por outro lado, se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

O valor dinâmico da firma (Figura 5) é então dado pela composição do valor estático da firma com o valor das OR Estratégicas, Operacionais e Financeiras. As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desinvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio. As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. As OR Operacionais podem ser subdivididas em opções de insumo (*input options*), processo, produto (*output options*) e opções de expansão/contração. Há frequentemente uma estreita relação entre OR Estratégicas e Operacionais, pois, havendo alta flexibilidade nos ativos existentes, naturalmente surgem novas e futuras OR Estratégicas. As OR Financeiras, por fim, são aquelas relacionadas à

habilidade de modificar a estrutura de capital durante o curso de um projeto, agregando valor para a firma.

Neste trabalho, a opção de investir é o que na literatura se chama opção de diferir, mas é a mesma designação adotada por Dixit e Pindick (2004), e refere-se a uma OR estratégica. Por sua vez, a opção de abandono refere-se ao abandono irreversível de um ativo real, onde o preço de exercício é um custo.

Percebe-se que a classificação gerencial se preocupa mais em auxiliar o aspecto da nomenclatura de OR como tratado por Copeland e Antikarov (2001), Dixit e Pindick (2004 - que na verdade não se preocupam com este tema) e em parte por Trigeorgis (1996). Por sua vez, a classificação sob a perspectiva da valoração de Vollert tem um papel mais pró-ativo, na medida em que se preocupa em sistematizar os diferentes aspectos que afetam o valor de uma OR.

2.4.2. Classificação sob a perspectiva de valoração

A classificação com a perspectiva de valoração de Vollert (op. cit., p.26-33, Figuras 2.4 a 2.11) ocupa-se de aspectos específicos de OR a serem considerados para o apreçamento por opções. Dois grandes tópicos são considerados: Parâmetros de entrada para opções reais e as diferenças em relação às financeiras e; Limitações da analogia de OR com opções financeiras.

i - Parâmetros de entrada

Considerando os parâmetros de entrada para a valoração com OR, o primeiro importante aspecto a ser considerado são as fontes de incerteza. Vollert (op. cit.) sumariza as fontes de risco como tecnológico, *timing*, político, social, legal e econômico, sendo este último subdividido em valor do projeto, preço/custo, demanda, processo, taxa de câmbio e risco estratégico. Todos esses riscos afetam a lucratividade de um projeto e muitos deles ocorrem simultaneamente. Em aplicações práticas, as fontes de risco mais importantes são as que afetam seriamente o projeto (em intensidade e freqüência), e por isso devem ser priorizadas na modelagem do valor deste. Especial atenção deve ser dada aos riscos específicos da firma, que não são apreçados pelo mercado. Em seguida é preciso definir o instrumental matemático a ser utilizado para a modelagem do risco do ativo subjacente: se em tempo discreto ou contínuo; o tipo de processo estocástico a ser utilizado (Seção

3.1), e por fim, se o ativo subjacente é ou não transacionado no mercado e como isso pode ser contornado. A estimativa da volatilidade do processo estocástico pode ser feita com o auxílio de séries históricas ou com um modelo de equilíbrio como o CAPM.

A modelagem dos dividendos é igualmente importante, devendo se considerar a taxa, a periodicidade, se estocástico ou não, e o beneficiário dos pagamentos. Em relação a este ponto, em OR é preciso diferenciar entre os dividendos pagos ao detentor do ativo subjacente e os dividendos pagos ao detentor da opção. A taxa de retorno por sua vez, dever refletir a incerteza relacionada aos fluxos de caixa (*timing*, freqüência e intensidade). Esse problema é normalmente resolvido com um desconto na taxa de retorno via taxa de dividendo, explicando o baixo retorno observado em ativos reais em relação aos seus pares financeiros com estruturas de risco semelhantes. No caso de uma *commodiy* essa taxa é conhecida como *convenience yeld* e compensa os dividendos que deveriam ser recebidos pelo proprietário fisicamente detentor desta, mas não pelo detentor de um contrato sobre a mesma. A *convenience yeld* pode ser determinada no mercado de contratos futuro e *foward* ou por uma estrutura a termo desta taxa, caso seja estocástica no modelo de valoração.

Outros dois parâmetros indispensáveis são: o preço de exercício e a taxa livre de risco. Em OR estes parâmetros podem variar durante a vida da opção, podendo ser modelados por processos estocásticos. O último parâmetro a ser considerado é justamente a vida da opção, ou maturidade. Em OR, esse parâmetro pode estar relacionado à vida do ativo subjacente e, em ambos os casos, a maturidade pode ser classificada como perpétua, limitada ou desconhecida.

ii - Limitações da analogia de OR com opções financeiras

Considerando as limitações da analogia de OR com opções financeiras, Vollert (op. cit., p.34-39) destaca cinco aspectos: Urgência na decisão, competitividade da situação (ou do mercado), resolução da incerteza, efeito tempo de atraso e interações inter e intra-projetos.

O aspecto urgência da decisão de Vollert (op. cit., p. 34) corresponde à classificação segundo as interações estratégicas de Trigeorgis (1996, p.133-134)

apresentada anteriormente (ver Figura 4). O aspecto competitividade da situação refere-se ao nível de competição do mercado à que pertence a OR (tanto as exclusivas como as compartilhadas). Se o mercado é competitivo, o impacto da competitividade deve ser modelado exogenamente, por exemplo, com saltos de Poisson (ver Seção 3.1.3). Em situações de oligopólio, ao contrário, a modelagem da competição é endógena e pode considerar modelos dinâmicos de teoria de jogos[2].

O impacto da resolução da incerteza por sua vez, inverte-se se o risco é transacionado no mercado ou se é exclusivo da firma. O aumento do preço do risco transacionado no mercado aumenta o valor da OR, mas o oposto ocorre com o risco privado (por exemplo, a incerteza técnica, ver Seção 2.5). Isso torna importante a separação entre esses dois tipos de risco em modelos de OR. Um segundo aspecto importante é entender como a incerteza é resolvida ao longo da vida de uma OR. Os riscos transacionados no mercado (por exemplo, o preço de uma *commodiy*) em geral resolvem-se naturalmente com o tempo. Mas em relação ao risco privado, frequentemente ocorre o oposto, de forma que o detentor da OR não só não observa a resolução da incerteza como tem que investir para a sua redução. São as denominadas opções de aprendizagem (*learning options*), que representam importantes ferramentas gerencias tanto para limitar o risco de perda como para influenciar a incerteza de forma favorável à firma.

O efeito tempo de atraso ou resposta refere-se à defasagem entre a decisão de investir e o início do fluxo de caixa (*time lags*), o que pode durar de poucos dias até vários anos em OR. Naturalmente, este efeito pode ter um alto impacto na valoração e decisão ótima sobre um projeto. Isso torna valioso para a firma a segmentação do projeto em fases, o que pode trazer várias vantagens como a geração de novas opções (inclusive de aprendizagem) e a redução do efeito tempo de atraso para um primeiro fluxo de caixa.

[2] Em OR compostas, o exercício antecipado de uma ou mais etapas pode gerar valor, enquanto que em OR simples, o exercício antecipado pode ser necessário mesmo destruindo a opção. Jogos de opções têm se tornado um ativo campo de pesquisa com o objetivo de capturar o componente estratégico das OR (ver Vollert, 2003, p.36, Trigeorgis, 1996, p.133-134 e Dias, 2005, p.360-402).

Finalmente, as interações inter e intra-projetos refere-se às opções compostas de um mesmo projeto e às interações entre OR de diferentes projetos. Dada a não aditividade das OR, a modelagem a ser construída deve considerar simultaneamente todos esses aspectos, inclusive eventuais sinergias. Vollert (op. cit, p.39) alerta que a interdependência pode resultar em modelos excessivamente complexos. Sugere então que sejam ignoradas as flexibilidades menos importantes em ordem de um modelo operacional, cujos erros são geralmente pequenos.

A classificação sob a perspectiva de valoração de Vollert é bastante útil na medida em que pode auxiliar na construção de modelos de valoração com OR como uma espécie de guia no mapeamento de aspectos relevantes[3]. Conhecendo-se melhor a OR a valorar, pode-se realizar esta tarefa com a técnica ou abordagem mais adequada, entre as várias disponíveis.

2.5. Incerteza econômica e incerteza técnica

Em finanças, tradicionalmente se diferencia dois tipos de risco, denominados de risco de mercado (ou sistemático ou não diversificável) e de risco específico (ou diversificável). O risco de mercado está relacionado aos movimentos da economia em geral, decorrendo de acontecimentos aleatórios que afetam todos os ativos. O risco específico por sua vez relaciona-se à firma e o tipo de negócio em que está envolvida, podendo ser eliminado através da diversificação.

Os riscos de mercado e específico também geram incerteza sobre o valor econômico de projetos e ativos reais. Nos exemplos apresentados na Seção 2.2, a flexibilidade de esperar e o caráter opcional do investimento ou abandono em t_1 mostraram que essa incerteza possui valor, estimulando ou reduzindo a disposição de investir. A incerteza pode ser subdividida em incerteza econômica e incerteza técnica[4].

---

[3] A preocupação de Vollert com uma boa sistemática se justifica na medida em que seu livro, *A Stochastic Control Framework for Real Options in Strategic Valuation* (2003), concentra-se num modelo geral dedicado a capturar as interações entre OR intra-projetos (*switching options*, reversíveis ou não) e inter-projetos (interações competitivas endógenas e exógenas).

[4] Um terceiro tipo de incerteza tem sido considerado em OR. Denominada de estratégica, contempla a incerteza decorrente da interação estratégica entre competidores e entre projetos. Ver Seção 2.4.2 uma breve discussão, Vollert (2003, Cap.5) ou Dias (2005, Cap.4)

A incerteza econômica é exógena à firma, afetando negativamente as decisões de investimentos na medida em que estimula a espera, postergando projetos com VPL positivo. Quanto maior o horizonte temporal, maior é a incerteza econômica.

A Incerteza técnica é endógena ao processo de decisão da firma e não é correlacionada aos movimentos da economia. Mas conviver com a incerteza técnica pode ser uma escolha gerencial inadequada para a tomada de decisão, pois se contempla cenários desfavoráveis que reduzem o valor esperado do ativo básico da OR, adiando o exercício da opção.

Assim, a incerteza técnica cria um incentivo para o investimento em fases em busca de informação. Por isso, decisões de investimento com incerteza técnica são chamadas de opções de aprendizagem: A empresa aprende com esse tipo de investimento, permitindo, por exemplo, o melhor dimensionamento do projeto (ver Dixit e Pindick, 1994, p.47-48 e p.345-347). Assim, a redução da incerteza técnica cria um benefício adicional denominado de valor-sombra (*shadow value*), que não é diretamente mensurado pelo FCD.

É interessante notar que uma mesma variável pode ter os dois tipos de incerteza. No exemplo dado por Dixit e Pindick (*op. cit.*) o custo de um projeto pode ter tanto incerteza associada ao preço de insumos e facilidades de produção (incerteza econômica, risco específico) quanto à quantidade que será utilizada (incerteza técnica - risco de dimensionamento incorreto).

Dias (1996, p.36) destaca a diferença entre um investidor que detém uma carteira de ativos financeiros e um decisor que detém uma carteira de projetos e ativos reais: “O investidor não pode tomar vantagem da incerteza técnica para maximizar sua riqueza, o melhor que pode fazer é diversificar a sua carteira, de forma a tornar irrelevante esse risco e outros riscos específicos. Já o gerente pode agir, revisando a sua alocação de recursos, de forma a tomar vantagem da incerteza técnica e maximizar o valor da firma”. Por outro lado, o gerente ou decisor não tem a mesma flexibilidade do investidor para diversificar sua carteira e assim poder minimizar ou eliminar o risco específico.

Como a incerteza técnica independe do risco de mercado (é um risco diversificável), sua correlação com o retorno do *portfolio* de mercado é nula. Isso faz

com que o prêmio de risco exigido por este risco seja zero (Dias, 2005, p.135-137). Assim, enquanto que os processos estocásticos relacionados à incerteza econômica devem ter a tendência ajustada pela subtração de um prêmio de risco, as distribuições de probabilidade da incerteza técnica permanecem inalteradas. Por isso, a combinação de incertezas técnicas com incerteza de mercado em modelos de OR pode se dar de uma forma mais simples se for usado um método neutro ao risco. Pode-se usar a taxa livre de risco para descontar processos estocásticos neutros ao risco das variáveis de mercado, combinados com as distribuições de probabilidade das incertezas técnicas, que já são naturalmente neutras ao risco.

Dias (2005, Cap.3) trata a incerteza técnica com Teoria da Informação. A análise de valor da informação (VOI – *value of information*[5]) considera a aquisição de informação para a redução da incerteza (variância) em um processo seqüencial de revelação com expectativas condicionais. Propõe uma medida de aprendizagem probabilística associada ao conceito de distribuição de revelações.

2.6. Introdução à valoração de opções reais

O valor de uma opção real é dado pela soma do valor do projeto sem a opção (VPL tradicional) com o valor (prêmio) da flexibilidade embutida no projeto[6]:

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio da flexibilidade (10)

O apreçamento de OR é baseado no conhecimento sobre seus pares financeiros. Apesar das analogias entre estes dois tipos de opções, há diferenças importantes (Trigeorgis, 1996, p.127-129). Opções e ativos financeiros são negociados em um mercado eficiente a um custo mínimo. Opções e ativos reais podem ser pouco ou não negociáveis, especialmente se as opções são compartilhadas. Opções reais de domínio público são ainda mais complexas considerando as interações estratégicas entre as firmas, envolvendo investimentos preventivos e a criação de barreiras de entrada. Por outro lado, opções proprietárias

[5] O VOI é a diferença entre o valor da decisão informada e o valor da decisão à priori (sem a informação): VOI = VDI − VDP.

[6] Note que aqui se considera apenas uma única opção real associada a um projeto. Como discutido na Seção 2.4, a não aditividade das opções de um mesmo projeto ou quando interagem estando em projetos diferentes, a rigor, exige uma adaptação semântica da expressão (10):

Valor OR = Valor projeto sem OR + Prêmio líquido resultante das interações das flexibilidades (10).

como patentes podem ser facilmente negociáveis. Outras opções reais só podem ser vendidas se em conjunto com o ativo subjacente. Os custos de transação por sua vez não são desprezíveis, podendo mesmo inviabilizar um negócio. Mas o fato das opções reais não terem um mercado desenvolvido e suas conseqüências, não representa uma barreira para a sua valoração com o instrumental de opções financeiras.

O valor de uma opção real é a soma do VPL tradicional com o prêmio da flexibilidade (equação 10). Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2) discutiu-se em que condições o decisor deveria optar por esperar ou exercer a opção imediatamente, mas não sobre a estimativa das variáveis envolvidas. Por exemplo, como são calculadas as probabilidades dos estados da natureza? Como quantificar o valor do ativo subjacente nos estados *up* e *down* da natureza? Que taxa de desconto deve-se utilizar?

Não é fácil saber a taxa de desconto a ser aplicada sobre os *payoffs* esperados da opção no mundo real. Inicialmente sabe-se que uma opção é mais arriscada do que seu ativo subjacente (possui maior incerteza), exigindo por isso uma taxa de desconto maior. Se a opção for transacionada no mercado, seu valor é conhecido e pode-se obter de forma inversa a taxa de desconto a ser utilizada. Mas existem alternativas mais simples de apreçamento de opções que dispensam esta estimativa e de outras variáveis, como por exemplo, as probabilidades reais dos estados da natureza.

Algumas das estratégias de apreçamento mais conhecidas envolvem a construção de *portfolios* que permitem chegar ao valor da opção. Apresenta-se nesta dissertação a equivalência entre três alternativas desse tipo de valoração: Avaliação neutra ao risco, ativos contingentes (*contigent claims*) e *portfolios* replicantes. Segue-se uma quarta opção de apreçamento com programação dinâmica (há outras alternativas para o apreçamento de OR, ver, por exemplo, Seção 3.5). Embora a demonstração seja feita heuristicamente e a partir de um caso simples, o resultado é perfeitamente geral.

2.6.1. Valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*)

A valoração neutra ao risco (*risk neutral valuation*) é um princípio fundamental para o apreçamento de opções financeiras (Hull, 2003, p.202-204). Este princípio

afirma que o preço de uma opção em um mundo neutro ao risco é correto também para o mundo real. Todos os investidores "tornam-se" indiferentes (neutro) ao risco e com isso não requerem mais prêmio de risco, o que torna o retorno esperado de qualquer ativo financeiro igual à taxa livre de risco[7].

A avaliação neutra ao risco de opções financeiras decorre do argumento de não arbitragem e também é válida para OR. Reconsidere a opção de investimento com a flexibilidade de adiar do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora o projeto paga dividendos δ_1 em t_1. O valor do projeto pode então evoluir de V_0 para $V_U + \delta_U$ ou $V_D + \delta_D$ conforme o estado da natureza. De forma similar o valor da opção pode variar para F_U e F_D - Figura 6.

A Figura 6 equivale ao ramo superior da Figura 1, mas com as probabilidades neutras ao risco p e $1-p$ dos estados da natureza up e down. Na Figura 1, o ramo inferior da árvore representou a decisão imediata, dada pela regra do VPL. Ao compará-lo com o ramo da superior da mesma Figura se explorou a regra de decisão considerando a flexibilidade de adiar. Note que o valor da opção foi dado pelo ramo superior, e a diferença entre os valores presentes dos dois ramos representa o prêmio da flexibilidade da equação (10).

[7] Note que o método não supõe que os investidores sejam neutros ao risco.

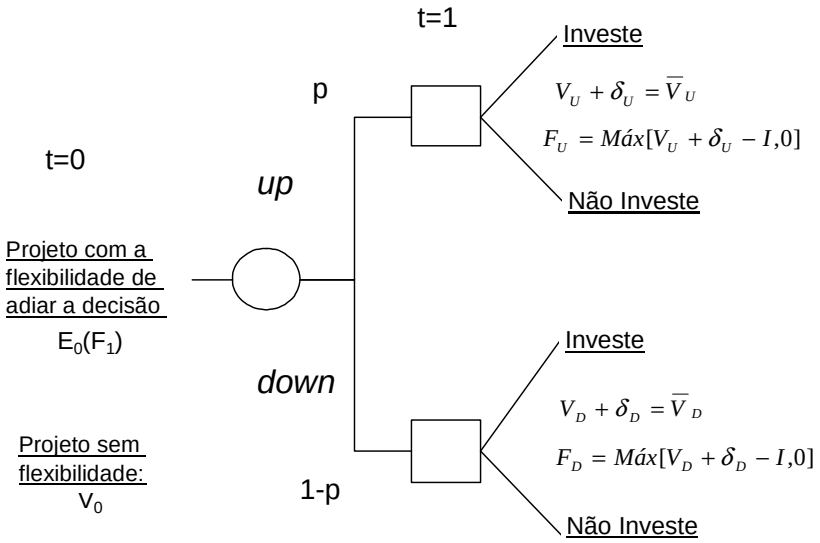

Figura 6 - Opção de investimento com a flexibilidade de esperar.

Considere um *portfolio* (Φ) composto por uma posição longa na opção de investimento e uma curta em Δ unidades do ativo subjacente[8] (V_0). Para calcular o número Δ de ativos subjacentes que torne o *portfolio* sem risco, o valor deste deve ser o mesmo nos dois estados da natureza *up* e *down*:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D} \quad (11)$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Como o *portfolio* é sem risco o seu valor em t_0 é igual ao seu valor em t_1 descontado à taxa livre de risco (r_f):

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_1}{1+r_f} = \frac{\Phi_U}{1+r_f} \Rightarrow E_0(F_1) - \Delta.V_0 = \frac{F_U - \Delta.\overline{V}_U}{R_f} \Rightarrow$$

[8] A rigor, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. Poderia ser uma ação, um contrato futuro ou um *portfolio* dinâmico de ativos continuamente ajustado, de forma que seja obtida a perfeita correlação com o ativo da OR (Dixit e Pindick, 1994, p.117). A hipótese do *Market Asset Disclaimer* (MAD) propõe que este ativo seja o VPL do próprio projeto da OR – ver Seção 3.3.1. Nesta Seção adota-se o MAD para a demonstração proposta.

$$E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U \quad (12)$$

Onde $R_f = 1 + r_f$. Seja U e D tal que:

$$U = \frac{\overline{V}_U}{V_0} = \frac{V_U + \delta_U}{V_0} \Rightarrow \overline{V}_U = U.V_0 \therefore D = \frac{\overline{V}_D}{V_0} = \frac{V_D + \delta_D}{V_0} \Rightarrow \overline{V_D} = D.V_0$$

Usando (11), U e D em (12), tem-se:

$$E_0(F_1).R_f = \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.V_0.R_f + F_U - \frac{F_U - F_D}{V_0.(U-D)}.U.V_0 \Rightarrow$$

$$E_0(F_1).R_f.(U-D) = R_f.(F_U - F_D). + F_U.(U-D) - U.(F_U - F_D) \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + \frac{(U - R_f)}{(U-D)}.\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.\frac{F_U}{R_f} + [1 - \frac{(R_f - D)}{(U-D)}].\frac{F_D}{R_f} \Rightarrow$$

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \text{ onde:} \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U-D)} \quad (14)$$

O preço da opção com a flexibilidade de esperar é dado por (13). Note que não depende das probabilidades reais q e $1-q$ dos estados da natureza nem do valor esperado do projeto, logo independe do grau de aversão ao risco do decisor. Isso implica que o preço da opção no mundo real é igual ao preço no mundo neutro ao risco. Mas o resultado (13) também sugere que o valor da opção de esperar por t_1 é o valor esperado de seus *payoffs* nos estados *up* e *down* com probabilidades p e $1-p$. Essas probabilidades são denominadas de probabilidades neutras ao risco e tem valor dado por (14). Note que anular o dividendo na demonstração ($\delta_U = \delta_D = 0$) apenas altera U, D e as probabilidades neutra ao risco p e $1-p$, sendo o resultado idêntico ao apresentado por Hull (*op. cit.*). Incluir dividendo em t_0 também não altera o resultado demonstrado, apenas que U e D devem considerar $V_0 + \delta_0$ como denominador.

Também se pode calcular o valor esperado do ativo subjacente $E_1(V_1)$ com as probabilidades neutras ao risco (14) em t_1:

$$E_1(V_1) = p.U.V_0 + (1-p).D.V_0 \Rightarrow E_1(V_1) = p.(U-D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow$$

$$E_1(V_1) = \frac{(R_f - D)}{(U-D)}.(U-D).V_0 + D.V_0 = (R_f - D).V_0 + D.V_0 \Rightarrow \boxed{E_1(V_1) = (1+r_f).V_0}$$

Este resultado demonstra que, no mundo neutro ao risco, o preço de qualquer ativo cresce à taxa livre de risco.

2.6.2. Ativos Contingentes (*contingent claims*)

A segunda forma que se apresenta para calcular o valor da opção, aqui denominada de *ativos contingentes*, corresponde à adotada extensivamente por Dixit e Pindick em seu livro *Investment Under Uncertainty* (1994). Estes autores a denominam de *Contingent Claims* com o uso de *Spanning Assets***.**

Seja um *portfolio* Φ composto pela opção de investimento (Figura 6) e Δ ativos subjacentes[9], de tal forma que seu valor é constante em qualquer estado da natureza:

$$\Phi_1 = \Phi_U = \Phi_D = cte \Rightarrow F_U - \Delta.\overline{V}_U = F_D - \Delta.\overline{V}_D \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}} \quad (11)^{10}$$

Onde: $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$; $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$; $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$.

Sendo o *portfolio* sem risco, o seu valor cresce à taxa livre de risco, de outra forma haveria arbitragem. Então:

$$d\Phi = r_f.\Phi_0.dt\,.$$

Mas a variação de valor de um *portfolio* também é dada pelo ganho de capital e dividendo distribuído, então:

$$d\Phi = [dF - \Delta.(dV + d\delta)].dt$$

Igualando as duas equações e discretizando:

---

[9] A rigor, ver nota de rodapé 7, o ativo subjacente seria um ativo negociado no mercado cuja flutuação estocástica é perfeitamente correlacionada com o ativo da OR. A hipótese do *Market Asset Disclaimer* – ver Seção 3.3.1 – é adotada nesta Seção pelo seu apelo intuitivo.

[10] A equação (11) é conhecida como delta *hedging* por sinalizar ao detentor da posição curta de uma opção a quantidade de ativos subjacentes que deve deter de forma a criar uma estratégia de *hedging* sem risco.

$$[(F_1 - F_0) - \Delta.((V_1 - V_0) + \delta_1)].(t_1 - t_0) = r_f.\Phi_0.(t_1 - t_0) \Rightarrow$$
$$F_1 - F_0 - \Delta.V_1 + \Delta.V_0 - \Delta.\delta_1 = r_f.F_0 - r_f.\Delta.V_0 \Rightarrow$$
$$F_1 - \Delta.(V_1 + \delta_1) + (1 + r_f).\Delta.V_0 = (1 + r_f).F_0 \Rightarrow \Phi_1 + R_f.\Delta.V_0 = R_f.F_0$$

Como o *portfolio* é sem risco, então:

$$\Phi_1 = \Phi_U = F_U - \Delta.\overline{V}_U \Rightarrow \boxed{F_U - \Delta.\overline{V}_U + R_f.\Delta.V_0 = E_0(F_1).R_f}$$

Esta última expressão é novamente a equação (12). Logo, substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14).

$$\boxed{E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f}} \text{ (13) onde: } \boxed{p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)}} \text{ (14)}$$

O apreçamento por *portfolio* replicante e a programação dinâmica levam aos mesmos resultados (13) e (14), e encontram-se demonstrados no Apêndice 2.

2.6.3. Comparação entre os métodos apresentados

Demonstrou-se nas Seções 2.6.1 e 2.6.2 e no Apêndice 2 que a avaliação neutra ao risco, por *contingent claims*, por *portfolios* replicantes e por programação dinâmica são equivalentes na medida em que levam ao mesmo resultado. As três primeiras técnicas consistem em criar *portfolios* com o objetivo de valorar opções considerando a eficiência de mercado e a ausência de arbitragem. Mas as semelhanças param por aí.

As avaliações neutras ao risco e por *contingent claims* consideram *portfolios* formados pela opção e um ativo perfeitamente correlacionado com o projeto. Os *portfolios* são montados de tal forma que apresentam valor constante em qualquer estado da natureza, portanto são sem risco. O *portfolio* replicante é constituído pelo ativo subjacente e títulos livre de risco, tendo como objetivo replicar os *payoffs* da opção, por isso é um *portfolio* com risco.

A avaliação neutra ao risco calcula o valor da opção considerando que o *portfolio* em t_1 descontado à taxa livre de risco é igual ao valor do *portfolio* em t_0. A valoração por *contingent claims* considera que o ganho de capital mais dividendo recebidos entre t_0 e t_1 é igual ao valor do *portfolio* em t_0 capitalizado à taxa livre de

risco. Por fim, o *portfolio* replicante por modelar o comportamento da OR, tem o mesmo valor do que esta em t_0.

A programação dinâmica aparenta ser mais simples, já que não monta nenhum *portfolio*, apenas utiliza o conceito de valor esperado e que a utilidade do decisor seja crescente com o lucro. Mas depende das probabilidades reais e da taxa ajustada ao risco da opção μ, que podem ser verdadeiramente desconhecidas. Alternativamente, a programação dinâmica pode ser aplicada no mundo neutro ao risco, utilizando as probabilidades neutras ao risco e a taxa livre de risco. Neste caso assume indiretamente todas as premissas desta valoração.

Na próxima Seção desenvolve-se a teoria da programação dinâmica para um modelo de vários períodos e seu caso limite em tempo contínuo. Para isso utiliza-se o contexto do Exemplo 1 (Seção 2.2), novamente por sua simplicidade e sem perda de generalidade.

2.7. Opções reais com vários períodos e em tempo contínuo

Para ativos financeiros em que informação, negócios e mudanças de preços ocorrem a todo instante, aplicar finanças em tempo contínuo soa natural. Para problemas de *capital budgeting*, a abordagem em tempo contínuo é em muitos casos pelo menos tão razoável quanto considerar fluxos de caixa anuais (Vollert, 2003, p.50), mas com a vantagem de utilizar os resultados da literatura de opções financeiras para valorar OR.

Dixit e Pindick (1994, p.98-106) apresentam uma didática transição do problema de apreçamento de OR de dois para muitos períodos e daí para tempo contínuo. Os pontos mais relevantes são destacados em seguida.

Reconsidere o contexto da decisão do problema de investimento do Exemplo 1 (Seção 2.2), mas agora com vários períodos e onde a incerteza segue um processo de Markov, ou seja, não depende de seu histórico passado (ver Seção 3.1). Seja x_t a variável de estado que descreve a situação atual da firma e como esta afeta sua opção de investimento e, seja u_t a variável de controle que descreve as escolhas disponíveis ao decisor: Investir ou esperar. As variáveis x_t e u_t afetam tanto o lucro do período corrente $\pi_t(x_t, u_t)$ (ou dividendo - $\delta_t(x_t, u_t)$), quanto a

distribuição de probabilidade dos futuros estados da natureza. O objetivo do decisor é escolher a seqüência de controles u_t que maximize o valor esperado da firma, ativo ou projeto - $F_t(x_t, u_t)$:

$$F_t(x_t) = \underset{u_t}{Máx} \{\pi_t(x_t, u_t) + E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (15)$$

A equação (15) é denominada de Equação Geral de Bellman e representa o princípio da otimização de Bellman para vários períodos em tempo discreto. O termo $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$ é denominado de valor de continuação (*continuation value*) e representa do ponto de vista do período t, o valor esperado das escolhas ótimas futuras ($u_{t+1}, u_{t+2}, ...$). A variável de controle u_t então é escolhida de forma que $F_t(x_t)$ seja máximo. Isso representa exatamente o *backward induction* da programação dinâmica, iniciada no último período T até $t+1$ ($u_{t+T}, ..., u_{t+2}, u_{t+1}$), e por fim em t com a escolha de u_t.

Se o horizonte de tempo é infinito (mas ainda com intervalos discretos), o decisor enfrenta o mesmo problema em qualquer data e a equação de Bellman é comum a todos os períodos, dependendo somente de x_t:

$$F(x_t) = \underset{u_t}{Máx}\{\pi(x_t, u_t) + E_t[F(x_{t+1})]/(1+r)\} \quad (16)$$

A equação (16) é uma equação funcional não linear (pois é recursiva) que neste caso tem solução única (Dixit e Pindick, 1664, p.102). A boa notícia é que há uma solução prática simples. Iniciando de uma estimativa qualquer para o valor verdadeiro da função - $F^1(x_t)$ - escolhe-se a variável de controle ótima u^1. Retornando u^1 ao lado direito de (16), obtém-se uma segunda estimativa – agora calculada – do valor verdadeiro da função: $F^2(x_t)$. Repetindo-se o processo continuamente converge-se para o verdadeiro valor da função. A convergência é garantida pelo fator de desconto $1/(1+r)$ que é menor do que 1.

Suponha agora que a duração de cada período de tempo Δt tenda a zero. O lucro e o fator de desconto devem ser considerados como taxas, de forma que a equação (15) é reescrita:

$$F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t)|x,u]/(1+r.\Delta t)\}$$

Multiplicando por $1+r.\Delta t$ e rearranjando:

$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[F(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - F(x,t)]\} \Rightarrow$$
$$r.\Delta t.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t).(1+r.\Delta t).\Delta t + E[\Delta F]\}$$

Dividindo por Δt e tomando este tendendo a zero, obtém-se a equação de Bellman para tempo contínuo:

$$r.F(x,t) = \underset{u}{Máx}\{\pi(x,u,t) + E[dF]/dt\} \quad (17)$$

A equação (17) mostra que o retorno do ativo medido sobre uma função de valor ($r.F(x,t)$) é a soma do seu lucro (ou dividendo) imediato com a taxa esperada de ganho de capital. A igualdade reflete a condição de não arbitragem e para isso, o ativo deve ser otimamente gerenciado (o que é dado pela maximização em relação às escolhas disponíveis ao decisor: u).

