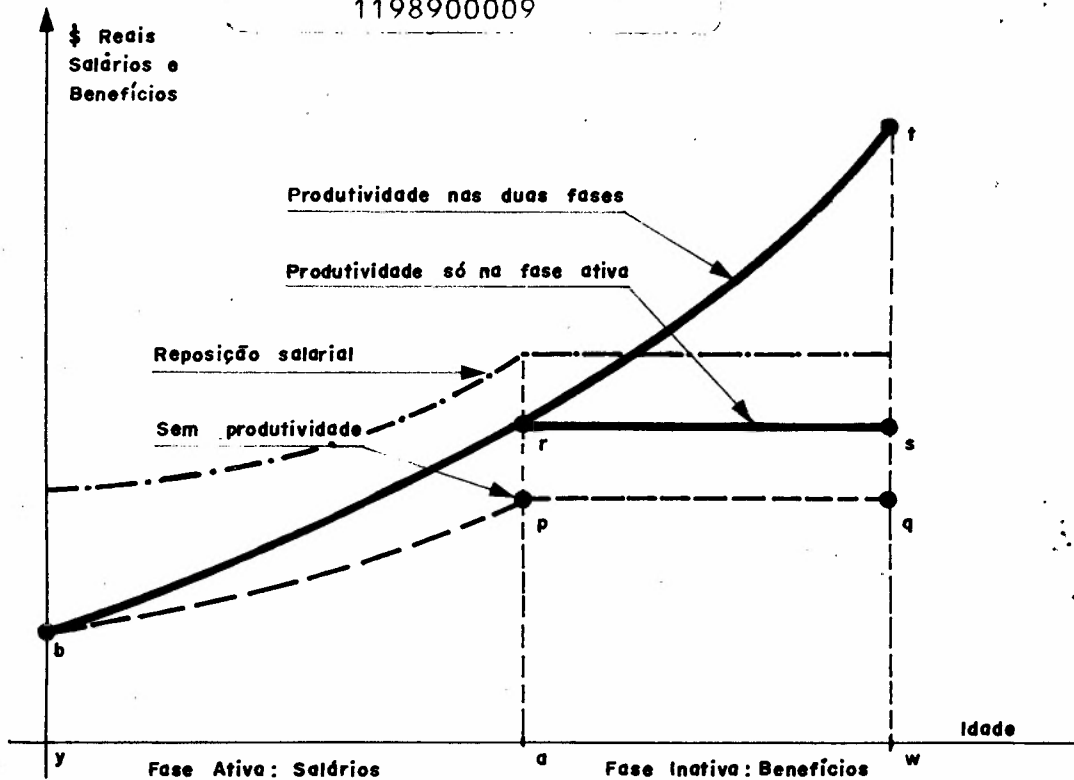


# FUNDOS PRIVADOS DE PENSÃO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO ATUARIAL

emilio recamonde capelo



A minha mãe, Odília, que despertou e cultivou em mim o gosto pelos estudos.

Aos meus familiares, Teinha, Milena, Júnior, Mário e Édison, que com estoicismo suportaram as agruras impostas por este trabalho.

v

ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO  
DA  
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

10

EMÍLIO RECAMONDE CAPELO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO ATUARIAL DOS FUNDOS PRIVADOS DE PENSÃO

Tese apresentada ao Curso de  
Pós-Graduação da EAESP/FGV -  
Área de Concentração: Administração  
Contábil e Financeira - Domínio  
Conexo: Métodos Quantitativos em  
Administração, como requisito  
para a obtenção de título de  
doutor em Administração.

Orientador: Prof. Wladimir A. Puggina

SÃO PAULO

1986

(C) COPYRIGHT Emílio Recamonde Capelo

CAPELO, Emílio Recamonde. Uma introdução ao estudo atuarial dos fundos privados de pensão. São Paulo, EAESP/FGV, 1986. 384p. (Tese de Doutorado apresentada ao Curso de Pós-Graduação da EAESP/FGV, Área de Concentração: Administração Contábil e Financeira, Domínio Conexo: Métodos Quantitativos em Administração).

Resumo: Trata do problema da constituição de reservas nas entidades fechadas privadas de pensão, dissertando sobre seus aspectos demográficos, atuariais, sociais e legais. Apresenta uma classificação geral dos diferentes métodos de custeio expondo os principais procedimentos de cálculo adotados. Aborda as particularidades do quadro brasileiro e oferece sugestões para aprimorar a legislação e a prática da previdência complementar no país.

Palavras-chaves: Atuária - Previdência Privada - Previdência Complementar - Reservas Matemáticas - Reservas Técnicas - Benefícios - Contribuições - Anuidades - Aposentadoria - Pensão - Seguros - Dote - Pecúlio - Segurado - Dependente - etc....

## ÍNDICE DOS CAPÍTULOS

I - RUDIMENTOS DE DEMOGRAFIA .....	1
I.1. Introdução .....	1
I.2. Alguns Conceitos Preliminares .....	1
I.3. Um Modelo Discreto Simples de Análise Populacional .....	4
I.4. Um Modelo Contínuo de Análise Populacional .....	10
I.5. Uma Análise Gráfica Simples .....	18
I.6. A Força de Mortalidade .....	22
I.7. Notas sobre o Cálculo de Tabelas de Sobrevivência .....	28
I.8. Introdução à Projeção Matricial de uma População a um Sexo ....	62
II - UM SUMÁRIO DE MATEMÁTICA ATUARIAL .....	83
II.1. Introdução .....	83
II.2. Alguns Conceitos Essenciais .....	87
II.3. Os Dotes Principais .....	93
II.3.1. Dote Puro ou Anuidade de Pagamento Único, Temporária por Ano, Diferida de k anos, Antecipada e a Prêmio Único .....	93
II.3.2. Dote Tontine ou Anuidade de Pagamento Único, Temporário por Um Ano, Diferida de k Anos, Imediata e a Prêmio Anual, Ordinário, Antecipado, Temporário por K A- nos .....	94
II.4. Anuidades Mais Comuns .....	95
II.4.1. Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único .....	95
II.4.2. Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único .....	96
II.4.3. Anuidade de Pagamento Anual, Igual, Vitalícia, Diferida de k Anos, Imediata e a Prêmio Único .....	97
II.4.4. Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Diferida de k Anos, Antecipada e a Prêmio Único .....	98
II.4.5. Apólice Anuidade ou Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Diferida de k Anos, Antecipada, com Prêmio Anual Igual, Ordinário, Antecipado, Temporário por k Anos .....	98
II.4.6. Anuidade de Pagamento Anual Igual, Temporário por n A- nos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único .....	99
II.4.7. Anuidade de Pagamento Anual Igual, Temporária por n A- nos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único .....	100

- II.4.8. Anuidade de Pagamento Anual, Igual, Temporária por n Anos, Diferida por k Anos, Imediata e a Prêmio Único ..... 100
- II.4.9. Anuidade de Pagamento Anual Igual, Temporário por n Anos, Diferida de k Anos, Antecipada e a Prêmio Único ..... 101
- II.4.10. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único ..... 101
- II.4.11. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único ..... 103
- II.4.12. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Vitalícia, Diferida de k Anos, Imediata e a Prêmio Único ..... 104
- II.4.13. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Vitalícia, Diferida por k Anos, Antecipada e a Prêmio Único ..... 105
- II.4.14. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Temporária por n Anos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único ..... 106
- II.4.15. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Temporária por n Anos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único ..... 107
- II.4.16. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Temporária por n Anos, Diferida por k Anos, Imediata e a Prêmio Único ..... 108
- II.4.17. Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em Parcelas, Temporária por n Anos, Diferida por k Anos, Antecipada e a Prêmio Único ..... 109
- II.4.18. Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único ..... 109
- II.4.19. Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único ..... 111
- II.4.20. Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Temporária por n Anos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único ..... 111
- II.4.21. Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Temporária por n Anos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único ..... 112
- II.4.22. Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética mas Subdividida em Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único ..... 113

II.4.23.	Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética mas Subdividida em m Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único .....	114
II.4.24.	Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética, mas Subdividida em m Parcelas, Temporária por n Anos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único .....	114
II.4.25.	Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética mas Subdividida em m Parcelas, Temporária por n Anos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único .....	115
II.4.26.	Fórmula Geral das Anuidades .....	116
II.5.	Algumas Alternativas de Seguros .....	116
II.5.1.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único .....	117
II.5.2.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Vitalício, Ordinário e Antecipado .....	118
II.5.3.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Temporário por m Anos, Ordinário e Antecipado .....	119
II.5.4.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Vitalício, Diferido por k Anos, Imediato e a Prêmio Único .....	120
II.5.5.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por um Ano, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único .....	120
II.5.6.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único .....	121
II.5.7.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Temporário por m Anos, Ordinário e Antecipado .....	122
II.5.8.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Diferido por k Anos, Imediato e a Prêmio Único .....	122
II.5.9.	Seguro de Vida Simples, de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único .....	123
II.5.10.	Seguro de Vida Dotal, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único .....	124
II.5.11.	Seguro de Vida Dotal, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Temporário por m Anos, Ordinário, Antecipado .....	124

125	II.5.12. Seguro de Vida Dotal, de Pagamento Constante, Tempo-ratio por n Anos, Diferido por k Anos, Imediato e a Premio Unico .....
126	II.5.13. Seguro de Vida com Devolucao dos Premios Historicos Acumulados, de Pagamento em Progressao Arithmetica, Vitalicio, Ordinario, Imediato e a Premio Anual Constante, Vitalicio, Ordinario e Antecipado .....
127	II.5.14. Formula Geral dos Seguros .....
136	II.6. Um Programa para Solucao de Problemas sobre Anuidades e Seguros de Vida .....
136	II.7. Uma Introducao ao Conceito de Reservas .....
137	II.7.1. A Analise das Reservas para Dois Casos Particulares de Seguro .....
139	II.7.2. Equacao Recursiva Geral para Calculo de Reservas .....
141	III - UMA VISAO GERAL DA PREVIDENCIA .....
141	III.1. Introducao .....
141	III.2. Alguns Conceitos Essenciais .....
150	III.3. A Previdencia Social no Brasil .....
157	III.4. Dos Segurados da Previdencia Social Urbana .....
160	III.5. Dos Dependentes .....
163	III.6. Outros Beneficiarios da Previdencia Social Urbana .....
164	III.7. Do Custeio da Previdencia Social .....
168	III.7.1. As Contribuicoes dos Segurados .....
169	III.7.2. As Contribuicoes das Empresas em Geral .....
171	III.7.3. As Contribuicoes da Uniao .....
172	III.7.4. Outras Receitas da Previdencia Social .....
172	III.7.5. Outros Encargos de Natureza Trabalhista para as Empresas .....
173	III.8. Os Beneficios da Previdencia Social .....
173	III.9. Os Beneficios em Dinheiro da Previdencia Social .....
180	III.10. Diferencas de Direitos Previdenciarios de Algumas Categorias de Segurados .....
189	III.11. A Previdencia Complementar .....
191	III.11.1. Generalidades .....
191	III.11.2. A Legislacao Brasileira sobre Previdencia Complementar .....

IV - UMA INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA DOS FUNDOS DE PENSÃO .....	205
IV.1. Introdução .....	205
IV.2. Alguns Conceitos Básicos sobre o Custeio de Fundos de Pensão .	206
IV.3. Os Ensinamentos de Trowbridge .....	230
IV.4. Uma Tentativa de Síntese na Classificação dos Métodos de Custeio dos Fundos de Pensão .....	252
V - AS ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA NO BRASIL .....	259
V.1. Introdução .....	259
V.2. Algumas Características Importantes da Previdência Complementar no Brasil .....	260
V.3. Uma Análise de Sensibilidade de uma Entidade Fechada de Previdência Privada .....	287
V.3.1. Situação de Referência .....	290
V.3.2. Tamanho da Família Segurada .....	292
V.3.3. Salário de Benefício da Previdência Social .....	294
V.3.4. Mês da Aposentadoria .....	298
V.3.5. Dessincronia entre Reajustes Salariais .....	301
V.3.6. Longevidade da Coorte .....	304
V.3.7. Nível de Contribuição .....	306
V.3.8. Taxa de Juros Atuarial .....	308
V.3.9. Tempo Requerido para a Aposentadoria .....	311
V.3.10. Nível de Benefícios .....	314
V.3.11. Produtividade .....	317
V.3.12. Reposição Salarial .....	323
V.3.13. As Ameaças Principais e as Soluções Mais Eficientes ...	327
VI- CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	329
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA .....	341
APÊNDICES .....	349
ANEXOS .....	379

## AGRADECIMENTOS

Meu primeiro reconhecimento é dedicado ao Banco do Nordeste do Brasil S/A - BNB, à Universidade Federal do Ceará - UFC, à Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas - EAESP / FGV e à "Graduate School of Management" da Universidade da Califórnia, campus de Los Angeles - GSM - UCLA, que patrocinaram e promoveram este trabalho. Teria sido de todo impossível reunir os recursos de tempo e informação de que me vali para sua elaboração sem a feliz conjugação de recursos ofertados por essas instituições.

Gostaria de destacar as pessoas do Dr. Antônio Nílson Craveiro Holanda, Presidente do BNB ao tempo do início desta pesquisa, e do Dr. Pedro Moreno Gondim, seu Diretor de Câmbio por ocasião de sua redação final, pelo encorajamento e apoio com que me distinguiram nos momentos mais difíceis da jornada.

Na UFC seria de justiça registrar minha gratidão ao Dr. Roberto de Moura Pamplona, Chefe do Departamento de Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Contabilidade e Administração, pela desprendida ajuda prestada enquanto durou este programa.

A EAESP-FGV me foi pródiga de sinceros amigos e sábios mestres, dentre os quais me permito nomear o Professor Carlos Osmar Bertero e a Professora Polia Lerner Hamburger que ao longo desses anos todos me cumularam com seu estímulo e seu entusiasmo.

Reconhecimento especial quero grafar em favor de um dileto amigo e orientador, Prof. Wladimir A. Puggina, pela paciência e pela fidalguia com que sempre me acudiu nas inúmeras vezes em que a ele recorri na penosa tarefa de produzir este documento.

Dos notáveis mestres da GSM-UCLA desejo singularizar as extraordinárias figuras dos Professores David D. McFarland e Alfred E. Hofflander, o primeiro por ter-me iniciado com sabedoria no campo da Demografia e o segundo por ter-me acompanhado e orientado por vários "quarters" no aprendizado da Matemática dos Fundos de Pensão.

Por fim, valho-me da ocasião para ressaltar a contribuição inesti-

mãvel prestada por Milena, Junior, Pepe, Edilson e sobretudo por Da. Maria de Lourdes para a preparação do documento final.

A todos esses colaboradores e aqueles que injustamente não foram nomeados crédito o eventual mérito deste trabalho reservando-me, no entanto, os débitos pelas incorreções e impropriedades acaso existentes.

Fortaleza(CE), março de 1986

Emílio Recamonde Capelo

## APRESENTAÇÃO

A conclusão deste trabalho se deu no mesmo dia em que veio à luz o Decreto-Lei Nº 2.283, de 27.02.86, introduzindo profunda alteração na vida econômica nacional e exercendo significativa influência no equilíbrio financeiro das Entidades Fechadas de Previdência Privada - EFPP, de alcances ainda não mensurados.