A equação (17) é uma formulação generalizada do problema de valoração em tempo contínuo. Neste trabalho, essa função é uma OR cujo valor dependente de uma ou mais variáveis de risco (estocásticas) associadas ao ativo subjacente da opção. Nos Exemplos 1 e 2 (Seção 2.2), a incerteza relacionada ao ativo subjacente foi descrita pelos estados da natureza das árvores binomiais. Entretanto, esse é um tratamento insatisfatório, pois a incerteza vista como cenários discretos não corresponde à realidade de muitos problemas reais. Por outro lado, descrever a incerteza associada ao ativo subjacente (x) com processos estocásticos contínuos (dx) é relativamente simples. Igualmente importante é obter o processo estocástico da OR (dF) derivado do(s) processo(s) estocástico(s) do ativo subjacente, o que se faz usando o de Lema de Ito. Resta então resolver a equação diferencial do valor da OR (dF) de forma satisfatória. Estes são temas tratados no próximo Capítulo.

3. Opções Reais em Tempo e Estados Contínuos

A abordagem apresentada para processos estocásticos e o Lema de Ito nesta dissertação são heurísticas

3.1. Processos estocásticos em finanças

Um processo estocástico é uma função que dá a probabilidade com que uma variável estará em um estado i e em um instante $t \in [t_o, T]$. Assim o processo estocástico pode descrever a evolução aleatória de uma variável com o tempo (ver Figura 7, Seção 3.1.1). Cada caminho possível da variável aleatória é uma coleção de observações: $X = \{X(t), t \in [t_0, T]\}$, onde $X(t)$ é a observação da variável aleatória X no estado da natureza i vigente no instante t **.**

Essa aleatoriedade é que habilita os processos estocásticos para a modelagem da incerteza sobre a evolução de uma variável como, por exemplo, o preço de um ativo. Assim, um processo estocástico envolve pelo menos uma variável aleatória que, se muda de valor em intervalos de tempo conhecidos ou fixos, caracteriza um processo de tempo discreto. Se a variável muda em qualquer instante t o processo é dito continuo no tempo. Por outro lado, se a variável aleatória assume um conjunto de valores descontínuos, que representam os estados da natureza, o processo é dito de variável discreta. Se ao contrário, a variável pode assumir qualquer valor em um dado intervalo, o processo é dito de variável continua (os estados da natureza são contínuos). Um processo estocástico pode ainda ser classificado (grosseiramente) como estacionário se possui estatísticas constantes por longos períodos de tempo, ou não-estacionário, quando ocorre o contrário. Assim, por exemplo, em todo o Capítulo 2 os exemplos apresentados são processos estocásticos estacionários com variável e tempo discretos.

Uma importante característica para processos estocásticos é a propriedade de Markov**.** Um processo é dito de Markov quando sua distribuição de probabilidade em qualquer instante futuro não depende de seu histórico passado. De outra forma, a única informação relevante para a distribuição de probabilidade futura é a informação do momento presente.

Em seguida são apresentados os principais processos estocásticos contínuos utilizados em opções reais[11] destacados em Dixit e Pindick (1994, Cap. 3) e detalhados por Brandão (Cap. 3). Dentre estes, fundamental é o Processo de Wiener, que por sua simplicidade, funciona como um elemento de construção para outros processos mais realistas e sofisticados.

3.1.1. Movimentos Brownianos

O Processo de Wiener ou movimento Browniano é um processo estocástico em tempo contínuo com três importantes propriedades:

I – É um processo de Markov.

II – As mudanças no processo δz para qualquer intervalo de tempo Δt são normalmente distribuídas e a variância cresce linearmente com o tempo. Por definição:

$$\delta z = \varepsilon.\sqrt{\delta t} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \;\Rightarrow \delta z \sim N(0,\sqrt{\delta t})$$

Onde ε segue uma Normal padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão um. Assim o valor esperado de z é sempre zero e sua variância é δt.

III – Apresenta variações ou incrementos δz independentes por unidade δt de tempo, ou seja, possui correlação serial nula: $Corr(\delta z_i, \delta z_j) = 0$.

$$Corr(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{Cov(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{Var(\delta z_i)}.\sqrt{Var(\delta z_j)}} \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\delta z_i, \delta z_j)}{\sqrt{\delta t}.\sqrt{\delta t}} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\sigma(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t}, \varepsilon_j.\sqrt{\delta t})}{\delta t} = \frac{E\{[\varepsilon_i.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_i.\sqrt{\delta t})].[\varepsilon_j.\sqrt{\delta t} - E(\varepsilon_j.\sqrt{\delta t})]}{\delta t} \Rightarrow$$

$$\rho(\delta z_i, \delta z_j) = \frac{\delta t.E\{[\varepsilon_i - 0].[\varepsilon_j - 0]\}}{\delta t} = E[\varepsilon_i].E[\varepsilon_j] = 0.0 \Rightarrow \rho(\delta z_i, \delta z_j) = 0$$

Onde: $\rho =$ Correlação, $\sigma(\delta z_i, \delta z_j) =$ Covariância e $\sigma^2 =$ Variância.

[11] Conforme comentado ao final da Seção 2.7, os processos de variável discreta são comumente insatisfatórios para a descrição dos fatores de risco do ativo subjacente, motivo pelo qual são preteridos daqui por diante.

Na medida em que se consideram intervalos de tempo progressivamente menores, no limite $\delta t \to 0$, o processo torna-se continuo no tempo, pode-se escrever que:

$$dz = \varepsilon.\sqrt{dt} \;\; \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \therefore dz \sim N(0,\sqrt{dt})$$

Onde dz é denominado incremento de Wiener. O fato de este processo ter a propriedade de Markov e de $dt \to 0$ (o que em geral torna $|dz| = |\varepsilon.\sqrt{dt}| >> dt$) faz com que o caminho da variável dz seja irregular e "quebradiço" (Figura 7). Por isso, no Processo de Wiener a variável estocástica não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional, o que demanda o uso do cálculo estocástico:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Além disso, duas outras propriedades decorrem (Hull, 2003, p.219):

I – O comprimento esperado do caminho percorrido pela variável z é infinito para qualquer intervalo de tempo;

II – O número esperado de vezes que z iguala qualquer valor em particular em qualquer intervalo de tempo é infinito.

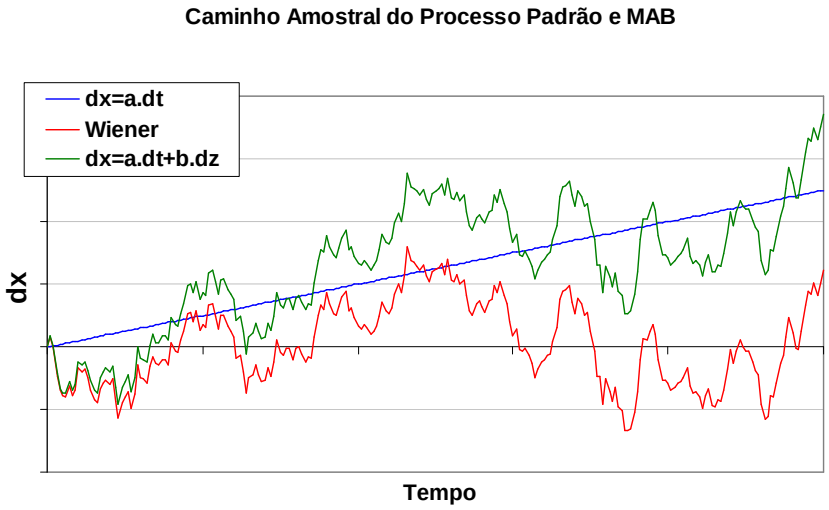

Figura 7 – Processos estocásticos: Wiener padrão e MAB. A reta em azul representa a tendência do MAB.

Embora o Processo de Wiener tenha propriedades que pareçam restritivas do ponto de vista prático, trata-se uma ferramenta muito útil na modelagem de muitas

variáveis que mudam de forma continua e estocástica com o tempo. Adaptações podem ser necessárias, como por exemplo, para modelar preços que em geral não podem ser negativos (neste caso assume-se que o logaritmo do preço é normalmente distribuído – ver adiante).

A adaptação mais simples do Processo de Wiener é a inclusão de uma tendência ou *drift*, denominado de Processo de Wiener Generalizado ou Movimento Aritmético Browniano (MAB) ou Movimento Browniano com D*rift* (Figura 7).

$$dx = \alpha.dt + \sigma.dz \quad (18)$$ sendo α e σ constantes.

Onde α é o *drift*, σ a volatilidade e dz é o incremento de Wiener. O Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, conforme mostrado, por exemplo, por Dixit e Pindick para um MAB (1994, p.68-70).

As variações dx do MAB - (18) - seguem uma distribuição normal com média $\alpha.dt$ e variância $\sigma^2.dt$: $dx \sim N(\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt})$:

$$E(dx) = E(\alpha.dt + \sigma.dz) = E(\alpha.dt) + E(\sigma.dz) = \alpha.dt + \sigma.E(dz) \Rightarrow$$
$$E(dx) = \alpha.dt + \sigma.0 \Rightarrow E(dx) = \alpha.dt$$

$$\sigma^2(dx) = V(dx) = V(\alpha.dt + \sigma.dz) = V(\alpha.dt) + V(\sigma.dz) + 2.Cov(\alpha.dt, \sigma.dz) \Rightarrow$$
$$V(dx) = 0 + \sigma^2.dt + 2.0 = \sigma^2.dt \Rightarrow \sigma(dx) = \sigma.\sqrt{dt}$$

Pode-se observar na Figura 7 que no curto prazo a volatilidade é determinante para o movimento Browniano enquanto que no longo prazo a tendência é que define o processo. Isso se deve ao fato da volatilidade crescer com $\sqrt{dt}$ e a média com dt. Se o dt é pequeno então $\sqrt{dt} >> dt$, mas à medida que dt cresce a relação se inverte: $\sqrt{dt} << dt$.

Um processo mais generalizado denominado de Processo de Ito ou Movimento Browniano Generalizado pode ser definido a partir do MAB, substituindo as constantes α e σ por funções não aleatórias de x e t.

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz$$

O valor esperado do Processo de Ito é dado por $E(dx) = a(x,t).dt$, e a variância é dada por $\sigma^2(dx) = b^2(x,t).dt$, sendo que $a(x,t).dt$ é a taxa instantânea de tendência ou *drift* e $b(x,t).\sqrt{dt}$ é a taxa instantânea de variância.

Um caso particular especialmente importante do Processo de Ito é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), obtido fazendo $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$ (Figura 8), sendo α e σ constantes:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz \quad (19) \quad \text{e} \quad dx \sim N[\alpha.x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

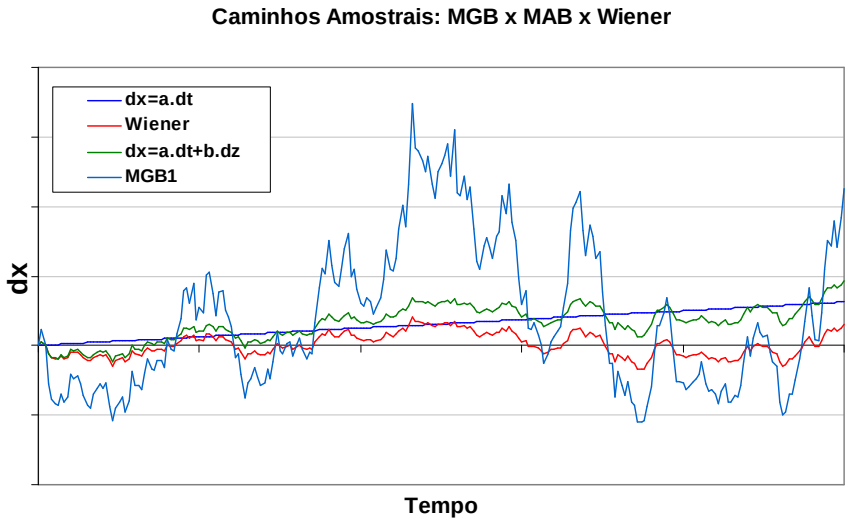

Figura 8 – MGB em relação ao Wiener padrão e ao MAB da Figura 7.

O MGB também é um processo estocástico não estacionário em que o valor esperado de dx depende do valor de x no momento inicial. Considerando que $\sigma = 0$, a equação (19) deixa de ser um processo estocástico e pode-se utilizar o cálculo diferencial convencional, então:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt; \quad \text{Mas: } d\ln x = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow d\ln x = \alpha.dt \Rightarrow$$

$$\int_0^x d\ln x = \int_0^t \alpha.dt \Rightarrow \ln(x_t / x_0) = \alpha.(t-0) \Rightarrow x_t / x_0 = \exp(\alpha.t) \Rightarrow x_t = x_0.\exp(\alpha.t)$$

Se $\sigma \neq 0$ é preciso utilizar o Lema de Ito do cálculo diferencial estocástico para definir o processo estocástico de $d\ln x$. Como se verá adiante (Seção 3.2.1),

$d \ln x$ é normalmente distribuídos e segue um o Processo de Wiener Generalizado dado por:

$$d \ln x = (\alpha - \sigma^2 / 2).dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \text{e} \quad d \ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2 / 2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Considerando um intervalo de tempo Δt, então:

$$\ln x_t \sim N[\ln x_{0+}(\alpha - \sigma^2 / 2).\Delta t, \sigma.\sqrt{\Delta t}] \therefore \text{ Se } Y = \ln x_t \Rightarrow x_t = e^Y \Rightarrow E(x_t) = E(e^Y)$$

E a variância de x_t será: $Var(x_t) = E(x_t)^2 - E^2(x_t) = E(e^{2Y}) - E^2(e^Y)$.

Ou seja, tanto o valor esperado quanto a variância de x_t são funções de $E(e^Y)$. Brandão (Cap.3, p.22-24) demonstra que:

$$E(x_t) = x_0.e^{(\alpha.t)} \quad \text{e} \quad Var(x_t) = x_0^2.e^{(2.\alpha.t)}.(e^{(\sigma^2.t)} - 1)$$

3.1.2. Reversão à média

Processos estocásticos que tendem a divergir do ponto de origem com o passar do tempo podem não ser adequados para algumas variáveis econômicas. O preço de *commodities* como petróleo e cobre, por exemplo, embora possam variar de forma aleatória no curto prazo em resposta a desequilíbrios de mercado, no longo tendem a reverter na direção do custo marginal de produção (Dixit e Pindick, 1994, p.74) ou alguma média que reflita o preço de equilíbrio de mercado. Processos com essa característica são denominados de Modelos de Reversão à Média (MRM).

Essa média no caso de uma *commodity* inclui o custo marginal de produção, a remuneração ao risco e o chamado "custo de utilização" (*user cost*) quando se trata de um recurso não-renovável, crescente com o tempo devido ao efeito da exaustão (Pindyck & Rubinfeld, 1995, p.545-546, apud Dias, 1996, p.109). Quanto mais competitivo for o mercado, maior deve ser a velocidade de reversão à média. No entanto, a velocidade de reversão também depende das restrições tecnológicas[12] do bem a ser produzido. Na indústria do petróleo, tipicamente de capital intensivo, as restrições tecnológicas somadas à existência um cartel atuante (OPEP) implicam

[12] A natureza impõe restrições tecnológicas de forma que apenas algumas combinações de insumos constituem formas viáveis de produzir certa quantidade de produtos. As alternativas viáveis são denominados de conjunto de produção, cuja fronteira ou limite descreve a função de produção (Varian, 2003, p.344).

numa velocidade de reversão à média muito lenta, conforme se observa nas séries históricas de preço do petróleo.

Há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média. Responder a essa pergunta implica na análise de séries históricas de preços. Dixit e Pindick (1994, p.77-78) sugerem e realizam esta análise com o teste de raiz unitária de Dickey e Fuller (1981, apud Dixit e Pindick op.cit) sobre séries históricas longas de preços de petróleo. Considerando uma série de 120 anos, estes autores concluem pela reversão à média. Mas ao considerarem séries de 30 ou 40 anos não conseguem rejeita a hipótese de *random walk*. Essa parece ser a situação de muitas variáveis econômicas, qual seja, é difícil estatisticamente distinguir entre *random walk* e reversão à média com dados de 30 ou 40 anos. Como resultado, estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos. A favor do MGB, porém, conta a simplicidade analítica, motivo pelo qual este processo é o mais adotado na literatura (Dias, 1996, p.106).

Existem vários MRM sendo que, os mais utilizados, podem ser divididos em dois grupos (Dias, 1996, p.116). O primeiro grupo agrega os MRM baseados no Processo de Ornstein-Uhlenbeck, sendo mais utilizado em aplicações econômicas. O segundo grupo, mais utilizado no mercado financeiro, deriva da equação de MRM descrita em Shimko (1992, pg.11).

O processo reversão à média de Ornstein-Uhlenbeck apresenta algumas variações. O modelo mais simples é denominado de MRM Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck :

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.dz \quad (21) \qquad \text{e} \qquad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde η é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é o nível para que x tende a reverter. O Processo de Ornstein-Uhlenbeck apresenta a propriedade de Markov, embora seus incrementos não sejam independentes. Observe que se $x > \bar{x}$ então dx tende a ser negativo (dz é uma distribuição simétrica) e por isso x caminha na direção de $\bar{x}$. Se ocorrer $x < \bar{x}$, dx tende a ser positivo e novamente x tende a $\bar{x}$.

Note que quanto maior η, maior o efeito da convergência dada por $\bar{x} - x$, por isso η é denominado de "velocidade" de reversão. A média e variância deste processo podem ser obtidas a partir das equações de kolmogorov e são dadas por (ver demonstração em Dixit e Pindick, 1994, p.90-91):

$$E[x] = \bar{x} + (x - \bar{x}).e^{-\eta.t} \quad \text{e} \quad V[x - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2.\eta}.(1 - e^{-2.\eta.t})$$

Observe que se trata de um processo convergente, pois se $t \to \infty$ então $E[x] = \bar{x}$ e a variância converge para um valor constante: $V[x - \bar{x}] = \sigma^2 / 2.\eta$. Caso $\eta \to \infty$ novamente $E[x] = \bar{x}$, mas a variância ao contrário tende para zero. Por fim se $\eta \to 0$ o processo se transforma num Movimento Browniano simples: $E[x] = x$ e $V[x] = \sigma^2.t$.

Dixit e Pindick (1994, p.76) observam que a equação (21) é a versão em tempo contínuo de um processo auto-regressivo de 1ª ordem em tempo discreto – AR(1). Isso significa que seus parâmetros podem então ser estimados a partir de dados históricos em tempo discreto.

O MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck é o modelo mais popular deste grupo por vários motivos, como não gerar preços negativos, por sua similaridade com o MGB e por ter uma solução analítica para o problema da opção de investimento com expiração infinita (Dixit e Pindyck, 1994, p.161-163). A equação deste modelo é dada por:

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz \quad \text{e} \quad dx \sim N[\eta.(\bar{x} - x).x.dt, \sigma.x.\sqrt{dt}]$$

Note que a diferença para o MGB é que a tendência α é substituída por $\eta.(\bar{x} - x)$, que é justamente o termo de reversão. Com isso, a solução do problema de investimento de Dixit e Pindick (op. cit) com o MGB se estende ao MRM Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck com alguns ajustes.

Metcalf e Hassett (1995) comparam o retorno de um investimento considerando o MGB e MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck para a modelagem do preço de um produto ou o valor de um ativo. Neste sentido apresentam uma

equação que generaliza os processos estocásticos de reversão à média e Browniano:

$$\frac{dx}{x} = \{\alpha + [\eta.(\bar{x}.e^{\alpha.t} - x)]\}.dt + \sigma.dz \quad (22)$$

Note que se $\alpha = 0$ obtém-se o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck dado por (20). Se $\eta = 0$ obtém-se o MGB (19). O termo $e^{\alpha.t}$ é uma inovação em relação aos MRM anteriores refletindo a expectativa de que a média de longo prazo $\bar{x}$ varie com o tempo (crescente se $\alpha > 0$ e vice-versa).

A outra classe de processo de reversão à média, como dito, deriva da equação de Shimko (1992, p.11):

$$dx = \eta.(\bar{x} - x).dt + \sigma.x^{\gamma}.dz \quad (23) \qquad \text{e} \qquad dx = N \sim [\eta.(\bar{x} - x).dt, \sigma.x^{\gamma}.\sqrt{dt}]$$

Essa classe de processos de MRM possui o mesmo valor esperado de dx, mas a variância cresce com o expoente γ. Note que se γ é nulo, obtém-se o MRM de Ornstein-Uhlenbeck Aritmético (21).

Trata-se de uma classe de processos também bem difundida na literatura com diferentes aplicações (ver Dias, 1996, p.119-120).

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo o fato de convergir para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado. Preços crescentes estimulam a entrada de novos concorrentes, o que aumenta a oferta e estimula a sua redução. Simetricamente, preços muito baixos eliminam os competidores com maiores custos, reduzindo a oferta, o que estimula a recuperação do nível de preços.

Entretanto, Metcalf e Hassett (1995) mostram numericamente que o nível de investimento agregado obtido com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck no lugar do MGB é estatisticamente o mesmo para um range de parâmetros representativo. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva

de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck, obtido a partir da Equação (22) fazendo a tendência (α) igual à zero: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$. O MGB também é obtido a partir de (22) com tendência (α) e velocidade de reversão (η) nulas: $dx = \sigma.x.dz$. Em outras palavras, em seu estudo estes autores fazem com que tanto o MGB quanto o MRM apresentem a mesma tendência ou *drift*, no caso nula. De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM, intuitivamente espera-se que os preços gerados pelo primeiro irão necessariamente dominar o MRM.

A estabilização da variância com o tempo no MRM geométrico (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com o MGB, limita o valor da flexibilidade de esperar. Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir em relação aos Movimentos Brownianos. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM significa que preços mais altos são alcançados com menor freqüência (Efeito Preços), o que induz a uma redução do nível de investimentos. Os autores mostram que estes dois efeitos se tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, os autores argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza[13].

Dixit e Pindyck, (1994, p.161-167) também discutem os efeitos decorrentes da adoção do MRM. Adicionalmente, argumentam que a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o exercício da opção de investir. Segundo estes autores, o efeito resultante do MRM é menos óbvio do que o do MGB**.**

[13] Este resultado foi obtido em um modelo onde a função de produção apresenta retorno decrescente de escala, o que ocorre, por exemplo, em projetos de produção de petróleo. Entretanto, se o retorno de escala é constante e os custos são convexos, os efeitos preços altos e variância se somam e aumentam o nível de investimentos.

3.1.3. Processos de saltos de Poisson

Choques na oferta de um produto podem causar descontinuidades nos níveis de preços praticados. Por exemplo, a entrada de um novo competidor em um mercado pouco competitivo aumentando a oferta, ou ao contrário, conflitos armados e instabilidades políticas reduzindo a oferta, podem causar respectivamente queda ou aumento brusco nos preços correntes. Assim algumas variáveis econômicas podem apresentar infreqüentes, mas discretos saltos em seu valor, sendo modeladas por um Processo de Poisson (Dixit e Pindick, 1994, p.85).

O Processo de Poisson é um processo que apresenta uma variável dq que modela saltos de tamanho u fixo ou variável, correlacionado a x ou não, onde a probabilidade de ocorrência ($\lambda.dt$) do salto é dada por uma de taxa de chegada λ por unidade de tempo dt com distribuição de Poisson:

$$dq = \begin{cases} u & com\ probabilidade\ \ \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade\ \ 1-\lambda.dt \end{cases} \quad (24) \Rightarrow$$

$$E(dq) = u.\lambda.dt + 0.(1-\lambda).dt \Rightarrow \boxed{E(dq) = u.\lambda.dt} \quad (25)$$

Note que a distribuição de probabilidade, o valor esperado e a variância de dq são contínuos no tempo, mas dq não. Por analogia com o Processo de Ito, dx pode ser escrito como:

$$\boxed{dx = f(x,t).dt + g(x,t).dq}$$

Por exemplo, se o valor do salto depender do valor corrente de x, então poderia se ter $g(x,t) = x$, sendo dq definido como em (24) e $f(x,t)$ representaria uma tendência determinística. Um salto é dito degenerado quando a variável pode somente pular para um valor fixo e então permanece neste para sempre.

3.1.4. Processos de difusão com saltos (*jump-diffusion processes*)

Também denominados de Processos de Poisson-Gaussianos, os processos de difusão com saltos resultam da combinação de um Processo de Poisson com um Processo de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86):

$$\boxed{dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq} \quad (26)$$

Esta associação faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta e não diferenciável no tempo (Poisson). Com isso, determinar o processo de uma função H(x) exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (ver Apêndice 4).

O retorno de um processo de difusão com saltos não é normalmente distribuído. No exemplo acima, o Processo de Poisson provoca uma alteração no valor da média e da variância, e a distribuição torna-se assimétrica**.** Se o tamanho do salto u também for aleatório, as caudas da distribuição também se tornam mais grossas.

A adição de um Processo de Poisson ao Processo de Ito retrata uma maior incerteza sobre a evolução de dx. A possibilidade de saltos aleatórios de tamanho u (positivo ou negativo) aumenta a incerteza sobre a variável modelada. O aumento do risco reduz o valor de um ativo na medida em que aumenta a taxa de desconto exigida pelo investidor. No caso da adição de um Processo de Poisson, esse incremento é dado exatamente pela taxa de chegada do salto λ (ver, por exemplo, Dixit e Pindick, 1994, p.87). Este resultado é bastante geral. A adição do parâmetro λ eleva o valor do gatilho e torna a regra de decisão mais conservadora (Dixit e Pindyck, 1994, p.201).

3.1.5. Reversão à média com saltos

Resultante da combinação de um MRM com um processo de Poisson, a reversão à média com saltos pode ser entendido como um caso particular de um Processo de Poisson-Gaussiano (26) onde $a(x,t) = \eta.(x - \bar{x})$. Por exemplo, considere o MRM Geométrico de Ornstein-Unhlenbeck com saltos, então:

$$dx = \eta.x.(x - \bar{x}).dt + \sigma.x.dz + x.dq \Rightarrow \quad dx / x = \eta.(x - \bar{x}).dt + \sigma.dz + dq \quad (27)$$

Onde $dz\ e\ dq$ usualmente são considerados independentes. Note que, de (25), $E(dq) = u.\lambda.dt$, então ao subtrair-se $u.\lambda$ da tendência em (27), obtém-se um MRM com saltos compensado, cuja tendência não é mais afetada pelo Processo de Poisson:

$$dx / x = [\eta.(x - \bar{x}) - u.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Esse MRM com Saltos de Poisson Compensados, onde $-u.\lambda$ é o termo de compensação, tem vantagens práticas sendo algumas vezes usados na literatura, como por Dias e Rocha (1999) para a simulação do processo estocástico do preço do petróleo.

A reversão à média com saltos é um modelo particularmente importante para simular os preços de algumas *commodities* e taxa de juros. Esse processo combina o conceito de equilíbrio de preços de mercado para *commodities* (reversão à média) com o conceito de oscilação de preços apresentado por Merton (1976, apud Dias e Rocha *op. cit.*), segundo o qual a chegada de informações anormais gera choques estocásticos discretos, modelados pelo processo de Poisson.

Em seu artigo, Dias e Rocha (op.cit) adotam o seguinte MRM com Saltos de Poisson Compensados para o preço do petróleo (P):

$$dP / P = [\eta.(\overline{P} - P) - K.\lambda].dt + \sigma.dz + dq$$

Onde $K = E(\phi - 1)$ e dq é definido de forma similar a (24):

$$dq = \begin{cases} \phi - 1 & com\ probabilidade \quad \lambda.dt \\ 0 & com\ probabilidade \quad 1 - \lambda.dt \end{cases}$$

Os saltos apresentam de tamanho ϕ variável com probabilidade de ocorrência $\lambda.dt$ com distribuição de Poisson. Os saltos ϕ tem uma distribuição de probabilidade especial com média $K + 1$ representada por duas normais truncadas, uma para saltos para cima (*jump up*) e outra com saltos para baixo (*jump down*) – Figura 9:

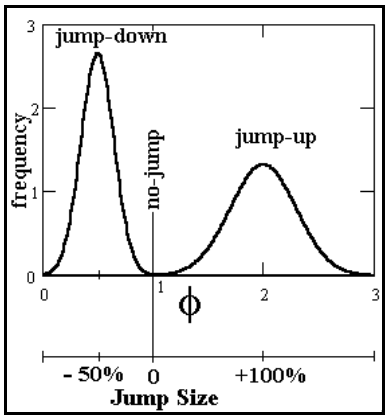

Figura 9 – Distribuição dos saltos aleatórios (Dias e Rocha, 1999, p.5).

Em caso de salto, há a probabilidade de 50% deste ser para cima e 50% para baixo. No caso de ser para cima, os preços são esperados dobrar e em caso de ser para baixo os preços são esperados reduzir pela metade.

As duas principais desvantagens do processo de reversão com saltos é que, não se pode construir um *portfolio* sem risco quando se considera saltos e a dificuldade em se estimar os vários parâmetros necessários. O primeiro problema conceitualmente é o mais importante, pois não se pode construir um *hedge* perfeito utilizado no apreçamento de opções por *ativos contingentes*, por exemplo**.** Mas existem alternativas para contornar esta situação, como também para superar as dificuldades encontradas nas estimativas dos parâmetros (Dias, p.3-4, www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm).

3.1.6. Processos estocásticos com barreiras

Processos estocásticos com limites superiores ou inferiores impostos são ditos com barreiras. Estes processos são particularmente importantes para opções financeiras com barreiras (ver Hull, 2003, p.439-441), mas também encontram aplicação em OR.

Sob o ponto de vista econômico, as barreiras podem ser utilizadas para simular mecanismos de equilíbrio de mercado (entrada e saída de competidores), limites regulatórios ou mesmo a atuação de cartéis. Há três tipos de barreiras: refletoras, absorventes e elásticas. As barreiras refletoras são aquelas que, quando atingidas, devolvem a variável para o mesmo nível ou valor do momento anterior ao toque. As barreiras absorventes, ao contrário, quando atingidas absorvem a variável estocástica eliminando sua aleatoriedade. No MGB ($dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$), o limite $x = 0$ funciona como uma barreira absorvente, pois, se atingido em um tempo t', então $dx = 0$ e $x = 0$ para todo $t > t'$. As curvas de gatilho de OR também funcionam como barreiras absorventes, pois uma vez atingidas pela variável aleatória, levam ao exercício da opção. As barreiras elásticas por sua vez, são aquelas que se apresentam parcialmente absorventes ou parcialmente elásticas.

Dixit e Pindick (1994, p. 83-84) demonstram que um MAB com barreiras refletoras (superior e inferior) converge no longo prazo com densidade de

probabilidade exponencial, cujo valor esperado depende do sinal da tendência. Este resultado não se altera se a barreira inferior é relaxada quando a tendência é positiva ou se a barreira superior é relaxada quando a tendência é negativa. Bjerksund e Stensland (1993) propõem uma aproximação analítica para a opção de compra americana utilizando uma barreira absorvente superior, as qual é uma aproximação da curva de gatilho (ver Seção 3.5.1).

3.2. Lema de Ito

Na Seção 3.1.1, ao introduzir o Processo de Wiener, discutiu-se que devido à propriedade de Markov e de $dt \to 0$, o caminho da variável dz é continuo em relação ao tempo, mas não diferenciável no sentido convencional:

$$\lim_{dt\to 0}(dz/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon.\sqrt{dt}/dt) = \lim_{dt\to 0}(\varepsilon/\sqrt{dt}) = \infty$$

Todos os processos estocásticos apresentado até agora que apresentam o incremento de Wiener herdam essa característica. Assim, determinar o processo estocástico de uma função que dependa de um outro processo não diferenciável no sentido convencional demanda o uso do cálculo estocástico.

O Lema de Ito permite diferenciar ou integrar funções desse tipo, sendo mais conhecido na forma que se aplica a um processo estocástico de Ito. Pode ser entendido a partir da expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f^{'}(a).dx + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^{n}(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t. Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:então dF será dado por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e } \quad dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32); \; E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33) \text{ e } V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \; \varepsilon^2.dt \; = dz^2 \; \sim \; N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

O Apêndice 3 apresenta a demonstração de todos os resultados mostrados nesta Seção, da equação (28) à (35). Modificações são necessárias para outros processos estocásticos. O Apêndice 4 mostra a versão que considera um processo de Poisson.

Verifica-se agora verificar o resultado (20). Seja x o preço de um ativo que segue um MGB: $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Para um período de tempo dt suficientemente pequeno, é razoável que a variação percentual do preço do ativo

(taxa de retorno dx/x) independa do seu nível de preço (Hull, 2003, p.223), seguindo portanto um MAB:

$$\frac{dx}{x} = \alpha.dt + \sigma.dz \qquad \Rightarrow \frac{dx}{x} \sim N[\alpha.dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Onde α e σ são a tendência e volatilidade da taxa de retorno. Para determinar o processo estocástico do logaritmo do preço toma-se o Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz$$

Sendo $F(x,t) = \ln(x)$ e $dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$. Então $a(x,t) = \alpha.x$ e $b(x,t) = \sigma.x$:

$$d\ln x = [\alpha.x.\frac{1}{x} + 0 - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}.\sigma^2.x^2].dt + \frac{1}{x}.\sigma.x.dz] \Rightarrow$$

$$d\ln x = [\alpha - \frac{1}{2}.\sigma^2].dt + \sigma.dz \quad (20) \quad \Rightarrow d\ln x \sim N[(\alpha - \sigma^2/2).dt, \sigma.\sqrt{dt}]$$

Ou seja, embora $d\ln x$ e dx/x sigam distribuições normais com a mesma volatilidade σ, apresentam tendências diferentes tais que $E(dx/x) > E(d\ln x)$. Esse resultado é decorrente da desigualdade de Jensen[14], dada pela presença da segunda derivada parcial de *F(x)* no Lema de Ito. Como $\ln x$ é côncava, então $\partial^2 F/\partial x^2 < 0$, portanto $[\alpha - \sigma^2/2].dt \leq \alpha.dt$.

Os diferentes processos estocásticos apresentados e o Lema de Ito são instrumentos adequados para a representação estocástica do ativo subjacente e da função de valor de uma opção. Mas é preciso detalhar um pouco melhor o que é o ativo subjacente transacionado no mercado de uma opção real e discutir como modelar seu processo estocástico.

---

[14] Se F(x) é uma função convexa então E[F(x)] ≥ F{E(x)], a expectativa existe e é finita. Demonstração: Seja a expansão de Taylor (28) em torno de x e na forma discreta, onde *f(x)* é convexa: *f"(x)>0,* então:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}.(\Delta x)^2 > f'(x).\Delta x \Rightarrow E[f(x+\Delta x)] > E[f(x) + f'(x).\Delta x] \Rightarrow$$

$$E[f(x+\Delta x)] > f(x) + f'(x).E[\Delta x], \text{ fazendo } \Delta x \to 0 \text{ obtém-se: } E[f(x)] > f(x).$$

3.3. Modelando o ativo subjacente

Avaliar opções reais com várias fontes de incerteza pode ser uma tarefa complicada ou impraticável. Mesmo com duas fontes, pode ser difícil resolver solucionar uma modelagem que considere a correlação entre os processos estocásticos envolvidos. Por isso, seria muito proveitoso algum tipo de simplificação que torne possível reduzir várias fontes de incerteza em uma única.

Para evitar este problema, Copeland e Antikarov (2001, p. 219) assumem duas premissas: A primeira, denominada *Marketed Asset Disclaimer,* consiste em utilizar o valor (V) do projeto implantado como se fosse um ativo financeiro transacionado no mercado; A segunda, consiste em utilizar o teorema de que qualquer preço adequadamente antecipado flutua randomicamente (Samuelson, 1965). Isso significa que, independente do padrão de fluxo de caixa que se espere de um projeto, as mudanças em seu VPL irão seguir um passeio aleatório (*random walk*). Esse teorema permite que qualquer conjunto de variáveis com incerteza possa, via Simulação de Monte Carlo, produzir uma estimativa de V estocástico, cujo desvio padrão é então o de um passeio aleatório. Assim, Copeland e Antikarov (op.cit.) utilizam este teorema para dizer que V pode seguir um MGB, aproximadamente.

3.3.1. *Marketed Asset Disclaimer* (MAD)

Na Seção 2.6 se discutiu diferentes abordagens (e sua equivalência) para se calcular o valor de uma OR com o instrumental desenvolvido para opções financeiras. Isso foi possível através da montagem de diferentes *portfolios* que incluíam um ativo subjacente ou um ativo gêmeo do projeto, supostamente transacionados no mercado financeiro. Mas que ativo financeiro teria um fluxo de caixa perfeitamente correlacionado com o de um projeto em todos os estados da natureza?

A resposta é simples: Nenhum, pois isso é praticamente impossível. Inicialmente, as aplicações de OR usaram os preços de *commodities* mundiais como aproximações para o ativo subjacente. Mas assumir que a volatilidade do projeto subjacente sem flexibilidade é a mesma de uma *commodity* é uma premissa um tanto arbitrária. Por outro lado, o que poderia ser mais bem correlacionado com um projeto do que o próprio projeto? Então parece razoável a premissa de que o VPL

tradicional (sem flexibilidades) de um projeto é o melhor estimador não viesado do valor de mercado deste mesmo projeto, caso ele fosse transacionado. Essa premissa é denominada de *Marketed Asset Disclaimer* (MAD) por Copeland e Antikarov (2001, p.94-95) e é bastante utilizada na valoração de OR.

Estes autores destacam que o MAD não faz nenhuma premissa mais forte do que aquelas utilizadas na estimativa do VPL. A premissa mais importante adotada ao utilizar o VPL, tão óbvia que por isso talvez passe despercebida ao decisor, é admitir que a distribuição de retorno do VPL é bem correlacionada com o projeto o suficiente para ser utilizada[15]. Mas isso é o melhor que se pode fazer, e também por isso é razoável assumir que o valor presente de um projeto implantado seria o valor que este assumiria no mercado caso fosse transacionado (Copeland e Antikarov, op. cit.). Portanto, um decisor que utiliza o VPL para valorar seus projetos não faz nenhuma premissa adicional ao utilizar o mesmo VPL como ativo subjacente.

3.3.2. Prova de que preços adequadamente antecipados flutuam randomicamente

Samuelson (1965, apud Copeland e Antikarov, 2001, p.222-227) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado. Se os investidores têm informação completa sobre o fluxo de caixa e toda a informação já está embutida no preço corrente da ação, então as expectativas serão atingidas e os investidores irão receber exatamente o seu custo de capital, independente do padrão de fluxo de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório[16] (Copeland e Antikarov, 2001,

[15] Note que a rigor, saber o VPL do projeto pressupõe conhecer a distribuição de probabilidade real dos estados da natureza e a taxa de desconto do projeto sem flexibilidade a cada instante *t*.

[16] Conforme citado na Seção 3.1.1, um Movimento Browniano pode ser visto como a versão em tempo contínuo de um passeio aleatório ou *randon walk*, ver um exemplo em Dixit e Pindick (1994**,** p.68-70).

p.222). Então riscos (de *timing,* políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente. Porém, em alguns casos, pode ser útil ter uma determinada incerteza isolada das demais, individualizando alguma decisão específica, como por exemplo, aquelas relacionadas às incertezas técnicas[17] (Seção 2.5).

Samuelson (op. cit) prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Seja x_t uma variável aleatória de preço tal que seu preço *spot* na data de hoje s_t seja constante: $E(s_0) = x_0$ e $\sigma^2(s_0) = 0$. Suponha que o preço *spot* siga um processo dado por: $s_{t+1} = a.s_t + \sigma.\varepsilon_t$ onde $\varepsilon_t \sim N[0,1]$. Então, o valor esperado será $E(s_{t+1}) = a.s_t$ enquanto que a variância será:

$$V(s_{t+1}) = E(s_{t+1}^2) - E^2(s_{t+1}) = E[a^2.s_t^2 + 2.a.s_t.\sigma.\varepsilon_t + \sigma^2.\varepsilon_t^2] - a^2.s_t^2 = \sigma^2.E(\varepsilon_t^2)$$

Usando o resultado (32): $E(\varepsilon_t^2) = 1$, então: $V(s_{t+1}) = \sigma^2$.

Nos períodos seguintes o valor esperado será:

$$s_{t+2} = a.s_{t+1} + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a.(a.s_t + \sigma.\varepsilon_t) + \sigma.\varepsilon_{t+1} = a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) \Rightarrow$$
$$E(s_{t+2}) = E(a^2.s_t) + E[\sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})] \Rightarrow \; E(s_{t+2}) = a^2.E(s_t)$$

Observando três períodos à frente:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow E(s_{t+3}) = a^3.E(s_t).$$

E a variância será:

---

[17] Se a incerteza econômica sobre o preço de um ativo segue um movimento Browniano, sua volatilidade cresce com o tempo (ver Seção 4.1.1). O contrário ocorre com a incerteza técnica, maior no início de um projeto, diminui à medida que a firma investe em informação. Uma OR com essa característica é denominada de opção de aprendizagem (*learning option*), um tipo especial de opção composta "arco-íris" (*rainbow compound option*).

$$V(s_{t+2}) = E[s_{t+2} - E(s_{t+2})]^2 = E\{a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) - E[a^2.s_t + \sigma.(a.\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})]\}^2.$$

Com o resultado (32), chega-se a: $V(s_{t+2}) = \sigma^2.(a^2 + 1)$.

De forma similar verifica-se que $V(s_{t+3}) = \sigma^2.(a^4 + a^2 + 1)$, e assim por diante. O último termo entre parênteses forma uma série cuja convergência depende de a. Se $a > 1$ a variância diverge aceleradamente; Se $a = 1$, a variância passa a ser $V(s_{t+T}) = \sigma^2.T$ e tem-se um processo de Wiener padrão: $\varepsilon_t \sim N[0, \sigma.\sqrt{t}] = \sigma.\sqrt{t}.N[0,1] = \sigma.dz$; Por fim, se $a < 1$, a variância é convergente: $V(s_{t+T}) = \sigma^2 / (1 - a^2)$ - Copeland e Antikarov (*op. cit.*, p.225).

O preço futuro de $T = 3$ observado em t é o valor esperado em t do preço *spot* para $T = 3$, dado por:

$$F_3^t = E_t(s_{t+3}) = a^3.E_t(s_t) \Rightarrow F_3^t = a^3.s_t$$

No momento seguinte $t+1$: $F_3^{t+1} = E_{t+1}(s_{t+3})$, então:

$$s_{t+3} = a.s_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + \sigma.a.\varepsilon_{t+2} + \sigma.\varepsilon_{t+3} \Rightarrow$$
$$E_{t+1}(s_{t+3}) = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} + 0 + 0 \Rightarrow F_3^{t+1} = a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1}$$

Note que o termo de aleatório em $t+1$ agora é um valor observável de forma que $E_{t+1}(\varepsilon_{t+1})$ é substituído por ε_{t+1}. Mas o valor esperado da mudança no valor esperado do preço futuro em t é igual a zero:

$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = E_t[a^3.s_t + \sigma.a^2.\varepsilon_{t+1} - a^3.s_t] = \sigma.a^2.E_t[\varepsilon_{t+1}] = \sigma.a^2.0 \Rightarrow$$
$$E_t[F_3^{t+1} - F_3^t] = 0$$

Então mesmo que o preço *spot* mude ao longo do tempo, o preço esperado de um contrato futuro não muda. Isto resulta do fato destes contratos serem escritos para refletir a expectativa de um preço em um ponto no tempo, e isso não depende do caminho que o preço segue até lá. Assim, como a informação sobre o preço *spot* na maturidade do contrato é randômico e não viezado ($\varepsilon_t \sim N[0,1]$), o preço de um futuro é um passeio aleatório com tendência zero**.**

Copeland e Antikarov (2001, p.233-236) estudam três indústrias entre 1991 e 1999 em busca de evidências empíricas do teorema de Samuelson. Testam a ciclicidade de medidas de retorno e encontram resultados consistentes com o teorema. Entretanto, referem-se a outros estudos acadêmicos mais sofisticados que verificam dependência temporal, mas argumentam que poucos destes são significantes após dedução de custos de transação e ajustes ao risco. Com isso, se posicionam a favor do uso do teorema de Samuelson com propósitos práticos.

Adicionalmente ao teorema de Samuelson, em favor do MGB há o fato deste ser matematicamente mais simples do que outros processos estocásticos, além de ser estatisticamente equivalente a modelos mais sofisticados como o de reversão à média em intervalos com até 30 ou 40 anos (ver Seção 3.1.2). Por isso o MGB é o modelo estocástico mais empregado para modelar a incerteza não só em projetos, como em toda a literatura de economia e finanças. (Dias, 1996, p.106).

3.4. Valoração de OR em tempo e estados contínuos

Na Seção 2.7 demonstrou-se para um exemplo simples discreto a equivalência entre diferentes técnicas como ativos contingentes (*contingent claims*) e programação dinâmica. Conforme comentado, essa equivalência é uma propriedade geral válida inclusive com variáveis contínuas, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (1994, p.108-124). Por isso, a partir deste ponto da dissertação, faz-se a opção pela valoração por ativos contingentes (*contingent claims*) pelo seu significado econômico e o uso do argumento de não arbitragem, conceitos consagrados em finanças[18].

3.4.1. A equação diferencial básica para apreçar uma opção sobre um ativo com MGB

A oportunidade gerada por uma OR é um ativo que tem valor. Se esta oportunidade for um ativo transacionado no mercado, seu preço será conhecido.

[18] Existem várias outras alternativas para resolver problemas de otimização sob incerteza. Dois exemplos são o método integral e o método evolucionário. O método integral é particularmente útil para opções perpétuas. Soma integrais estocásticas para apreçar OR em que os limites de integração são os tempos de parada ótima, quando o processo estocástico toca a curva de gatilho (ver exemplo Dixit e Pindick, 1994, Cap.9). O método evolucionário utiliza algoritmos genéticos para evoluir soluções a partir de uma estimativa inicial da curva de gatilho até se aproximar do ótimo, podendo ser combinada com SMC. (ver Dias, 2005, p.450-457 - opções evolucionárias).

Mas mesmo que não seja, seu valor pode ser calculado através de um *portfolio* de ativos transacionados que replique perfeitamente o retorno do projeto em qualquer momento futuro e em qualquer estado da natureza. Então o valor do projeto será o valor deste *portfolio*, caso contrário há uma oportunidade de arbitragem. Está implícita nesta premissa que, a firma gerencia a OR da forma mais eficiente possível, pois, de outra forma, não se elimina a oportunidade de fazer arbitragem.

Seja V o valor de um projeto segue um MGB, então:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (36)^{19}$$

O uso de ativos contingentes (*contingent claims*) requer a premissa de que as mudanças estocásticas em V sejam modeladas por um *portfolio* ou ativo gêmeo transacionado na economia. Esse *portfolio* pode ser composto por ativos financeiros como ações, por *commodities* (transacionadas no mercado à vista e futuro) ou mesmo artigos manufaturados**.**

Seja x o ativo ou *portfolio* perfeitamente correlacionado com V (a correlação de x e V com o *portfolio* de mercado são iguais: $\rho_{xm} = \rho_{vm}$), então seu processo estocástico será dado por:

$$dx = \alpha.x.dt + \sigma.x.dz$$

Note que a volatilidade σ e a tendência α de x e V são exatamente as mesmas, afinal o *portfolio* e o projeto são idênticos por construção. Seja então μ a taxa esperada de retorno do investidor que detém este ativo ou *portfolio* gêmeo. Então μ também é a taxa ajustada ao risco exigida pelo investidor que detém a oportunidade de investimento V. De acordo com o CAPM μ é dado por: $\mu = r_f + \phi.\rho_{xm}.\sigma$ onde $\phi = (r_m - r_f)/\sigma_m$ é o *market price of risk* e $\phi.\rho_{xm}.\sigma$ é o prêmio de risco π, então: $\mu = r_f + \pi$. Mas o retorno do projeto também é dado pela

---

[19] Dixit e Pindick (1994, p136-137) alertam que a equação (36) é uma abstração da realidade para a maioria dos projetos. Seja por exemplo por não contemplar a possibilidade de desativar ou abandonar um projeto, seja por não permitir valores negativos para *V* (o que ocorre na realidade), ou mesmo por não ser o MGB o processo teoricamente mais adequado para modelar *V*. Mas ainda sim o MGB é útil numa série de situações onde a equação (36) reflita a expectativa da firma sobre o valor do projeto, ou pelo menos do preço do bem produzido. Adicionalmente há de se considerar que o MGB estatisticamente não pôde ser rejeitado em favor do MRM para períodos de 30 a 40 anos e a sua simplicidade analítica, fazendo-o um sucesso na literatura (ver Seção 3.1.2).

soma da taxa de ganho de capital α com a taxa de dividendos δ: $\mu = \alpha + \delta$. Igualando as duas equações obtém-se:

$$\mu = \alpha + \delta = r_f + \pi \Rightarrow \qquad \alpha - \pi = r_f - \delta \text{ [20]} \quad (37)$$

A taxa de dividendos δ desempenha um importante papel sobre o exercício de uma opção. Para uma opção de compra financeira, se $\delta = 0$, a opção nunca é exercida antes da maturidade[21]. Isso se deve a dois motivos: Como não há custo em manter a opção de compra ($\delta = 0$), manter a opção viva no lugar do ativo subjacente funciona (até a expiração) como um seguro contra quedas do preço do ativo subjacente abaixo do preço de exercício e; Adiar o exercício permite capitalizar o investimento (preço de exercício) à taxa livre de risco até a expiração. Para a opção de investimento esta propriedade se repete[22]. Se $\delta > 0$, a taxa de retorno do projeto α (equação 43x) é menor do que a taxa de retorno μ (equação 44x) exigida pelo investidor, havendo um custo em manter a opção viva. Assim δ é um custo de oportunidade em adiar o início de um projeto que deve ser descontado do benefício da espera dado pela opção. Por outro lado, se δ é suficientemente grande, o valor da flexibilidade de adiar a decisão de investimento torna-se muito pequeno e a opção real torna-se *deep in the money*.

Para calcular o valor da opção real F considere um *portfolio* Φ dado por uma posição longa na opção e uma posição curta em n unidades do ativo gêmeo ou do projeto V, sob a hipótese do MAD (Seção 3.3.1): $\Phi = F - n.V$.

Seja n escolhido de tal forma que o *portfolio* seja livre de risco. Então num intervalo de tempo infinitesimal dt o retorno exigido pelo investidor será a taxa livre de risco: $r_f.\Phi.dt = r_f.(F - n.V).dt$.

---

[20] Ver expressão equivalente em Dixit e Pindick, 1994, p.118, equações 22 e 23.

[21] Hull (2003, p.175-176) oferece uma demonstração desta propriedade com exemplos numéricos, a qual decorre basicamente de argumentos de não arbitragem.

[22] A taxa de dividendo δ também pode ser interpretada de outras formas. Por exemplo, pode refletir: o custo para a firma da entrada de outros competidores no mercado; o FCL do projeto ou; a *convenience yeld* quando o ativo gêmeo é uma *commodity* – ver Seção 3.4.2. O valor agregado ou médio da *convenience yield* também pode ser medida no mercado *spot* e futuro de uma *commodity*.

O retorno do *portfolio* também é dado pela soma do retorno dos ativos da carteira. O retorno da opção (que não paga dividendos) é dado pelo ganho de capital dF. O retorno do projeto é dado pela soma do ganho de capital com os dividendos ($dV + \delta.V.dt$). Então o retorno da carteira Φ será: $dF - n.(dV + \delta.V.dt)$. Igualando as duas expressões:

$$dF - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \quad (38)$$

Substituindo x pelo ativo subjacente V na equação (31) do Lema de Ito, obtém-se:

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.dV^2 \quad (31)$$

Mas também se viu em (29) que $dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt$ e em (32) que $E(\varepsilon^2) = 1$, então $dx^2 = \sigma^2.x^2.dt$ ou de forma mais genérica:

$$dx^2 = b^2(x,t).dt \quad (39)$$

Considerando que $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ (36), então $dV^2 = \sigma^2.V^2.dt$. Substituindo dV^2 na equação (31) anterior e esta em (38):

$$dF = F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt \Rightarrow$$

$$F_v.dV + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.(dV + \delta.V.dt) = r_f.(F - n.V).dt \Rightarrow$$

$$(F_v - n).dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0$$

Como o *portfolio* Φ é sem risco e o primeiro termo da expressão acima com dV tem risco ($dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$), este deve ser nulo, então:

$$(F_v - n).dV = 0 \Rightarrow F_v - n = 0 \Rightarrow n = F_v = \partial F / \partial V$$

Note que este resultado é o mesmo *delta hedging* obtido na Seção 2.7 na forma discreta - equação (11). Retornando este resultado à última equação diferencial, dividindo por dt e rearranjando os termos:

$$0.dV + [F_t + \frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt - n.\delta.V - r_f.(F - n.V)].dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

A equação (40) é a conhecida equação diferencial parcial (EDP) de Black & Scholes & Merton (B&S&M)[23] com dividendos contínuos. Note que na sua dedução, embora tenha sido citada a opção de investimento como exemplo, não foi assumida nenhuma premissa sobre o tipo da opção envolvida, se *call* ou *put*, se americana ou européia. Portanto, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ.

A valoração por ativos contingentes requer a existência de um conjunto de ativos transacionados no mercado diversificados o suficiente, de tal forma que seja possível montar um *portfolio* que não só replique o risco do projeto como também seja perfeitamente correlacionado com este. Esta é uma premissa exigente que não é feita na valoração com programação dinâmica, que simplesmente considera a valoração de risco subjetiva do tomador de decisão (Dixit e Pindick, 1994, p.121).

Apesar desta diferença significativa, a equação diferencial obtida por programação dinâmica correspondente à EDP (40) é dada por:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + \alpha.F_v.V - \mu.F = -F_t$$ [24]

As diferenças entre a EDP da programação dinâmica em relação à EDP de contingentes são duas[25]: A taxa de desconto ajustada o risco μ (exógena) no lugar da taxa livre de risco (decorrente do equilíbrio no mercado de capitais); A tendência α do mundo real no lugar da tendência neutra ao risco $(r_f - \delta)$. Em outras

[23] Originalmente a equação de Black & Scholes não previa dividendos (δ=0), tendo este sido incorporado por Merton (ver, por exemplo, Hull, 2003, p.243).

[24] Ver Dixit e Pindick, 1994, p.109. Considerando π(x,t)=0 , a EDP do valor da firma sem fluxo de caixa imediato é idêntica a de uma oportunidade de investimento.

[25] Ver Seção 3.5.5 para analogia com a forma discreta.

palavras, pode-se avaliar o projeto descontando-o à taxa livre de risco imaginando que este segue um MGB com *drift* $(r_f - \delta)$ neutro ao risco.

Note que, pela equação (45), no mundo real $\alpha - \pi = r_f - \delta$. Mas no mundo neutro ao risco (e também com um *portfolio* Φ livre de risco), o retorno exigido pelo investidor é a taxa livre de risco. Desta forma o processo estocástico do ativo subjacente assume uma nova tendência $\alpha' = r_f - \delta = \alpha - \pi$, como ocorre na equação (40). Da equação (36), o MGB neutro ao risco será dado por:

$$dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz \Rightarrow \qquad dV = (r - \delta).V.dt + \sigma.V.dz \quad (41)$$

Como dito, a equação (40) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ de um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB com dividendos contínuos δ. O que permitirá adaptar a equação (40) para uma *call* ou *put*, americana ou européia, finita ou perpétua e o valor do seu *payoff* são as condições de contorno, necessárias para sua solução.

3.4.2. A opção de investir perpétua: Equação diferencial, condições de contorno e solução analítica

Nesta Seção descreve-se o modelo apresentado por Dixit e Pindick (1994, p.147-150) para o problema da firma que precisa decidir o momento ótimo para exercer a opção de investir em um projeto cujo prazo de expiração é infinito (*call* americana perpétua).

A oportunidade de investimento possui duas características fundamentais (ver Seção 2.1): O investimento é pelo menos parcialmente irreversível, ou seja, é um custo afundado (*sunk cost*) que não pode ser recuperado; A decisão de investimento pode ser postergada de forma que a firma tem a flexibilidade de esperar e verificar como se comporta a(s) fonte(s) de incerteza(s) de um projeto antes de comprometer recursos irreversivelmente. Considere o custo do investimento I conhecido e fixo, e que o processo estocástico do valor do projeto seja dado pela equação (36): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$. Uma das implicações do MGB é que uma vez que o valor do projeto valha zero, dV e V sempre serão zero (barreira absorvente). Em conseqüência a opção de investir perderá seu valor:

$$V = 0 \Rightarrow dV = \alpha.0.dt + \sigma.0.dz = 0 \Rightarrow V + dV = 0 \Leftrightarrow F(V = 0) = 0 \quad (42)$$

Se o tempo de expiração é infinito e os termos α, σ e V não dependerem explicitamente do tempo, então o valor da opção também não dependerá (Dixit e Pindick, 1994, p.107). Isso significa que $\partial F / \partial t = F_t = 0$, $F_v = F'$ e $F_{vv} = F''$, e a EDP (40) torna-se a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = 0 \quad (43)$$

Como visto na Seção 2.4, para uma opção de investimento a cada instante t há um valor V^* abaixo do qual continuar esperando é a decisão ótima e vice-versa. Com isso é possível definir uma curva de $V = V^*(t)$ - curva de gatilho – a partir da qual a decisão ótima é investir. Nesta curva a opção de investir vale exatamente o VPL do projeto:

$$F^*(V^*(t), t) = V^*(t) - I \quad (44)$$

Essa condição é denominada de *value matching condition* e a curva definida por $V^*(t)$ é denominada de "fronteira" livre (*free boundary).*

A *value matching condition* é necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. A segunda condição necessária, denominada de contato alto ou de contato suave (*smooth pasting condition*), é que na "fronteira" livre o valor da opção e do VPL devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^*:

$$F_v(V^*(t), t) = (V^*(t) - I)_v \Rightarrow F_v(V^*(t), t) = 1 \quad (45)$$

Essa condição não é facilmente percebida, mas pode ser verificada graficamente com certa facilidade, conforme demonstrado por Dixit e Pindick (2004, p.130-131).

Então o valor de uma opção de investimento americana perpétua é dado pela equação (43) sujeita às condições de contorno dadas pelas equações (42), (44) e (45):

$$\frac{1}{2}.F''.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).n.V - r_f.F = 0 \qquad (43)$$

$$F(V=0) = 0 \qquad (42)$$

$$F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I \qquad (44)$$

$$F_v(V^*(t),t) = 1 \qquad (45)$$

A EDO (43) possui solução analítica definida dada por (ver Brandão, Cap.5, p.8-14):

$F(V) = A.V^{\beta_1}$ (46) onde $A = (V^* - I)/(V^*)^{\beta 1}$ (47);

$\beta_1 = 1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2 + \sqrt{[(r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2]^2 + 2.r_f/\sigma^2}$ (48) e $V^* = \beta_1.I/(\beta_1 - 1)$ (49)

Note que o valor do gatilho dado por (49) não depende de t pois a opção é perpétua.

3.4.3. Condições de contorno de uma opção de investir com expiração

Ao contrário da opção de investimento perpétua, o tempo de expiração agora é finito e, embora os termos α e σ possam ser constantes, o valor do projeto e o valor da opção de investir são variáveis com o tempo. Com isso $F_t \neq 0$ e a EDO (40) permanece inalterada. As condições de contorno (42), (44) e (45) continuam válidas, havendo uma quarta condição adicional: Na expiração da OR de investir, vale a regra do VPL tradicional:

Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

A EDP (40) para uma opção americana de compra com $\delta > 0$[26] não apresenta solução analítica. Dixit e Pindick (1994, p.401), entretanto, chamam atenção para o fato de que o valor do gatilho de uma OR é pouco sensível ao tempo de expiração quando este é superior a dois anos. Neste tipo de situação, sugerem que a solução

[26] Opções americanas de compra sem dividendos nunca são exercidas antecipadamente (ver Seção 4.5.1 e nota de rodapé 21). Nesta situação equiparam-se a opções européias e a EDP (40) toma as soluções originalmente apresentadas por Blak e Sholes – ver, por exemplo, Hulll, 2003, p. 246.

analítica para uma opção de compra americana perpétua (equações 54 e 55) pode ser uma aproximação razoável.

Entretanto, existem várias alternativas mais precisas para o problema de valoração de uma OR, aqui genericamente denominadas de soluções não analíticas.

3.5. Soluções não analíticas para EDP de opções reais com MGB

A EDP (49) de Black & Sholes & Merton (B&S&M) é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ sobre um ativo básico $V(x,t)$ que segue um MGB e gera dividendos contínuos δ. Mas soluções analíticas nem sempre existem e, na ausência destas, existem alternativas com métodos numéricos e as aproximações analíticas. Na prática, a solução deve ser escolhida com base nas características do derivativo e na precisão desejada.

Hull (2003, p.392-427) e Trigeorgis (1996, p.305-339) destacam e discutem (os mesmos) três métodos numéricos para aplicações em opções financeiras e reais: Simulação de Monte Carlo (SMC), árvores (binomiais, trinomiais, etc. – métodos gradeados) e diferenças finitas.

A SMC é relativamente simples e flexível, além de permitir o uso da avaliação neutra ao risco. Por funcionar do início para o fim da vida da opção (*foward*), adapta-se bem para opções européias, para derivativos com várias variáveis de estado e com complexidade no cálculo dos *payoffs*. A solução com árvores, extensivamente adotada no livro de Copeland e Antikarov (2001), simula os processos estocásticos subjacentes. Geralmente são mais simples, intuitivas e flexíveis para lidar com diferentes processos estocásticos como difusão, saltos ou reversão à média, sempre a partir dos preços do presente. Mas a valoração sempre é feita a partir da expiração para o início da vida da opção, a exemplo do que ocorre no cálculo por diferenças finitas. Ambos os métodos lidam bem tanto com opções do tipo americanas como européias, mas ficam limitados quando os *payoffs* dependem de alguma forma do histórico passado (por exemplo, opções do tipo *lookback*[27]) ou do valor corrente. Além disso, tornam-se progressivamente mais complicadas à medida que aumenta o

[27] *Look back options* são opções cujo *payoff* depende do valor máximo ou mínimo atingido pelo ativo subjacente durante a vida da opção. Ver Hull (2003, p.441-442).

número de variáveis envolvidas. Os métodos de diferenças finitas (explícito e implícito) resolvem a equação diferencial convertendo-a em uma equação de diferenças. O método explícito é muito parecido com uma árvore trinomial enquanto que o implícito, embora mais complicado, não apresenta os problemas de convergência[28] do primeiro.