A data limite e improrrogável de 16.03.86 estabelecida pela Comissão de Pós-Graduação para sua apresentação impediu qualquer tentativa de quantificar esses impactos, em adição à análise de sensibilidade apresentada no Capítulo V, adiante.

Considerando, no entanto, a importância do evento, nos vemos no dever de mencionar, ainda que qualitativamente, alguns dos desdobramentos mais visíveis dessas medidas e seus prováveis reflexos para a estabilidade da previdência complementar do país.

Das quatro variáveis classificadas ao fim deste texto como de "grande influência" para o equilíbrio das EFPPs, uma mereceu atenção especial da nova lei. Assim é que a variável "reposição salarial" teve sua importância para a conjuntura econômica nacional reconhecida no seu Art. 25 com a proibição de sua adoção nos dissídios coletivos futuros, determinando, em consequência, a nulidade das sentenças judiciais que a contemplarem. Essa preocupação se transporta para o seu parágrafo único quando incumbe ao Ministério do Trabalho velar pelo seu rigoroso cumprimento.

Conquanto argüida pelos sindicatos em níveis bem elevados, a reposição salarial é particularmente danosa para o equilíbrio das fundações da previdência privada, como se mostra no capítulo mencionado.

Nesse contexto estreito, portanto, a recente legislação favorece sobremaneira a estabilidade dessas entidades, na medida em que ofertando um abono modesto de 8%, como explicitado no Art. 21 do citado Decreto-Lei, impede reposições mais amplas e impossíveis de serem absorvidas pelos fundos de pensão.

O Art. 24 do mesmo Decreto-Lei, contudo, permite claramente a revisão do valor dos salários através de livre convenção, a ser alcançada por negociação coletiva, o que pode vir a elidir as vantagens antes enunciadas.

A produtividade, outra variável de extrema importância para os fundos de pensão, não é mencionada no Decreto-Lei sob referência, ficando sua

discussão anual pautada pelas mesmas regras hoje em vigor, o que implica ficarem os riscos de sua fixação expressos nos mesmos termos descritos naquele capítulo.

Das cinco variáveis inscritas na categoria de "média influência", as duas primeiras deverão sofrer algum reflexo das medidas agora adotadas. Com a estabilidade da moeda e o retorno aos reajustes anuais, perdem importância o posicionamento do início da aposentadoria dentro do ciclo de reajustamento salarial e a dessincronia entre os reajustes salariais da previdência social e da categoria profissional respectiva, sincronizadas que foram pelo menos para os próximos doze meses.

No que concerne à administração dos ativos de uma FPP, espera-se uma redução geral das taxas de retorno de suas diferentes carteiras, notadamente na de títulos públicos, que representa 30% de suas aplicações globais. A exceção ficaria por conta das carteiras bursátil e imobiliária de onde se esperam rendimentos significativos nos próximos meses na dependência do sucesso do programa de reajustamento econômico em curso. Essa perda de eficiência pode vir a determinar no futuro uma redução na taxa atuarial dos planos de benefícios com reflexos desfavoráveis para a determinação dos níveis requeridos de reservas matemáticas.

Passados apenas cinco dias, não há ainda uma visão clara das reações do sistema econômico ao novo marco legal nem são conhecidos todos os detalhes necessários à avaliação cabal de suas consequências. Um estudo mais objetivo demandará, por certo, um tempo bem maior do que o disponível para a entrega desta monografia.

Fortaleza, 04 de março de 1986

Emílio Recamonde Capelo

## LISTA DE QUADROS

## QUADRO

I.7.1	Tabelas de Sobrevivência - BRASIL - 1960	
	HOMENS .....	46
	MULHERES .....	47
I.7.2	Tabela de Sobrevivência para Fundo de Pensão - Group Annuity Table for 1951 - 2,5%A.A. - HOMENS .....	51
I.7.3	Tabela de Sobrevivência para Fundo de Pensão - Group Annuity Table for 1951 - 2,5%A.A. - MULHERES .....	53
I.7.4	Tabela de Sobrevivência para Fundo de Pensão -GAM-1971-Group Annuity Mortality Table for 1971 - 6%A.A. - HOMENS .....	58
I.7.5	Tabela de Sobrevivência para Fundo de Pensão - GAM-1971 - Group Annuity Table for 1971 - 6%A.A. - MULHERES .....	60
I.8.1	BRASIL - POPULAÇÃO FEMININA - Matriz de Leslie e Vetor População em 1980 - Projeção do Vetor População para o ano 2.000 ..	70
II.6.1	Exemplo de Saída do Programa ATUÁRIA .....	128
II.6.2	Um Resumo dos Cálculos dos Valores Presentes Puros das Anuidades Típicas .....	132
II.6.3	Um Resumo dos Cálculos de Prêmios Líquidos dos Seguros de Vida Individual Mais Usuais .....	135
III.1	Escala da Salário-Base para Autônomos, Empregadores e Facultativos .....	166
III.2	Alíquotas de Contribuição dos Empregados .....	168
III.3	Da Contribuição dos Aposentados .....	169
IV.2.1	Demonstração de Resultados do Exercício .....	221
IV.2.2	Balanco Patrimonial em Fim de Exercício .....	222
IV.2.3	Balanco Atuarial em Fim de Exercício .....	226
IV.3.1	Tabela de Serviço e Números de Comutação: Fundamentals - Trowbridge .....	233
IV.3.2	Fundação Classe I: "Pay as You Go" .....	237
IV.3.3	Fundação Classe VI: Fundação Completa em 20 Anos .....	238
IV.3.4	Fundação Classe II: Fundação Terminal .....	239
IV.3.5	Fundação Classe III: Por Unidade de Crédito .....	241
IV.3.6	Fundação Classe IV: 1) Método Normal por Idade de Entrada .....	242
IV.3.7	Fundação Classe IV: 2) Método de Prêmio Individual Nivelado ...	244
IV.3.8	Fundação Classe IV: 3) Fundação Agregada .....	246

## QUADRO

IV.3.9	Fundação Classe IV: 4) Método Normal por Idade Atingida .....	248
IV.3.10	Fundação Classe V: Fundação Inicial .....	250
V.2.1	Taxas Puras de Contribuição para Equilibrar um Fundo Hipotético de Aposentadoria .....	285
V.2.2	Evolução das Principais Variáveis do Modelo $S_{35} = 3.S_1$ e $B = 1,1 . S_{35}$ .....	285
V.3.1	Composição da Amostra - Tipos e Quantidades de Participantes ...	287
V.3.2	Situação de Referência .....	291
V.3.3	Composição da Massa de Segurados .....	292
V.3.4	Variação no Tamanho da Família .....	293
V.3.5	A Influência da Inflação no Valor de Alfa .....	296
V.3.6	Variação no Salário de Benefício da Previdência Social .....	297
V.3.7	A Influência do Mês de Aposentadoria no Valor de Alfa .....	299
V.3.8	Variação no Mês de Aposentadoria .....	300
V.3.9	Dessincronia entre os Reajustes Salariais da Previdência Social e da Categoria Profissional .....	303
V.3.10	Longevidade da Coorte .....	305
V.3.11	Nível de Contribuição .....	307
V.3.12	Taxa de Juros Atuarial .....	309
V.3.13	As EFPPs como Investidores Institucionais .....	311
V.3.14	Tempo Requerido para a Aposentadoria .....	313
V.3.15	Nível de Benefícios .....	315
V.3.16	Produtividade só para Ativos .....	319
V.3.17	Produtividade para Ativos e Inativos .....	321
V.3.18	Aumentos Salariais e Índices de Preços .....	323
V.3.19	Reposição Salarial .....	325

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	
I.5.1	As Linhas de Vida e o Diagrama de Lexis ..... 19
I.5.2	Árvore de Probabilidades de Mortes num Mesmo Ano e com Mesma Idade ..... 21
I.8.1	Oscilação do Autovalor ..... 78
II.1.1	Análise de um Pagamento Incerto ..... 84
II.1.2	Jogo = Pagamento Incerto no Presente ..... 85
IV.2.1	Gráfico do Decremento a Dois Fatores ..... 206
IV.2.2	Gráfico do Decremento a Três Fatores ..... 207
IV.2.3	Representação Gráfica das Principais Variáveis de um Fundo de Pensão Deficitário no Ano Genérico $t$ ..... 218
V.3.1	Cronologia dos Reajustes Salariais ..... 302
V.3.2	A Produtividade nos Salários e Benefícios ..... 217
V.3.3	Esperanças de Contribuições e Benefícios ..... 318

## CAPÍTULO I

### RUDIMENTOS DE DEMOGRAFIA

#### I.1. INTRODUÇÃO

O estudo atuarial dos Fundos de Pensão, quer sociais, quer privados, não pode prescindir de um conhecimento mínimo sobre Demografia porque os grupos de segurados ativos, que aportam receitas, estão sujeitos a gradientes decrementais dos quais um dos mais importantes é o relativo à morte. O mesmo fenômeno, por outro lado, incrementa o grupo dos pensionistas, o que implica despesas para o Fundo.

A compreensão da dinâmica demográfica, na sua visão mais ampla, é um ponto de partida obrigatório para o estudo a que nos propomos: o estudo crítico de um modelo atuarial simples para uma Entidade Fechada de Previdência Privada dentro da realidade brasileira. Nele preservaremos tanto quanto possível a notação e nomenclatura internacionalmente adotadas, embora ainda não de todo consolidadas.

O estudo que se segue conterà as duas visões populacionais clássicas, uma contínua e outra discreta, que permitirão chegar a um instrumento básico de análise que é a Tabela de Sobrevivência ou, como alguns preferem, a tabela de Mortalidade de um grupo bem definido.

#### I.2. ALGUNS CONCEITOS PRELIMINARES

Chamaremos genericamente de Coorte, de Coorte Real ou de Geração a um grupo de pessoas nascidas vivas num mesmo espaço geográfico, num mesmo intervalo de tempo, fechado a migrações e que tem a sua trajetória de vida analisada através de diversos indicadores demográficos até que o mais longo de seus participantes faleça.

Uma coorte pode ser ainda restringida por definição a um só sexo, a uma certa classe social, a um dado grupo étnico, religioso ou profissional ou a qualquer elenco de atributos que interessem a uma particular análise.

A dificuldade em acompanhar as histórias demográficas de diferentes coortes reais deve-se ao tempo requerido para esse estudo e à grande mobili

dade geográfica das pessoas ao longo da vida.

Um acompanhamento permanente das diferentes coortes que formam uma população seria altamente desejável para se quantificarem as mudanças demográficas traduzidas principalmente nas variações das taxas de sobrevivência específica por idade causadas pelo progresso científico-tecnológico, pelas mudanças nos hábitos de vida e por um conjunto bastante amplo de outros fatores.

Denominamos  $w$  a Idade Máxima da qual uma pessoa pode se aproximar sem atingi-la, podendo faltar para tanto um dia ou mesmo uma hora.

Elegendo-se o período de um ano para o intervalo no qual nascem as pessoas de uma mesma coorte, vemos que uma População Real é de fato o agregado de distintas coortes em diferentes estágios de maturação de 0 a  $w-1$  anos. Cada um desses grupos, no entanto, está sujeito a diferentes forças de mortalidade em cada idade, porque eles passam pelas diferentes fases da vida diante de diferentes cenários tecnológicos e sociais.

O bebê de há 30 anos atrás, o adulto de hoje, teve muito menor assistência médica e de recursos farmacêuticos que o bebê de agora; por outro lado, este enfrenta maiores problemas de poluição e de outros traumas da sociedade atual.

Quer-se ressaltar com isto a idéia fundamental de que cada coorte enfrenta sua própria trajetória, distinta das demais, devido a um variado elenco de razões que determinam diferentes involuções quantitativas relativas do grupo inicial que se decrementa diferenciadamente pela morte.

Tais fatos impedem que uma análise seccional por idade de uma população real ofereça o retrato fiel de uma mesma coorte em seus distintos graus de maturação. Tal artifício, no entanto, se faz necessário e é utilizado para se obter o que denominamos de Coorte Construída ou Sintética, procuradora da coorte real, cujos dados alimentarão os "constructos" teóricos reclamados pela disciplina.

Nomearemos ainda de População Estacionária a um grupo ideal no qual não variam o seu tamanho, sua estrutura etária, a força da mortalidade que age em cada idade específica e que tem iguados em cada período o número de nascimentos e o número de mortes.

Somente em um grupo assim a análise seccional por idades retrataria com fidelidade a evolução da coorte básica que estrutura essa análise, a qual, nascendo sempre na mesma dimensão, fenece em idêntica trajetória cronológica.

lógica, atingindo obviamente a mesma idade máxima.

População Padrão, de outra parte, é a contraface real do conceito ideal acima colocado. Escolhida numa fase típica do grupo que busca retratar, seria ela uma população pseudo-estável na sua estrutura etária relativa da qual serão extraídos os dados indispensáveis ao seu estudo demográfico.

Num primeiro momento, o instrumento básico da Demografia seria a Tabela de Sobrevivência, também conhecida como Tabela de Mortalidade, que é uma coleção de variáveis, e respectivos valores, relativos a uma população padrão, que permite, entre outros, o estudo probabilístico da sobrevivência por sexo e por faixas de idades.

Há pelo menos dois tipos de Tabelas de Sobrevivência. As que se apoiam nos dados de um período, um ano, digamos, extraídos de coortes sintéticas ou construídas, são denominadas de Tabelas de Sobrevivência para um Período.

Já as tabelas fruto da análise de gerações ou coortes reais são chamadas de Tabelas de Sobrevivência para uma Geração.

Se a primeira trata todas as coortes como homogêneas e retratadas em seus distintos graus de maturação pelos dados obtidos no ano da análise, a segunda estuda apenas uma geração, deixando dessa forma o problema sem uma solução adequada. O ideal seria uma coleção exaustiva de Tabelas de Sobrevivência por Geração, uma para cada coorte presente à vida.

Outro conceito basilar é o de Exposição à Morte, que traduz o produto do número de pessoas vivas versus o intervalo de tempo decorrido. É intuitiva a idéia de que a chance de ocorrência de morte de uma pessoa numa certa idade e dentro de um certo intervalo de tempo aumenta com a amplitude desse período. Essa probabilidade se torna unitária, isto é, a morte se torna um evento certo se o período, com qualquer origem, contiver o instante  $w$ , a idade máxima inatingível.

Fixando-se, por sua vez, um período a ser atravessado por um grupo de pessoas, homogêneo ou heterogêneo no que respeita a sexo ou idade, percebe-se intuitivamente que a chance de ocorrer um certo decremento nesse período aumenta com a dimensão do grupo.

O produto, ou o momento, conceito tomado por empréstimo à Física, desses dois atributos é o que quantifica a exposição à morte de um grupo de viventes.

### I.3. UM MODELO DISCRETO SIMPLES DE ANÁLISE POPULACIONAL

Embora a variável tempo seja linear e nitidamente contínua, duas variáveis dele derivadas, o ano-calendário e a idade, costumam ser consideradas discretas ou, na melhor das hipóteses, funções em degrau com trechos contínuos e constantes e com descontinuidades por ocasião do salto para o degrau subsequente.