As aproximações analíticas têm a vantagem de tornar os cálculos instantâneos e permitir uma interpretação clara da relação entre as variáveis envolvidas. Por esses motivos essa é a técnica adotada nesta dissertação. Consiste em adaptar o problema de apreçamento de derivativos e obter uma expressão analítica que se aproxima satisfatoriamente da solução verdadeira da EDP (49) e suas condições de contorno. Existem várias aproximações analíticas para opções americanas. A mais conhecida delas (Hull, 2003, p.427) é a aproximação quadrática de MacMillan (1986), estendida por Barone-Adesi e Whaley (1987), que pode ser utilizada para *calls* e *puts* sobre diversos ativos financeiros e OR. Esta aproximação se baseia na premissa de que o preço de uma opção americana é dado pelo preço de uma européia adicionado de um prêmio pela possibilidade do exercício antecipado. Como essas duas opções satisfazem a mesma equação diferencial (49), este prêmio ou diferença também deve satisfazê-la. Hull (2003, p. 433-434) apresenta resumidamente esta aproximação, que pode também ser vista com um pouco mais de detalhe em Dias (1996, p.217-220).

Broadie e Detemple (1996) desenvolvem limites inferiores e superiores para o preço de opções americanas e apresentam duas aproximações (LBA e LUBA) para o valor destas com base nestes limites. O *Lower Bound Approximationa* (LBA) apresenta Raiz do erro Quadrático Médio (RQM – ver adiante) de 0,1% para um range grande de parâmetros, considerando uma amostra de 2271 opções. O *Lower and Upper Bound Approximation* (LUBA) apresenta RQM de 0,02%. Esses erros foram medidos em relação à estimativa do método binomial com 15000 nós, assumido como o valor verdadeiro da opção por sua convergência.

O RQM é uma medida de erro definida como:

[28] Uma solução é estável se é finita e é convergente se tende para as condições de contorno adequadamente. Uma solução estável e convergente é dita consistente se ela é realmente uma aproximação do problema original (Trigeorgis, 1996, op cit).

$$RQM = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \quad (51) \quad \text{com} \quad e_i = \frac{C_i}{C} - 1$$

Onde e_i é o erro relativo *i*-ésimo valor estimado C_i da opção em relação ao seu valor "real" C e n é o número de estimativas. Para tornar o erro relativo significativo, os valores da opção C_i inferiores a 0,5 são desconsiderados.

Broadie e Detemple (op. cit.) também comparam a precisão e velocidade de cálculo de suas duas estimativas com diversos métodos conhecidos, inclusive o de Barone-Adesi e Whaley. Apesar de sistematicamente apresentarem-se mais rápidos que os demais, o LBA e o LUBA são relativamente complicados de implementar, o que segundo os autores, favoreceria binomiais com desempenho similar. A aproximação de Baroni-Adesi e Whaley apresentou um RQM de 0,6% para opções com maturidade inferior a um ano, e de cerca de 2% para maturidades superiores.

O erro crescente da aproximação de Barone-Adesi e Whaley desfavorece o seu uso para OR em que o tempo de expiração é de vários anos. Bjerksund e Stensland (1993) propuseram uma alternativa de aproximação analítica mais acurada para opções americanas (Haug, 1998). Baseia-se na imposição de uma estratégia de exercício factível, porém não ótima, através de um preço de exercício antecipado único e constante, aqui denominado de modelo de um período.

Bjerksund e Stensland (2002) apresentam uma generalização do seu modelo inicial dividindo o tempo até a maturidade em dois períodos, cada qual com um preço constante de exercício. O segundo período apresenta duração e preço de exercício menor do que o primeiro, refletindo a perda de valor da opção até sua expiração. Os autores comparam os seus modelos de um e dois períodos com o valor calculado por uma binomial com 3201 pontos, a qual é assumida como o valor verdadeiro da opção. Os resultados indicam que os dois modelos calculam valores muito próximos ou idênticos, entretanto o modelo de dois períodos apresenta uma estimativa mais acurada do valor verdadeiro de opções americanas.

Este teste numérico foi realizado com os mesmos parâmetros adotados no artigo de Barone-Adesi e Whaley (1987), o que permite comparar o desempenho das duas aproximações para várias opções de compra e de venda com expiração inferior a 6 meses. O resultado desta análise não favorece nenhuma das duas

aproximações, já que uma ou outra aproximação apresenta menor ou maior RQM a depender do valor verdadeiro da opção adotado: Diferenças finitas no artigo de Baroni-Adesi e Whaley ou binomial no de Bjerksund e Stensland. Os RQM observados variam entre 0,52% e 0,82% para opções de compra e entre 0,92% e 1,14% para opções de venda.

Bjerksund e Stensland (2002) também utilizam os mesmos parâmetros para opções com expiração de 3 anos (ver Tabela 401). Calculado o RQM para o modelo de um período (de menor precisão), se encontrou valores de 0,62% e 0,73% para *call e puts* respectivamente. Estes números são bem inferiores ao RQM de 2% reportados por Broadie e Detemple (op. cit.) em sua análise com a aproximação de Baroni-Adesi e Whaley para opções com expiração superior a um ano.

Esses resultados revelam que, para o conjunto de dados considerados, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período[29] apresentam uma performance superior em relação ao de Baroni-Adesi e Whaley ao não divergir o RQM com o aumento do prazo de expiração para 3 anos, o que está de acordo com os resultados obtidos por Haug (1998),

Adicionalmente, deve-se ter em mente que as aproximações de Bjerksund e Stensland representam limites inferiores (acurados) para o valor verdadeiro da opção americana, o que se por um lado tem a desvantagem de antecipar de forma insignificante o exercício ótimo, por outro tem a vantagem de revelar o sinal do erro da estimativa do valor da opção.

Embora a aproximação de Bjerksund e Stensland de um período apresente performance melhor do que a de Baroni-Adesei e Whaley, também possui limitações. Testes de sensibilidade mostram que, quando a taxa de dividendos é menor ou igual à taxa livre de risco ($\delta \leq r_f$), o valor crítico e o valor da opção convergem para os valores da opção perpétua à medida que se aumenta o prazo de expiração. Entretanto, à medida que cresce a diferença entre a taxa de dividendos e a taxa livre de risco, há uma perda progressiva de precisão com o aumento do tempo de expiração da opção.

[29] Naturalmente o mesmo vale para o modelo de Bjerksund e Stensland com dois subperíodos, que é mais preciso do que o de um período.

Tabela 1 – Comparação da aproximação de Bjerksund e Stensland (1993) com o valor "verdadeiro" estimado por uma binomial com 3201 pontos. Observe que os erros relativos são sistematicamente negativos apresentando média, desvio padrão e RQM da ordem de 0,5%.

			Call Americana			Put Americana		
Parâmetros da opção		Preço Ativo Base	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = (B&S/ Binomial - 1	Binomial (B&S)	Bjerksund e Stensland (B&S)	Erro relativo = B&S/ Binomial – 1
K =	100	80	2,34	2,30	-1,71%	25,66	25,61	-0,19%
r_f =	0,08	90	4,75	4,71	-0,84%	20,08	20,04	-0,20%
σ =	0,2	100	8,49	8,44	-0,59%	15,50	15,47	-0,19%
T =	3	110	13,79	13,74	-0,36%	11,80	11,78	-0,17%
δ =	0,12	120	20,88	20,85	-0,14%	8,89	8,87	-0,22%
K =	100	80	3,98	3,95	-0,75%	22,21	22,12	-0,41%
r_f =	0,08	90	7,25	7,20	-0,69%	16,21	16,14	-0,43%
σ =	0,2	100	11,70	11,64	-0,51%	11,70	11,64	-0,51%
T =	3	110	17,31	17,24	-0,40%	8,37	8,31	-0,72%
δ =	0,8	120	24,01	23,93	-0,33%	5,93	5,89	-0,67%
K =	100	80	6,88	6,88	0,00%	20,35	20,32	-0,15%
r_f =	0,08	90	11,49	11,49	0,00%	13,50	13,43	-0,52%
σ =	0,4	100	17,21	17,21	0,00%	8,94	8,86	-0,89%
T =	3	110	23,84	23,84	0,00%	5,91	5,83	-1,35%
δ =	0,4	120	31,17	31,16	-0,03%	3,90	3,83	-1,79%
K =	100	80						
r_f =	0,08	90				11,70	11,67	-0,26%
σ =	0,2	100	Sem exercício antecipado			6,93	6,90	-0,43%
T =	3	110				4,16	4,12	-0,96%
δ =	0	120				2,51	2,48	-1,20%
- Média do erro relativo				-0,42%			-0,56%	
- Desvio Padrão do erro relativo				0,46%			0,47%	
- Raiz do erro Quadrático Médio (RQM)				0,62%			0,73%	

A precisão satisfatória da aproximação analítica de Bjerksund e Stensland para OR, a sua superioridade em relação à aproximação de Barone-Adesi e Whaley, somados à maior simplicidade analítica do modelo de um período (em relação ao modelo de dois períodos), são os motivos da opção por esta aproximação nesta dissertação.

3.5.1. Aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993)

Bjerksund e Stensland assumem o modelo de Black & Sholes & Merton com uma taxa livre de risco positiva, onde o preço do ativo subjacente V segue um MGB ($dV = \alpha'.V.dt + \sigma.V.dz$) em relação à medida equivalente de Martingale (mundo neutro ao risco - $\alpha' = r_f - \delta$). Considere I como o preço de exercício (investimento) e X o nível de preço (gatilho) antecipado (estratégia não ótima) em que o decisor opta por exercer a OR ($X > I$).

Dada esta estratégia factível e não ótima, o preço de uma opção americana de compra fica reduzido a dois componentes: (i) Uma opção de compra européia do tipo *up-and-out*[30] (para cima e para fora) com uma barreira de nocaute[31] (*knock-out barrier*) dada por X, *strike* I e maturidade T; (ii) Um *payoff* $X - I$ que é recebido se a opção é exercida antes da maturidade. Então, o valor aproximado da opção americana ($\bar{c}$) é dado por:

$$\bar{c}(V,I,T,r_f,\alpha,\sigma,X) = \nu(X).V^{\beta_1} - \nu(X).\varphi(V,T|\beta_1,X,X) + \varphi(V,T|1,X,X) - \varphi(V,T|\beta_1,I,X) - I.\varphi(V,T|0,X,X) + I.\varphi(V,T|0,I,X) \quad (52)$$

Onde os dois primeiros termos do lado direito da igualdade representam o *payoff* $X - I$ e os quatro últimos o valor da *call* européia *up-and-out*. Os termos $\nu(X), \beta_1$ e $\varphi(V,T|\gamma,H,X)$ são dados por:

$$\nu(X) = (X - I).X^{-\beta_1}$$

$$\beta_1 = (1/2 - (r_f - \delta)/\sigma^2) + \sqrt{((r_f - \delta)/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2.r_f/\sigma^2} \quad (48)$$

30 Uma call do tipo *up-and-out* (c_{uo}) é uma opção com barreira que deixa de existir quando o preço do ativo subjacente aumenta até um nível pré-estabelecido, superior ao preço inicial. Reciprocamente, a *call* do tipo *up-and-in* (c_{ui}) é aquela que passa a existir quando o preço pré-estabelecido do ativo subjacente é atingido. Note que $c = c_{uo+} c_{ui}$. (Ver Hull 2003, p.438-441).

31 Nível de preço que se atingido pelo ativo subjacente, implica no exercício imediato da opção, ou seja, no qual o decisor "mata" a OR.

$$\varphi(V,T|\gamma,H,X)=\exp(\lambda.T).\{N[\frac{-\ln(V/H)+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]-$$
$$(X/S)^{\kappa}.N[\frac{-\ln(X^2/(V.H))+((r-\delta)+(\gamma-1/2).\sigma^2).T}{\sigma.\sqrt{T}}]$$

Note que as variáveis γ e H de acordo com a equação (52) podem assumir os seguintes valores: $\gamma \in \{\beta_1,0,1\}$ e $H \in \{X,I\}$. Os termos λ e κ são dados por:

$$\lambda=-r_f+\gamma.(r_f-\delta)+1/2.\gamma.(\gamma-1).\sigma^2$$ [32] e $$\kappa=2.(r_f-\delta)/\sigma^2+(2\gamma-1)$$

Com a estratégia não ótima de adotar um preço de exercício antecipado (gatilho) X, o valor obtido para a opção representa um limite inferior para o verdadeiro valor. As investigações numéricas apresentadas pelos autores (Bjerksund e Stensland, 2002, op. cit.) mostram que essa estimativa pode servir como uma aproximação acurada do verdadeiro valor (como se observa nas diversas tabelas comparativas apresentadas no artigo, tanto para *calls* como *puts*). Bjerksund e Stensland (2002, op. cit.) apresentam uma nova estimativa para o valor do gatilho antecipado X, ligeiramente modificada em relação ao trabalho de 1993:

$$X_t=B_0+(B_\infty-B_0).\{1-\exp[h(t)]\} \quad (53)$$

$$h(t)=-((r_f-\delta).t+2.\sigma\sqrt{t}).\frac{I^2}{(B_\infty-B_0).B_0} \quad \text{com:}$$

$$B_\infty=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}.I \text{ e } B_0=Máx\{I,\frac{r_f}{\delta}.I\} \quad (54)$$

Onde B_∞ representa o gatilho da opção de compra americana perpétua, equações (49) - Seção 3.4.2. A equação (53) tem papel destacado nesta dissertação, pois será com ela que serão construídas as curvas de gatilho apresentadas no Capítulo 5.

A curva de gatilho da opção de investimento americana é contínua no intervalo [0,T), mas pode ser descontínua em T quando $r_f > \delta$ - ver (54). Assim o

[32] O valor de λ adotado, a exemplo do que fazem Bjerksund e Stensland é o apresentado no artigo de 2002, em detrimento do original apresentado em 1993.

limite perto da expiração é dado por $\lim_{t \to T-}(X_t) = Máx[I, (r_f / \delta).I]$ e na expiração é igual a I.

Os resultados obtidos até aqui para opções de compra americana, perpétuas ou com expiração finita, também podem ser aplicadas para opções de venda. Esse desdobramento torna-se relativamente simples considerando a simetria entre *calls* e *puts* americanas.

3.6. Simetria *call – put* para opções americanas

A simetria entre opções de compra e venda (PCS – *Put-call syimetry*) é uma propriedade de opções americanas segundo a qual, o preço de uma opção de venda pode ser obtido a partir da troca entre parâmetros da opção de compra correspondente. De acordo com Detemple (2006, Cap.3, p.67-104), que apresenta e aprofunda os resultados mais recentes das pesquisas sobre o assunto, esta simetria foi originalmente demonstrada por McDonald e Schroder (1990) e Bjerksund e Stensland (1993b) em tempo discreto e contínuo respectivamente.

Trata-se de uma importante propriedade das opções, pois permite que o mesmo algoritmo possa ser utilizado para apreçar e determinar as regras ótimas de exercício para opções de compra e de venda, mesmo na ausência de simetria no preço do ativo subjacente ou na presença de descontinuidades (Geman et al, 1995, apud Detemple *op. cit.*). Em alguns casos, a PCS reduz o número de variáveis necessárias para o apreçamento de opções, além de permitir *insights* sobre o relacionamento econômico entre contratos,

A homogeneidade de grau 1 da função de *payoff* de uma opção (em relação ao preço do ativo subjacente e ao preço de exercício) faz com que a PCS decorra da simples troca de numerário. Com o novo numerário, o apreçamento também pode ser feito por *contingent claims* com os mesmos *portfolios* replicantes. Isso significa que a opção simétrica também pode ser avaliada em uma economia auxiliar com o novo numerário e uma taxa de juros ajustada, na qual o apreçamento da opção satisfaz as mesmas equações de apreçamento. Essas características também permitem a extensão da PCS para contratos mais complexos sobre um ou mais ativos. Para o propósito desta dissertação, será suficiente a discussão do modelo sobre um MGB.

Considere uma opção de compra americana sobre um MGB neutro ao risco, como na Equação (41): $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$, com r_f, δ e σ constantes. Na Seção 3.5 discutiu-se brevemente que o preço deste derivativo pode ser visto como o preço de uma *call* européia $c(V_t, I, r_f, \delta, t)$ definido por Black e Sholes (1973) e Merton (1973) somado por um prêmio pela possibilidade de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$:

$$C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = c(V_t, I, r_f, \delta, t) + \Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (55)$$

Onde $C(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é o preço de uma *call* americana e $B^c(\cdot)$ é a "fronteira" livre (*free boundary)* da opção de compra que soluciona a seguinte integral recursiva:

$$B_\tau^c - I = C(B_t^c, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) \quad (56), \text{ sujeito a: } B_T^c - I = Máx(I, I.r_f / \delta) \quad (57)$$

Seja $B^c(I, r_f, \delta, t)$ a solução da equação (56).

O prêmio de exercício antecipado $\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ é definido como:

$$\Pi(V_t, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot)) = \int_t^T \Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c).d\tau \quad (58), \text{ onde:}$$

$$\Phi(V_t, I, r_f, \delta, \tau - t, B_\tau^c) = \delta.V_t.\exp[-\delta.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t)] - r_f.I.\exp[-r_f.(\tau - t)].N[d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) - \sigma.\sqrt{\tau - t}] \quad (59).$$

Onde $N[\cdot]$ é a probabilidade acumulada de uma distribuição normal padrão e:

$$d(V_t, B_\tau^c, r_f, \delta, \tau - t) = \frac{\ln(V_t / B_\tau^c) + (r_f - \delta + 0{,}5.\sigma^2).(\tau - t)}{\sigma.\sqrt{(\tau - t)}} \quad (60)$$

A equação (58) não tem solução analítica, motivo pelo qual a opção americana de compra também não tem. De acordo com McDonald e Schroder (apud Detemple, *op. cit.*) as equações correspondentes para uma opção de venda americana podem ser obtidas a partir do conjunto de equações (55) a (60), fazendo uma simples troca de variáveis. Este resultado é enunciado pelo seguinte teorema (Detemple, *op. cit.*, p.72):

Teorema: Considere opções de venda e compra americanas com preço de exercício I e expiração T idênticos, escritos sobre um ativo V_t que segue um MGB neutro ao risco $dV = V.[(r_f - \delta).dt + \sigma.dz]$. Sejam $P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(\cdot))$ e $C(V, I, r_f, \delta, t, B^c(\cdot))$ as respectivas funções de preço e $B^P(I, r_f, \delta, \cdot)$ e $B^C(V, r_f, \delta, \cdot)$ os correspondentes preços críticos. Então:

$$P(V, I, r_f, \delta, t, B^P(I, r_f, \delta, \cdot)) = C(I, V, \delta, r_f, t, B^c(V, \delta, r_f, \cdot)) \quad (61)$$

E para todo $t \in \{0, T\}$:

$$B^P(I, r_f, \delta, t) = \frac{V.I}{B^c(V, \delta, r_f, t)} \quad (62)$$

Assim, o valor de uma *put* americana é o mesmo de uma *call* também americana com preço de exercício V e expiração T, numa economia com taxa de juros livre de risco δ, na qual o ativo subjacente, sob medida neutra ao risco, segue um MGB com dividendos r_f, volatilidade σ e valor inicial I. Além disso, a curva de gatilho da *put* americana é dada pelo inverso da curva de gatilho da *call* multiplicado pelo produto $V.I$ - Equação (62).

3.7. Tempo esperado de toque (*first hitting time*) e probabilidade de exercício de uma opção

Em situações de planejamento de investimentos duas informações são preciosas para projetos que não se encontram *deep in the money*: Quando se espera que a opção de investimento se torne apta ao exercício e; Qual é a probabilidade deste exercício ocorrer.

O tempo esperado de toque é o tempo esperado para que uma variável que segue um processo estocástico alcance um certo valor, no caso a curva de gatilho, quando então a opção deve ser exercida (Dias, p.1-2, http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html). O tempo esperado de toque é matematicamente definido como:

$$T^* = \inf\{t \geq 0; V \geq V^*\}$$

Ao contrário do que ocorre no apreçamento de opções, o tempo esperado de toque depende da tendência real (α) do processo estocástico. Como visto na Seção 3.5.1, a curva de gatilho real pode ser calculada com o processo estocástico neutro ao risco (*drift* $\alpha - \pi = r - \delta$), mas utilizar este mesmo processo implica em erro na resposta às duas questões. O tempo esperado de toque calculado com o processo neutro ao risco seria maior do que o verdadeiro valor e a probabilidade de exercício seria menor do que a verdadeira. Com um menor *drift*, o processo estocástico demora mais tempo para tocar a barreira da curva de gatilho pela primeira vez, e no caso de uma OR finita, toca menos vezes a barreira até a expiração.

A exemplo do que ocorre com as opções de investimento (Seções 3.4.2 e 3.5), o tempo esperado de toque possui uma solução analítica para opções perpétuas, mas não para as opções com expiração finita. Métodos numéricos podem resolver este problema. Dias (op.cit.) sugere a adoção de Simulação de Monte Carlo por ser mais simples dado que, a curva de gatilho pode ser determinada com antecedência e precisão satisfatória utilizando-se aproximações analíticas (Seção 3.5.1, no caso do MGB).

Para isso basta simular o processo estocástico real um número grande de vezes e observar quantas vezes a opção é exercida. A razão entre o número de exercícios e o número de simulações fornece uma estimativa amostral da probabilidade de exercício da opção. Dado o exercício, a média condicional dos tempos de toque é uma estimativa amostral do tempo esperado de toque. Este é o procedimento adotado na Seção 5. 3.

4. Opções Reais aplicadas a investimentos em E&P

A indústria de petróleo consiste de uma cadeia de atividades de produção, transformação e comercialização de hidrocarbonetos líquidos e gasosos em uma variedade de produtos de tecnologia. De forma simplificada, as atividades neste setor envolvem ativos reais de exploração e produção de petróleo, transporte, refino, distribuição, comercialização, petroquímica, fertilizantes, geração de energia elétrica, etc. As empresas atuam em um ou vários elos (segmentos) da cadeia simultaneamente, tornando-se progressivamente integradas. As grandes corporações têm se diversificado ainda mais, rompendo os limites tradicionais da indústria petrolífera e adotando o conceito de empresas de energia.

Na ausência de um mercado suficientemente desenvolvido para os ativos reais da indústria do petróleo, a otimização dinâmica e contínua de um *portfolio* de ativos reais revela-se onerosa e limitada em relação ao que ocorre com os ativos financeiros. Por esses motivos os investimentos em projetos e vendas de ativos reais devem ser bem fundamentados, de um lado avaliando-se o impacto sobre o *portfolio* da companhia e de outro, certificando-se sobre o valor das flexibilidades embutidas nos ativos. Do ponto de vista de gestão de *portfolio*, as principais OR a serem consideradas são opções de investimento, desinvestimento e abandono.

No contexto do *portfolio* de uma empresa de petróleo com ativos reais de diversos segmentos, modelos de OR mais gerais e simples tornam-se valiosos: Se por um lado estes modelos podem ser adaptados com facilidade diferente ativos do *portfolio,* por outro facilitam a sua implementação dentro da organização.

São discutidos em seguida modelos de OR simples e compostas de ativos de exploração e produção de petróleo, que por serem os ativos básicos das grandes corporações do setor, apresentam uma literatura mais desenvolvida.

Na Seção 4.1 são discutidos os principais tipos de OR na área de exploração e produção de petróleo. Na Seção 4.2 são revistos os principais argumentos que justificam a adoção do MGB para o preço do ativo subjacente. Considerando a hipótese de *Marketed Asset Disclaimer* (Seção 3.3.1), as OR serão modeladas tendo como ativo subjacente os próprios projetos de investimento ou ativos reais já em operação. Na Seção 4.3 são discutidos alguns modelos de OR da área de E&P. O

Anexo I apresenta um pequeno glossário de termos técnicos da área de petróleo citados neste texto.

4.1. Principais OR em Exploração e Produção (E&P) de petróleo

A Exploração e Produção (E&P) de petróleo é a base ou o primeiro elo da cadeia de atividades da indústria do petróleo[33]. A Exploração é o conjunto de atividades de pesquisa que visam identificar e testar situações geológicas favoráveis à acumulação de petróleo. Uma vez confirmada a existência de petróleo em uma área, segue-se um conjunto de atividades denominadas de delimitação (*appraisal*) que visam diminuir a incerteza sobre o volume de hidrocarboneto descoberto e sua produtividade. Obtidos novamente resultados favoráveis, executa-se outro conjunto de atividades que visam permitir a produção comercial de petróleo, denominada de desenvolvimento da produção (*development*). Ao longo ou ao final desta fase, o campo de petróleo passa a produzir em escala e de forma contínua, iniciando a fase de produção. Durante a fase de produção, podem surgir vários novos projetos de investimento que visam aumentar o volume recuperável de petróleo, sua produtividade ou o retorno do ativo em produção com a redução de custos operacionais. A Figura 10 mostra de forma esquemática as principais OR em projeto típico de E&P de petróleo.

Dias (1996, p.64-65) descreve as principais OR relacionadas ao processo E&P de petróleo, transcritos a seguir:

Quando se tem apenas uma área potencialmente petrolífera (bloco), eventualmente com mapas de sísmica 2D, existe apenas uma probabilidade "p" de se descobrir petróleo, e em caso de haver a descoberta, a reserva esperada é "B". Aqui se poderia subdividir essa opção em duas: opção de explorar (investir em um poço pioneiro) e opção de delimitar (em caso de descoberta, investir em poços delimitadores e em sísmica de detalhe e/ou 3D). O direito de explorar esse bloco pode ser oriundo de um monopólio estatal (opção perpétua) ou de uma concessão governamental obtido por licitação (lease). Em ambos os casos, esse direito é uma opção de exploração, que se exercida (através do pagamento do investimento em exploração) pode levar à descoberta (ou não) de petróleo e à delimitação do campo,

[33] No Anexo 1 encontra-se um pequeno glossário de termos da indústria de petróleo utilizados nesta dissertação.

obtendo-se as chamadas "reservas não-desenvolvidas", além de obter uma outra opção, a de explotar (produzir) o campo. Uma característica dessa fase é que a incerteza técnica é mais relevante que a incerteza econômica.

Uma vez descoberto e delimitado o campo, o gerente tem a opção de explotar (ou de produzir, ou de desenvolver o campo). Através do exercício dessa opção (pagando o custo de investimento no desenvolvimento do campo), o gerente transforma o ativo "reserva não-desenvolvida" em "reserva desenvolvida" (jazida produzindo ou pronta para tal). Além disso, com o exercício dessa opção se obtém novas opções: as opções de expandir a produção (ex.: projetos de desenvolvimento complementar, ou de adensamento de malha, ou de recuperação secundária/métodos especiais), além das opções de interromper provisoriamente a produção e até de abandonar o campo.

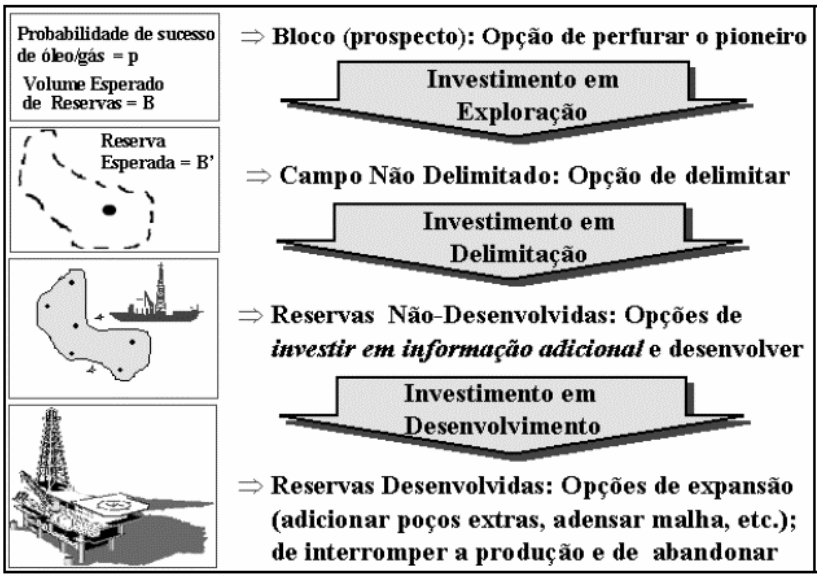

Figura 10 – Processo de OR seqüenciais em E&P (Dias, 2005, p.45).

As opções de exploração, delimitação e desenvolvimento da produção são OR estratégicas[34] de investimentos seqüenciais que podem ser avaliadas em conjunto ou isoladamente. Se uma concessão encontra-se na fase exploratória ou de delimitação, a decisão de investimento é uma opção de compra composta (o

[34] As OR Estratégicas decorrem de investimentos ou desenvestimentos da firma com o objetivo de criar novos ativos estratégicos, tangíveis ou não. Portanto podem ser entendidas como a flexibilidade da firma de criar e explotar suas oportunidades futuras de negócio (ver Seção 2.4.1).

sucesso na exploração cria a opção de delimitação e o sucesso desta cria a opção de desenvolvimento). Então o decisor somente deve exercer a primeira opção de investimento se as opções subseqüentes também estiverem *deep in the money*. De outra forma, se a OR de exploração estiver *deep in the money*, mas as OR de delimitação ou de produção não estiverem, é mais vantajoso para a empresa aplicar o recurso deste investimento no mercado financeiro e esperar do que exercer a primeira opção imediatamente e ficar aguardando o *timing* do exercício da segunda.

Deste ponto de vista, a OR de exploração é uma opção americana de compra composta sobre uma opção americana simples de delimitação (*call on call*). A opção de delimitação também é uma americana de compra composta sobre a opção de desenvolvimento, que por sua vez é uma *call* americana simples. Na Seção 4.3.3 é discutido um modelo para opções de exploração compostas**.**

Opções de expandir, interromper (parada temporária) ou abandonar a produção são OR operacionais[35]. Uma opção de expandir a produção ou qualquer outra que aumente a lucratividade de um campo de petróleo já em produção pode ser tratada como uma *call* americana simples, cuja expiração ocorre dentro do período de produção (no Brasil, 27 anos). Opções de interromper provisoriamente a produção (parada temporária) podem ocorrer se há a esperança de se voltar a produzir economicamente[36]. Por fim, as opções de abandonar ou vender um campo de petróleo são *puts* americanas, podendo ser avaliadas por um mesmo modelo. A diferença básica entre elas será o preço de exercício. No abandono este preço é um custo, exceto que haja algum valor residual suficientemente alto (ver Exemplo 2 da Seção 2.2 para a discussão da regra de decisão). Já opção de venda o preço de exercício é uma receita, portanto um valor positivo.

Em projetos de E&P ocorre a estreita relação entre OR estratégicas e operacionais descrita por Trigeorgis (1996, p.227-256, ver Seção 2.6.1). As várias flexibilidades que podem ocorrer em um campo de petróleo fazem com que surjam

---

[35] As OR Operacionais referem-se ao valor da flexibilidade decorrente da operação de ativos já existentes na firma. Esses ativos podem ser adaptados em resposta à gradual redução das incertezas existentes aumentando o retorno da firma. Ver Seção 3.4.1.

[36] O custo de desmobilização temporária, preservação, e retomada da produção são determinantes nessa decisão. Em campos pouco atrativos pode ser preferível produzir com máxima terceirização e contratos de curto prazo de forma a ter um valor atraente para a opção de parada temporária (Dias, 1996, p.61).

novas e futuras OR. Naturalmente, diversas combinações entre elas são factíveis, criando opções múltiplas ou compostas. A interação estratégica entre opções dentro de um mesmo projeto pode ser positiva ou negativa. Se a interação é negativa, esta reduz o valor incremental das opções adicionais, podendo em alguns casos serem até ignoradas sem erro significativo. Mas se a interação é positiva, seu valor pode ser tão atraente quanto o próprio fluxo de caixa esperado do projeto.

O valor da interação entre opções depende do tipo, do intervalo de tempo, do quão estão *in* ou *out of the money*, e da ordem em que se encontram no projeto (o que afeta a probabilidade conjunta de exercício). Se duas opções são do mesmo tipo dado um intervalo finito, a probabilidade conjunta e o valor da interação serão crescentes à medida que se reduz a separação.