Assim é que dizemos durante 365 dias consecutivos que, por exemplo, estamos no ano de 1986 ou que temos quarenta anos de idade. Já no dia seguinte à passagem do ano ou à data do aniversário iniciamos novo degrau no qual nossos contadores de ano-calendário e de idade estão acrescidos de uma unidade.

A forma adequada de tratar o assunto é considerar idade uma variável contínua como faremos no modelo populacional contínuo em outro ponto deste estudo. Os modelos discretos são, no entanto, muito simpáticos, mas para construí-los será necessário convencionar em que dia do ano-calendário deverão ser contadas as pessoas vivas que têm uma idade  $x$  como expressão de seu último aniversário.

O momento mais propício é o início do dia 1º de julho de cada ano. Nessa data, quem diz ter, por exemplo, vinte anos é um grupo etariamente heterogêneo de pessoas que vai dos que têm vinte anos e zero dias de vida aos que já viveram vinte anos e 364 dias.

Até aqui não parece ter havido nenhuma vantagem nessa escolha, já que igual fenômeno surgiria com qualquer outra data. Acontece que, se supusermos que a coorte das que contam, por exemplo, vinte anos tem seus aniversários homogeneamente distribuídos entre 1º de julho do ano anterior e 30 de junho do ano da contagem, então sua idade média nessa ocasião é de vinte anos e meio e é, no início do ano, de exatos vinte anos, fazendo assim coincidir o início do ano-calendário com o início do ano-idade, associando de modo adequado as duas escalas de tempo.

Poder-se-á assim identificar com uma mesma variável, ou com duas variáveis distintas diferenciadas por uma constante, o ano-calendário e a idade de uma coorte sob análise.

A Taxa Bruta de Mortalidade,  $M$ , de um certo ano, é o parâmetro demográfico mais rudimentar de uma população e se calcula dividindo-se simplesmente o Total de Mortes,  $D$ , desse ano, ocorridas em todas as idades, pela Po

pulação de 1º de julho do mesmo ano,  $K$ , na forma da razão

$$M = \frac{D}{K} \quad (\text{I.3.1})$$

Uma visão menos grosseira da dinâmica populacional seria obtida segmentando-se a população por faixas de idade, iguais ou diferentes entre si, iguais ou superiores a um ano. Intervalos de cinco anos são muito usados, exceto para a primeira infância, até 5 anos de idade, quando categorizações anuais são mais recomendadas.

Utilizando-se a amplitude anual ao longo de todo o espectro vital da população e designando-se por  $x$  as diferentes idades temos que a dimensão de cada coorte no meio do ano-calendário da análise é  $K_x$ , assim como  $D_x$  é o número de mortes verificadas em cada coorte  $x$ .

A Taxa de Mortalidade Específica por Idade,  $M_x$ , seria obtida aplicando-se a mesma fórmula anterior, mas estratificada por idades.

$$M_x = \frac{D_x}{K_x} \quad (\text{I.3.2})$$

Mas se as mortes no ano da análise e dentro de cada coorte se distribuírem uniformemente através do ano, conclui-se facilmente que a contagem da população no início do ano-calendário seria  $K_x + \frac{1}{2} D_x$  e assim, a Probabilidade de um Indivíduo da Coorte  $x$  Falecer ao Longo do Ano Calendário  $x$ , ou, recordando a identidade de escalas acima estabelecida, ao longo da idade  $x$ , é

$$q_x = \frac{D_x}{K_x + \frac{1}{2} D_x} \quad (\text{I.3.3})$$

ou, complementarmente, sua Probabilidade de Sobrevivência no Ano-Calendário  $x$  é

$$p_x = \frac{K_x - \frac{1}{2} D_x}{K_x + \frac{1}{2} D_x} \quad (\text{I.3.4})$$

sendo que  $p_0$  é a probabilidade de um recém-nascido completar o primeiro ano de vida e que  $p_x + q_x = 1$  (I.3.5)

para qualquer  $x$  e que  $q_{(w-1)} = 1$  e  $p_{(w-1)} = 0$  (I.3.6)

O sexo é um importante elemento nas estatísticas vitais e revela que a mulher é mais longeva que o homem. A divisão da população por sexo, além da divisão por idades, é outro melhoramento possível e desejável. Formadas as duas subpopulações e analisadas suas sobrevivências, aplicam-se as mesmas Equações de I.3.2 a I.3.5, tendo-se o cuidado de diferenciar  $h_x^D$  de  $m_x^D$ ,  $h_x^K$  de  $m_x^K$ ,  $q_x^D$  de  $q_x^K$  e  $p_x^D$  de  $p_x^K$  como sendo, respectivamente para homens e mulheres, o número de mortes por idade, a dimensão da coorte por idade e as probabilidades de falecimento e de sobrevivência ao longo do ano-calendário  $x$ . Claro está que na equação I.3.1

$$D = \sum_{x=0}^{w-1} h_x^D + \sum_{x=0}^{w-1} m_x^D \quad (I.3.7)$$

$$K = \sum_{x=0}^{w-1} h_x^K + \sum_{x=0}^{w-1} m_x^K \quad (I.3.8)$$

Admitindo-se que as coortes sintéticas analisadas retratam o comportamento das coortes reais presentes na população e que as probabilidades de sobrevivência em idades consecutivas são independentes entre si, pode-se calcular a Probabilidade de que um Indivíduo com Idade  $x$  Sobreviva nos  $n$  Próximos Anos, contados a partir de 1º de janeiro do ano-calendário  $x$

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{(x+1)} \cdot \dots \cdot p_{(x+n-1)} = \prod_{a=x}^{x+n-1} p_a \quad (I.3.9)$$

Naturalmente a Probabilidade de que Indivíduo com Idade  $x$  Faleça nos  $n$  Próximos Anos contados a partir do mesmo instante seria dada por:

$${}_n q_x = q_x + p_x \cdot q_{x+1} + \dots + (p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+n-1} \cdot q_{x+n}) \quad (I.3.10)$$

Mais uma vez

$${}_n q_x + {}_n p_x = 1 \quad (I.3.11)$$

Por outro lado, é também uma consequência natural do que acima se afirmou que

$${}_w p_x = 0 \text{ e } {}_w q_x = 1 \tag{I.3.12}$$

qualquer que seja a origem do período que termina em w.

Chamaremos de Raiz de uma Coorte,  $l_0$ , sua dimensão no início do ano em cujo 1º de julho contaríamos  $k_0$  crianças com menos de um ano. Esse número, que pode ser verdadeiro mas usualmente é arbitrário, 100.000, por exemplo, e que é o máximo na estória dessa coorte, servirá de base para os estudos de-crementais do grupo ao longo de sua existência. Assim

$$l_0 \cdot f = (K_0 + 1/2 D_0) \cdot f = 100.000 \tag{I.3.13}$$

onde f é o fator necessário à normalização da coorte.

Recordamos que no início de cada ano-calendário as duas escalas de tempo, ano-calendário e idades, estão sincronizadas. Por isso, podemos definir o Número Normalizado de Sobreviventes de uma Coorte na Idade x ou, o que é o mesmo, no início do ano-calendário x, por

$$l_x = l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_{x-1} = l_0 \cdot \prod_{i=0}^{x-1} p_i \tag{I.3.14}$$

O Número de Mortes em uma Dada Coorte Entre Duas Idades x e x+n se-rá simplesmente mensurado por

$$d_x = l_x - l_{x+n} \tag{I.3.15}$$

O Número Normalizado de Sobreviventes com Último Aniversário x quan-do contados a 1º de julho seria dado por

$$*l_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2 \cdot f} = \frac{K_x}{f} \tag{I.3.16}$$

No "constructo" ideal da população estacionária são constantes sua dimensão, suas estruturas sexual e etária, a força de mortalidade que atinge sua população ao longo de todas as idades, a fertilidade feminina em todas as idades, o número total de nascimentos a partir de mulheres de todas as idades e os números de mortes a partir de homens e mulheres em cada idade es-

pecífica.

Disto decorre que, em cada ano, o total de mortes é igual ao total de nascimentos que é por sua vez a raiz da coorte padrão que estrutura a população

$$l_0 = \sum_{x=0}^{w-1} d_x = D \quad (\text{I.3.17})$$

Esta é sem dúvida uma visão muito simplificada da realidade mas que tem a extraordinária utilidade de referenciar nossos raciocínios sobre dinâmica populacional.

A Exposição à Morte de uma Coorte, hoje com  $x$  anos de idade, ao longo dos próximos  $n$  anos seria dada por

$${}_n L_x = \sum_x^{x+n} \left[ \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \right] \cdot 1 \quad (\text{I.3.18})$$

onde  $l_x$  é a expressão genérica do tamanho inicial desse grupo ao longo dos  $n$  anos e  $1$  é o intervalo de um ano dos consecutivos anos, entre  $x$  e  $n$ , vividos por esse grupo declinante; logo a dimensão de  ${}_n L_x$  é de pessoa ano e não só de pessoa.

A Força de Mortalidade que age sobre uma coorte no intervalo de um ano da idade  $x$  é a razão entre o número de mortes ocorridas no ano-calendário  $x$  e a exposição à morte do grupo no mesmo ano-calendário e estaria dada por

$$U_x = \frac{d_x}{{}_n L_x} \approx \frac{d_x}{l_x} \approx \frac{D_x}{K_x} = M_x \quad (\text{I.3.19})$$

onde se vê que, no modelo discreto, força de mortalidade por idade e taxa de mortalidade específica por idade são conceitos que praticamente se identificam.

Adaptando a Equação I.3.18 para calcular a Exposição Residual à Morte de uma Coorte Padronizada na Idade  $x$ ,  $T_x$ , vem

$$T_x = \sum_x^w \left[ \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \right] \cdot 1 \quad (\text{I.3.20})$$

que dividido por  $l(x)$  produz a Expectativa Completa de Vida na Idade  $x$

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\text{pessoa} \cdot \text{ano}}{\text{pessoa}} = \text{ano} \quad (\text{I.3.21})$$

Aplicando-se as Equações I.3.16, I.3.20 e I.3.21 para  $x=0$  chegamos ao conceito importantíssimo de Esperança de Vida ao Nascer,  ${}^0e_0$  ou mais exatamente à vida média, calculada a 1º de janeiro, daquele grupo que a 1º de julho ainda não tinha completado um ano de idade.

Se  ${}^0e_0$  é um período de vida médio, o seu inverso é a Frequência Média de Mortes ao Nascer, ao longo de toda a vida do grupo, grandeza igual à taxa bruta de mortalidade definida na Equação I.3.1, se a população fosse estacionária.

$${}^0m_0 = \frac{1}{{}^0e_0} = \frac{l_0}{T_0} \approx \frac{D}{K} = M \quad (\text{I.3.22})$$

Além de  ${}^0e_0$  e  ${}^0m_0$ , outros parâmetros há que se prestam para comparar populações como, por exemplo, a Taxa de Mortalidade Padronizada, que seria uma média das taxas de mortalidade específica por idade ponderadas pelos tamanhos dos grupos em cada uma dessas idades.

$$SD = \frac{\sum K_x \cdot M_x}{\sum K_x} = \frac{\sum K_x \cdot M_x}{K} \quad (\text{I.3.23})$$

A exposição à morte de uma coorte entre as idades  $x$  e  $x+n$ ,  ${}_nL_x$ , se compõe de duas parcelas nítidas. A dos que sobreviveram nos  $n$  anos,  $l_{x+n}$ , e a dos que sucumbiram em algum ponto entre  $x$  e  $x+n$ , que são contados por  ${}_n d_x$ . Logo

$${}_nL_x = n \cdot l_{x+n} + {}_n a_x \cdot {}_n d_x \quad (\text{I.3.24})$$

onde  ${}_n a_x$  é o Período Médio de Vida, Dentro do Intervalo  $x$  a  $x+n$ , dos que nele faleceram. Explicitando-o vem

$${}_n a_x = \frac{{}_nL_x - n \cdot l_{x+n}}{{}_n d_x} \quad (\text{I.3.25})$$

que é diferente da suposição de distribuição linear das mortes, antes assumida e que conduziria a

$${}_n a_x = n/2 \quad (\text{I.3.26})$$

Agora que dispomos de conceitos mais elaborados, seria desejável redefinir a Taxa de Mortalidade Específica por Intervalo de Idades,  $n$ , à semelhança da Equação I.3.2, escrevendo

$${}_m n^x = \frac{{}_n^d x}{L} \quad (I.3.27)$$

já que usualmente as Tabelas de Sobrevivência apresentam o número de mortes e a exposição à morte para intervalos de  $n=5$  anos.

Notar a diferença substantiva entre as Equações I.3.2 e I.3.27. Ambas põem no numerador o número de mortes, mas no denominador a primeira usa número de sobreviventes no início do período  $x$ , ao passo que a última usa exposição à morte como grandeza necessária ao correto cálculo da taxa de mortalidade.

#### I.4. UM MODELO CONTÍNUO DE ANÁLISE POPULACIONAL

Dois tipos há de Análises da Sobrevivência. A que decorre da aplicação do modelo discreto recém-descrito e que são de nítido interesse prático e computacional e as que nascem da análise teórica que agora empreenderemos que, embora dotada de maior rigor científico, não são sempre praticáveis por falta dos dados detalhados requeridos pelas funções contínuas.

No presente modelo as variáveis tempo-calendário e tempo-idade serão tratadas como contínuas, variando  $dx$  a  $dx$  ao longo do tempo das vidas sob análise. Isto não impede que a unidade de tempo em que são expressas seja ano, que continuaremos denotando por  $x$ .

Por força disso, alguns ajustamentos se fazem necessários nas definições registradas na Seção I.2. Coorte passará a ter um significado mais restrito e será o grupo de pessoas nascidas vivas no intervalo infinitesimal entre  $x$  e  $x+dx$ . Essa mudança não elimina a dicotomia entre coorte real e coorte sintética, posto que, a origem dessa diferença são as tendências secular e conjuntural de mudanças nos padrões demográficos que continuam a existir qualquer que seja o tipo de análise adotado.

Os ajustamentos nos demais conceitos, como em Força de Mortalidade e em Exposição à Morte, serão revistos a seguir, pois carecem de tratamento matemático para explicitá-los.

Modificaremos um pouco a notação desta Seção, para destacar conceitos irmãos no mundo discreto e no mundo contínuo. Ao invés do índice  $x$  usado até então para indexar o valor de uma variável procuradora de um conceito, empregaremos o  $x$  entre parênteses para significar que as diversas variáveis representativas desses conceitos são uma função de  $x$ .

Prescindiremos neste modelo, por enquanto, do artifício da normalização, já que trataremos com equações diferenciais onde seu emprego é inadequado.

Se a função Número de Sobreviventes de uma Coorte na Idade  $x$  atende pela notação  $l(x)$  então a diferencial da variável Exposição à Morte estará dada por:

$$dL(x) = l(x) dx \quad (I.4.1)$$

A Força de Mortalidade ou Taxa Instantânea de Mortalidade de uma Coorte no Instante  $x$  será dada pelo limite da razão entre o número de mortes ocorridas no período que vai de  $x$  a  $x + \Delta x$  e a exposição à morte de seus integrantes no mesmo período, limite esse quando  $\Delta x$  tende para zero,

$$u(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-[l(x) - l(x + \Delta x)]}{l(x) \Delta x} = \frac{-d l(x)}{l(x) dx} \quad (I.4.2)$$

onde  $dl(x)$  e  $dx$  são as diferenciais das funções  $l(x)$  e  $x$ , respectivamente. O emprego do sinal negativo serve para contrabalançar o caráter negativo de  $dl(x)$ , posto que,  $l(x)$  é uma função monotonicamente decrescente, e que se pretende atribuir um caráter positivo ao fator decremental  $u(x)$  que se chama de Força de Mortalidade e não de Força de Sobrevivência. Força de Mortalidade tem a dimensão de pessoas mortas por pessoas vivas por unidade de tempo.

Rearranjando a Equação I.4.2 e integrando-a definitivamente entre zero e  $x$ , vem

$$\int_0^x \frac{d l(x)}{l(x)} = - \int_0^x u(x) dx \quad (I.4.3)$$

que produz

$$\ln l(x) - \ln l(0) = \ln \frac{l(x)}{l(0)} = - \int_0^x u(x) dx \quad (I.4.4)$$

onde  $\ln$  significa logaritmo neperiano das funções indicadas. A segunda integração não é ainda possível porque se desconhece a estrutura algébrica de  $u(x)$  cuja obtenção reúne toda a dificuldade do presente modelo.

Rearranjando outra vez, chega-se à Equação Fundamental do Modelo Contínuo que traduz a Dimensão de uma Coorte com Idade  $x$  sujeita à função Força de Mortalidade  $u(x)$  e permite calcular a Tabela de Sobrevivência deste modelo contínuo,

$$l(x) = l(0) \cdot e^{-\int_0^x u(x) \cdot dx} \quad (\text{I.4.5})$$

relembrando que  $l(0)$  é o tamanho máximo da coorte e que  $l(x)$  é a expressão de seu declínio até a extinção.  $l(x)$  seria ainda a função contínua de distribuição etária da população se esta fosse estacionária.

A Probabilidade de Sobrevivência de um Indivíduo no Intervalo  $x$  a  $x+n$  estaria dada por

$${}_n p(x) = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l(0) \cdot e^{-\int_0^{x+n} u(x) dx}}{l(0) \cdot e^{-\int_0^x u(x) dx}} = e^{-\int_x^{x+n} u(x) dx} \quad (\text{I.4.6})$$

Fazendo-se  $n=1$ , a probabilidade de um indivíduo de idade  $x$  alcançar a idade imediatamente seguinte estaria expressa por

$$p(x) = \exp \left[ -\int_x^{x+1} u(x) dx \right] \quad (\text{I.4.7})$$

O Número de Mortes em uma Dada Coorte,  $dd(x)$  entre as idades  $x$  e  $x+dx$  estaria quantificado pela equação diferencial

$$dd(x) = -dl(x) = u(x) \cdot l(x) \cdot dx = u(x) \left\{ l(0) \exp \left[ -\int_0^x u(x) dx \right] \right\} dx \quad (\text{I.4.8})$$

Note-se que, como dissemos antes, a diferencial de  $l(x)$  é negativa porque  $l(x)$  significa população e uma variação negativa de população significa exatamente o número de mortes. Mas como o conceito que queremos definir, número de mortes, é qualitativamente o oposto ao da população, então se pratica uma mudança de variável pela simples troca de sinal.

Integrando-se a Equação I.4.8 entre limites definidos se encontra o Número de Mortes em uma Dada Coorte entre as Idades  $x$  e  $x+n$

$${}_n d(x) = \int_x^{x+n} d d(x) = \int_x^{x+n} -dl(x) = \int_x^{x+n} u(x) \cdot l(x) \cdot dx \quad (\text{I.4.9})$$

que produzirá

$${}_n d(x) = l(x) - l(x+n) = \int_x^{x+n} u(x) \cdot l(x) \cdot dx \quad (\text{I.4.10})$$

onde a integral remanescente só poderá ser calculada quando conhecermos  $u(x)$  que por sua vez conduz a  $l(x)$ .

Particularizando a Equação I.4.10 para dois intervalos de especial interesse encontramos

$$d(x) = l(x) - l(x+1) = \int_x^{x+1} u(x) \cdot l(x) \cdot dx \quad (\text{I.4.11})$$

para o Número de Mortes em uma Dada Coorte entre as Idades  $x$  e  $x+1$ , ou seja, ao longo do ano em que se tem a idade  $x$ , e

$${}_w d(0) = l(0) - l(w) = \int_0^w u(x) \cdot l(x) \cdot dx = l(0) \quad (\text{I.4.12})$$

que diz ser o somatório de todas as mortes, em todos os instantes de sua existência, igual a sua dimensão original, mesmo não se tratando de população estacionária.

Uma palavra de cautela sobre a notação aqui empregada que apresenta muitas estruturas semelhantes, mas de significados radicalmente diferentes. Por exemplo, enquanto  $dx$  é a diferencial de tempo,  $d(x)$  é a função número de mortes numa coorte ao longo do ano em que vigora a idade  $x$ .

Dois conceitos de menor interesse para este modelo contínuo, mas de interesse para um confronto com o modelo discreto anterior, serão a seguir mencionados. O primeiro, Dimensão da Coorte no Meio do Ano de Idade  $x$ ,  $\bar{l}(x)$ , seria obtido pela aplicação da conhecida equação da média de uma função contínua em  $x$

$$\bar{l}(x) = \frac{1}{(x+1) - x} \int_x^{x+1} l(x) \cdot dx = l(0) \int_x^{x+1} \exp \left[ - \int_x^{x+1} u(x) \cdot dx \right] dx \quad (I.4.13)$$

expressão que, pelo visto, não tem a menor parecença com  $K_x$  ou  $K_x + \frac{1}{2}D_x$  do modelo discreto que usa funções decrementais lineares.

O segundo conceito seria o da Taxa de Mortalidade Específica por Idade,  $m(x)$ , que, repetindo a definição do modelo discreto, seria a razão entre o número de mortes no ano-idade  $x$  e a exposição à morte nesse mesmo ano  $x$ ,

$$m^*(x) = \frac{d(x)}{\bar{l}(x)} = \frac{\int_x^{x+1} u(x) \cdot l(x) \cdot dx}{\int_x^{x+1} l(x) \cdot dx} \quad (I.4.14)$$

Retomando o conceito de exposição à morte definido na Equação I.4.1 e integrando-o entre os limites  $x$  e  $x+n$  vem

$${}_nL(x) = \int_x^{x+n} dL(x) = \int_x^{x+n} l(x) \cdot dx \quad (I.4.15)$$

onde  ${}_nL(x)$  representa o agregado da Exposição à Morte dos Integrantes da Coorte que Viveram em Extensões Diversas entre  $x$  e  $x+n$ . A dimensão dessa variável é portanto pessoas vivas vezes anos e é a base para a atuação da morte.

Note-se que  $s_0$  pode estar exposto à morte quem está vivo e que a grandeza quantificada por  ${}_nL(x)$  representa o somatório das vivências esperadas futuras, a partir do instante  $x$ , de cada um dos indivíduos dessa coorte, mas limitadas ao instante superior  $x+n$ .

Façamos agora esse instante superior ser  $w$  e o que obteremos é a Exposição Residual à Morte de uma Coorte na Idade  $x$ ,  $T(x)$ , e que se expressa por

$$T(x) = \int_x^w l(x) \cdot dx \quad (I.4.16)$$

Dividindo-se essa grandeza pelo número de componentes da coorte na idade  $x$ , teremos o que se chama a Esperança Completa de Vida na Idade  $x$ ,  ${}^o_e(x)$ , ou Sobrevivência Média na Idade  $x$ .

$${}^o_e(x) = \frac{T(x)}{l(x)} \quad (I.4.17)$$

Fazendo-se  $x$  igual a zero encontraremos a Expectativa de Vida ao Nascer,  ${}^o_e_0$ , que é um dos mais importantes indicadores demográficos de uma população. Ele permite comparar um mesmo país em diferentes épocas e diferentes países numa mesma época, diferentes sexos num mesmo país e época, etc., detectando importantes diferenças nas esperanças de vidas de distintos grupos populacionais.  ${}^o_m_0$  também transporta valiosa informação sobre grupos recém-nascidos.

Se  ${}^o_e(x)$  é o período médio de vida dos integrantes desse grupo, seu inverso,  ${}^o_m(x)$ , é a Frequência Média de Mortes no grupo nos anos que restam à coorte para se extinguir e vale como uma taxa média de mortalidade ao longo desse período.

$${}^o_m(x) = \frac{1}{{}^o_e(x)} = \frac{l(x)}{T(x)} \quad (I.4.18)$$

Antes de prosseguir, registremos uma reflexão consolidadora das idéias acima. Cada coorte, nascida num dado instante  $dx$ , enfrenta a vida segundo uma dada função Força de Mortalidade que lhe é singular porque singular é cada coorte no que respeita aos inúmeros fatores sociais e tecnológicos que afetarão as vidas de seus integrantes.

A evolução constante da sociedade é a raiz das mudanças nessa função e das diferenças entre uma população de coortes reais e populações de coortes sintéticas.

Outra forma de comparar grupos entre si encontra paralelo nos índices de preços de Economia. Em lugar da cesta padrão com bens e serviços, temos a população padrão com as suas diferentes coortes. Em vez dos preços, temos as Taxas de mortalidade por coorte.

Assim comparada, a Taxa de Mortalidade Padronizada seria dada pela média das taxas de mortalidade em cada faixa etária ponderada pelo peso de cada uma delas no grupo.

Para uma população padrão e para o instante da análise, notaremos por  $K(x)$  a função Distribuição da População e por  $m(x)$  a função Força de Mortalidade, ambas relativas ao intervalo  $dx$  no entorno da idade genérica  $x$  que vai de zero a  $w$  e que cobre as infinitas coortes que compõem a população nesse instante.  $K(x)$  e  $m(x)$  não são assim funções do tempo  $x$  que as coortes vão viver no futuro, como o são em  $l(x)$  e  $u(x)$ , mas funções da idade  $x$  dos integrantes de uma população num mesmo instante que é o da análise.

$$sd = \frac{\int_0^w K(x) \cdot m(x) \cdot dx}{\int_0^w K(x) \cdot dx} \quad (I.4.19)$$

Esta equação merece ainda comentários adicionais. Seu numerador quantifica o total de mortes ocorridas no agregado de todas as idades, enquanto o denominador mensura o total da exposição à morte de todas as idades. Essa razão, conforme definida na Equação I.4.2, é uma força de mortalidade e não uma taxa de mortalidade como acima anunciado. Mas a análise dimensional pode facilmente constatar a semelhança entre as duas grandezas. Taxa de mortalidade tem a dimensão de número de mortes por pessoas vivas, tudo relativo a um ano, como se vê nas equações I.3.1, I.3.2 e I.4.14, enquanto exposição à morte tem a dimensão de pessoas mortas por pessoas vivas por ano, como se constata na equação I.4.2. Arrematando, a Taxa de mortalidade é um conceito finito próprio de um modelo discreto que pode ser usado também no modelo contínuo. Da mesma natureza, mas de uso próprio do modelo contínuo, temos o con-

ceito limite, mais rigoroso, de força de mortalidade.

Aqui, também, é desejável calcular o Período Médio de Vida, Dentro do Intervalo  $x$  a  $x+n$ , para os que nele Falecem,  ${}_n a(x)$ , que é a razão entre o somatório dos diferentes períodos vividos no intervalo e o somatório das pessoas falecidas. Como no Cálculo Infinitesimal as parcelas são infinitesimos e um somatório é uma integral, então

$${}_n a(x) = \frac{\int_x^{x+n} (t-x) \cdot l(t) \cdot u(t) \cdot dt}{\int_x^{x+n} l(t) \cdot u(t) \cdot dt} \quad (\text{I.4.20})$$

Na equação acima praticamos uma mudança linear de variável substituindo  $x$  por  $t=x+i$ , onde  $i$  é o período que se acrescenta a  $x$ , limite inferior do intervalo de integração, tal que  $i=t-x$  é exatamente o intervalo ponderador já expresso em  $t$ . Como  $di/dt=1$  ou,  $di=dt$ , a equação está infinitesimalmente homogênea.

Outra alternativa seria

$${}_n a(x) = \frac{\int_0^n i \cdot l(x+i) \cdot u(x+i) \cdot di}{\int_0^n l(x+i) \cdot u(x+i) \cdot di} = \frac{{}_n L(x) - n \cdot l(x+n)}{{}_n d(x)} \quad (\text{I.4.21})$$

Note-se que o denominador é a Equação I.4.9 que quantifica o número de mortes. Já o numerador é a mesma equação diferencial de I.4.9 ponderando os intervalos vividos,  $i$  ou  $t-x$ , e que integrada produz o "mesmo" numerador da Equação I.3.25.

Vimos na Equação I.4.14 a definição da Taxa de Mortalidade Específica por Idades, isto é, para intervalos de um ano. Considerando que as Tabelas de Sobrevivência, salvo para trechos extremos do espectro de idades, usam intervalos de cinco anos, convém rever aquela fórmula com o propósito de generalizá-la para qualquer intervalo  $n$ ,

$${}_n m(x) = \frac{{}_n d(x)}{{}_n L(x)} = \frac{\int_x^{x+n} u(x) \cdot l(x) \cdot dx}{\int_x^{x+n} l(x) \cdot dx}, \quad (\text{I.4.22})$$

em acordo com as Equações I.4.9 e I.4.15.

### I.5. UMA ANÁLISE GRÁFICA SIMPLES

Esta abordagem, que está retratada na Figura I.5.1, é mista de contínua e discreta e pretende dar uma visão gráfica dos fenômenos populacionais sendo conhecida como o diagrama de Lexis. É uma representação num sistema cartesiano, onde o eixo horizontal representa a variável contínua ano-calendário,  $t$ , e o eixo vertical significa a variável contínua ano-idade,  $x$ . Recordamos que, por hábito, chamamos de ano  $t$  todo o intervalo que vai de  $t$  a  $t+1-dt$ , e que dizemos ter idade  $x$  durante todo o período que vai de  $x$  a  $x+1-dx$ .

Adotando-se a mesma escala em ambos os eixos, cada vida está representada por uma flecha a  $45^\circ$  que nasce num dado ponto do eixo dos anos-calendário, mas sempre com idade zero, e que se dirige para o nordeste até que fe neça.