Bjerksund e Ekern (1990, p.77-79) avaliam através de um exemplo numérico o impacto adicional da opção de abandono e parada temporária sobre uma opção de desenvolvimento perpétua. O efeito dessas opções adicionais é reduzir o valor crítico (gatilho) para se iniciar o projeto de investimento, sendo pouco maior para a opção de parada temporária. Porém, destacam que o efeito dessas flexibilidades adicionais na redução do preço de petróleo crítico foi pequeno: 1,8% ou de US$ 20,00/bbl para US$ 19.64/bbl.

O maior impacto sobre o projeto foi justamente a introdução da flexibilidade de adiar a decisão de investimento. Então o viés introduzido ao se ignorar as opções adicionais seria desprezível. Parâmetros como a volatilidade σ e a taxa de dividendos δ podem ser mais importantes do que complicar modelos com opções adicionais. Mesmo sob o risco de generalizar um caso particular, Bjerksund e Ekern (*op. cit.*) destacam que o exemplo sugere que maior foco na opção de investimento é melhor do que a adição de novas flexibilidades. Dias (2005, p.77) destaca que a opção de abandono se torna mais valiosa em opções de investimento quando os preços estão baixos.

Laughton (1998, apud Dias 2004) avaliando opções de exploração revela que embora o valor destas aumente tanto com a incerteza sobre o preço do petróleo quanto com a incerteza sobre o volume a ser descoberto, elas tem efeito diferentes sobre o investimento. A incerteza do preço tem efeito de adiar o exercício das

opções enquanto que a incerteza do volume tem efeito de incentivar o investimento em informação, isto é, o exercício de opções de aprendizagem (ver Seção 2.5).

Do ponto de vista desta dissertação, está-se mais interessado em OR estratégicas. Qualquer que seja o tipo de opção considerada, o processo estocástico escolhido para modelar o valor do ativo subjacente é o MGB. Os argumentos que justificam esta adoção são revistos a seguir.

4.2. Por que o MGB pode ser razoável para modelar preço de *commodity*

Sob a hipótese do MAD, o ativo subjacente de um projeto de E&P é o preço de uma reserva de petróleo desenvolvida, que por sua vez é muito dependente do preço do petróleo. Sobre este tema, há um debate na literatura de OR se o preço de uma *commodity* é melhor modelado com um MGB ou se com reversão à média.

Embora não seja uma classe de processo estocástico tão tratável quanto o MGB, o MRM tem como principal apelo a convergência para um preço de equilíbrio com o passar do tempo. Por esse motivo, o uso do MGB na modelagem de preços tem sido criticado na literatura. Como este processo pode divergir com o tempo, a sua adoção pode implicar em lucros infinitos para a firma. Essa é uma possibilidade que fere os mecanismos de equilíbrio de mercado.

Independente de qual seja a resposta final a essa questão, o MGB encontra na literatura diversos argumentos teóricos e empíricos que justificam sua adoção, tanto para modelar o preço do ativo subjacente quanto para modelar o preço do petróleo. Estes argumentos foram apresentados ao longo do Capítulo 3 e são reapresentados em conjunto a seguir.

O efeito do uso do MRM sobre a decisão de investimento é duplo. Como modelo estacionário, a convergência da variância com o tempo limita o valor da flexibilidade de esperar (Efeito Variância), ao contrário do que acontece com os movimentos Brownianos**.** Com menor incerteza, a adoção do MRM deve aumentar a disposição de investir. Por outro lado, a menor volatilidade do MRM faz com que preços mais altos sejam atingidos menos vezes (Efeito Preços), o que reduz o nível de investimentos. Além disso, a velocidade de reversão e a relação entre o valor corrente e o valor da média de reversão podem trabalhar a favor ou contra o

exercício da opção de investir (ver Dixit e Pindyck, 1994, p.161-167). O efeito resultante do MRM é, portanto, menos óbvio do que o do MGB**.**

Metcalf e Hassett (1995, ver Seção 3.1.2) testam numericamente se o nível de investimento agregado obtido com o MGB se altera com a adoção do MRM geométrico de Ornstein-Unhlenbeck. Para isso, observam o percentual de vezes que a curva de gatilho é atingida com cada processo, mantendo todos os parâmetros constantes, exceto a taxa de dividendos que é estocástica, representando projetos com retornos distintos.

O MRM considerado é o geométrico de Ornstein-Unhlenbeck: $dx = \eta.(\bar{x} - x).x.dt + \sigma.x.dz$, enquanto que o MGB é dado por: $dx = \sigma.x.dz$. Ou seja, em seu estudo os autores consideram o MRM e o MGB com mesma tendência α nula (ver equação (22)). De outra forma, se o MGB possui tendência maior do que o MRM os preços gerados pelo primeiro tendem a dominar o MRM com o passar do tempo.

Os autores mostram que os Efeitos Variância e Preços tendem a se anular quando a volatilidade é inferior a 25%. Desta forma, o nível de investimento acumulado após um período de tempo é o mesmo para o MGB e o MRM. Com isso, argumentam que a facilidade operacional proporcionada pela adoção do MGB tem um custo muito baixo em termo de realismo e que por isso o MGB pode ser uma simplificação razoável em modelos de decisão de investimento sob incerteza.

Dixit e Pindick (1994, p.77-78, ver Seção 3.1.2) realizam a análise de séries históricas longas de preços de petróleo. Concluem pela reversão à média ao considerar séries de preços com 120 anos, mas não conseguem rejeitar a hipótese de *random walk* ao considerarem séries de 30 ou 40 anos. Estes autores recomendam que se considerem mais aspectos teóricos sobre o equilíbrio de mercado da variável em questão do que testes estatísticos.

Samuelson (1965, ver Seção 3.3.2) demonstrou que a taxa de retorno sobre qualquer *security* será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa futuro a ser gerado, na medida em que os investidores têm informação completa sobre estes fluxos de caixa. Apenas se os fatos evoluírem de uma forma diferente da esperada é que e os preços das ações desviarão do esperado. Mas

como esses desvios são causados por eventos randômicos, então, os desvios da taxa de retorno esperada também são randômicos. Samuelson prova seu teorema demonstrando que o valor dos preços de contratos futuro não muda com o tempo (num mundo sem juros e sem custos de transação/carrego). Então o valor de um projeto que pode ser considerado como a soma de contratos futuro também é constante, se sempre adicionados os fluxos passados. Isso implica que o valor do projeto ao longo do tempo será um passeio aleatório independente do padrão de fluxo de caixa.

Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório (Copeland e Antikarov, 2001, p.222). Então riscos (de timing, políticos, sociais, legais e econômicos, suas correlações e auto-correlações) podem ser modelados em um único FCD para definir a volatilidade do retorno do ativo subjacente.

Dias (2005, p61-70) discute o impacto da utilização do MGB em OR no lugar de MRM para o processo estocástico do preço do petróleo. Inicialmente repete o teste de Dixit e Pindick (1994, *op. cit.*) para os preços real e nominal do petróleo no período 1970-2004, e também não consegue rejeitar o MGB. Em seguida discute dois artigos importantes sobre o assunto (Pindikc, 1999 e Schwartz, 1997) e conclui que o MGB é uma boa aproximação em muitos casos, mas pode ser inadequado quando o preço à vista estiver longe do nível de equilíbrio de longo prazo. Por fim faz duas recomendações: Em OR em que se precisa considerar tanto o curto quanto o longo prazo, modelos mais realistas são mais adequados, mas para análises de longo prazo ou em estudos onde apenas um mapeamento razoável do preço do petróleo é necessário, o MGB pode ser adotado.

A análise do conjunto de argumentos expostos permite concluir que o MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente, a depender dos parâmetros considerados. O efeito da estabilização da variância no MRM incentivando o investimento pode ser compensado pelo efeito da maior volatilidade do MGB. Por fim, resta o teorema de Samuelson (1965) que estimula a adoção do MGB quando o ativo subjacente possui fontes múltiplas de incerteza.

4.3. Alguns Modelos de Opções Reais de investimento em E&P

Existem diversos modelos na literatura para apreçamento de OR em projetos de exploração e produção de petróleo. Esses modelos dependem do valor presente da reserva desenvolvida V, que sob a hipótese do MAD é o ativo subjacente. Uma função que calcule V pode então ser utilizada e explicitar as variáveis das incertezas econômicas e técnicas.

Dias (2005, p. 73-75) destaca três alternativas para o cálculo de V com complexidade crescente: Usar uma função simples que considere as variáveis chaves; Utilizar SMC para as variáveis de risco em planilhas de fluxo de caixa e; Combinar planilhas com outros sistemas como simuladores de reservatório que tratam a incerteza técnica mais adequadamente.

Os modelos para apreçamento de OR em projetos de E&P têm sido desenvolvidos para resolver problemas específicos destes projetos, em geral com gradual complexidade. Dias (2004, p.99-102 e 2005, p.83-132), apresenta um resumo da literatura de OR em petróleo. A seguir são apresentados três modelos simples que envolvem decisões de investimento e abandono de ativos reais.

4.3.1. Modelo de Negócios (*Business Model*) em contratos de concessão

O Modelo de Negócios (*Business Model,* ver Dias, 2004, p.96-98) é uma aproximação para o valor de uma reserva desenvolvida de petróleo sob regimes de contratos de concessão. Trata-se de uma aproximação útil e adequada para o apreçamento de opções de investimento simples, especialmente se o VPL do projeto é previamente conhecido.

O valor do exercício ou *payoff* de uma opção real de investimento simples sobre o desenvolvimento de uma acumulação de petróleo é dado pela diferença entre o valor presente da reserva desenvolvida V e o investimento de desenvolvimento I :

$$VPL = V - I \quad (63)$$

O investimento I é o valor atualizado do fluxo de investimentos líquidos de benefícios fiscais como depreciação. O valor atualizado da reserva desenvolvida V para contratos de concessão de E&P pode ser aproximado por uma função linear do preço do petróleo P (isso é facilmente verificável com uma análise de sensibilidade).

Uma aproximação muito razoável e simples é considerar que V é proporcional ao volume recuperável de hidrocarbonetos (B) existente na acumulação, à qualidade econômica da reserva (q) e ao preço de petróleo:

$$V = q.B.P \quad (64)$$

A qualidade econômica da reserva q depende de uma série de parâmetros geológicos que afetam a produtividade da rocha reservatório, das propriedades físicas do petróleo a ser produzido, da carga de impostos, custos operacionais e da taxa de desconto apropriada para a atualização monetária. A aproximação definida na equação (64) é denominada por Dias (2004) de Modelo de Negócios (*Business Model*). Essa designação é uma alusão ao fato de que a relação $q.P$ corresponder ao valor do barril de petróleo (na cabeça do poço) negociado no mercado de reservas desenvolvidas nos Estados Unidos, onde assume um valor médio de 1/3 (ou seja, $q = 1/3$, também conhecida como regra do 1/3 - Gruy et al, 1982, apud Dias, 2004).

Um segundo e simples modelo também apresentado por Dias (op. cit.), denominado de Fluxo de Caixa Rígido (*Rigid Cash Flow Model*) considera uma parte do custo operacional atualizado como fixo:

$$V = q'.B.P - C$$

Em ambos os modelos, os valores de q' e q'' são obtidos a partir dos VPL calculados em planilhas eletrônicas. A diferença básica entre eles é sintetizada pela inclinação da reta do VPL em função do preço do petróleo (Figura 11):

O Modelo de Negócios é menos sensível ao preço do petróleo e implica que há uma correlação perfeita entre este último e os custos operacionais. Na prática é um modelo que gera valores conservadores para OR, o que poderia levar ao exercício prematuro de opções. Tem sido utilizado em algumas circunstâncias por diversos autores, embora não seja exatamente um consenso na literatura. Mas é inegável que sua simplicidade gera algumas vantagens: Pode ser utilizado como uma primeira aproximação para o valor da OR; Pode ser facilmente empregado em escala para problemas simples com OR e; Pode ser útil no sentido de difundir o uso de OR dentro de uma empresa. Naturalmente que, não é um modelo adequado para

a tomada de decisão em investimentos relevantes ou para problemas mais complexos que envolvam mais de uma variável estocástica, incertezas técnicas e estratégicas ou diversas OR interagindo.

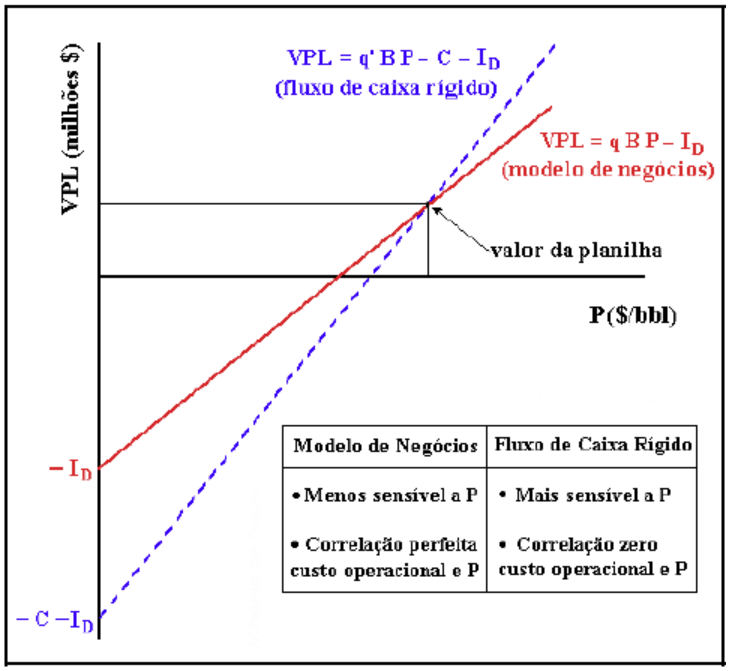

Figura 11 – Comparação entre os Modelos de Negócio e Fluxo de Caixa Rígido (Fonte: Dias, 2005, p.79).

Se o preço do petróleo segue um MGB (19), então $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Considerando o Modelo de Negócios (64), o processo estocástico do valor presente da reserva desenvolvida V pode ser calculado com o Lema de Ito (35):

$$V = q.B.P \quad \therefore \quad dV = [\alpha.P.\frac{\partial V}{\partial P} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}.P.\sigma^2].dt + \frac{\partial V}{\partial P}.\sigma.P.dz.$$ Então:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = q.B; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow dV = \alpha.q.B.P.dt + \sigma.q.B.P.dz \Leftrightarrow$$

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \quad (66)$$

Então a EDP de B&S&M para uma opção F qualquer sobre o valor da reserva desenvolvida que segue um MGB será a equação (40) - ver Seção 3.4.1 – com $V = q.B.P$, então:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente, essa equação é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida $V = q.B.P$ que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção é de desenvolvimento de um campo de petróleo é perpétua, vale então a solução analítica da Seção 3.4.2. Se ao contrário tem expiração finita, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Por fim, em se tratando de opções de venda, as soluções permanecem válidas sendo suficiente inverter as variáveis V com I e r com δ (Seção 3.6).

O Modelo de Negócios também pode ser facilmente adaptado para opções compostas de exploração (Seção 4.3.3). Uma alternativa mais elaborada a este primeiro modelo é o clássico trabalho de Paddock, Siegel e Smith (1998), apresentado a seguir.

4.3.2. O modelo de clássico de Paddock, Siegel e Smith (PS&S)

O modelo de Paddock, Siegel e Smith - PS&S (1988)[37] é uma aproximação um pouco mais elaborada (em relação ao modelo anterior) para opções de desenvolvimento de reservas de petróleo, porém sem perder simplicidade e a semelhança com a EDP (40) de Black & Sholes & Merton. Basicamente trata algumas variáveis por unidade de volume e considera o efeito da exaustão de uma reserva.

PS&S argumentam que para uma opção de E&P não é suficiente conhecer o processo estocástico do valor de uma reserva desenvolvida, é preciso também conhecer o equilíbrio de mercado deste ativo. Para isso caracterizam o comportamento dos preços de reservas desenvolvidas e demonstram como integrar este modelo com técnicas de apreçamento de opções, valorando a opção de desenvolvimento e depois a de exploração.

[37] Ver também Dixit e Pindick, 1994, p.396-403 e Dias, 1996, p.211-222.

Em equilíbrio, o retorno esperado de uma reserva desenvolvida (dividendos e ganho de capital) deve compensar o custo de oportunidade de investir em tal reserva. Seja B_t o volume de petróleo, V_t o valor de uma unidade de volume de reserva desenvolvida (US$/bbl) e R_t o *payoff* instantâneo por unidade de tempo, então os autores assumem que:

$$\frac{R_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \quad (67)$$

Onde μ_v é a taxa ajustada ao risco requerida por um mercado de capitais em equilíbrio sobre uma *security* que replique perfeitamente a reserva desenvolvida. O *payoff* R_t é dado pela soma dos lucros da produção de petróleo $\pi_t.(-dB_t)$ com o ganho de capital da reserva ainda não produzida $d(B_t.V_t)$. O sinal negativo deve-se à variação de reserva ser negativa com a produção, mas o lucro não.

$$R_t.dt = \pi_t.(-dB_t) + d(B_t.V_t) \quad (68)$$

Onde π_t é a taxa de lucro por unidade de volume. A reserva não produzida de um campo de petróleo em produção pode ser bem representada por uma função exponencial decrescente com o tempo de produção, então:

$$B_t = B_{t-1}.\exp(-\gamma.\Delta t) \Rightarrow \ln B_t = \ln B_{t-1} - \gamma.\Delta t \Rightarrow \Delta \ln B_t = -\gamma.\Delta t$$

Na forma diferencial, quando $\Delta t \to 0$:

$$d\ln B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t / B_t = -\gamma.dt \Rightarrow dB_t = -\gamma.B_t.dt \quad (69)$$

Onde γ é a taxa de caimento da reserva B_t de petróleo por unidade de tempo (não estocástico). Substituindo (69) em (68) e considerando que $d(B_t.V_t) = B_t.dV_t + V_t.dB_t$:

$$R_t.dt = \gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt \quad (70)$$

Substituindo o resultado (70) em (67), obtém-se:

$$\frac{\gamma.\pi_t.B_t.dt + B_t.dV_t - \gamma.V_t.B_t.dt}{B_t V_t} = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$\frac{dV_t}{V_t} + \frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} - \gamma.dt = \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow \frac{dV_t}{V_t} = -\frac{\gamma.\pi_t.dt}{V_t} + \gamma.dt + \mu_v.dt + \sigma_v.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = (-\gamma.\pi_t + \gamma.V_t + \mu_v.V_t).dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$$dV_t = [\mu_v - \gamma.(\pi_t / V_t - 1)].V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow$$

$dV_t = (\mu_v - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz$ (71) e $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$ (72)

Onde δ_t é a taxa de *payout* ou dividendos da produção de uma unidade de reserva de petróleo desenvolvida, cujo valor segue o MGB da equação (71), supondo μ_v, δ_t *e* σ_v constantes. A tendência deste MGB é a taxa de ganho de capital da reserva desenvolvida: $\alpha_v = \mu_v - \delta_t$. Em equilíbrio, nenhum agente manterá uma reserva desenvolvida sem produção, pois neste caso a taxa de retorno será a taxa de ganho de capital ($\mu_v - \delta_t$), que é menor do que a taxa requerida pelo mercado sobre o ativo (μ_v).

Considerando a equação (71), o valor da opção de desenvolvimento de uma unidade de reserva e a regra ótima de decisão podem ser determinados. Para isso monta-se um *portfolio* sem risco, composto pela opção de desenvolvimento F e n partes do ativo gêmeo (reserva desenvolvida V). Como o valor da reserva segue um MGB, seguindo-se os mesmos passos da Seção 3.4.1, chega-se à EDP (40) de B&S&M:

$$\frac{1}{2}.F_{vv}.\sigma^2.V^2.dt + (r_f - \delta).F_v.V - r_f.F = -F_t \quad (40)$$

Novamente a equação é genérica e serve para qualquer opção sobre o ativo básico (uma unidade de reserva desenvolvida). As condições de contorno é que definirão o tipo de OR:

$F(V=0) = 0$ (42) $\qquad F^*(V^*(t),t) = V^*(t) - I$ (44)

$F_v(V^*(t),t) = 1$ (45) $\qquad$ Para $t = T$, $F(V) = Máx[V - I, 0]$ (50)

As três primeiras condições de contorno são para opções de compra americanas perpétuas (adicionalmente em (40) F_t=0). As quatro condições em conjunto definem são para opções de compra americanas com expiração finita. A

condição (42) é um limite econômico que funciona como uma barreira absorvente para o MGB de V - equação (71), ver Seção 3.1.6. A condição (44) define o *payoff* do exercício da opção no valor crítico V^* enquanto que (45) é a condição de otimização de contato suave (*smooth paste condition* – ver Seção 3.4.2). Por fim, a condição (50) indica que, na expiração do direito de desenvolvimento, vale a regra do VPL. As soluções obtidas nas Seções 3.4.2 e 3.5.1 também continuam válidas, com algumas diferenças.

O valor da opção e o valor crítico serão obtidos em unidades monetárias por unidade de reserva desenvolvida. O investimento também deve ser considerado por unidade de volume. A taxa de dividendos δ_t tem uma expressão particular dada pela equação (72) ($\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$). Note que δ_t varia com o tempo (depende da taxa de lucro π_t e do valor de uma unidade de reserva desenvolvida V_t) enquanto que na EDP (40) é constante. Será necessário então estimar uma taxa de dividendos média e assumi-la constante.

O modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para um projeto não implantado. Isso significa que o processo neutro ao risco da reserva não desenvolvida poderá ter uma tendência neutra ao risco ($\alpha_v^{'} = r_f - \delta$) negativa. Em princípio, esse resultado é plausível, pois o custo de oportunidade δ de se adiar a produção pode realmente ser maior que a taxa livre de risco. Mas uma tendência muito negativa pode não ser conveniente, pois pode significar também que o processo estocástico real tem uma tendência real negativa: $\alpha_v < 0$ (ver Seção 5.1).

Se isso ocorrer, significa que o preço da reserva desenvolvida cai com o tempo. Isso só é plausível para uma opção de desenvolvimento se há uma expectativa de redução contínua no preço futuro do petróleo ou se os custos de produção estiverem aumentando continuamente. De uma outra forma, é questionável depreciar a opção de desenvolvimento pela perda de volume que ocorreria se ela estivesse em produção, por que simplesmente o volume da reserva ainda é constante.

PS&S (*op. cit.*) também discutem a opção de exploração. Os autores assumem que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, evitando complicações como o momento ótimo para exercer a opção de desenvolvimento, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única. Isso seria equivalente a fazer os investimentos de exploração e de desenvolvimento esperados ($\bar{I}_E$ e $\bar{I}_D$) em conjunto e receber o valor presente da reserva desenvolvida $\bar{B}$ esperada:

$$VPL_{Exp} = \bar{B}.V - (\bar{I}_E + \bar{I}_D) \quad (73) \text{ com: } \quad \bar{B} = \int B.df(B) \quad \text{e} \quad \bar{I}_D = \int B.I_D.df(B)$$

Onde VPL_{Exp} [38] é o VPL esperado de uma oportunidade exploratória sem risco geológico, V é o valor de uma unidade de reserva desenvolvida e $f(B)$ é a distribuição de probabilidade do volume aleatório de petróleo B a ser descoberto[39].

Considerando que o volume esperado $\bar{B}$ é constante e que a opção de exploração é homogênea de grau 1, então o seu valor pode ser representado como:

$$\bar{B}.E(V, T-t, S) \quad \text{com} \quad S = (\bar{I}_E + \bar{I}_D)/\bar{B} = E + D$$

Sendo que $E(V, T-t, S)$ é o valor corrente para uma opção de exploração sobre uma unidade de reserva desenvolvida com investimento unitário combinado de exploração e desenvolvimento S. A opção de exploração pode então ser resolvida como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento de PS&S.

Se a curva do valor crítico de uma opção de investimento em função do tempo para a expiração $T-t$ for normalizada, ou seja, definida pela relação entre o valor do projeto implantado e o investimento necessário (δ, σ e r_f são constantes), então ela será única (Merton, 1973, apud PS&S, *op. cit.*, p.489). Assim, toda vez que

---

[38] O VPL_{Exp} é uma aproximação grosseira do VME, Valor Monetário Esperado, um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração, estando para os projetos de exploração como está o VPL para projetos de desenvolvimento. A regra de decisão é investir se VME>0.

[39] PS&S não usam o termo VPL_{Exp}, apenas dizem que exercer a opção de exploração pode ser vista como o lado direito da equação (73), esclarecendo na página 491 que seu modelo é válido somente na ausência de incerteza geológica.

a opção exploração estiver *deep in the money* ($V/S \geq V^*/S$), também estará a opção de desenvolvimento pois $V/D > V/S$ (onde $D = \overline{I}_D / \overline{B}$).

A técnica de PS&S para opções exploratórias fornece um valor elevado para a opção, mas qualitativamente inferior. Isso se deve tanto por desconsiderar a incerteza geológica sobre a existência de petróleo, como por suprimir flexibilidades ao colapsar as opções de exploração com a de desenvolvimento. Este assunto será retomado na Seção 5.2, quando se compara os modelos de opção de exploração simples e composta.

Por fim é preciso notar que o Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios podem ser adotados em conjunto. Enquanto o primeiro se preocupa e capturar o efeito da depleção natural de um campo de petróleo através da taxa de dividendos do ativo subjacente, o segundo propõe que o valor de uma reserva seja função linear do preço do petróleo, e por isso segue um MGB derivado a partir deste.

4.3.3. Opções compostas com expiração: Projetos de exploração

Na Seção 4.1, discutiu-se que a OR de exploração é uma opção americana composta, pois se trata de uma opção de investimento sobre uma opção de desenvolvimento de um campo de petróleo (*call on call*). Até a primeira data de exercício T_1, se o detentor da opção de exploração realizar o investimento exploratório I_E e confirmar a existência do campo de petróleo, ele adquire a opção de desenvolvimento com expiração T_2 ($T_2 \geq T_1$ - medidos em relação à mesma data) e preço de exercício igual ao investimento de desenvolvimento I_D.

Porém, um decisor racional que maximiza o lucro da firma só exercerá a primeira opção da exploração antes da expiração se, além desta estar *deep in the money*, a opção de desenvolvimento também estiver. Dias (2006) argumenta que se a opção de desenvolvimento não estiver *deep in the money,* ao exercer a primeira opção, o decisor obtém na melhor das hipóteses a opção de desenvolvimento, que não será exercida até estar madura. Neste caso, o decisor obtém um melhor retorno ao postergar o primeiro investimento exploratório I_E por um intervalo dt e aplicar o capital exploratório à taxa livre de risco r_f antes que a segunda opção fique

madura. Desta forma, aufere o retorno $I_E.r_f.dt$ sem perder qualquer benefício (dividendo) da opção de desenvolvimento por manter viva a primeira opção. De outra forma, o decisor pode arbitrar postergando o exercício da primeira opção e aplicando o capital exploratório à taxa livre de risco até que ambas as opções estejam maduras. Esta característica também é valida para uma *call on call* financeira americana.

Mas há uma diferença fundamental da OR composta de exploração em relação a uma *call on call* financeira: O fato de se exercer a primeira opção não garante a aquisição da segunda, pois há o risco de não se descobrir o campo de petróleo, ou como se diz com o jargão de E&P, o poço pode ser "seco" (*dry hole*). Na opção composta financeira este risco não existe, ou seja, ao exercer a primeira opção o investidor necessariamente adquire a segunda. A forma tradicional com que a indústria de E&P lida com este risco na tomada de decisão é considerar o valor do campo de petróleo desenvolvido e os investimentos necessários ponderados pelas probabilidades de sucesso e fracasso exploratório.

Dixit e Pindick (1994, p.319-328) discutem o problema de investimentos seqüenciais contínuos ou discretos, que podem ser interrompidos ou suspensos, temporariamente ou definitivamente, como equivalente ao problema de opções compostas. Para o investimento em fases discretas, dado o processo estocástico do preço, os autores derivam o valor do projeto, da opção e do preço crítico para a última fase como uma opção simples. Em seguida demonstram que o valor da opção da fase anterior e o novo preço crítico apresentam equação diferencial e condições de contorno similares à última fase, mas com a diferença de que o *payoff* da fase mais nova depende do valor da opção na fase subseqüente. Esta técnica deve ser repetida sequencialmente até a primeira fase (*backward*), obtendo-se o valor da opção composta.

Os autores então argumentam que o preço de exercício é decrescente da primeira para a última fase, em decorrência da redução progressiva do investimento a ser afundado. Com isso, se o primeiro estágio estiver *deep in the money*, o segundo estágio também estará. Entretanto não mencionam que esta regra é inequívoca se, e somente se, os investimentos seqüenciais tiverem a mesma expiração ou forem perpétuas. No exemplo apresentado no livro, todas as opções de

investimento são consideradas perpétuas e apresentam solução analítica. Mas este não é o caso de uma opção exploratória, onde as fases podem ter expiração diferenciada e as opções não tem solução analítica.

Então, percebe-se que o problema de uma opção composta de exploração, por sua natureza, deve e pode ser tratado de uma forma diferenciada em relação ao seu par financeiro. A solução que se apresenta adiante preserva a natureza do problema de decisão da exploração como uma opção composta, ao contrário do Modelo de PS&S.

O Modelo de PS&S (Seção 5.3.2) para opções exploratórias assume que o desenvolvimento é realizado imediatamente após o sucesso da etapa exploratória, o que equivale a colapsar as duas opções em uma única com a mesma expiração. Também considera o volume esperado $\overline{B}$ constante (sem incerteza) e ignora o risco geológico (probabilidade de sucesso)[40], resolvendo a opção de exploração como uma opção simples nos mesmos moldes da opção de desenvolvimento. Por esses motivos, essa técnica fornece um valor qualitativamente inferior para a opção de exploração, como será visto na Seção 5.2. Assim, um modelo que resgate algumas das simplificações acima sem perder praticidade é propício. Uma alternativa é apresentada a seguir, sendo denominado de Modelo de Exploração (MDE).

As principais diferenças do MDE serão reconsiderar o problema de exploração como opção composta de duas fases (exploração e desenvolvimento), observar os diferentes períodos de expiração e ponderar o risco geológico. Entretanto, a incerteza técnica sobre o volume descoberto será desconsiderada, de forma que o volume a descobrir esperado será considerado constante. Por simplicidade, o investimento de delimitação é considerado como parte do desenvolvimento.

[40] O risco e a incerteza geológica representam, respectivamente, a possibilidade de existir ou não petróleo em um prospecto exploratório e, em caso afirmativo, a quantidade de petróleo existente. O risco geológico é estimado através da probabilidade de sucesso geológico. A incerteza sobre o volume pode ser obtida por SMC a partir das distribuições dos parâmetros que definem o volume da acumulação (volume de rocha da trapa, porosidade, preenchimento, saturação de óleo, fator de recuperação, etc.). O produto destes fatores gera a distribuição do volume recuperável, cuja média é o volume esperado a descobrir.

O MDE é elaborado considerando o conceito do Valor Monetário Esperado (VME), um indicador que considera o risco geológico de um projeto exploratório – ver Figura 12.

O Valor Monetário Esperado (VME) é um indicador de decisão bem conhecido na área de exploração de petróleo, cuja regra de decisão é investir se VME>0. Desempenha um papel equivalente ao do VPL para projetos de desenvolvimento. O VME é um valor esperado por ponderar o valor econômico de um projeto exploratório pelo risco geológico, considerando os cenários de sucesso e de fracasso:

$$VME = Ps.(V - I_E - I_D) - (1 - Ps).I_E = Ps.V - Ps.I_D - I_E \Rightarrow .$$

$$VME = Ps.V - (I_E + Ps.I_D) \quad \text{ou} \quad VME = Ps.(V - I_D) - I_E \quad (74)$$

Onde Ps é a probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*), $1 - Ps$ a probabilidade de fracasso, V o valor presente da "reserva"[41] desenvolvida, I_E o investimento atualizado em exploração do primeiro estágio e I_D o investimento atualizado do desenvolvimento no segundo estágio. Os investimentos e a probabilidade de sucesso são considerados constantes. Seja então:

$$V_E = Ps.(V - I_D) \quad (75) \qquad \Rightarrow VME = V_E - I_E \quad (76)$$

Onde V_E é definido como o valor esperado atualizado do projeto exploratório perfurado ("explorado"). Note a semelhança da equação (76) com a equação (63): $VPL = V - I$. Assim o problema da decisão com o VME é similar ao problema da decisão com o VPL, mas com a vantagem de preservar e ponderar a decisão pelo risco geológico, indissociável do investimento em exploração.

[41] A rigor, para prospectos exploratórios, o termo V é o valor presente do volume a descobrir desenvolvido, já que o termo reserva é tecnicamente inadequado neste caso.

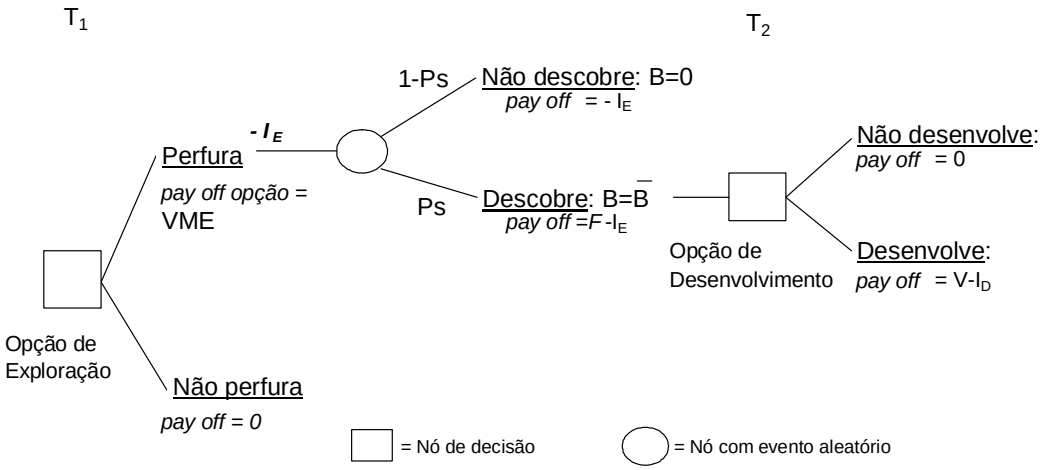

Figura 12 – Árvore de decisão de uma opção de exploração com duas etapas: exploração e desenvolvimento.

Suponha que o processo estocástico do valor da reserva desenvolvida seja um MGB:

$$dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz \qquad (77)$$

No Modelo de Negócios essa relação – Equação (66) - depende do MGB do preço do petróleo ($dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$) e é obtida aplicando-se o Lema de Ito à equação (64): $V = q.B.P$. Em favor de uma maior generalidade, no MDE apenas admite-se que o preço da reserva desenvolvida siga um MGB[42]. Considerando que $V_E = Ps.(V - I_D)$ (75), o valor esperado atualizado do prospecto exploratório perfurado e desenvolvido será dado pelo Lema de Ito (35):

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \Rightarrow$$

$$dV_E = [\alpha.V.\frac{\partial V_E}{\partial V} + \frac{\partial V_E}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2}.V.\sigma^2].dt + \frac{\partial V_E}{\partial V}.\sigma.V.dz$$. Então, de (75):

$$\frac{\partial V_E}{\partial V} = Ps \;;\; \frac{\partial^2 V_E}{\partial V^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial V_E}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \; dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \qquad (78)$$

[42] Esta premissa é fortalecida pelo teorema de Samuelson (1965) apresentado na Seção 4.3.2. Esse teorema é bastante proveitoso para a avaliação de OR, significa que fontes múltiplas de incerteza correlacionadas (inclusive com MRM), quando combinadas geram um único passeio aleatório.

Ou, de forma equivalente:

$$\Rightarrow\ dV_E = Ps.(\alpha.V.dt + \sigma.V.dz) \Rightarrow .\ dV_E = Ps.dV \quad (79).$$

A equação (79) revela que o processo estocástico de V_E também é um MGB, múltiplo do MGB da "reserva" desenvolvida. Então, no problema da opção composta de exploração, as duas opções dependem de um mesmo processo estocástico dV [43].

A estratégia de valoração da opção composta de investimento de Dixit e Pindick (*op. cit.*) pode agora ser aplicada, pois as duas opções dependem do mesmo processo estocástico da "reserva" desenvolvida. A solução inicia pelo segundo estágio, ou seja, a opção simples de desenvolvimento. A EDP é exatamente a mesma obtida na Seção 3.4.1, a exemplo do que ocorreu para a opção de desenvolvimento no Modelo de Negócios (Seção 4.3.1), mas com a ressalva que o MGB é dado pela equação (77) e não necessariamente o do preço do petróleo, conforme já discutido. As condições de contorno são as mesmas apresentadas em detalhe nas Seções 3.4.2 e 3.4.3 para uma opção de investimento simples e revisitadas na Seção 4.3.2 com o Modelo de PS&S.

Como visto (Seção 3.4.1), a EDP é genérica e vale para qualquer derivativo $F(V,t)$ que não pague dividendos, escrita sobre uma reserva desenvolvida V que segue o MGB $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. Se a opção de desenvolvimento do campo de petróleo tem expiração T_2, pode-se utilizar a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1. Com isso o valor da opção de desenvolvimento (F) e o seu valor crítico (V^*) podem ser calculados.

O passo seguinte é montar a EDP de B&S&M (40) do primeiro estágio da opção de investimento sobre o MGB da equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$. Adequando as variáveis para a opção de exploração (E), tem-se:

---

[43] No modelo de Negócios, em última instância, as duas opções dependem do processo estocástico do preço do petróleo: $dP = \alpha.P.dt + \sigma.P.dz$. Combinando as equações (64) $V = q.\overline{B}.P$ ($B = \overline{B}$) com a equação (78): $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.(\alpha.P.dt + \sigma.P.dz) \Rightarrow dV_E = Ps.q.\overline{B}.dP$.

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial^2 E}{\partial V_E^2}.\sigma^2.{V_E}^2.dt + (r_f - \delta).\frac{\partial E}{\partial V_E}.V_E - r_f.E = -\frac{\partial E}{\partial t} \quad (80)$$

Como visto, a equação é genérica e vale para qualquer derivativo $E(V_E,t)$ que não pague dividendos, escrito sobre V_E, que segue o MGB $dV_E = Ps.\alpha.V.dt + Ps.\sigma.V.dz$ e gera dividendos contínuos δ. As condições de contorno são as similares às vistas nas Seções 3.4.2 e 3.4.3, mas com algumas diferenças.

A primeira condição de contorno decorre do fato de $V = 0$ continuar sendo uma barreira absorvente:

$$E(V = 0) = 0$$

A segunda condição afirma que na curva de gatilho do primeiro estágio (V^{**}), a opção de investir vale o VME do projeto ($VME = Ps.(V - I_D) - I_E$ - (74)), onde o valor da "reserva" não desenvolvida $(V - I_D)$ é dada pela opção de desenvolvimento (*value matching condition*):

$$E(V^{**}) = Ps.F(V^{**}) - I_E$$

A terceira condição denominada de contato alto ou suave (*smooth pasting condition*) define que no valor de gatilho o valor das duas opções devem se encontrar tangencialmente, ou seja, como funções de V, devem ter a mesma inclinação ou derivada em V^{**}.

$$E_v(V^{**}) = Ps.F_v(V^{**})$$

A quarta condição afirma que na expiração do primeiro estágio, vale a regra do VME tradicional, com o valor da reserva desenvolvida dado pela opção de desenvolver. Para $t = T_1$:

$$E(V) = Máx[Ps.F(V) - I_E;0]$$

A EDP (80) e condições de contorno do MDE tratam a opção de exploração como composta e preservam o risco geológico na decisão de investimento, mas não

possui solução analítica. Para contornar este problema sugere-se uma aproximação simples, ao se considerar sempre que $F = V - I_D$.

Essa aproximação só não é a solução verdadeira quando $V < V^*$, ou seja, o segundo estágio não está *deep in the money* e portanto, o primeiro não deve ser exercido imediatamente. Essa regra de decisão é inequívoca e para uma opção de exploração, é mais importante do que o valor calculado desta ser exato ou não. Por isso utilizar $F = V - I_D$ como uma aproximação inferior do valor verdadeiro da opção (pois: $V < V^* \Rightarrow F > V - I_D$). A taxa de dividendos (δ) e a volatilidade (σ) para apreçar $E(V)$ serão as mesmas do ativo subjacente.

Com esta simplificação, os dois estágios da opção de exploração passam a depender de vários parâmetros comuns ($r_f, \delta, \sigma \; e \; dV$), diferenciando-se quanto ao ativo subjacente e preço de exercício: $V_E \; x \, V$ e $(I_E + Ps.I_D) \; x \, I_D$. Quanto à expiração, os dois estágios podem ter prazos iguais ou diferentes[44]: $T_1 = T_2$ ou $T_1 < T_2$.

Se os dois estágios da opção tiverem mesma expiração ($T_1 = T_2$) e a probabilidade de sucesso for um, a curva do valor crítico normalizado (V^* / I) será única, já que todos demais parâmetros para sua definição ($r_f, \delta, e \; \sigma$) são iguais (Merton, 1973, apud PS&S, 1998, p.489). Então, como a opção de desenvolvimento apresenta maior relação V / I do que o primeiro estágio da opção de exploração, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a opção de desenvolvimento será a primeira a tornar-se *deep in the money,* independente do valor da probabilidade de sucesso (*0*< Ps <*1*):

---

[44] Embora para uma opção de compra composta financeira T1<T2 seja uma premissa óbvia, este não é o caso de uma opção de exploração. Um contrato de exploração cede o direito explorar uma área para uma firma por um período limitado, ao final do qual a firma pode declarar a comercialidade de eventuais descobertas. Desta forma pode-se considerar que na opção de exploração T1=T2. Em outras situações, o contrato de exploração é dividido em etapas, ao final das quais, a empresa é obrigada a devolver uma parte da área. Isso cria incentivos para sejam perfurados poços que auxiliem na definição da área que se deseja reter, fazendo com que a opção de perfuração do pioneiro (exploração propriamente dita) apresente expiração menor do que a da opção de desenvolvimento: T1<T2. Em outras situações, o investimento em poços pioneiros é obrigatório, o que reduz o problema do primeiro estágio à regra do VME e preserva a opção de desenvolvimento, caso haja uma descoberta.

$$\frac{V}{I_D} > \frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Então se $T_1 = T_2$ a condição ótima de exercício $V > V^{**} > V^{*}$ está garantida e a simplificação proposta $F = V - I_D$ é a solução verdadeira.

Se $T_1 < T_2$, cada uma das opções terá sua própria curva de gatilho (V^* / I) e a opção que apresentar maior relação V / I não será necessariamente a primeira a tornar-se *deep in the money*. O primeiro toque irá depender da relação entre os valores dos investimentos de exploração, desenvolvimento, da probabilidade de sucesso e da magnitude da relação $T_1 < T_2$.

Quatro combinações de resultados em relação às maturidades são possíveis para as opções do primeiro e segundo estágio da opção de exploração: *deep x deep; out x deep; deep x out* e; *out x out.* Novamente, se o segundo estágio estiver maduro (*deep x deep* e *out x deep*) a aproximação $F = V - I_D$ é o valor exato, e em caso contrário (*deep x out* e *out x out*), é um valor inferior ao verdadeiro F.

A regra de decisão será a seguinte:

- Se ocorrer o 1º caso (*deep x deep*), a opção deve ser exercida imediatamente;
- Se ocorrer um dos demais casos (*out x deep, out x out* ou *deep x out*) o decisor deve aguardar que os dois estágios estejam *deep* simultaneamente. Caso isso não ocorra*,* na data de expiração do primeiro estágio, o decisor dever então decidir sobre o exercício da opção com a regra do VME.

Então, a opção de composta E de exploração pode ser agora valorada com o instrumental de uma opção simples sobre uma opção de desenvolvimento F_D, preço de exercício $I_E + Ps.I_D$, gatilho $.V^{**}$ e expiração T_1. A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) vista na Seção 3.5.1 continua válida.

O exercício é necessariamente ótimo para a firma maximizadora do lucro se os dois estágios da opção de exploração estiverem *deep in the money* simultaneamente*.* Se os dois estágios têm a mesma data de expiração, essa condição ocorrerá necessariamente toda vez que a o primeiro estágio estiver

maduro. Caso o primeiro estágio da opção expire antes do segundo, o decisor deve verificar se as duas opções estão *deep in the money* para o exercício, em caso contrário deve aguardar. Por fim, nas expirações do primeiro e segundo estágios, o decisor decide com base na regra do VME e VPL respectivamente.

5. Estudos de caso em Exploração e Produção (E&P)

Este Capítulo tem como objetivo discutir os conceitos e modelos abordados ao longo da dissertação através de exemplos numéricos. Na Seção 5.1 são comparados e discutidos os resultados obtidos para uma opção de desenvolvimento com os Modelos de Negócio e Paddock, Siegel e Smith (PS&S). Na Seção 5.2 são comparados e discutidos os resultados obtidos com o Modelo de Exploração e com o Modelo de PS&S para um projeto exploratório. Na Seção 5.3 segue uma discussão sobre um problema de *portfolio*: Priorização de investimentos com OR.

5.1. O Modelo de Paddock, Siegel e Smith (PS&S) e o Modelo de Negócios aplicados a um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo

Nesta Seção aborda-se em detalhe o caso de um projeto de desenvolvimento de um campo de petróleo terrestre sob regime de concessão. Considere uma descoberta de acumulação de petróleo já delimitada denominada de ID-1, com 13,8 milhões de bbl de petróleo recuperáveis em 11 anos de produção. A oportunidade de investimento pode ser declarada comercial pela empresa a qualquer momento, em um prazo máximo de 1 ano. O órgão regulador então, avalia o projeto de desenvolvimento do campo e o cronograma proposto pela empresa. Caso seja aprovado, a empresa recebe a autorização para implantar o projeto e o direito de produzir na área por 20 anos. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O investimento atualizado necessário para o desenvolvimento da reserva (I_D) é de US$ 62,5 milhões (MM), e o valor presente da reserva desenvolvida (V) calculado em planilha eletrônica é US$ 69,2 MM. Com isso, o projeto ID-1 apresenta VPL de US$ 6,7 MM, o que de acordo com a regra clássica do VPL, é o suficiente para o investimento imediato. Mas a empresa ainda conta com a flexibilidade de adiar por até 1 ano a tomada de decisão, e observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida. De acordo com a teoria de OR, o decisor deve apenas investir imediatamente se o projeto estiver *deep in the money*, ou com um valor suficientemente alto (maior ou igual do que o gatilho) que torne desvantajosa a espera.

O valor a OR e do gatilho serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1, considerando inicialmente o Modelo de PS&S, e em seguida com o Modelo de Negócios. Para isso será necessário estimar os demais parâmetros necessários ao apreçamento da OR: σ, r_f e δ.

PS&S (1988, p.496-497) sugerem que a volatilidade (σ) do preço de uma reserva desenvolvida poderia ser estimada a partir de séries históricas, mas que infelizmente não são satisfatórias nem mesmo para os Estados Unidos, onde há um mercado mais desenvolvido. Apontam como solução utilizar o resultado de Gruy et al. (1982) que sugerem uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Com isso utilizam a volatilidade da taxa de variação do preço do petróleo como uma estimativa para a volatilidade da taxa de variação do preço de uma unidade de reserva desenvolvida. De acordo com Dixit e Pindick (1994, p.400), a volatilidade do preço do petróleo entre os anos 60 e início dos 90 teria sido na ordem de 15%, mas estimativas da indústria podem ser maiores. Consideram que um range razoável seria entre 15% e 25%, por isso adota-se a média de 20% como caso base nesta dissertação. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%[45].

A taxa de dividendos do Modelo de PS&S é dada pela equação (72): $\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1)$, tendo sido estimada de forma semelhante à descrita por Dixit e Pindick (1994, p.399). A taxa de declínio exponencial da reserva γ foi estimada ajustando-se uma curva exponencial à curva de produção do projeto ID-1. A reserva é recuperada de forma acelerada (são apenas 11 anos de produção) e com forte depleção, gerando uma taxa de declínio de 29% ao ano. O lucro π_t foi estimado a partir do fluxo de caixa, deduzidos custos operacionais (53%), *royalties* (13,4%) e impostos (18%, líquido de benefícios fiscais e depreciação). Todos estes percentuais são sobre a receita bruta:

$$\pi_t = (1 - Royalty - Opex).(1 - Tax) = (1 - 13{,}4\% - 53\%).(1 - 18\%) = 27{,}7\%$$

[45] A taxa livre de risco estimada foi a do país onde se encontra o projeto ID-1, pois a empresa detentora da OR também é sediada neste país, tomando e aplicando recursos no mercado interno.

O valor da reserva desenvolvida V_t considerada por PS&S (*op. cit.*) e Dixit e Pindick (*op. cit.*) foi a regra do 1/3 de Gruy et al (*op. cit.*). Considerando que o projeto ID-1 encontra-se em um mercado não desenvolvido como o americano e sujeito a um regime fiscal e regulatório diferente, é mais adequado estimar V_t a partir da equação (64): $V = q.B.P \Rightarrow q = V/(B.P) = 21{,}3\%$. Retornando à equação (72):

$$\delta_t = \gamma.(\pi_t / V_t - 1) = 0{,}29.(0{,}277.P / 0{,}213.P - 1) \Rightarrow \delta_t = 10{,}4\%\ a.a.$$

O MGB neutro ao risco do preço de um barril de reserva desenvolvida do projeto ID-1 será então dado por:

$$dV_t = (r - \delta_t).V_t.dt + \sigma_v.V_t.dz \Rightarrow dV_t = -0{,}044.V.dt + 0{,}2.V.dz$$

Este MGB apresenta uma tendência neutra ao risco bastante negativa, decorrente da elevada taxa de dividendos encontrada com o Modelo de PS&S. No mundo real, a tendência irá depender da relação entre a taxa ajustada ao risco μ exigida por um investidor que detivesse a oportunidade de desenvolvimento e a taxa de dividendos δ. De acordo com a equação (37):

$$\alpha - \pi = r_f - \delta \Rightarrow \alpha = r_f + \pi - \delta \Rightarrow \alpha = \mu - \delta$$

No caso do prospecto ID-1, se a taxa ajustada ao risco for de, por exemplo, 9%, significa que a tendência real é negativa: $\alpha = \mu - \delta = 9\% - 10{,}4\% \Rightarrow \alpha = -1{,}4\%$. Então, se $\mu < \delta$, o preço no mundo real de uma unidade de reserva desenvolvida tenderá a decrescer com o tempo. Mas isso só faz sentido se, de fato, a reserva estiver em depleção (com custos crescentes) ou se o preço do petróleo for decrescente, demais parâmetros constantes. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo de PS&S sobre o preço de petróleo ou sobre custos, não faz sentido que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a tendência de preço de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

Com este contra exemplo, argumenta-se que o Modelo de PS&S deve ser utilizado com cuidado para opções de desenvolvimento de campos de petróleo quando $\mu < \delta$.

Todos os parâmetros determinados, o valor da opção com expiração de 1 ano é de US$ 7,7 milhões, portanto, maior do que o VPL de 6,7 milhões. Isso significa

que, ao contrário da regra de decisão com o VPL, o projeto ID-1 não deve ser declarado comercial imediatamente. O prêmio da flexibilidade de diferir a decisão e observar como evolui o valor da reserva desenvolvida do projeto vale US$ 1 milhão. Se a expiração para a declaração de comercialidade fosse igual a 9 anos, o valor da opção de desenvolvimento sobe para US$ 9,7 MM e o prêmio da flexibilidade vale US$ 3 MM. Esse exercício dá a dimensão da sensibilidade do valor da OR de desenvolvimento ao tempo de expiração. A Figura 13 apresenta o valor da opção em função do valor presente da reserva desenvolvida do projeto com expiração de 1 ano, e a sensibilidade para a expiração de 9 anos.

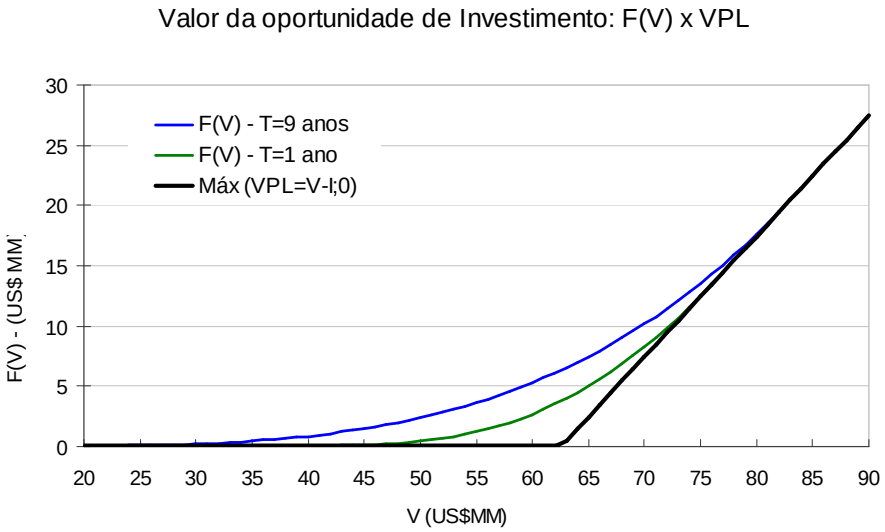

Figura 13 – Valor da opção de desenvolvimento do projeto ID-1 em função do valor presente da reserva desenvolvida.

Note que o valor da OR domina a regra de decisão do VPL até o ponto em que a curva da opção toca e se funde com a reta do VPL. Este ponto representa o valor crítico da reserva desenvolvida, situação em que o investimento deve ser imediato. Naturalmente que, se o decisor tivesse, por exemplo, 9 anos para decidir sobre o investimento, sua flexibilidade seria maior implicando num valor maior para a opção e seu valor crítico.

O valor crítico do projeto ID-1 é dado pelas equações (53) e (54), visto na Seção 3.5.1. Com o prazo de 1 ano para a expiração da opção de declaração da comercialidade, o valor crítico é de US$ 76,3 MM. Reduzindo progressivamente o prazo da expiração até que se torne zero, pode-se calcular como evolui o valor do

gatilho ao longo do tempo, todos os demais parâmetros constantes. A curva gerada é denominada de curva de gatilho (Figura 14). Observa-se que o valor crítico diminui progressivamente até a data de expiração, quando se torna igual ao valor preço de exercício (ou investimento, de US$ 62,5 MM).

Com esse conjunto de resultados, o decisor deve adiar a declaração de comercialidade do projeto ID-1 até que essa opção se torne *deep in the money* no prazo de 1 ano. Este exemplo deixa de forma clara a superioridade da valoração e decisão com OR.

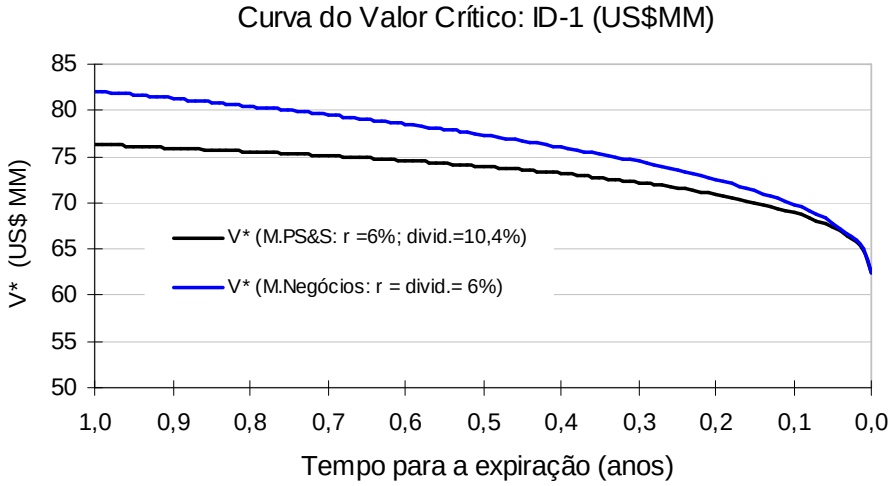

Figura 14 - Curva do valor crítico em função da expiração do Modelo de PS&S. Observa-se o efeito da redução da taxa de dividendos, obtida para o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (1993).

O exercício com o projeto ID-1 demonstrou a necessidade de uma quantidade significativa de informação e premissas na estimativa dos parâmetros para o cálculo da taxa de dividendos. Desta forma, outras alternativas mais simples para a estimativa de δ podem ser necessárias e/ou convenientes.

Dias (2004, p.101) destaca duas alternativas para estimar a taxa de dividendos. Como o preço de uma reserva desenvolvida é proporcional ao preço do óleo na boca do poço, a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.4.2):

$$Spot = Futuro(t).\exp(-(r_f - \delta).\Delta t)$$

Onde $Spot$ é o preço spot do óleo em t_0 e $Futuro(t)$ é o preço futuro do óleo para entrega na data t. A segunda alternativa é uma regra útil e prática para OR proposta por Pickles e Smith (1993). Estes autores concluem que, se ignorada a volatilidade de curto prazo, a taxa de conveniência δ em situações "normais" de mercado é equivalente à taxa livre de risco. Em situações de choques, esta taxa pode variar significativamente no curto prazo, mas tendem a um nível de equilíbrio no longo prazo, sendo portanto estável para projetos de longa duração como os de E&P. Assim os autores sugerem que, em OR, inicialmente se adote como valor "normal" da taxa de conveniência o valor da taxa livre de risco.

Adotar a sugestão de Pickles e Simith (*op. cit.*) desfigura o Modelo de PS&S. Adota-se então o Modelo de negócios onde o valor presente da reserva desenvolvida V é função linear do preço do petróleo e segue o MGB dado pela equação (66): $dV = \alpha.V.dt + \sigma.V.dz$, onde $V = q.B.P$ (64).

Reconsidere a opção de desenvolvimento do projeto ID-1, mas assumindo que a taxa livre de risco e a taxa de dividendo são iguais a 6%. O valor da opção de desenvolvimento com expiração de um ano sobe de US$ 7,7MM para US$ 8,9 MM, elevando o prêmio da flexibilidade de US$ 1 MM para US$ 2,2 MM. O valor do gatilho também aumenta, de US$ 76,3 para 82,0 MM, diminuindo a probabilidade de exercício de 75% para 70% e aumentando o tempo esperado de 5 para 7 meses.

Todos estes resultados são consistentes com a redução da taxa de dividendos, que aumenta o valor da opção, o prêmio da flexibilidade e o valor de gatilho, mas diminui a probabilidade do exercício. As Figuras 14 e 15 apresentam a comparação entre os resultados obtidos com PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (op.cit).

Os resultados obtidos são particulares da opção sobre o projeto ID-1, mas as relações descritas são gerais. Os dois critérios de avaliação da opção de desenvolvimento são válidos e consistentes, especialmente no que diz respeito à superioridade com OR sobre a técnica do VPL. A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. O Modelo de Negócios tem a vantagem de evitar o efeito indesejado da perda de valor do projeto não implantado quando a taxa de caimento da reserva é

muito elevada. No caso do projeto ID-1, gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto, o que é adequado dado a baixa relação entre o VPL e o investimento atualizado (10,7%). Entretanto, esse conservadorismo não altera o resultado da decisão no momento da expiração da opção, quando volta a valer a regra do VPL, mas exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

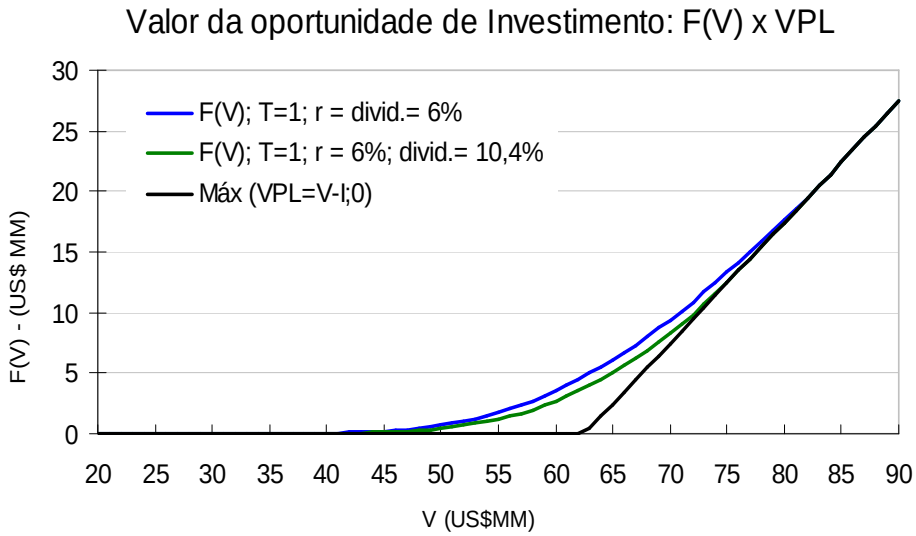

Figura 15 - Projeto ID-1: Comparação do valor das opções do Modelo de PS&S e o Modelo de Negócios com a sugestão de Pickles e Smith (*op. cit.*).

5.2. Opção composta de exploração: MDE x PS&S

Nesta Seção se aplica o Modelo de Exploração (MDE) elaborado na Seção 4.3.3 para o problema de decisão em um projeto de exploração. Os resultados são então comparados com a abordagem do Modelo de PS&S para exploração. Diferente do que foi feito na Seção anterior, as opções também são avaliadas na forma sugerida por Merton (1973, apud PS&S, 1988, p.489), ou seja, considerando o valor do ativo subjacente dividido pelo respectivo investimento.

Considere um prospecto exploratório terrestre denominado de IE-2 com um volume de petróleo a descobrir de 25 milhões de bbl recuperáveis. A oportunidade de investimento encontra-se sob um contrato de concessão dividido em dois períodos. Ao final do primeiro período que encerra em 1 ano, a empresa é obrigada a devolver 50% da área sob concessão e para isso, pretende perfurar o prospecto IE-2 para auxiliar a definição da área que irá reter. O segundo período de concessão

expira em 4 anos, ao final do qual, a empresa deve definir sobre o desenvolvimento de uma eventual descoberta e devolver ao órgão regulador o restante da área exploratória. Isso significa que a empresa tem duas decisões a tomar: Primeiro decidir no prazo de 1 ano se exercerá ou não a opção de perfuração do prospecto exploratório, e em seguida deve definir entre os anos 2 e 4 se irá exercer a opção de desenvolver, em caso de sucesso exploratório. Os investimentos são considerados pontuais para simplificação.

O poço exploratório (I_E) irá custar US$ 3,4 milhões (MM) e tem probabilidade de sucesso (Ps) de 20%. Em caso de um resultado positivo, o investimento de desenvolvimento (I_D) do novo campo é de US$ 82,3 MM, e o valor da reserva desenvolvida (V) é de US$ 126,4 MM. O indicador tradicional de decisão de investimento em um projeto de exploração é o VME, dado pela equação (74) $VME = Ps.(V - I_D) - I_E$, que apresenta valor de US$ 5,4 MM. Isso significa que, do ponto de vista tradicional, o prospecto exploratório pode ser perfurado imediatamente já que é positivo.