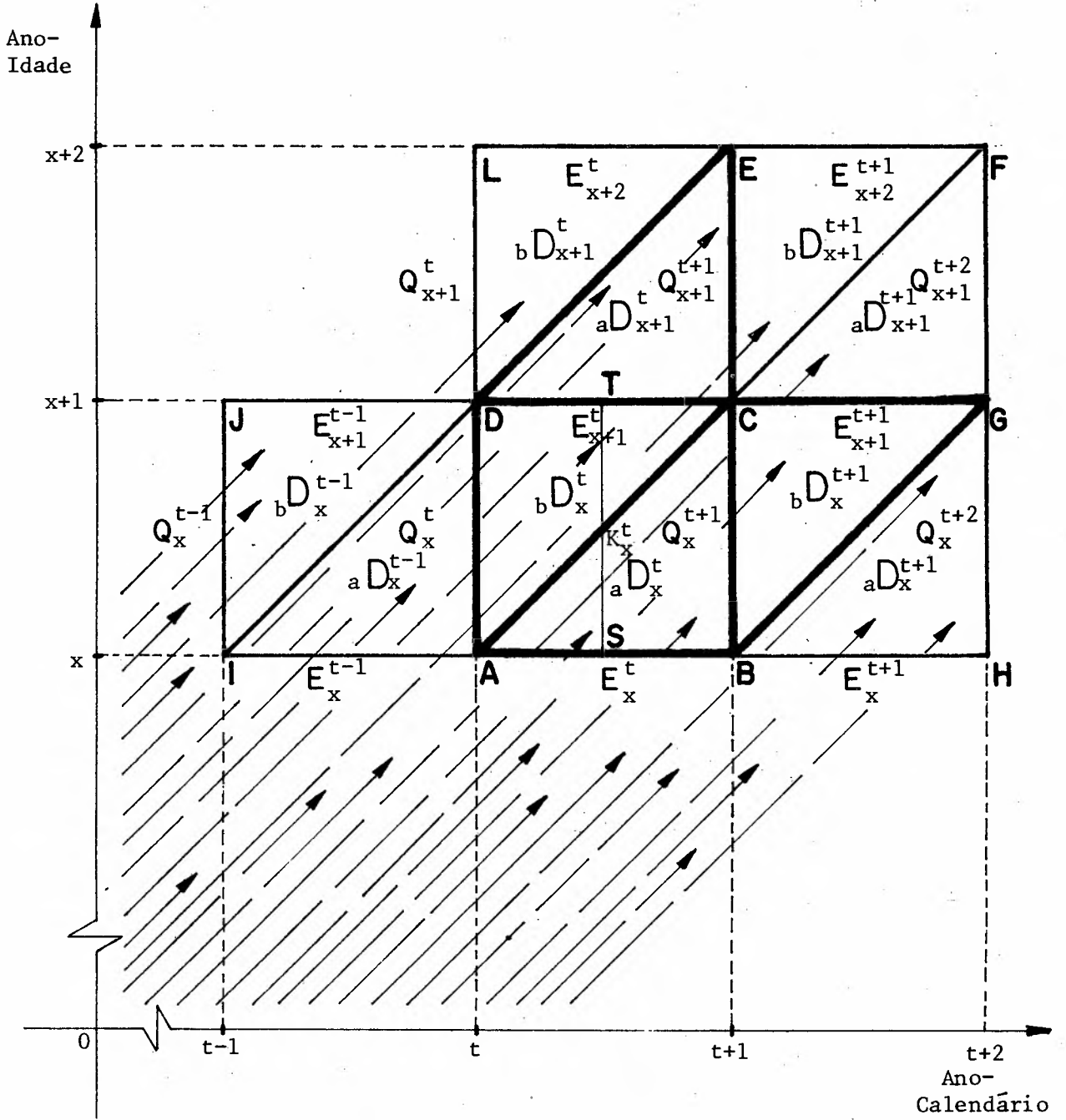
Uma população, no instante genérico  $t$ , é assim a coleção das flechas que interceptam a reta vertical que passa nesse  $t$ , ou seja, é o conjunto das pessoas vivas nesse instante que pode ser, por exemplo, um início de ano, um meio de ano ou outro instante qualquer.

Uma coorte real, no modelo discreto, é o elenco das flechas que nas cem entre os instantes  $t$  e  $t+1$  que delimitam um dado ano-calendário.

Uma coorte real, no modelo contínuo, é o conjunto das flechas que nas cem no intervalo de tempo infinitesimal,  $dt$ , centrado em  $t$ .

Denotaremos por  $Q_x^t$  o Número de Pessoas Vivas com Idade  $x$  como Expressão de seu Último Aniversário no Início do Ano-Calendário  $t$ , isto é, a quantidade de flechas cruzando a fronteira AD. Mantendo coerência com a nota ção anterior,  $K_x^t$  representará o Número de Pessoas Vivas com Idade  $x$  com o seu Último Aniversário no Meio do Ano-Calendário  $t$ , isto é, a quantidade de flechas que cruzam a fronteira ST.

Figura I.5.1  
As Linhas de Vida e o Diagrama de Lexis



Chamamos de  $E_x^t$  o Número de Pessoas que Completam o  $x$ -ésimo Aniversário ao Longo do Ano  $t$ , o que equivale a dizer, o número de retas que cruzam a fronteira AB.

Designaremos por fim de  $D_x^t$  o Número de Mortes Ocorridas ao Longo do Ano-Calendário  $t$  entre Pessoas com Último Aniversário Igual a  $x$ . Este é o número de flechas que se extinguem dentro do quadrado ABCD e é a soma de  $D_a^t$  com  $D_b^t$  a seguir definidos.

Tracemos a diagonal AC desse quadrilátero e chamemos  $D_a^t$  o Número de Mortes Ocorridas ao Longo do Ano-Calendário  $t$  entre Pessoas que Completaram seu  $x$ -ésimo Aniversário no Corrente Ano  $t$ . Este número conta aquelas flechas que pãram no triângulo ABC.

Paralelamente, convencionaremos chamar  $D_b^t$  o Número de Mortes Ocorridas ao Longo do Ano-Calendário  $t$  entre Pessoas que Completaram seu  $x$ -ésimo Aniversário no Ano Anterior,  $t-1$ . Este número é o das flechas que morrem no triângulo ACD.

Isto posto, é possível estabelecer três novas e distintas equações, além daquela já definida na Equação I.3.3, para a Probabilidade de um Indivíduo Morrer na Idade  $x$ . Suas diferenças decorrem das várias possibilidades de escolha do que colocar no numerador e no denominador dessa razão.

A primeira alternativa é considerar para denominador o total daquelas flechas que cruzam a fronteira AB,  $E_x^t$ , isto é, o total das pessoas que completam  $x$  anos durante o ano-calendário  $t$  e eleger para o numerador o subconjunto dessas flechas que finam antes de completar  $x+1$  anos, ou seja, daquelas flechas que se acabam no paralelogramo ABGC e que se localiza, no que tange ao eixo horizontal, nos anos  $t$  e  $t+1$ . Esta construção, que trata com uma idade mas mistura dois anos-calendário, está representada por

$$l_{q_x} = \frac{a D_x^t + b D_x^{t+1}}{E_x^t} = 1 - \frac{E_{x+1}^{t+1}}{E_x^t} \quad (\text{I.5.1})$$

onde a última fração é a probabilidade de sobrevivência do grupo ao ano-idade  $x$ .

A segunda possibilidade trata com um só ano-calendário, mas mistura duas idades. Põe em denominador o total das flechas que cruzam a fronteira AD,  $Q_x^t$ , isto é, o total das pessoas que ingressam no ano-calendário  $t$  podendo a

firmar que têm  $x$  anos de idade e coloca em numerador a parte dessas flechas que fenecem no paralelogramo ACED. No que respeita ao eixo das idades, este polígono se situa nas idades  $x$  e  $x+1$  e a expressão da nova probabilidade é

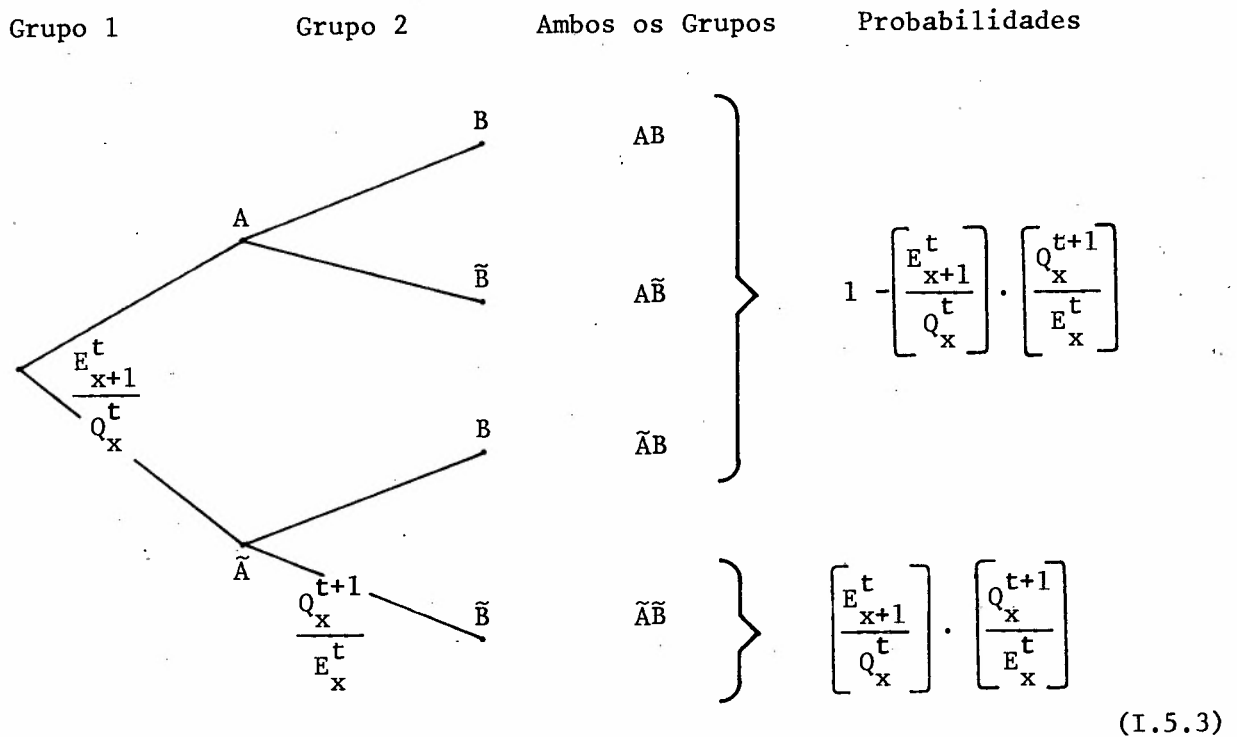
$${}^2q_x = \frac{b_x^D + a_{x+1}^D}{Q_x^t} = 1 - \frac{Q_{x+1}^{t+1}}{Q_x^t} \tag{I.5.2}$$

A derradeira das escolhas é a que se reputa como a preferida porque trata com uma só idade e com um só ano-calendário, mas sua construção é menos simples que as anteriores. Consideraremos dois grupos com idade  $x$  nesta construção. O primeiro é o dos que iniciam o ano  $t$  já tendo comemorado o  $x$ -ésimo aniversário e como tal estão representados pelas flechas que cruzam AD e invadem o triângulo ACD. O segundo é o dos que completam o  $x$ -ésimo aniversário ao longo do ano  $t$  e portanto suas flechas penetram no triângulo ABC pelo lado AB. Diferentemente das duas soluções anteriores, que tinham um só grupo no denominador, temos aqui dois grupos distintos.

Considerando a morte dentro do triângulo ACD para o primeiro grupo como evento A, e a morte dentro do triângulo ABC para o segundo grupo como evento B ( $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  representam os eventos sobrevivência para os dois grupos, respectivamente) e recorrendo à Álgebra dos Eventos e a uma árvore de probabilidades, como mostrada na Figura I.5.2,

Figura I.5.2

Árvore de Probabilidades de Mortes num Mesmo Ano e com Mesma Idade



obtemos a Equação I.5.3 que pode ser simplificada tal como segue

$${}^3q_x = 1 - \left[ 1 - \frac{b^D_x}{Q_x^t} \right] \left[ 1 - \frac{a^D_x}{E_x^t} \right] \approx \frac{b^D_x}{Q_x^t} + \frac{a^D_x}{E_x^t} \quad (\text{I.5.4})$$

Como se afirmou antes, a Equação I.5.3 apresenta mensurações relativas ao ano  $t$  e à idade  $x$ .

Neste contexto a Equação I.3.3 seria reescrita assim

$$q_x = \frac{a^D_x + b^D_x}{Q_x^t} \quad (\text{I.5.5})$$

que, como se vê, não coincide com nenhuma das três definições que acabamos de descrever.

## I.6. A FORÇA DE MORTALIDADE

Há nitidamente dois grupos de estudiosos interessados na Teoria do Conjunto de Pessoas, ainda que por razões distintas: os demógrafos, com interesses mais acadêmicos e de política populacional e os atuários, com objetivos mais pragmáticos relativos aos seguros e à previdência.

Ambos estão, de há muito, vivamente empenhados em ampliar os conhecimentos sobre as Leis de Mortalidade que comandam o processo de eliminação responsável pelo decréscimo inexorável de uma geração. É, assim, o conceito de Força de Mortalidade o fulcro de toda a questão.

Esses estudos se fizeram e se fazem segundo os modelos discreto e contínuo, sobre toda uma população ou sobre seus subconjuntos de sexo ou de segurados e não segurados, ou de ativos e aposentados, ou ainda sobre diferentes raças, ao longo de diferentes épocas, ou por qualquer outra categorização de interesse.

As primeiras tentativas foram naturalmente com o modelo discreto que, como vimos, omite o conceito de força de mortalidade "stricto sensu" para trabalhar com a probabilidade de mortalidade dentro de certo período.

O matemático francês Abraham De-Moivre<sup>1</sup>, em 1725, foi um dos primeiros a propor uma equação para uma variável demográfica e o fez para a mais evidente de todas elas que é o número de sobreviventes de uma coorte,  $l_x$ .

(1) TÜRLE, Heinrich. Actuaria - la matemática del seguro. Bogotá, Colômbia, Intergraficas Ltda., Segunda Edição, 1977. p. 34.

Propôs ele que  $l_x$  fosse representado pela mais simples de todas as funções, uma equação linear decrescente partindo do máximo no instante zero anos e caindo a zero no instante 86 anos, que ele considerou como idade máxima para sua época. Tal equação seria dada por

$$l_x = k(86-x) \quad (\text{I.6.1})$$

onde  $86k$  representaria  $l_0$ .

Disso decorre que a probabilidade de morte ao longo de um ano genérico  $x$  seria dada por

$$l_x^q = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{k(86-x) - k(86-x-1)}{k(86-x)} = \frac{1}{86-x} \quad (\text{I.6.2})$$

e que a força de mortalidade no seu conceito limite, por

$$u_x = - \frac{d [k(86-x)]}{[k(86-x)] dx} = \frac{1}{86-x} \quad (\text{I.6.3})$$

Este modelo não era uma boa representação da realidade, principalmente no segmento da primeira infância, quando o trecho da curva tem comportamento bem diverso do restante da vida.

Em 1825 foi a vez de Benjamin Gompertz<sup>2</sup> incursionar no modelo contínuo propondo que a perda da Força de Vida seja proporcional à própria Força da Vida,  $v(x)$ , função que ele definiu como sendo o inverso da Força de Morte  $u(x)$ . Assim, a razão entre o decremento infinitesimal de  $v(x)$ ,  $dv(x)$ , e o próprio  $v(x)$  seria uma constante ou

$$\frac{d v(x)}{v(x)} = k = \frac{d}{dx} \left[ \ln \frac{1}{u(x)} \right] \quad (\text{I.6.4})$$

Integrando indefinidamente, viria

$$\ln \frac{1}{u(x)} = k \cdot x + C$$

que, antilogaritmando e invertendo, daria

(2) TÜRLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.34.

$$u(x) = e^{-C} \cdot e^{-kx} = B \cdot e^{-kx} \quad (\text{I.6.5})$$

que é uma função exponencial monotonicamente ascendente, vez que o próprio  $k$  tem sinal negativo.

Substituindo  $u(x)$  na Equação I.4.5 vem

$$l(x) = l(0) \cdot e^{-B \int_0^x e^{-kx} dx} = l(0) \cdot e^{-B \left[ \frac{e^{-kx} - 1}{-k} \right]} = l(0) \cdot e^{\frac{B}{k} (e^{-kx} - 1)} \quad (\text{I.6.6})$$

A Probabilidade de Eliminação ao longo dos  $t$  anos que se iniciam na idade  $x$  estaria dada por

$${}_tq(x) = \frac{l(x) - l(x+t)}{l(x)} = \frac{l(0) \left[ e^{\frac{B}{k} (e^{-k(x)} - 1)} - e^{\frac{B}{k} (e^{-k(x+t)} - 1)} \right]}{l(0) e^{\frac{B}{k} (e^{-kx} - 1)}} = 1 - e^{\frac{B}{k} (e^{-k(x+t)} - 1) - \frac{B}{k} (e^{-kx} - 1)} \quad (\text{I.6.7})$$

e, logicamente,

$${}_tp(x) = e^{\frac{B}{k} (e^{-k(x+t)} - 1) - \frac{B}{k} (e^{-kx} - 1)} \quad (\text{I.6.8})$$

representaria a Probabilidade de Sobrevivência por mais  $t$  anos na Idade  $x$ .

Estas equações, que podem ter um aspecto bem mais simples se fizermos  $c = e^{-k}$  e  $g = e^{B/k}$ , ainda não caducaram de todo. Este é um modelo ainda hoje utilizado por demógrafos e atuários.

Em 1860, Guilherme Makeham<sup>3</sup> testou a lei de Gompertz na prática e verificou que alguns melhoramentos se faziam necessários.

Introduzindo as modificações acima, a probabilidade de sobrevivência por  $t$  anos a partir da idade  $x$ , segundo Gompertz, estaria representada por

$${}_tp(x) = g (c^t - 1) c^x \quad (\text{I.6.9})$$

que logaritmada daria

(3) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.35.

$$\ln \left[ {}_t p(x) \right] = (c^t - 1) c^x \ln c$$

As observações de Makeham com dados reais para a faixa de idades entre 20 e 80 anos revelaram que seria desejável acrescentar à Equação acima um termo negativo e linearmente proporcional ao intervalo  $t$  usado na análise de sobrevivência. Sua proposta para referida equação foi

$$\ln \left[ {}_t p(x) \right] = (c^t - 1) c^x \ln c + t \ln s \quad (\text{I.6.10})$$

onde  $s$  seria menor que 1, para tornar seu logaritmo negativo como desejado, e poderia ser expresso por  $s = e^{-A}$ , o que daria

$${}_t p(x) = e^{-At} e^{\frac{B}{k} (e^{-kt} - 1) e^{-kx}} \quad (\text{I.6.11})$$

para a probabilidade de sobrevivência por  $t$  anos além da idade  $x$ .

Essa escolha determina que

$$u(x) = A + B e^{-kx} \quad (\text{I.6.12})$$

ou seja, implica na adição de um termo constante à equação exponencial proposta por Gompertz, ou ainda, representa um deslocamento vertical, por uma constante  $A$ , da antiga curva de  $u(x)$ .

Isto posto, a dimensão da coorte variaria segundo

$$l(x) = l(0) e^{\int_0^x (A + B e^{-kx}) dx} = l(0) e^{-Ax + \frac{B}{k} (e^{-kx} - 1)} \quad (\text{I.6.13})$$

Sua aplicação nos instantes  $x$  e  $x+t$  na Equação I.6.7 produziria

$$\begin{aligned} {}_t q(x) &= 1 - e^{\left[ -A(x+t) + \frac{B}{k} (e^{-k(x+t)} - 1) \right] - \left[ -Ax + \frac{B}{k} (e^{-kx} - 1) \right]} = \\ &= 1 - e^{\left[ -At + \frac{B}{k} (e^{-kt} - 1) e^{-kx} \right]} \end{aligned} \quad (\text{I.6.14})$$

que se identifica com a Equação I.6.11.

Este modelo é ainda hoje muito referido e empregado por quantos preferem o tratamento analítico para o problema da sobrevivência.

Muitos outros modelos, teóricos e empíricos, há, nas óticas discretas ou contíguas, que procuram mensurar o fenômeno sob indagação. Citaremos a seguir "en passant" alguns trabalhos clássicos, mas sem a preocupação de apresentar seus detalhes.

J.M. Lambert<sup>4</sup>, em 1765, propôs para  $l(x)$  a seguinte função polinômica em  $x$

$$l(x) = a + b(x-45) + c(x-45)^2 + d(x-45)^3 + e(x-45)^4 + f(x-45)^5 \quad (\text{I.6.15})$$

Thomas Young e Littrow<sup>5</sup> preferiram utilizar uma função polinômica para a probabilidade de sobrevivência por  $t$  anos a partir da idade  $x$

$${}_t p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (\text{I.6.16})$$

Charles Babbage<sup>6</sup> estruturou uma equação em que  $l(x)$  dependeria não só de  $x$ , mas também de  $x-1$ , que tomou a forma da seguinte equação do 2º grau

$$l(x) = a + b(x) + \frac{cx(x-1)}{2} \quad (\text{I.6.17})$$

Dormoy<sup>7</sup>, em 1878, enunciou suas duas leis sobre demografia. Na primeira, a força de mortalidade é constante, o que implica

$$u(x) = k \quad ; \quad l(x) = l(0) e^{-xk}$$

$$e, \quad {}_1 q(x) = \frac{l(0)e^{-kx} - l(0)e^{-k(x+1)}}{l(0)e^{-kx}} = 1 - e^{-k} = \text{constante} \quad (\text{I.6.18})$$

Vê-se de logo que tal lei não traduz a realidade, já que a probabilidade de falecimento em cada idade não pode ser constante como anuncia.

Sua segunda lei admite que a força de mortalidade é uma função line

(4) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.36.

(5) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.36.

(6) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.37.

(7) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.37.

ar de  $x$  do tipo  $u(x) = ax$  cujas implicações seriam

$$l(x) = l(0) \cdot e^{-\int_0^x ax \, dx} = l(0) e^{-\frac{a}{2} x^2} \quad e,$$

$${}_t p(x) = 1 - e^{-\frac{a}{2} (t^2 - 2tx)} \quad (\text{I.6.19})$$

Lang<sup>8</sup> em 1868 propunha para  $l(x)$

$$l(x) = a + bc^x \quad (\text{I.6.20})$$

enquanto Ludwig Moser,<sup>9</sup> em 1839, optou por

$$l(x) = l(0) - ax^{\frac{1}{4}} - bx^{\frac{3}{4}} - cx^{\frac{7}{4}} \quad (\text{I.6.21})$$

Opperman<sup>10</sup> trabalhando com a força de mortalidade chegou à complexa expressão

$$u(x) = (a + bx) \cdot e^{kx} + c \cdot e^{qx} \quad (\text{I.6.22})$$

Thiele<sup>11</sup> decompôs a vida nos três períodos clássicos de infantes, adultos e senis e estruturou três equações distintas para a força de mortalidade, respectivamente

$$u_1(x) = a_1 e^{-k_1 x}$$

$$u_2(x) = a_2 e^{-\frac{1}{2} k_2 (x-c)^2}$$

$$u_3(x) = a_3 e^{k_3 x}$$

(I.6.22)

- (8) TÜRLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.38.  
 (9) TÜRLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.38.  
 (10) TÜRLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.38.  
 (11) TÜRLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.38.

Já E.J. Gumbel<sup>12</sup>, em 1928, propunha para  $l(x)$

$$l(x) = k e^{-\frac{1}{2} [u(x)]^2} \quad \text{onde}$$

$$u(x) = \frac{1}{2s} \left[ (x-h) + \sqrt{(x-h)^2 + 4s^2} \right] \quad (\text{I.6.23})$$

Steffenson<sup>13</sup>, por sua vez, hipotetizou que

$$l(x) = 10 \left[ ax^{\frac{1}{2}} + b \right] \quad (\text{I.6.24})$$

e seguindo essa estrutura algébrica Haper<sup>14</sup> ampliou-a para

$$l(x) = 10 \left[ ax + bx^{\frac{1}{2}} + c \right] + d \quad (\text{I.6.25})$$

Estes e outros trabalhos não mencionados tentaram soluções analíticas globais para as principais funções do problema de que nos ocupamos. Como a realidade é muito complexa para se conter dentro de modelo manejável, eles oferecem quando muito soluções satisfatórias.

Outra estratégia de solução é desistir de equações que vistam com perfeição o manequim que tentamos apalpar e tratar de quantificar os dados à mão, desenvolvendo algoritmos que produzam tabelas úteis para decisões nos campos da atuária e da demografia.

A partir daí, então, poderão ser empregadas técnicas numéricas de interpolação e gradação que produzam funções úteis para trechos da curva que nos interessa e para a particular coleção de dados que temos à mão. É do que nos ocuparemos a seguir.

## I.7. NOTAS SOBRE O CÁLCULO DE TABELAS DE SOBREVIVÊNCIA

Há diversos procedimentos para se calcular uma Tabela de Sobrevivência. Trataremos de descrever aqui, embora resumidamente, os mais referidos

(12) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.39.

(13) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.39.

(14) TURLER, H. Actuaria-la matematica del seguro. p.39.

na literatura disponível.

Recordemos que usamos notações diferentes para os modelos discreto e contínuo, como  $l_x$  e  $l(x)$  para representar a involução de uma coorte ao longo da vida. Para simplificar, usaremos uniformemente de agora por diante a notação com índice para as doze principais variáveis de uma Tabela de Sobre-  
vivência e que são  $K_{n_x}$ ,  $D_{n_x}$ ,  $M_{n_x}$ ,  $q_{n_x}$ ,  $p_{n_x}$ ,  $l_x$ ,  $d_{n_x}$ ,  $L_{n_x}$ ,  $m_{n_x}$ ,  $a_{n_x}$ ,  $T_x$  e  $e_x^o$ , bem como para outras variáveis que não comparecem nas tabelas, como  $u_x$ , e que interessam à discussão. A notação anterior voltará, no entanto, a ser utilizada sempre que a clareza a reclamar.

Excetuando-se os dois conceitos iniciais, que são valores observados, todos os demais são calculados com o auxílio das fórmulas já apresentadas em ambos os modelos para essas variáveis.

Uma primeira aproximação de uma Tabela de Sobre-  
vivência, como descrita por Keyfitz<sup>15</sup> à pág. 12, seria obtida da seguinte forma:

- 1) conhecidos os vetores  $K_{n_x}$  e  $D_{n_x}$ , calcula-se o vetor  $M_{n_x}$  e aceitam-se esses valores como para o vetor  $m_{n_x}$ ;
- 2) adota-se  $\frac{n}{2}$  para valor de cada escalar do vetor  $a_{n_x}$  dentro do pressuposto de que as mortes são lineares dentro do período  $n$ ;
- 3) calcula-se o vetor  $q_{n_x}$  com auxílio da fórmula abaixo, que é uma consequência algébrica das definições já conhecidas

$$n^q_x = \frac{n \cdot n^m_x}{1 + (n - a_{n_x}) n^m_x} \quad (\text{I.7.1})$$

- 4) calcula-se  $p_{n_x}$  como complemento de  $q_{n_x}$ ;
- 5) adota-se um valor arbitrário para  $l_0$ , raiz da coorte, digamos, 100.000;
- 6) calculam-se de forma recorrente os vetores  $d_{n_x}$  e  $l_x$  como uso das equações

$$d_{n_x} = l_x n^q_x ; \quad l_{x+n} = l_x - d_{n_x} ; \quad (\text{I.7.2})$$

- 7) escolhe-se uma equação para a integral de  $L_{n_x}$ , obtida pela técnica de interpolação polinomial determinantal que será vista adiante; uma escolha possível seria adotar a equação de 3º grau passando pelos quatro pontos da função  $l_x$  em  $l_{x-n}$ ,  $l_x$ ,  $l_{x+n}$  e  $l_{x+2n}$ ,

(15) KEYFITZ, Nathan. Introduction to the mathematics of population - with revisions. Reading, Massachusetts, Addison Wesley, 1977. p.12.

representada por

$${}_n L_x = \frac{13n}{24} (l_x + l_{x+n}) - \frac{n}{24} (l_{x-n} + l_{x+2n}) \quad ; \quad (I.7.3)$$

para cada escalar do vetor  ${}_n L_x$  se usará uma equação diferente apoiada em quatro pontos, sendo um anterior a  $x$ , outro em  $x$ , e dois posteriores a  $x$ ; de cada uma dessas equações extrai-se apenas um valor interpolado para  ${}_n L_x$ ;

8) refaz-se  ${}_n m_x$  com

$${}_n m_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (I.7.4)$$

9) calcula-se o vetor  $T_x$  com

$$T_x = {}_n L_x + {}_n L_{x+n} + \dots + {}_n L_{w-n} \quad (I.7.5)$$

10) calcula-se  ${}_x e^o$  através de

$${}_x e^o = \frac{T_x}{l_x} \quad (I.7.6)$$

Todos os doze conceitos descritos foram contemplados. Este método poderia ser classificado como um misto do modelo discreto e do contínuo; reinjetando-se o recém-calculado  ${}_n m_x$  na Equação I.7.1 pode-se torná-lo iterativo para aprimorar-lhe os resultados.

Um segundo procedimento para calcular uma Tabela de Vida, como se pode ver no Keyfitz<sup>16</sup> à pág. 29, propõe uma nova fórmula para calcular  ${}_n q_x$  e poderia ser resumido assim:

- 1) conhecidos os vetores  ${}_n K_x$  e  ${}_n D_x$ , calcula-se  ${}_n M_x$  que se aceita como um procurador de  $u_x = \text{constante}$  no intervalo  $x$  a  $x+n$ ;
- 2) calcula-se  ${}_n p_x$  através da fórmula

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = e^{-n \cdot {}_n M_x} \quad (I.7.7)$$

partindo-se da hipótese de que os sobreviventes de um período são a raiz da coorte do período seguinte que estará sujeita a  $u$

ma força de mortalidade constante mas distinta da que operou no período anterior; assim, aplicando-se a Equação I.4.5 nesta situação particular vem:

$$l_{x+n} = l_x \cdot e^{-\int_x^{x+n} M_x dx} = l_x e^{-n \cdot M_x} \quad (\text{I.7.8})$$

que conduz diretamente à Equação I.7.7;

- 3) calcula-se o vetor  ${}_n q_x$  por complemento de  ${}_n p_x$ ;
- 4) calculam-se todas as demais variáveis como no procedimento anterior, exceto para  ${}_n a_x$  e  ${}_n m_x$  que se obterão com o emprego das Equações I.3.25 e I.3.27, respectivamente.