Do ponto de vista de OR, a decisão é uma opção composta de exploração. Como visto na Seção 4.3.3, o decisor apenas deve investir imediatamente se ambos os estágios da opção estiverem *deep in the money*. Nesta situação, caso ocorra a descoberta, o campo deve ser desenvolvido imediatamente, e em caso de fracasso exploratório, encerra-se o projeto. Caso um dos estágios não esteja *deep in the money* o decisor deve observar com se comporta a evolução do valor da reserva desenvolvida e aguardar a condição necessária. Se até a expiração da primeira fase esta não ocorrer, a empresa deve decidir com a regra do VME. Em caso de descoberta, o decisor adquire a opção de desenvolvimento com nova expiração, que novamente só deve se deve ser exercida quando estiver *deep in the money*. Caso isto não ocorra até o final do novo período, na expiração volta a valer a regra do VPL.

O valor a OR e do valor crítico (gatilho) serão estimados com a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) – Seção 3.5.1. Os demais parâmetros necessários ao apreçamento das OR (σ, r_f e δ) são estimados de forma idêntica à Seção anterior (5.4.1). PS&S (1988, p.496-497) sugerem utilizar o resultado de Gruy

et al. (1982), os quais apontam uma relação direta do preço da reserva não desenvolvida com o preço do petróleo. Dixit e Pindick (1994, p.400) consideram o range de 15% a 25% como razoável para a volatilidade do preço do petróleo, por isso adota-se a média de 20%. A taxa livre de risco real e depois de impostos foi estimada em 6%. Dias (2004, p.101) destaca que a taxa de dividendos pode ser vista como a *convenience yeld* (líquida) do preço de óleo no mercado futuro (ver Seção 2.6.2). Pickles e Smith (1993) sugerem que em OR se use, inicialmente, a taxa livre de risco como o valor da *convenience yeld.* Segundo os autores, esta estimativa é razoável como equilíbrio de longo prazo.

A análise do prospecto IE-2 é realizada na forma *backward*, iniciando pela opção simples de desenvolvimento, que apresenta valor de US$ 44,1 MM e gatilho (V^*) de US$ 123,2 MM. Como o gatilho está abaixo do valor atual da reserva desenvolvida de US$ 126,4 MM, significa que a opção já se encontra *deep in the money*. Já a opção composta de exploração apresenta valor de US$ 5,5 MM com gatilho (V^{**}) de US$ 130,3 MM. Como o gatilho está acima do valor atual da reserva desenvolvida (US$ 126,4 MM), significa que não está madura. Neste cenário, a regra de decisão recomenda que a empresa não invista imediatamente, ao contrário, aguarde até que o primeiro estágio também esteja *deep in the money*.

A Figura 16 compara o valor das opções de desenvolvimento e de exploração em relação à regra de decisão dos seus pares VPL e VME. A diferença entre os valores das duas opções deve-se ao efeito de achatamento dos valores provocado pela ponderação do valor da “reserva” exploratória perfurada e desenvolvida com a probabilidade de sucesso. A Figura 17 apresenta o mesmo gráfico, mas com os valores das opções normalizados pelo investimento. Note que as curvas do VPL e do VME são graficamente coincidentes em decorrência da normalização. A Figura 18 apresenta as curvas de gatilho dos dois estágios em valores absolutos. Note que as duas curvas se cruzam em torno do tempo de 0,5 anos, separando duas regiões do gráfico. À esquerda deste ponto, a curva de gatilho do primeiro estágio (exploração *strictu sensu*) é maior do que a da curva do segundo estágio (desenvolvimento), enquanto que à direita ocorre o contrário. Isso significa que até 0,5 anos, toda vez que a exploração estiver *deep in the money*, o desenvolvimento também estará, podendo a opção composta ser exercida imediatamente. A partir de

então, o fato do primeiro estágio estar *deep in the money* já não é suficiente para o exercício imediato.

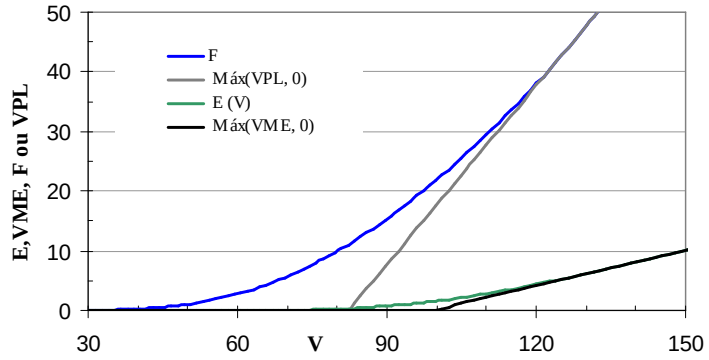

Figura 16 – Valor em US$ Milhões dos dois estágios da opção de exploração IE-2.

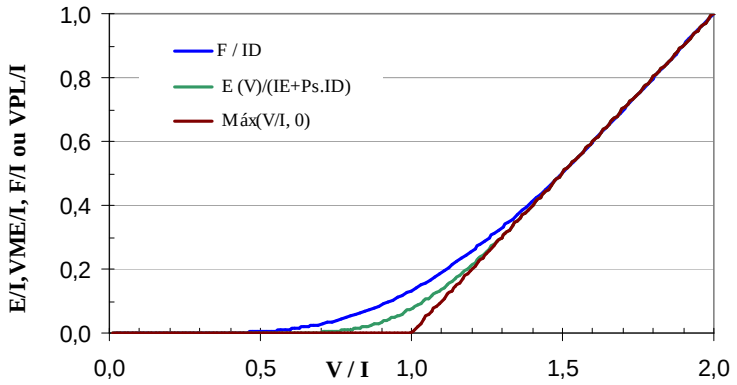

Figura 17 – Valor normalizado da opção de exploração IE-2, primeiro e segundo estágios.

Conforme discutido na Seção 4.3.3, o MDE se diferencia do Modelo de PS&S para exploração por tratar esta opção como composta, preservar o risco geológico e observar expirações diferentes para os dois estágios da opção, quando houver. Para permitir a comparação, admitiu-se que as taxas de dividendos são iguais nos dois modelos (6%), enquanto que os valores em US$/bbl de PS&S já estão convertidos para US$ MM nos gráficos. Assim o valor da opção com a abordagem de PS&S é obtido sobre o valor da reserva desenvolvida considerando como preço de exercício a soma dos investimentos em exploração e desenvolvimento. A opção de exploração apresenta valor de US$ 40,7 MM com gatilho de US$ 112,4 MM, estando desde já *deep in the money*.

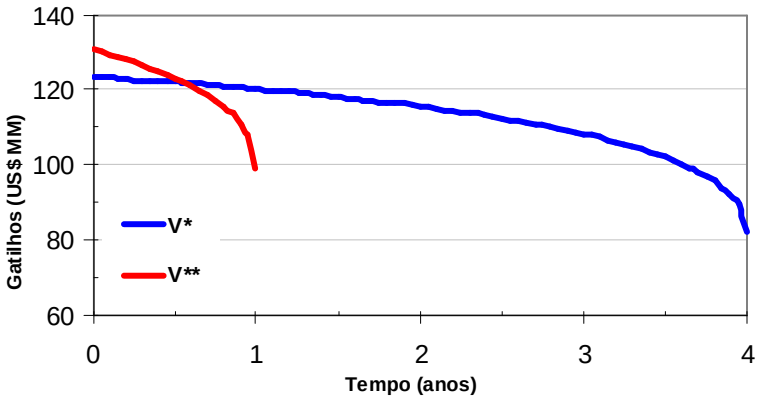

Figura 18 – Curvas de gatilho do MDE.

A Figura 19 compara o gráfico do valor da opção de exploração do prospecto IE-2 calculado pelo MDE com a abordagem de PS&S. O fato do Modelo de PS&S não considerar a probabilidade de sucesso faz com que a opção exploratória tenha um valor exageradamente alto em relação ao MDE, mas com preço de exercício muito inferior (US$ 112,4 contra US$ 130,3 milhões do MDE), já que apresenta uma relação V/I mais elevada.

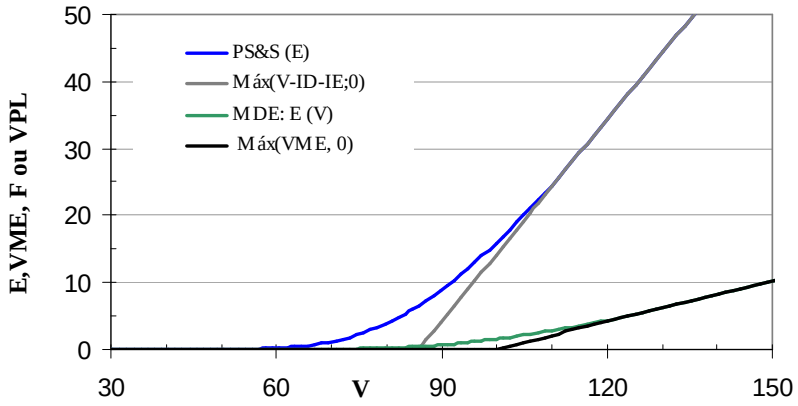

Figura 19 – Comparação das curvas do valor da opção exploratória do Modelo de PS&S com o MDE.

A Figura 20 apresenta as curvas de gatilho geradas com os dois modelos. As curvas são paralelas pelo fato dos modelos estarem avaliando um único projeto, ou seja, todos parâmetros são iguais (r_f, σ, δ e T_1), exceto o preço de exercício.

Se o valor da opção é considerado normalizado, a curva do valor crítico normalizado (V^*/I) será única (Figura 21), conforme discutido na Seção 4.3.3 (Merton, 1973, apud PS&S, 1988, p.489). Então, como o modelo de PS&S apresenta maior relação V/I do que o MDE, qualquer que seja o caminho do preço da "reserva" desenvolvida, a abordagem de PS&S para a opção de exploração será a primeira a tornar-se *deep in the money*, independente do valor da probabilidade de sucesso ($Ps \in [0,1)$):

$$\frac{V}{I_E + I_D} > \frac{Ps.V}{I_E + Ps.I_D}$$

Isso significa que no MDE o valor crítico da opção será sempre maior do que na abordagem de PS&S, portanto apresenta sua curva de valor crítico também sempre maior (Figura 20).

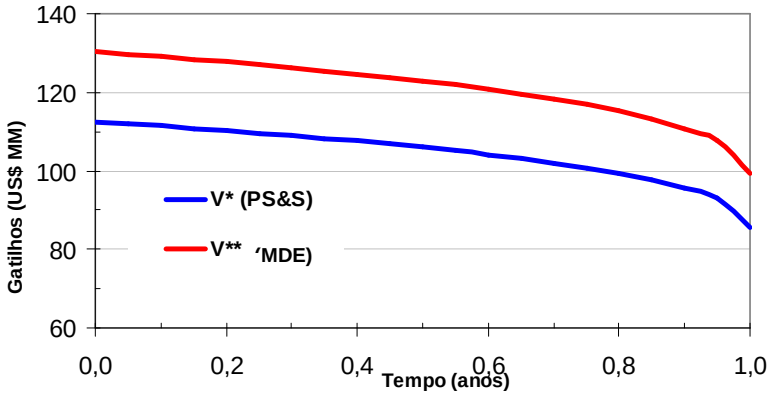

Figura 20 – Comparação entre as curvas de gatilho obtidas com a abordagem de PS&S e o MDE.

A análise deste exemplo demonstrou vários aspectos teóricos discutidos na Seção 4.3.3. Em particular observou-se que o valor da opção exploratória quando tratada como opção simples é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. Também se verificou que ignorar a probabilidade de sucesso geológico implica em um valor crítico menor. Por fim, a diferenciação das expirações dos dois estágios

demonstrou que o exercício do segundo estágio não implica necessariamente no exercício do primeiro, gerando uma regra de decisão mais elaborada do que a de uma opção simples ou composta com uma única expiração. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

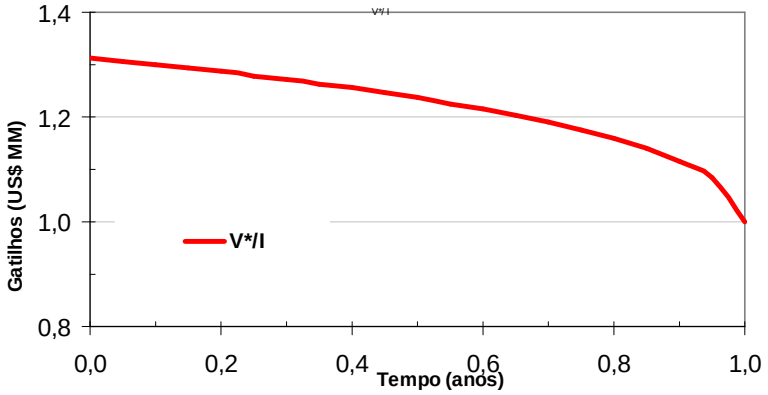

Figura 21 – Curva de valor crítico normalizada para o prospecto IE-2.

5.3. Priorização de projetos de um *portfolio* de OR de investimento simples

No processo de planejamento, uma empresa se depara periodicamente com o problema da priorização de investimentos em um *portfolio* de projetos. São muitos os critérios disponíveis ao decisor para a escolha do conjunto adequado de projetos (ver, por exemplo, Ross *et al*, 2002, Cap.6). Em geral envolvem indicadores tradicionais como o VPL, o *payback*, a TIR, o EVA (*Expected Value Added*), índices de rentabilidade como o VPL/IA (Investimentos Atualizados), etc. Estes indicadores são frequentemente utilizados de forma isolada ou em conjunto, compondo um *ranking* ou alguma função a qual o decisor deseja maximizar, sujeita a uma ou mais restrições como financeiras, de insumos, de equipamentos, etc. Mas por mais sofisticado que se torne este processo, pesa o fato de estar fundamentado em um fluxo de caixa, descontado ou não, que ignora as flexibilidades embutidas em um projeto, capturadas com OR.

Moszkowicz (2003, apud Dias 2005, p.42-43, ver Seção 2.2) relata o exemplo de uma companhia que tradicionalmente utiliza o VPL na aprovação dos

investimentos de desenvolvimento de campos de petróleo. Realizou um teste *ex-post* da regra de decisão do VPL contra a regra de decisão de OR considerando dois tipos de projetos: os muitos atrativos (com VPL >> 0) e os pouco atrativos (com VPL >0). O preço do petróleo foi a única variável estocástica considerada com um MGB. Os resultados revelam que o critério de OR apresenta um VPL *ex-post* para os projetos com VPL>>0 16,6% superior, enquanto que os projetos com VPL>0 passaram de um VPL *ex-post* negativo para significativamente positivo. Este resultado indica que um critério de priorização que considere a valoração com OR deve ser superior àqueles que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades.

Dias (1996, p.247) sugere a adoção de OR para a priorização de investimentos em uma carteira de projetos. Inicialmente, a empresa deve investir apenas naqueles projetos que já estão *deep in the money*. Caso seja necessário reduzir ainda mais investimentos devido a alguma restrição, recomenda que se utilize a volatilidade do preço do petróleo (comum a todos os projetos) como variável de priorização da carteira. Para isso basta aumentar progressivamente a volatilidade até que haja um subconjunto de projetos *deep in the money* que se enquadre na restrição[46].

Nesta Seção testa-se este critério para a priorização de projetos de um *portfolio* de oportunidades de investimentos em projetos de produção de petróleo, avaliados como OR simples – *call* americanas – e sujeitos a restrições orçamentárias. Adota-se o Modelo de Negócios (valor da reserva desenvolvida é função linear do preço do petróleo - Seção 4.3.1) combinado com o Modelo de PS&S para a estimativa da taxa de dividendos (Seção 4.3.2). A volatilidade será a do preço do petróleo, que segue um MGB.

Considere uma carteira com 27 de projetos de investimento em campos de petróleo sob regime de concessão. A Tabela 2 na sua metade esquerda lista o valor do projeto desenvolvido (V), o investimento atualizado (IA ou I), o VPL e a

[46] O ajuste da volatilidade pode ser feito de forma diferenciada. Por exemplo, poderia afetar apenas os projetos que estejam em um determinado país onde haja uma maior instabilidade regulatória. Também pode ser motivado por outras razões como, por exemplo, a expectativa do gerente, acionista ou *debitholder* sobre o comportamento dos preços futuros, o que afetaria o resultado da firma, seu valor de mercado e até sua capacidade de honrar seus financiamentos.

expiração para cada uma das oportunidades de investimento. De acordo com a regra clássica do VPL, dos 27 projetos, 23 apresentam-se positivos e por isso estariam aptos a serem implementados imediatamente.

Tabela 2 - *Portfolio* de projetos de investimento analisado.

Projetos		*V* em 2006	Invest. ou Preço Exercício	VPL (payoff)	Tempo de expiração	Gatilho V* em 2006	Valor da OR (F) (σ=20%)	Prêmio da flexibilid. (F-V) (σ=20%)	Deep in the money? (σ=20%)	Data esperada Exercício (σ=20%)	Probab. de Exercício (σ=20%)
		US$MM	US$MM	US$MM	Anos	US$MM	US$MM	US$MM		Ano	
1	P01	1083,2	450,4	632,9	3	629,6	632,9	0,0	Sim	2006	100%
2	P02	875,4	742,6	132,8	2	1006,6	149,8	17,0	Não	2007	75%
3	P03	243,0	215,6	27,4	2	292,2	35,5	8,0	Não	2007	66%
4	P04	1364,2	900,2	464,0	4	1285,3	464,0	0,0	Sim	2006	100%
5	P05	477,1	783,3	-306,2	4	1118,4	6,8	312,9	Não	2009	10%
6	P06	994,7	799,1	195,5	2	1083,2	203,5	7,9	Não	2007	84%
7	P07	1687,7	957,9	729,9	2	1298,4	729,9	0,0	Sim	2006	100%
8	P08	2995,7	1252,9	1742,7	5	1816,9	1742,7	0,0	Sim	2006	100%
9	P09	2302,0	892,8	1409,2	4	1274,7	1409,2	0,0	Sim	2006	100%
10	P10	492,3	258,5	233,8	3	361,4	233,8	0,0	Sim	2006	100%
11	P11	847,9	875,4	-27,5	3	1223,8	78,1	105,6	Não	2008	43%
12	P12	1102,9	260,2	842,8	3	371,5	842,8	0,0	Sim	2006	100%
13	P21	484,2	124,2	360,0	2	168,4	360,0	0,0	Sim	2006	100%
14	P22	38,4	78,9	-40,6	1	101,4	0,0	40,6	Não	2007	0%
15	P23	1105,6	285,1	820,5	3	398,6	820,5	0,0	Sim	2006	100%
16	P24	105,6	213,1	-107,4	3	297,9	0,2	107,7	Não	2009	2%
17	P25	55,3	39,2	16,1	2	53,2	16,1	0,0	Sim	2006	100%
18	P26	597,9	504,7	93,2	8	753,9	123,9	30,7	Não	2009	66%
19	P27	3059,7	485,2	2574,5	7	719,1	2574,5	0,0	Sim	2006	100%
20	P28	1906,0	795,6	1110,4	6	1167,7	1110,4	0,0	Sim	2006	100%
21	P29	241,6	85,7	155,9	7	127,0	155,9	0,0	Sim	2006	100%
22	P30	301,5	78,1	223,4	8	116,7	223,4	0,0	Sim	2006	100%
23	P31	29,5	28,9	0,6	3	40,4	3,3	2,7	Não	2008	49%
24	P32	37,6	36,7	0,9	3	51,3	4,3	3,4	Não	2008	50%
25	P33	59,2	13,9	45,3	2	18,8	45,3	0,0	Sim	2006	100%
26	P34	37,6	15,6	22,0	2	21,2	22,0	0,0	Sim	2006	100%
27	P35	17,6	3,5	14,1	4	5,0	14,1	0,0	Sim	2006	100%
	Total	22.543,4	11.177,3	11.366,1							

Mas se tratadas as oportunidades de investimento como OR, os resultados são bem diferentes. O valor do projeto desenvolvido é o preço do ativo subjacente (hipótese do MAD, Seção 3.3.1) e o VPL é o *payoff* do exercício da opção. Para o cálculo do valor da OR foi considerada a aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993, Seção 3.5.1). A taxa de dividendos considerada foi de 4% a.a. (única para todos os projetos), tendo sido calculada de acordo com a equação (72)

do modelo de Paddock, Siegel e Smith (Seção 4.3.2). Foi considerada uma taxa de declínio de reserva 10%, custo de 30% e impostos de 34%. As datas e probabilidades esperadas de exercício forma calculadas de acordo com a Seção 3.7.

A volatilidade considerada é novamente a média do intervalo sugerido Dixit e Pindick (1994, p.400): 20%. Com estes dados foram calculados o preço de exercício antecipado (gatilho), o valor da OR, o prêmio da flexibilidade de adiar o investimento e a data provável de exercício de cada uma das OR. Os resultados obtidos estão dispostos na metade direita da Tabela 2. Observa-se que apenas 17 projetos encontram-se *deep in the money*, o que reduz o montante de investimento requerido pela regra do VPL em 25% , de US$ 9226,6 MM para US$ 6899,0 MM.

A Tabela 3 compara o efeito do aumento da volatilidade sobre o *portfolio* em análise em dois cenários distintos: 30% e 40%. Os dois cenários de volatilidade foram escolhidos somente com o objetivo de avaliar a eficácia desta estratégia de seleção de projetos.

O que se observa é que com volatilidade de 30% e 40% o numero de projetos *deep in the money* reduz de 17 para 15 e 13 projetos respectivamente. Então, no *portfolio* em questão, dobrar a volatilidade reduz a carteira em 4 projetos. O número de projetos cortados depende do perfil dos projetos da carteira e da intensidade da redução necessária. No caso em questão, a redução foi eficaz na medida em que elevar a volatilidade para 30% e 40% reduziu o investimento para 65% e 51% em relação ao requerido pela regra do VPL (100%) - Tabela 4.

A Tabela 4 permite uma avaliação clara da eficácia da estratégia de aumentar a volatilidade do preço do petróleo para a seleção de um *portfolio* de projetos de investimento. A partir da regra do VPL>0, compara a redução de investimento e VPL obtidos com os projetos selecionados com volatilidades de 20%, 30% e 40%. A terceira e quintas colunas revelam respectivamente a redução dos investimentos e do VPL da carteira com a priorização com OR. Com volatilidade de 40%, o *portfolio* selecionado manteve 84% do VPL>0 inicial gastando metade do investimento.

Tabela 3 – Sensibilidade à volatilidade do exercício das OR de investimento. Observa-se o decréscimo no número de projetos *deep in the money* com ao aumento da volatilidade do preço do petróleo.

Projetos		Deep in the money ? σ=20%	Data esperada Exercício σ=20%	Probab. de Exercício σ=20%	Deep in the money ? σ=30%	Data esperada Exercício σ=30%	Probab. de Exercício σ=30%	Deep in the money? σ=40%	Data esperada Exercício σ=40%	Probab. de Exercício σ=40%
			(ano)			(ano)			(ano)	
1	P01	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
4	P04	**Sim**	2006	100%	Não	2007	100%	Não	2008	67%
7	P07	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	Não	2006	93%
8	P08	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	1%	**Sim**	2006	100%
9	P09	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
10	P10	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	6%	Não	2006	91%
12	P12	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	52%	**Sim**	2006	100%
13	P21	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
15	P23	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
17	P25	**Sim**	2006	100%	Não	2007	46%	Não	2007	72%
19	P27	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
20	P28	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
21	P29	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	100%
22	P30	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
25	P33	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
26	P34	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
27	P35	**Sim**	2006	100%	**Sim**	2006	0%	**Sim**	2006	100%
6	P06	Não	2007	84%	Não	2007	100%	Não	2007	60%
2	P02	Não	2007	75%	Não	2007	100%	Não	2007	54%
3	P03	Não	2007	66%	Não	2007	100%	Não	2007	51%
14	P22	Não	2007	0%	Não	2007	100%	Não	2007	2%
24	P32	Não	2008	50%	Não	2008	0%	Não	2008	42%
23	P31	Não	2008	49%	Não	2008	0%	Não	2008	40%
11	P11	Não	2008	43%	Não	2008	83%	Não	2008	38%
18	P26	Não	2009	66%	Não	2010	45%	Não	2010	45%
5	P05	Não	2009	10%	Não	2009	39%	Não	2009	16%
16	P24	Não	2009	2%	Não	2009	100%	Não	2009	8%
	Total Sim	17			15			13		

Tabela 4 – Investimento, VPL e VPL/IA dos portfolios selecionados.

Critério de corte de projetos:	Investimento		VPL da carteira		VPL/IA
VPL >0	9226,6	100%	11847,7	100%	1,28
OR deep (σ=20%)	6899,0	75%	11397,2	96%	1,65
OR deep (σ=30%)	5959,6	65%	10917,1	92%	1,83
OR deep (σ=40%)	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
OR (σ=20%) com VPL	4929,7	53%	9229,9	78%	1,87
VPL/IA=1,39	4743,3	51%	9953,4	84%	2,10
VPL/IA=0,9	5001,8	54%	10187,3	86%	2,04

Na quinta linha da Tabela 4, apresentam-se os resultados de um critério misto: OR com volatilidade de 20% seguida da priorização com o VPL. A estratégia de combinar OR com o *V** também permitiu reduzir o investimento ao nível desejado (53%), entretanto se obteve um nível inferior de VPL: 78% do VPL>0, revelando-se como uma estratégia inferior.

Os resultados obtidos estão de acordo com o esperado. Utilizar OR como filtro para a seleção de projetos é um procedimento valoroso. Embora possa requerer cenários de volatilidade exagerados, o procedimento tem a vantagem de ser conservador na medida em que seleciona os projetos mais robustos ou mais *deep in the money*. Isso fica muito claro ao se analisar a coluna de VPL/IA da Tabela 4, onde a melhor relação é obtida com a máxima volatilidade.

Dixit e Pindick (1994, p.155, Figura 5.4) caracterizam graficamente a relação do valor crítico ou gatilho com a volatilidade: $\partial V^* / \partial \sigma > 0$. Então, se o investimento for considerado constante, aumentar o gatilho através do aumento da volatilidade implica num aumento proporcional na relação V^* / I. Admitindo que o investimento seja o valor atualizado ($I = IA$) e que o projeto esteja *deep in the money* ($V \geq V^*$), então:

$$VPL = V - I \Rightarrow V = VPL + I \therefore V \geq V^* \Rightarrow VPL + I \geq V^* \Rightarrow VPL \geq V^* - I \Rightarrow$$
$$\frac{VPL}{I} \geq \frac{V^* - I}{I} \Rightarrow \qquad \frac{VPL}{IA} \geq \frac{V^*}{I} - 1 \qquad (81)$$

Esse resultado significa que elevar o gatilho para selecionar projetos previamente *deep in the money,* implica no aumento da relação VPL / IA da carteira selecionada.

Este resultado é ainda um pouco mais geral: Dado um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica, os investimentos são constantes e o valor crítico normalizado V^* / I é desconhecido, selecionar projetos com VPL/IA tem efeito similar ao aumento da volatilidade na priorização com OR. Este critério é limitado, pois não se sabe se os projetos estão *deep in the money* ou não. Mas na ausência de uma valoração com OR, a seleção de projetos com o VPL/IA é uma aproximação inicial melhor do que, por exemplo, o VPL. No *portfolio* analisado com volatilidade de 20%, a razão VPL/IA

crítica ou de corte encontra-se entre 0,9 e 1,39, pois, o projeto P10 (VPL/IA=0,9) não está *deep in the money* enquanto que o P08 sim (VPL/IA=1,39).

As Figuras 22 e 23 exemplificam o efeito da priorização dos projetos com OR sobre a previsão de produção e investimentos com a elevação da volatilidade, observando-se as datas prováveis de exercício e a expiração das OR.

A regra do VPL positivo implica num cronograma de produção e investimento mais agressivos do que aqueles obtidos com OR, que são abrandados pelo gatilho da regra de decisão. Assim, se a firma deseja gerenciar seu planejamento minimizando a probabilidade de perda, deve investir considerando as datas de exercício apresentadas na Tabela 2. No caso de se desejar atender à demanda de um mercado (Figura 22) pode adequar seu cronograma adiando os projetos com menor probabilidade de exercício (com menor razão V^* / I) até as respectivas datas de expiração, gerando uma curva de produção ajustada à demanda projetada.

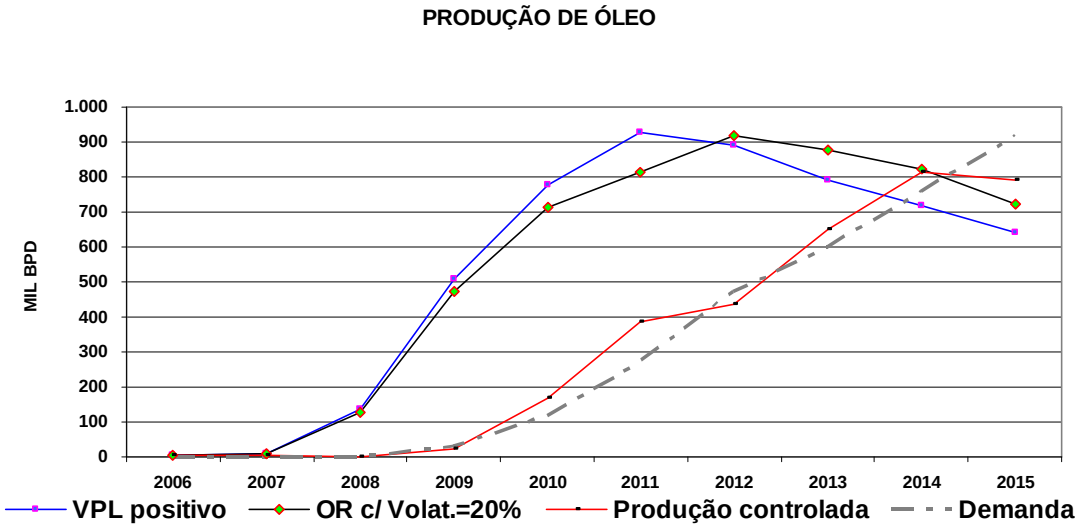

Figura 22 – Planejamento da produção de petróleo com OR de investimento.

A Figura 23 apresenta os investimentos dos projetos como fluxos e em valores nominais, ao contrário da Tabela 2 que apresenta os mesmos dados de forma pontual e atualizados para 2006. Uma observação mais cuidadosa revela que o efeito da priorização sobre o cronograma de investimentos se dilui quando os investimentos são visto como fluxos, mas esse é um efeito presente qualquer que seja o critério de priorização adotado. O perfil das curvas de investimento denota a

implantação dos projetos de desenvolvimento. Tipicamente, há um pico no dispêndio dos recursos durante a perfuração de poços e implantação das facilidades de produção, que então diminuem gradativamente com o início e declínio da produção, quando os investimentos visam amenizar o efeito da depleção das jazidas.