Uma terceira maneira de se calcular uma Tabela de Sobrevivência, como ensinado pelo Keyfitz<sup>17</sup> na pág. 20, parte de uma outra construção para se obter  ${}_n p_x$  e conseqüentemente  ${}_n q_x$ . Seu algoritmo seria:

- 1) conhecendo-se os vetores observados  ${}_n K_x$  e  ${}_n D_x$ , calcula-se o vetor  ${}_n M_x$  que se aceita preliminarmente como  ${}_n m_x$ ;
- 2) admite-se inicialmente que  $l_x$  é uma função linear decrescente de  $x$  para cada intervalo de  $x$  a  $x+n$  ou generalizando, que  $l_x$  é uma função poligonal de  $x$ ; admite-se ainda que a área do trapézio abaixo de cada segmento linear de  $l_x$  representa uma primeira aproximação da exposição à morte  ${}_n L_x$ , que para  $n = 5$  seria dada por

$${}_n L_x = \int_0^5 l(x+t) dt \approx 5 \left[ \frac{l_x + l_{x+5}}{2} \right] \quad (\text{I.7.9})$$

e que será o denominador da Equação I.4.22 cujo numerador é a expressão de  ${}_n d_x$  ou de  $l_x - l_{x+5}$ ; lembrando que aceitamos a substituição de  ${}_n m_x$  por  ${}_n M_x$  na Equação I.4.22 e que conhecemos as expressões finitas de seu numerador e denominador, decorre que

$${}_5 M_x = \frac{l_x - l_{x+5}}{\frac{5}{2}(l_x + l_{x+5})} \quad ; \quad (\text{I.7.10})$$

dividindo-se numerador e denominador por  $l_x$  e resolvendo-se para

(17) KEYFITZ, N. Introduction to the mathematics of population. p.20.

$l_{x+5}/l_x$  vem

$${}_5p_x = \frac{l_{x+5}}{l_x} = \frac{2 - 5M_x}{2 + 5M_x} \quad (I.7.11)$$

que produz o vetor  ${}_5p_x$  ;

- 3) calcula-se  ${}_5q_x$  como complemento de  ${}_5p_x$  ;
- 4) calculam-se todas as demais variáveis na forma descrita para o segundo procedimento, inclusive  ${}_5m_x$  que transitoriamente adotou o valor de  ${}_5M_x$ .

Este método pode ser aplicado iterativamente injetando-se o novo valor de  ${}_5m_x$  na Equação I.7.11 para se chegar a valores mais apurados para  ${}_5q_x$  e todos os que lhe seguem.

Um quarto método para cálculo de Tabelas de Sobrevivência, também descrita por Keyfitz <sup>18</sup> a pág. 21, supõe que tanto a distribuição dos sobreviventes como a da força de mortalidade, dentro do intervalo de  $x$  a  $x+n$ , são linhas retas, o que nos conduz a uma nova expressão para  ${}_n p_x$  e, paralelamente, para  ${}_n q_x$ .

Seu algoritmo seria:

- 1) conhecidos  ${}_n K_x$  e  ${}_n D_x$  obtém-se o vetor  ${}_n M_x$  que se aceita transitoriamente como  ${}_n m_x$  ;
- 2) admite-se que  $l_x$  e  $u_x$  são duas funções lineares em  $w$ , no intervalo  $x$  a  $x+n$ , do tipo

$$l(x+t) = a + bw$$

$$u(x+t) = r + sw \quad (I.7.12)$$

onde  $w$  é uma variável instrumental que representa o afastamento do instante central do intervalo  $x + \frac{1}{2}n$ ; usando a definição de  ${}_n m_x$  da equação I.4.22 vem

$${}_n M_x = \frac{\int_{-n/2}^{+n/2} (a+bw)(r+sw) dw}{\int_{-n/2}^{+n/2} (a+bw) dw} = \frac{arn + \frac{bsn^3}{12}}{na} = r + \frac{b \cdot s \cdot n^3}{12na} \quad (I.7.13)$$

de onde tiramos o valor do coeficiente linear  $r$  da equação de  $u(x+t)$

$$r = \frac{M}{n^x} - \frac{bsn^3}{12na} \quad ; \quad (I.7.14)$$

admitindo que  ${}_n K_x$  é a integral de  $l_x$  no intervalo  $w_1 = -\frac{n}{2}$  a  $w_2 = +\frac{n}{2}$  vem

$${}_n K_x = \int_{-\frac{n}{2}}^{+\frac{n}{2}} (a+bw)dw = na \quad (I.7.15)$$

que substituído em I.7.14 dá

$$r = \frac{M}{n^x} - \frac{bsn^3}{12 \frac{K}{n^x}} \quad (I.7.16)$$

mas que ainda não permite o de cálculo  $r$ , já que desconhecemos o valor de  $b$  e  $s$ ; para obtê-los usaremos fórmulas de interpolação apoiadas em dois pontos vizinhos, tais como

$$b = \frac{{}_n K_{x+n} - {}_n K_{x-n}}{2n^2} \quad ; \quad s = \frac{{}_n M_{x+n} - {}_n M_{x-n}}{2n} \quad (I.7.17)$$

que tornam possível calcular o termo integral da força de mortalidade que comparece como expoente na equação de  $l(x+n)$  posto que,

$$\begin{aligned} \int_0^n u(x+t) &= \int_{-n/2}^{+n/2} (r+sw)dw = nr = n \left[ \frac{M}{n^x} - \frac{bsn^3}{12 \frac{K}{n^x}} \right] = \\ &= n \cdot \frac{M}{n^x} - \frac{nn^3}{4n^3} \frac{\left[ {}_n K_{x+n} - {}_n K_{x-n} \right] \left[ {}_n M_{x+n} - {}_n M_{x-n} \right]}{12 \frac{K}{n^x}} = n \cdot \frac{M}{n^x} + C \end{aligned} \quad (I.7.18)$$

onde  $C$  é um termo corretivo que se traduz por

$$C = \frac{n}{48} \frac{K}{n} \left( \binom{K}{n} \binom{K}{x-n} - \binom{K}{n} \binom{K}{x+n} \right) \left( \binom{M}{n} \binom{M}{x-n} - \binom{M}{n} \binom{M}{x+n} \right) \quad ; \quad (\text{I.7.19})$$

3) aplicando-se a equação de  $l(x)$  nesse intervalo vem

$$l(x+n) = l(x) \exp \left[ -n \cdot \binom{M}{n} \binom{M}{x} + C \right] \quad (\text{I.7.20})$$

que permite calcular os vetores  ${}_n p_x$  e  ${}_n q_x$

$$1 - {}_n q_x = {}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \exp \left[ -n \cdot \binom{M}{n} \binom{M}{x} + C \right] \quad ; \quad (\text{I.7.21})$$

4) de posse de  ${}_n q_x$  seguem-se todos os passos já apontados nos dois procedimentos anteriores, podendo-se reinjetar o  ${}_n m_x$  encontrado para alimentar um processo iterativo de aprimoramento da tabela.

Antes de prosseguirmos com a discussão de novos métodos para cálculo de Tabelas de Sobrevivência, convém esclarecer um ponto que ficou pendente na equação I.7.3.

A Álgebra Linear nos ensina que se uma função de  $x$ ,  $l(x)$ , é uma combinação linear de monômios, com distintas estruturas algébricas em  $x$  como, por exemplo,

$$l(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

ou

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D - l(x) = 0 \quad (\text{I.7.22})$$

é possível calcular-se a exata integral definida dessa função entre os pontos  $a$  e  $b$ , mesmo sem se conhecerem os coeficientes que dela participam, mas conhecendo-se os valores dos  $n$  pares ordenados  $x$ ,  $l(x)$  por onde passa a função, sendo  $n$  o número de coeficientes numéricos presentes na função  $l(x)$ .

Esta técnica que se chama de Interpolação Polinomial por Equação Determinantal tem muitas outras aplicações, permitindo a obtenção das equações literais, e de suas derivadas e de equações de interpolação osculatória, entre outras.

No caso da integral definida de  $l(x)$  entre  $a$  e  $b$ , a primeira linha do determinante a ser construído conterá a expressão dessa integral como se vê abaixo, partindo da Equação (I.7.22)

$$\int_a^b l(x) dx = A \int_a^b x^3 dx + B \int_a^b x^2 dx + C \int_a^b x dx + D \int_a^b dx =$$

$$= A \left[ \frac{b^4 - a^4}{4} \right] + B \left[ \frac{b^3 - a^3}{3} \right] + C \left[ \frac{b^2 - a^2}{2} \right] + D(b-a) \quad (\text{I.7.23})$$

ou,

$$A \left[ \frac{b^4 - a^4}{4} \right] + B \left[ \frac{b^3 - a^3}{3} \right] + C \left[ \frac{b^2 - a^2}{2} \right] + D(b-a) - \int_a^b l(x) dx = 0$$

A equação determinantal seria formada pelos coeficientes numéricos dos coeficientes lineares  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  e também pelos valores de  $l(x)$  para os  $n$  pontos conhecidos; reserva-se a primeira linha para idêntico tratamento a partir da Equação I.7.23, para se compor a equação seguinte,

$$\begin{vmatrix} \frac{b^4 - a^4}{4} & \frac{b^3 - a^3}{3} & \frac{b^2 - a^2}{2} & (b-a) & - \int_a^b l(x) dx \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 & -l(x_1) \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 & -l(x_2) \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 & -l(x_3) \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 & -l(x_4) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I.7.24})$$

Ter seu determinante nulo é a condição para que as cinco equações contidas na matriz sejam consistentes entre si, apoiadas no mesmo conjunto de coeficientes A, B, C e D. Observe-se que todos os 25 termos, exceto  $\int_a^b 1(x)dx$ , são números perfeitamente conhecidos, cabendo pois, dessa igualdade extrair o valor da única incôgnita presente, como é mostrado a seguir.

Suponhamos que dos quatro pontos assinalados, o primeiro seja  $x-5$ , o segundo  $x$ , o terceiro  $x+5$  e o último  $x+10$  e que nos interessa conhecer a integral de  $1(x)$  entre os pontos  $a=x$  e  $b=x+5$ . A nova equação determinantal será

$$\begin{vmatrix} \frac{(x+5)^4 - x^4}{4} & \frac{(x+5)^3 - x^3}{3} & \frac{(x+5)^2 - x^2}{2} & (x+5) - x & - \int_x^{x+5} 1(x)dx \\ (x-5)^3 & (x-5)^2 & (x-5) & 1 & - \frac{1}{x-5} \\ x^3 & x^2 & x & 1 & - \frac{1}{x} \\ (x+5)^3 & (x+5)^2 & (x+5) & 1 & - \frac{1}{x+5} \\ (x+10)^3 & (x+10)^2 & (x+10) & 1 & - \frac{1}{x+10} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I.7.25})$$

e sua solução, se existir, para o que o denominador não poderá ser nulo, será obtida por

$$\int_x^{x+5} 1(x)dx = \frac{\begin{vmatrix} \frac{(x+5)^4 - x^4}{4} & \frac{(x+5)^3 - x^3}{3} & \frac{(x+5)^2 - x^2}{2} & 5 & 0 \\ (x-5)^3 & (x-5)^2 & (x-5) & 1 & -\frac{1}{x-5} \\ x^3 & x^2 & x & 1 & -\frac{1}{x} \\ (x+5)^3 & (x+5)^2 & (x+5) & 1 & -\frac{1}{x+5} \\ (x+10)^3 & (x+10)^2 & (x+10) & 1 & -\frac{1}{x+10} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x-5)^3 & (x-5)^2 & (x-5) & 1 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ (x+5)^3 & (x+5)^2 & (x+5) & 1 \\ (x+10)^3 & (x+10)^2 & (x+10) & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{13 \cdot 5}{24} (1_x + 1_{x+5}) - \frac{5}{24} (1_{x-5} + 1_{x+10}) \quad (\text{I.7.27})$$

Este resultado é a particularização da Equação I.7.3 para  $n=5$ , equação esta que pode ser utilizada, a partir da mesma origem  $x$ , mas com outras amplitudes  $n$ , desde que  $x+n$  não supere  $x+2n$ , limite superior para a validade da equação do 3º grau que se esconde por trás dessa equação.

Este procedimento com integral definida não é um método de regressão polinomial. Ele não calcula os coeficientes A, B, C e D nem  $R^2$ . Ademais, a função implícita que ele incorpora passa exatamente em todos os quatro pontos utilizados e não através da nuvem desses pontos, já que todas as equações do determinante I.7.25 são satisfeitas.

Adicionalmente, a integral calculada não é uma aproximação, como a que se obtém com o método de Simpson ou o trapezoidal, mas o exato cálculo dessa integral como a que se obteria se dispuzéssemos da função  $l(x)$ .

Suponhamos que nós conhecemos essa função, por exemplo

$$l(x) = -0,01x^3 - 10x^2 + 0,01x + 10.000 \quad (\text{I.7.28})$$

que produz os seguintes pares ordenados

$x_j$	$l(x_j)$
0	10.000,0
5	9.748,8
10	8.990,1
15	7.716,4

e que desejamos integrá-la entre  $a = 5$  e  $b = 10$ .

O emprego do Cálculo Integral produziria

$$\begin{aligned} \int_5^{10} l(x) dx &= -0,01 \int_5^{10} x^3 dx - 10 \int_5^{10} x^2 dx + 0,01 \int_5^{10} x dx + 10.000 \int_5^{10} dx = \\ &= -0,01 \left[ \frac{10^4 - 5^4}{4} \right] - 10 \left[ \frac{10^3 - 5^3}{3} \right] + 0,01 \left[ \frac{10^2 - 5^2}{2} \right] + 10.000(10-5) = \\ &= -23,4375 - 2.916,6667 + 0,3750 + 50.000,0000 = 47.060,2708 \quad (\text{I.7.29}) \end{aligned}$$

O emprego da Interpolação Polinomial Determinantal produziria, com o emprego da Equação I.7.27

$$\int_5^{10} l(x) dx = \frac{13x5}{24} (9.748,8 + 8.990,1) - \frac{5}{24} (10.000 + 7.716,4) = 47.060,2708 \quad (\text{I.7.30})$$

que é idêntico ao anterior e, mais que isso, é o valor da  ${}_5L_5$ , isto é, a exposição à morte de uma coorte que se inicia no instante zero com 10.000 membros e que apresenta no intervalo de idades entre 5 e 10 anos uma exposição à morte - "pessoas vivas" vezes "tempo vivido" - de 47.060 pessoas/ano. Este mesmo valor se encontrará, com mais trabalho, calculando-se a razão dos dois determinantes da Equação I.7.26.

O método sob comentário produziria também os coeficientes A, B, C e D, se os quizéssemos. Bastaria para isso colocar na primeira linha da Equação determinantal I.7.25,  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$ , 1 e  $l(x)$  e resolvê-la com o mesmo algoritmo representado pela Equação I.7.26. A diferença fundamental é que, exceto o algarismo 1, todos os demais elementos introduzidos são literais, o que provocará para  $l(x)$  não uma quantidade numérica como na Equação I.7.30, mas um polinômio de terceiro grau inteiro em  $x$  com todos os seus coeficientes explicitados.