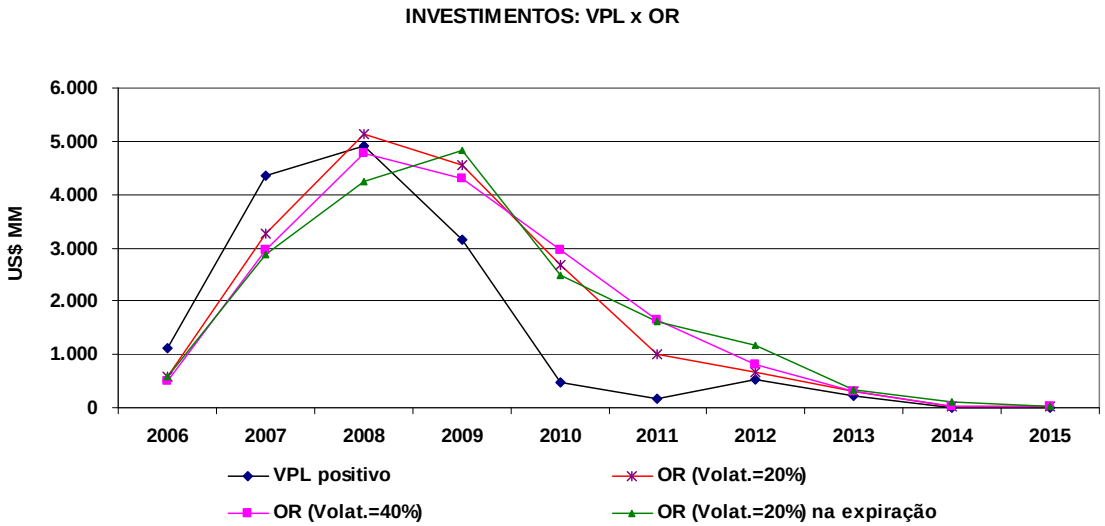

Figura 23 – Planejamento plurianual de investimentos do *portfolio* analisado.

Assim, aumentar a volatilidade de um *portfolio* de OR que dependem de uma variável estocástica comum é um procedimento mais eficaz do que o VPL ou o VPL/IA na priorização de projetos à medida que aumenta a robustez da carteira selecionada. Este procedimento também deve ser melhor do qualquer outro critério que se baseie unicamente em um fluxo de caixa positivo devido ao prêmio exigido para o exercício antecipado das opções. Não sendo possível a avaliação por OR, o decisor pode utilizar o *ranking* com VPL/IA como uma primeira aproximação do resultado com OR, embora isso possa levar a investimentos em projetos imaturos.

Por fim cabe ressaltar que, embora o resultado obtido com OR na priorização de investimentos seja animador, apresenta eficácia restrita. Priorizar investimentos da forma descrita, embora aumente o valor esperado do VPL *ex-post* do *portfolio*, considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) pode ser uma solução mais acertada.

6. Conclusões

A dissertação deixou clara a superioridade da Teoria de Opções Reais como ferramenta de decisão sobre investimentos em relação ao tradicional VPL e o VME.

Em uma opção de investimento/abandono, o VPL positivo/negativo é uma condição necessária para o exercício da opção, mas não é suficiente. Na presença de incerteza e flexibilidades, o investimento/abandono imediato requer um prêmio maior do que o valor da espera pela evolução da incerteza.

Ao adiar a decisão de investimento, o decisor renuncia ao retorno mais próximo em troca da opção de investir em um momento seguinte. Adiar só tem valor caso haja uma probabilidade positiva de uma perda irreversível, situação em que o investimento não deve ser feito imediatamente. Eventos que ameacem a lucratividade de investimentos irreversíveis, mesmo que aumentem o retorno médio, tendem a reduzir a propensão ao investimento.

O MGB pode ser uma aproximação razoável para a modelagem do preço do ativo subjacente a depender dos parâmetros considerados.

A aproximação analítica de Bjerksund e Stensland (1993) apresenta-se como um limite inferior acurado para o valor verdadeiro de uma opção americana de compra com expiração finita, onde o ativo básico segue um MGB. A comparação desta aproximação analítica com a de Baroni-Adesi e Whaley (1987) para opções com expiração superior a um ano revelou que, para o conjunto de dados considerados pelos autores, os resultados obtidos com a aproximação de Bjerksund e Stensland apresentam uma performance superior ao não divergir a Raiz do erro Quadrático Médio - RQM.

A qualidade e disponibilidade de informações adicionadas ao bom senso são importantes na eleição do modelo de avaliação. Os Modelos de Negócios e de Paddock, Siegel e Smith (1988) para opções de desenvolvimento são válidos e consistentes. Mas o modelo de PS&S tem uma implicação não discutida pelos autores. Se a taxa de declínio γ for grande o suficiente, a taxa de dividendo pode se tornar inadequadamente elevada para uma reserva não desenvolvida. Isso significa que até mesmo o processo real da reserva não desenvolvida pode ter tendência negativas: $\mu < \delta$. Como não foi feita nenhuma premissa no modelo sobre o preço

de petróleo ou sobre custos, é questionável que a depleção de uma reserva desenvolvida defina a depreciação de um campo não desenvolvido, onde a reserva ainda é constante.

O Modelo de Negócios tem o mérito de ser de fácil aplicação, o que pode contribuir muito para a implantação da cultura de tomada de decisões com OR. Essa facilidade operacional ainda agrega outras vantagens: Permite lidar com facilidade com um grande número de projetos simultaneamente, oferecendo uma resposta rápida ao decisor. Entretanto seu uso deve ser limitado a decisões mais simples.

No caso do projeto ID-1, o Modelo de Negócios gerou resultados mais conservadores ou exigentes para a implantação do projeto. Esse conservadorismo exige um prêmio maior para que a opção seja exercida antecipadamente.

O valor normalizado da opção exploratória quando tratada como opção simples e sem o risco geológico (Modelo de PS&S) é significativamente inferior ao seu valor real, o que leva a um preço crítico menor com o conseqüente exercício prematuro da opção. A diferenciação das expirações dos dois estágios demonstrou que o exercício da opção requer uma regra de decisão mais elaborada. O fato de o primeiro estágio estar *deep in the money* não implica necessariamente no exercício imediato da opção de exploração, como ocorre quando a opção composta tem expiração única. Estes resultados sugerem que o MDE é um modelo mais apropriado para a valoração e tomada de decisão no exercício de opções de exploração.

A priorização de investimentos com a elevação da volatilidade em um conjunto de opções de investimento onde os ativos subjacentes dependem de uma mesma variável estocástica é um critério superior em relação aos critérios que se baseiam exclusivamente no fluxo de caixa sem flexibilidades. A elevação da volatilidade implica em selecionar os projetos mais robustos economicamente, em decorrência da elevação do gatilho para o investimento imediato.

Elevar o gatilho para selecionar projetos implica no aumento da relação VPL/IA da carteira selecionada. Assim, selecionar projetos com VPL/IA gera um resultado mais coerente com a teoria de opções reais sem garantir, obviamente, que os projetos selecionados estão *deep in the money.*

Entretanto, priorizar investimentos com o auxílio de OR conforme descrito é uma ferramenta limitada, pois considera o risco de cada ativo de forma individual e não agregada. Combinar OR com a Teoria de *Portfolio* de Markowitz (1952) parece ser uma solução mais acertada.

Apêndice 1: Princípio das más notícias para opção de abandono

Reconsidere agora a opção de abandono do Exemplo 2 da Seção anterior. Viu-se que esperar será vantajoso se:

$$V_E > I \Rightarrow E_0(F_1) + \delta > I \Rightarrow \frac{[q.F_U + (1-q).F_D]}{(1+r)} + \delta > I \quad (4)$$

Considerando a solução ii $V_U > I > V_D$ por simplicidade (note que $I > V_U > V_D$ o ativo é abandonado em qualquer cenário e que se $V_U > V_D > I$ o ativo não seria abandonado nunca) chegou-se a:

$$V_U > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \quad (5)$$

A inequação (5) mostra em que situação ainda vale a pena não abandonar. Considerando o aumento do número de períodos e a modelagem da incerteza representados na Figura 3, então:

$$V_U = \sum_{t=1}^{N} \frac{U.\delta}{(1+r)^{t-1}} = \frac{(1+r).U.\delta}{r} \Rightarrow \text{ em (5)}$$

$$\frac{(1+r).U.\delta}{r} > \frac{I.(r+q) - \delta.(1+r)}{q} \Rightarrow (1+r).U.\delta.q > [I.(r+q) - \delta.(1+r)].r \Rightarrow$$

$$\delta.(1+r).(U.q - r) > I.(r+q).r \Rightarrow \boxed{\delta > \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}}$$

Então se δ é maior do que o termo à direita na última desigualdade, o decisor deve esperar pelo período seguinte para tomar a decisão de abandono. Para que δ represente a situação em que o abandono imediato é a melhor opção deve-se inverter o sinal da desigualdade. Então, seja δ^* gatilho que torna a opção de abandonar pelo menos tão valiosa quanto o benefício da flexibilidade de esperar, a partir da última desigualdade pode-se escrever:

$$\boxed{\delta^* = \frac{I.(r+q).r}{(1+r).(U.q-r)}} \quad (9)$$

O resultado (9) mostra que a decisão de abandonar imediatamente só depende do estado melhor da natureza e de sua probabilidade de ocorrência, ou seja, do tamanho U do movimento para cima do preço do ativo subjacente e de sua

probabilidade q de ocorrência. Trata-se do equivalente do *bad news principle* para a opção de investimento**,** que pode ser denominado de *good news principle* - Princípio das Boas Notícias (Dias, 1996, p.31).

Apêndice 2: Apreçamento de opções por *portfolio* replicante e programação dinâmica

Portfolio replicante (r*eplicating portfolio approach*)

Uma terceira forma de calcular o valor da opção de investir em t_1 (por exemplo, em Copeland e Antikarov, 2001, p.90-95 e Trigeorgis, 1996, p.72-77) é montar um *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção com Δ ações de um ativo gêmeo (*twin security*) e B títulos livres de risco (*bonds*). O ativo gêmeo seria um ativo financeiro que replicasse perfeitamente os *payoffs* do projeto de investimento.

Então na Figura 6 o *portfolio* replicante Φ dos *payoffs* da opção é formado por Δ ações do ativo gêmeo e B títulos livres de risco:

$$\Phi_0 = \Delta.V_o + B \therefore \Phi_1 = \Delta.V_1 + B.(1 + r_f)$$

Como o *portfolio* Φ replica os *payoffs* da opção, pode-se escrever:

(i) $\Delta.\overline{V}_U + B.(1 + r_f) = F_U$

(ii) $\underline{\Delta.\overline{V}_D + B.(1 + r_f) = F_D}$

(i) - (ii) $\Delta.(\overline{V}_U - \overline{V}_D) = F_U - F_D \Rightarrow \Delta = \dfrac{F_U - F_D}{\overline{V}_U - \overline{V}_D}$

Que é o resultado (11) obtido anteriormente. A quantidade de ativo livre de risco B pode ser obtida a partir das equações (i) ou (ii) acima:

$$B = \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} = \frac{F_D - \overline{V}_D.\Delta}{R_f}$$

Sejam U e D como definido anteriormente: $\overline{V}_U = U.V_0$ e $\overline{V_D} = D.V_0$. Considerando que o *portfolio* Φ replica a opção, então pelo argumento de não arbitragem, o preço da opção em t_0 é o mesmo preço do *portfolio* Φ em t_0:

$$E_0(F_1) = \Phi_0 = \Delta.V_0 + B \Rightarrow E_0(F_1) = \Delta.V_0 + \frac{F_U - \overline{V}_U.\Delta}{R_f} \Rightarrow E_0(F_1).R_f = \Delta.V_0.R_f + F_U - \Delta.\overline{V}_U$$

Este último resultado é a equação (12), obtida por avaliação neutra ao risco. Logo substituindo (11) em (12) se obtém os mesmos resultados (13) e (14):

$$E_0(F_1) = \frac{p.F_U + (1-p).F_D}{R_f} \quad (13) \qquad p = \frac{(R_f - D)}{(U - D)} \quad (14)$$

Programação dinâmica

A programação dinâmica é uma ferramenta geral de otimização dinâmica particularmente útil para lidar com incerteza. Consiste em reduzir uma seqüência de decisões em duas alternativas mutuamente excludentes: o valor da decisão imediata e a função de valor que contempla todas as decisões subseqüentes (Dixit e Pindick, p.93-94). Assim, em cada o período, o decisor simplesmente escolhe a estratégia de maior valor: exercer a opção (decisão imediata) ou esperar pela decisão subseqüente. Foi exatamente este o processo utilizado nos Exemplos 1 e 2 da Seção 2.2, escolhido por seu apelo intuitivo.

Se o horizonte de tempo é finito, essa ferramenta pode ser aplicada no penúltimo período, revelando o valor da opção neste momento. De posse destes dados, agora a mesma técnica pode ser aplicado no período imediatamente anterior, e assim retroceder-se até o presente, num processo denominado de *backward induction*. Se ao contrário, o horizonte de tempo é infinito, a situação fica relativamente simplificada por sua natureza recursiva que, a cada momento, leva a um problema idêntico ao original. Isso permite a caracterização teórica da solução e em alguns casos, soluções analíticas.

Reconsidere a Figura 6. O primeiro passo consiste em calcular o valor da opção de investir no segundo período é dado por $F_U = Máx[\overline{V}_U - I, 0]$ e por $F_D = Máx[\overline{V}_D - I, 0]$ nos estados *up* e *down* da natureza, onde $\overline{V}_U = V_U + \delta_U$ e $\overline{V}_D = V_D + \delta_D$. Retrocedendo para o primeiro período, o valor esperado de todos os cenários futuros possíveis é dado por $E_0(F_1) = [q.F_U + (1-q).F_D]/R$, onde q e $1-q$ são as probabilidades reais e R é a taxa de desconto apropriada, ajustada ao risco da OR. Cabe ao decisor então decidir entre o investimento imediato ou esperar pelo

segundo período: $Max[V_0, E_0(F_1)]$. Esta valoração foi feita considerando o mundo real, mas poderia ter sido elaborada no mundo neutro ao risco, utilizando-se então as probabilidades neutras ao risco q e $1-q$ dadas por (14) e a taxa livre de risco R_f. Então o valor da opção será dado por $Max[V_0, E_0(F_1)]$ onde $E_0(F_1) = [p.F_U + (1-p).F_D]/R_f$ (13), resultado idêntico aos anteriores.

A Programação Dinâmica é a segunda técnica extensivamente utilizada no livro de Dixit e pindick (1994) para valorar OR, alternativamente a ativos contingentes. Dixit (op.cit, p.120-121) discute o relacionamento entre as duas abordagens, vantagens e desvantagens, argumentando que os dois métodos juntos podem lidar com uma grande variedade de aplicações, embora uma ou outra possa em algum caso ser mais adequada.

Apêndice 3: Demonstração do Lema de Ito

Seja $f(x)$ uma função e uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ que convirja para $f(x)$ num certo intervalo de convergência, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...$$

Derivando membro a membro verifica-se que as séries das derivadas de ordem n convergem no mesmo intervalo, então se pode calcular a_n para qualquer n em torno de $x = a$. Por exemplo, para $n = 3$:

$$f'''(x) = (a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ...)''' \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (0 + 0 + 0 + 3.2.1.a_3.(x-a)^0 + ... + n.(n-1).(n-2).a_n.(a-a)^{n-3} + ... \Rightarrow$$
$$f'''(a) = (3.2.1.a_3.1 + ... + 0 + ...) \Rightarrow f'''(a) = 3!.a_3 \Rightarrow a_3 = f'''(a)/3!$$

Generalizando escreve-se: $a_n = f^n(a)/n!$, onde f^n é a *n-ésima* derivada de $f(x)$, então:

$$f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + ... + a_n.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + ... \Rightarrow$$
$$\Delta f(x) = \frac{f'(a)}{1!}.\Delta x + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(\Delta x)^n + ...$$

Fazendo com que $x \to a$, se obtém a expansão de Taylor de ordem n para $f(x)$ com x centrado em a:

$$df = f'(a).dx + \frac{f''(a)}{2!}.(dx)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(dx)^n + ... \quad (28)$$

Seja $F(x,t)$ uma função diferenciável *n* vezes em x e t, então:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt$$

Aplicando a regra da cadeia e admitindo que as diferenciais parciais mistas sejam iguais (Teorema de Young), obtém-se:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 \qquad \text{já que} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}.dt.dx$$

Considerando a Expansão de Talyor (28), dF será dado por:

$$dF = [\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt] + \frac{1}{2!}.[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.dt^2 + 2.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}.dx.dt] + \frac{1}{3!}.[\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 ...$$

Como $dt \to 0$, os termos de dt com ordem superior a 1 são desprezíveis:

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2!}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{1}{3!}.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}.dx^3 + ...$$

Supondo que x segue um Processo de Ito (equação 20), então:

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \Rightarrow dx^2 = a^2(x,t).dt^2 + 2.a(x,t).dt.b(x,t).dz + b^2(x,t).dz^2$$
$$dx^2 = 0 + 2.a(\cdot).b(\cdot).dt.\varepsilon.\sqrt{dt} + b^2(\cdot).(\varepsilon.\sqrt{dt})^2 \Rightarrow dx^2 = 2.a(\cdot).b(\cdot).\varepsilon.dt^{3/2} + b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt$$
$$dx^2 = b^2(x,t).\varepsilon^2.dt \quad (29) \text{ e:}$$

$$dx^3 = dx^2.dx = b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt.(a(\cdot).dt + b(\cdot).\varepsilon.\sqrt{dt}) \Rightarrow$$
$$dx^3 == a(\cdot).b^2(\cdot).\varepsilon^2.dt^2 + b^3(\cdot).\varepsilon^3.dt^{3/2} \Rightarrow \; dx^3 = 0 \quad (30)$$

Por extensão, os termos de ordem superior a 3 de dx também são nulos. Retornando a equação de dF anterior, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.dx^2 \text{ ou } dF = F_x.dx + F_t.dt + \frac{1}{2}.F_{xx}.dx^2 \quad (31)$$

Usando (29) e (30):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).\varepsilon^2.dt]$$

No último termo da equação de dF acima se observa $\varepsilon^2.dt$, sendo que $E(\varepsilon) = 0 \;\; e \;\; V(\varepsilon) = 1$, então:

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - E^2(\varepsilon) = 1 \Rightarrow V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - (0)^2 = 1 \Rightarrow \; E(\varepsilon^2) = 1 \quad (32)$$

Logo:

$$E(dz^2) = E(\varepsilon^2.dt) = E(\varepsilon^2).dt = 1.dt \Rightarrow E(\varepsilon^2.dt) = dt \quad (33)$$ e:

$$V(dz^2) = V(\varepsilon^2.dt) = V(\varepsilon^2).dt^2 \therefore dt^2 = 0 \Rightarrow V(\varepsilon^2.dt) = 0 \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^2.dt = dz^2 \sim N(dt, o)$$

Então $\varepsilon^2.dt$ pode ser considerado determinístico e igual a dt. Retornando à última expressão de dF:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.[a(x,t).dt + b(x,t).dz] + \frac{\partial F}{\partial t}.dt + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.[b^2(x,t).dt] \Rightarrow$$

$$dF = [a(x,t).\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial F}{\partial x}.b(x,t).dz \quad (35)$$

A equação (35) é conhecida como o Lema de Ito para uma variável estocástica com Processo de Ito. Frequentemente o Lema de Ito é apresentado na sua forma mais genérica, dada pela equação (31), que pode então ser adaptada ao processo estocástico mais conveniente.

Apêndice 4: Lema de Ito com processo de Poisson

Na Seção 3.1.4 abordou-se a associação do Processo de Poisson ao Processo de Ito, o que faz com que dx tenha uma parte continua (Ito) e outra discreta (Poisson) - (26): $dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz + g(x,t).dq$.

Com isso, determinar o processo de uma função $H(x)$ exige adaptações na aplicação do Lema de Ito (Dixit e Pindick, 1994, p.86). Inicialmente, observa-se que a partir de (26) pode-se escrever (Brandão, Cap.3, Seção 2.7, p. 3-4):

$$dH = dH_{continuo} + dH_{discreto} \quad (83)$$

A parte continua pode ser obtida com o Lema de Ito apresentado anteriormente (35):

$$dH_{continuo} = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz]$$

Quanto à parte discreta $(dH_{discreto})$, suponha que o evento de Poisson ocorra em um intervalo $(t, t+dt)$, então $x_{t+dt} = x_t + u.g(x,t)$, onde u é o tamanho do salto que também pode ser aleatório. Com isso, $dH_{discreto}$ será:

$$dH_{discreto} = H(x_t + u.g(x,t), t) - H(x_t, t)$$

Retornado os dois resultados anteriores a (83):

$$dH = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + \frac{\partial H}{\partial x}.b(x,t).dz] + H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)$$

Aplicando o valor esperado, obtém-se:

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)] \Rightarrow$$

$$E(dH) = [a(x,t).\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.b^2(x,t)].dt + E_u\{\lambda.dt.[H(x_t + u.g(x,t),t) - H(x_t,t)]\} \quad (84)$$

Onde E_u é o valor esperado do tamanho do salto *u*, dado pela diferença do valor de $H(x,t)$ em pontos discretos diferentes.

Referências Bibliográficas

BARONI-ADESI, G; WHALEY, R.E. Efficient Analitic Approximation of American Option Value. **Journal of Finance**, 42, p.301-320. June 1987.

BERNANKE, B.S. Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment. **Quarterly Journal of Economics**, 98, p.85-106. February 1983.

BJERKSUND, P; EKERN, S. Managing Investment Opportunities under Price Uncertainty: From "Last Chance" to "Wait and See" Strategies. **Financial Management**, 19, p. 65-83. Autun 1990.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. Closed-Form Approximation of American Options. **Scandinavian Journal of Management**. 9, p.87-99, 1993.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. American exchange options and a put-call transformation: a note. **Journal of Business, Finance and Accounting**. 20, p.761-764. 1993b.

BJERKSUND, P; STENSLAND, G. **Closed Form valuation of American Options**. Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration, Department of Finance and Management Science, Bergen, Norway. April 2002, 17p. Disponível em: http://www.nhh.no/for/seminars/previous/2002-fall/251002.pdf, acesso em 18/08/2006.

BLACK, F; SCHOLES,M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy.** 81, p. 637-654. 1973.

BRANDÃO, L. Tradução livre do Cap. 3 e 5 do livro Investment under Uncertainty, DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **,** 3rd ed, 1994, disponível em http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/, acesso em 03/04/2006.

BROADIE, M; DETEMPLE, J. American Options Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods. **Review of Financial Studies**. 9, n. 4, Winter, 1996, p.1211-1250.

COPELAND, T; ANTIKAROV. V. **Real Options: a practioner's guide**. 1st ed. USA: Texere, 2001, 372p

DETEMPLE, J. **American-Style Derivatives – Valuation and Computation** Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton (USA), 2006, 232p.

DIAS, M.A.G. **Investimento sob incerteza em Exploração e Produção de Petróleo.** 1996. 470p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. Valuation of exploration and production assets: an overview of real options models. **Journal of Petroleum Science & Engineering**. 44, p.93-114. 2004.

DIAS, M.A.G. **Opções Reais Hibridas com Aplicações em Petróleo**. 2005. 509p. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

DIAS, M.A.G. e ROCHA, K.M.C. Petroleum Concessions with Extendible. Options Using Mean Reversion with Jumps to Model Oil Prices. **Proceedings of the 3rd Annual International Conference on Real Options**, Wassenaar-Leiden (Holanda), June 1999. Disponível versão revisada de janeiro de 2001 em: http://www.pucrio.br/marco.ind/extend.html/. Acesso em: 17/04/2005.

DIAS, M.A.G. **Mean Reversion with Jumps Models**, p.3-4. Disponível em: http://www.puc-rio.br/marco.ind/ver-jump.htlm/. Acesso em: 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **First Hitting Time and Expected Discount Factor**. Disponível em: http//:www.puc-rio.br/marco.ind/hittingt.html. Acesso em : 21/01/2006.

DIAS, M.A.G. **Real Option Theory for Real Assets Portfolios: the Oil Exploration Case.** Working Paper, Depart. of Industrial Engineering, PUC-Rio, presented at the 10th Annual International Conference on Real Options, New York, June 2006, 37 p.

DICKEY, D.A., FULLER, W.A. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with Unit Root. **Econometrica**, 49, 1057-1072. 1981.

DIXIT, A.K; PINDICK, R.S. **Investment under Uncertainty**. 3rd ed. USA: Princenton University Press, 1994, 468p.

GEMAN, E; EL KAROUI, N; ROBERT, J.C. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing. **Journal of Applied Probability**. 32, p.443-458. 1995.

GRUY, H.J; GRAB,F.A; WOOD, J.W. Determining the value of oil and gas in the ground. **World Oil CXCIV**. p.105-108. 1982.

HAUG, E.G. **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**. McGraw-Hill, 1998, 232 p.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. 5th ed. USA: Prentice Hall, 2003, 744p.

LAUGHTON, D.G., The management of flexibility in the upstream petroleum industry. **Energy Journal**. 19, p.83-114. January 1990.

MARKOWITZ, Harry M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**. 7, p.77-91. 1952.

MACMILLAN, L.W. Analytic Approximation for the American Put Option. **Advances in Futures and Options Research**. 1, p.119-139. 1986.

MCDONALD, R; SIEGEL, D. The Value of Waiting to Invest. **Quarterly Journal of Economics**, p.707-727. November 1986.

MCDONALD, R; SCHRODER, M. A parity result for American options. **Journal of Computational Finance.** Working paper, Northwestern University, 1990.

MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science.** 4, p.141-183. 1973.

MERTON, R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. **Journal of Financial Economics**. 3, p.125-144. 1976.

MERTON, R.C. (1990). **Continuous-Time Finance**. Blackwell Publishers Inc, Cambridge, MA, 1990 (revised edition, 1992), 734 pgs.

METCALF, G.E; K.A. HASSET (1995). Investment under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walks and Mean Reversion. **Journal of Economic Dynamics and Control**. 19, p.1471-1488. November 1995.

MOSZKOWICZ, V.N. **Validação do Critério de Avaliação de Projetos Utilizando a Teoria das Opções Reais**. 2003. 157p. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC, Rio de Janeiro.

MYERS, S.C. Determinants of Corporate Borrowing. **Journal of Financial Economics**. n. 5, p.147-175. November 1977.

PADDOCK, J.L; SIEGEL, D.R; SMITH, J.L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. **Quarterly Journal of Economics**. 103, p.479-508. August, 1988.

PICKLES, E., SMITH, J.L. Petroleum property evaluation: a binomial lattice implementation of option pricing theory. **Energy Journal**. 14 (2), p.1-26. 1993.

PINDYCK, R.S.; D.L. RUBINFELD. 1995. p.545-546. **Microeconomics**. Prentice-Hall, Inc., third edition, 1995, 700 p.

PINDYCK, R.S. The Long-Run Evolution of Energy Prices. **Energy Journal.** 20(2), p.1-27. 1999.

ROSS, S.A.; WESTERFIELD, R.W.; JAFFE, J.F. **Finanças Corporativas**. 2ª ed. Editora Atlas, 2002, 776p.

SAMUELSON, P. Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuates Randomly. **Industrial Management Review**. p.41-49. Spring, 1965.

SCHWARTZ, E.S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **Journal of Finance.** 52(3), p.923-973. July, 1997.

SHIMKO, D.C. **Finance in Continuous Time. A Primer**. 1st ed. **Local** Kolb Publishing Company, 1992, 110 p.

TRIGEORGIS, L. **Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. 1st ed. 5th printing. USA: The MIT Press, 1996, 427p.

VARIAN, Hal R. **Microeconomia**. 6a ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003, 778p.

VOLLERT, Alexander. **A stochastic control framework for real options in strategic valuation**. 1st ed. USA: Birkhauser Boston, 2003, 266p.

Anexo I: Pequeno Glossário da Área de Petróleo

Os seguintes termos foram adotados nessa dissertação com o significado que se segue. Definições formais ou completas devem ser buscadas em literatura específica.

Acumulação de petróleo: Qualquer volume de petróleo acumulado em subsuperfície, independente de ser recuperável técnico ou economicamente.

Adensamento de malha: Programa de desenvolvimento complementar de um campo de petróleo, onde novos poços são perfurados entre os pré-existentes com a finalidade de aumentar o volume de petróleo a ser recuperado.

Bloco: Área delimitada geograficamente por um órgão regulador onde uma companhia de petróleo tem o direito de desenvolver atividades de exploração e produção. Objeto de um contrato de cessão de direitos de exploração ou produção.

Cabeça do poço: Local onde se encontra os equipamentos de superfície instaldos em um poço.

Campo de petróleo: Acumulação de petróleo em produção.

Contrato de concessão: Instrumento legal pelo qual um órgão regulador cede e define as condições de uso de uma área para exploração e produção em um regime de concessão.

Delimitação: Conjunto de atividades que se seguem ao descobrimento de uma acumulação de petróleo cujo objetivo é definir o volume de petróleo descoberto e sua produção.

Depleção: Perda de pressão em um reservatório em decorrência da produção.

Desenvolvimento: Conjunto de atividades que se seguem à delimitação, cujo objetivo é instalar a infra-estrutura necessária para a produção de uma acumulação de petróleo.

Desenvolvimento complementar: conjunto de atividades complementares ao desenvolvimento de um campo cujo objetivo é aumentar o volume de petróleo recuperado. O adensamento de malha é um exemplo.

Exploração: Conjunto de atividades responsáveis pela identificação e teste de situações geológicas que podem revelar a existência de uma acumulação de petróleo. A exploração num sentido mais amplo engloba a fase de exploração propriamente dita e a fase de delimitação.

Explotação ou Produção: Fase operacional de um campo de petróleo, ou seja, em que ocorre a produção contínua de petróleo. Durante a fase de produção podem ser realizados projetos de desenvolvimento complementar.

Fator de recuperação: Percentual do volume de petróleo acumulado em subsuperfície que pode ser recuperado de forma econômica.

Poços: Obra de engenharia resultante da perfuração de uma situação geológica de interesse. Há diferentes tipos de poços, por exemplo: Pioneiro ou exploratório, de delimitação, de produção, de injeção de fluidos ou gás, etc.

Poço seco: Qualquer poço de exploração, delimitação ou produção perfurado na expectativa de se tornar produtor de petróleo, mas cujo resultado foi negativo.

Porosidade: Volume de espaço vazio em uma rocha reservatório preenchido por petróleo, água ou gás.

Preenchimento, fator de: Proporção de uma rocha trapa preenchida por petróleo;

Prospecto exploratório: Situação geológica não perfurada cujo estudo indica a possibilidade de acumular petróleo. Todo prospecto visa testar uma ou mais trapas.

Recuperação primária e secundária, fator de: Representa o percentual do volume de petróleo existente em uma acumulação de petróleo que pode ser recuperado do reservatório. A recuperação primária é aquela que pode ser obtida sem técnicas especiais como a pressurização do reservatório. A secundária refere-se ao volume adicional que pode ser recuperado com o auxílio de tais técnicas.

Regime de concessão: Regime regulatório para a atividade de exploração e produção de petróleo onde uma das principais características é a participação governamental (*royalty*) como uma fração constante da receita bruta ou produção.

Reserva: Há vários tipos de reservas, de uma forma genérica, refere-se a um volume de petróleo cuja existência já é comprovada e cuja recuperação é economicamente viável.

Reserva não desenvolvida: Reserva cujo desenvolvimento ainda não foi realizado, ou seja, sem a infra-estrutura necessária à sua produção.

Rocha reservatório: Rocha cuja porosidade permite a acumulação de petróleo.

Saturação de óleo: Refere-se ao percentual da porosidade de uma rocha que é ocupado por óleo. A saturação de óleo, gás e água de um reservatório soma 100%.

Sísmica 2D e 3D: A sísmica refere-se a um conjunto de atividades cujo objeto é o imageamento da disposição e relação das rochas em subsuperfície. A sísmica 2D refere-se à técnica de imageamento em duas dimensões, enquanto que a 3D refere-se ao imageamento em três dimensões.

Sonda: Nesta dissertação, refere-se ao equipamento responsável pela perfuração de poços. A sonda pode ser terrestre ou estar instalada em uma plataforma ou navio. Também

Trapa: Refere-se a uma situação geológica favorável à acumulação de petróleo. Trata-se de uma armadilha natural capaz de aprisionar o petróleo que migra em subsuperfície. A trapa associadas a outros fatores como, por exemplo, a existência de reservatório, a existência de petróleo em uma área, etc., pode constituir-se em um prospecto exploratório.