O Dr. Eduardo Arriaga<sup>19</sup>, do Instituto de Estudos Internacionais da Universidade da Califórnia, Campus de Berkeley, é autor de várias obras da Série de Monografias sobre População, patrocinada pelo "International Population and Urban Research Office" e pelo Departamento de Demografia daquela Universidade. Dentre elas se destacam "Mortality Decline and its Demographic effects in Latin America" e "New Life Tables for Latin American Populations in the Nineteenth and Twentieth Centuries" onde encontramos interessantes estudos demográficos sobre o Brasil.

Dois métodos de construção de Tabelas de Sobrevivência são encontrados no último desses trabalhos citados e se prestam, respectivamente, para países onde:

- i) há estatísticas vitais abundantes e confiáveis além das convencionais;
- ii) os dados disponíveis resumem-se a Censos razoavelmente bem conduzidos mas sem estatísticas de mortalidade.

O primeiro, denominado Método A, é uma variante dos procedimentos já descritos acima. Requer informações sobre população e sobre mortalidade por faixas de idade e seu algoritmo seria resumido da seguinte forma:

- 1) conhecidos  $K_{n,x}$  e  $D_{n,x}$  calcula-se o vetor taxa de mortalidade central do período  $x$  a  $x+n$ , ou seja,  $m_{n,x}$ ;
- 2) recordando que  $u_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{m_{n,x}}{n}$ , calcula-se essa força de mortalidade no instante  $x$  através da interpolação com uma equação do 3º grau sobre quatro valores de  $m_{n,x}$ , nomeadamente  ${}_{-2n}m_x$ ,  ${}_{-n}m_x$ ,  $m_x$

(19) ARRIAGA, Eduardo. New life tables for latin american populations in the nineteenth and twentieth centuries. Berkeley, Inst. of International Studies, Univ. of CA, 1968. Population Monograph Série Nº 3.; Mortality decline and its demographic effects in latin america. Berkeley, Inst. of International Studies, Univ. of CA. Population Monograph Series.

e  ${}_{2n}m_x$ ; esta equação interpolante está dada por

$$u(x) = \frac{1}{6} (-{}_{2n}m_x+4 \cdot {}_{-n}m_x+4 \cdot {}_n m_x-2 \cdot {}_{2n}m_x) \quad ; \quad (I.7.31)$$

- 3) faz-se então um ajustamento gráfico ou analítico dos resultados obtidos para  $u_x$  e que serão utilizados no cálculo de  ${}_n p_x$  e  ${}_n q_x$  a seguir;
- 4) elege-se a lei de mortalidade de Gompertz para este procedimento de cálculo, o que implica em  $u_x = Be^{-kx}$  como mostrado na Equação I.6.5 e uma raiz de corte,  $l_0$ , de 100.000 pessoas; revendo a Equação I.4.2 sob outro ângulo, chega-se a

$$\int_x^{x+n} u(x) dx = - \int_x^{x+n} \frac{dl(x)}{l(x)} - \ln \left[ \frac{l(x+n)}{l(x)} \right] = - \ln {}_n p_x \quad (I.7.32a)$$

ou ainda a

$$\begin{aligned} \ln({}_n p_x) &= - \int_x^{x+n} u(x) dx = -B \int_x^{x+n} e^{-kx} dx = -B \left[ \frac{e^{-k(x+n)} - e^{-kx}}{-k} \right] = \\ &= \frac{u(x+n) - u(x)}{+k} = \frac{u(x+n) - u(x)}{- \left\{ \ln [u(x+n)] - \ln [u(x)] \right\} \frac{1}{n}} = - \frac{{}_n \Delta u(x)}{{}_n \Delta \ln [u(x)]} \end{aligned} \quad (I.7.32b)$$

já que se  $u(x+t) = Be^{-(x+t)}$ , segundo Gompertz,

$$\begin{aligned} \ln [u(x+n)] &= -kx - kn + \ln B \\ -\ln [u(x)] &= +kx - \ln B \\ \hline {}_n \ln [u(x)] &= -kn \end{aligned} \quad ; \quad (I.7.33)$$

observe-se que se  ${}_n p_x < 1$ , seu logaritmo tem que ser negativo; análogamente a Equação I.7.32b chega-se aos vetores  ${}_n p_x$  e  ${}_n q_x$ ;

- 5) conhecendo-se  $u_x$ ,  ${}_n p_x$  e  ${}_n q_x$ , calcula-se facilmente  $l_x$  e todo o elenco de variáveis já tratadas nos outros procedimentos aqui mos

trados.

O Brasil já realizou nove censos, nos anos de 1872, 1890, 1900, 1920, 1940, 1950, 1960, 1970 e 1980, mas estatísticas de mortalidade por idade ainda não são compiladas. Por isso, os cinco métodos acima descritos não podem ser aplicados, já que todos requerem o conhecimento do vetor  $D_n x$ .

Para tratar esse tipo de caso é que se concebeu o Método B de Arriaga, baseado na Teoria da População Estável na qual o Brasil se enquadra razoavelmente bem.

A utilização deste método impõe portanto duas restrições:

- i) Taxas constantes (ou quase) de fertilidade e de mortalidade por um razoável intervalo de tempo no passado;
- ii) migrações internacionais insignificantes no mesmo período passado.

A despeito dos fluxos migratórios intensos no final do século passado determinados pelas economias do café no Centro-Sul e da borracha no vale do Amazonas, os movimentos migratórios no corrente século têm tido pouca significação quando comparados à população global e por esta razão o método que adiante detalharemos pode ser aplicado adequadamente.

Em adição aos pré-requisitos já mencionados, os outros requerimentos desse método são:

- 1) que se disponha de contagens censitárias que oferecem contagens completas para os dez grupos de cinco anos de intervalo existentes entre 10 e 60 anos, sendo dispensáveis dados fora desses limites de idade;
- 2) que, se houver subcontagem, ela esteja uniformemente distribuída entre os grupos; e
- 3) que a estimativa da taxa de crescimento natural seja tão acurada quanto possível.

Uma População Estável, diferentemente de População Estacionária, é aquela que, embora crescendo o seu contingente global, mantém-se estável nas proporções do número de pessoas nos diferentes grupos de idade. É por esta razão que as contagens devem ser confiáveis ou, se houver viés, que seja de sorte a não introduzir erro no cálculo dessas proporções.

A Taxa Natural de Crescimento no período  $t$ ,  $r(t)$ , é o resultado da atuação conjunta da Taxa Bruta de Natalidade,  $b$ , e da Taxa Bruta de Mortalidade,  $d$ , sobre a população  $K(t)$

$$r(t) = \frac{1}{K(t)} \left[ \frac{dK(t)}{dt} \right] \quad (\text{I.7.34})$$

e se  $r(t) = \text{constante}$

$$K(t) = K(0) e^{rt} \quad \text{e} \quad B(t) = B(0) e^{rt} \quad (\text{I.7.35})$$

sendo  $B(t)$  e  $K(t)$  o número de nascimentos e o total da população no ano  $t$ , respectivamente.

Sendo uma população estável um caso simplificado de uma população real, equações particulares derivadas do modelo geral comandam seu comportamento populacional como nos mostra Keyfitz<sup>20</sup> em seu Capítulo Sétimo.

Uma das equações fundamentais da Teoria da População Estável é

$$c(x) = b \cdot e^{-rx} \cdot {}_x p_0 \quad (\text{I.7.36})$$

onde:

$c(x)$  = proporção do grupo com idade  $x$  no total da população

$b$  = taxa bruta ou intrínseca de natalidade

$r$  = taxa média ou intrínseca de crescimento

${}_x p_0$  = probabilidade de sobrevivência entre zero e  $x$  anos de idade.

Tentaremos aqui abreviar ao máximo sua demonstração. Ela trata inicialmente de uma população de mulheres onde todas as variáveis nela utilizadas são relativas só à população feminina que está sujeita ao longo do tempo à mesma função da força de mortalidade.

As equações antes vistas valem, como já foi ressaltado, para esse sub-conjunto da população total. Mantendo-se as notações e nomenclaturas já conhecidas, recapitulamos que

$$D = \int_0^w l(x) \cdot u(x) \cdot dx \quad ; \quad K = \int_0^w l(x) \cdot dx \quad (\text{I.7.37})$$

e definimos Proporção Infinitesimal de Quem Está na Exata Idade  $x$  sobre o Total da População como a diferencial

(20) KEYFITZ, N. Introduction to the mathematics of population. p.170.

$$c(x)dx = \frac{l(x) dx}{\int_0^w l(x)dx} = \frac{l(x)dx}{K} \quad (\text{I.7.38})$$

Dessa forma, a taxa bruta de mortalidade,  $d$ , em função de  $c(x)$  será dada por

$$\begin{aligned} d = \frac{D}{K} &= \frac{\int_0^w u(x)l(x)dx}{\int_0^w l(x)dx} = \frac{\int_0^w u(x)\frac{l(x)dx}{K}}{\int_0^w \frac{l(x)dx}{K}} = \frac{\int_0^w u(x)c(x)dx}{\int_0^w c(x)dx} = \\ &= \int_0^w u(x)c(x)dx = - \int_0^w c(x) d \left[ \ln l(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.7.39})$$

já que  $\int_0^w c(x)dx = 1$

A taxa específica da mortalidade no intervalo de  $x$  a  $x+n$ , também em função de  $c(x)$ , seria quantificada por

$$M_{n|x} = \frac{\int_x^{x+n} u(x)l(x)dx}{\int_x^{x+n} l(x)dx} = \frac{\int_x^{x+n} u(x)c(x)dx}{\int_x^{x+n} c(x)dx} \quad (\text{I.7.40})$$

Façamos para a natalidade uma revisão semelhante à da mortalidade, mas definamos antes, à semelhança de Força de Mortalidade, uma função Força de Natalidade,  $n(x)$ , assim expressa

$$n(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x B(x)}{\Delta_x l(x)} \quad (\text{I.7.41})$$

onde  $\Delta_x^B$  é o número de meninas nascidas de mulheres com idade entre  $x$  e  $x + \Delta x$  que somam  $\Delta_x^1$ .

A Taxa Bruta de Natalidade ficaria dada por

$$b = \frac{\int_i^j n(x)l(x)dx}{\int_0^w l(x)dx} = \frac{\int_i^j n(x)c(x)dx}{\int_0^w c(x)dx} = \int_i^j n(x)c(x)dx \quad (I.7.42)$$

onde  $i$  e  $j$  representam o início e o fim do período de fertilidade feminina e que poderiam ser substituídos, respectivamente, por 0 e  $w$  se a função  $n(x)$  traduz a infertilidade fora do período de  $i$  a  $j$ .

A análise agora requer a distinção entre as variáveis tempo,  $t$  e idade,  $a$ , para destacar que quem tem idade  $a$  no tempo  $t$  nasceu no tempo  $t-a$ .

Assim a população feminina com idade  $x$  no tempo  $t$  seria mensurada por

$$l(x,t) = B(t-x) \frac{l(x)}{l(0)} = B(t-x) {}_x p_0 \quad (I.7.43)$$

onde  $l(x,t)$  representa o número de meninas que ainda sobrevivem na idade  $x$  no ano  $t$ .

Se assim é, e lembrando as equações I.7.43 e I.7.35, temos

$$\begin{aligned} c(x,t) &= \frac{l(x,t)}{K(t)} = \frac{B(t-x) {}_x p_0}{\int_0^w B(t-x) {}_x p_0 dx} = \frac{K(0) e^{r(t-x)} {}_x p_0}{K(0) \int_0^w e^{r(t-x)} {}_x p_0 dx} = \\ &= \frac{e^{-rx} {}_x p_0}{\int_0^w e^{-rx} {}_x p_0 dx} \quad (I.7.44) \end{aligned}$$

Se  $x = 0$ , o que implica em  ${}_x p_0 = 1$ ,

$$c(0,t) = \frac{B(t)}{K(t)} = b(t) = \frac{1}{\int_0^w e^{-rx} {}_x p_0 dx} \quad (\text{I.7.45})$$

Substituindo o resultado da equação I.7.45 na equação I.7.44, vem

$$c(x,t) = b(t) e^{-rx} {}_x p_0 \quad (\text{I.7.46})$$

que não é função de  $t$  e que no contexto do conceito de população estável omite o ano  $t$  para se tornar a Equação I.7.36 já enunciada e que é a base do Método B de Arriaga que agora detalharemos. Esta equação pode ser aplicada ao sexo masculino ou ao conjunto dos dois sexos, desde que se usem os parâmetros adequados.

Observando melhor  ${}_x p_0$ , vê-se que é o mesmo que  $l_x$  para uma coorte de dimensão inicial unitária. Substituindo, vem

$$l(x) = \frac{1}{b} c(x) e^{rx} \quad (\text{I.7.47})$$

que só vale para a exata idade  $x$ .

Os grupos de idade quinquenais podem ser obtidos modificando-se a equação anterior para

$${}_5L_x = \frac{1}{b} {}_{x+5}C_x e^{r(x+2,5)} \quad (\text{I.7.48})$$

que representa uma aplicação da Equação I.7.39, com a redefinição de três conceitos a saber:

- 1)  ${}_5L_x$  é o número de pessoas com idades entre  $x$  e  $x+5$  de uma tabela de sobrevivência com raiz unitária;
- 2)  ${}_{x+5}C_x$  é a proporção da dimensão do grupo entre idades  $x$  e  $x+5$  no total da população;
- 3)  $x+2,5$  é a idade média do grupo estudado.

Para o cálculo de  ${}_5L_x$  são necessários três dados:

- 1)  ${}_{x+5}C_x$ , que é retirado do último censo disponível;
- 2)  $r$ , que é obtido com a média geométrica de crescimento entre os dois últimos censos;
- 3)  $b$ , a taxa intrínseca de natalidade, que é obtida da seguinte

maneira:

logaritmando a Equação I.7.48, obtêm-se

$$\ln \left[ \frac{x+5 C_x}{5 L_x} \right] = \ln b - r(x+2,5) \quad (\text{I.7.49})$$

que é uma equação linear de  $x+2,5$ , cujo coeficiente angular é  $r$  e cujo coeficiente linear é o logaritmo do  $b$  que buscamos; uma regressão pelo método dos mínimos quadrados nos dará esse  $b$  se dispusermos dos pares ordenados  $x,y$ ; acontece que para dispormos do  $y$  é preciso ter  $5 L_x$  ainda indisponível.

Arriaga<sup>21</sup> propõe duas soluções para a pendência anterior. Tomar os  $5 L_x$  por empréstimo de uma tabela feita para um país com características demográficas semelhantes, ou tomá-los do manual das Nações Unidas, "Methods for Population Projections by Sex and Age - ST/SOA/Series A - Population Studies nº 25 - New York 1956, pages 78-79"; este manual dispõe de vários conjuntos de  $5 L_x$  e a escolha de um deles se fará debaixo de restrição de que a reta obtida deverá ser a que apresenta a inclinação mais próxima daquela representada pelo  $r$  já conhecido.

Obtida a equação de regressão calculam-se novos  $x+5 C_x$  para o intervalo 10 a 60 anos e também para as faixas de idade fora dele, exceto para o grupo aberto de 85 ou mais anos de idade. Em seguida calculam-se os  $5 L_x$  definitivos com a Equação I.7.48.

Os valores de  $l_x$  para as idades abaixo de 10 anos são obtidos por interpolação polinomial com equações do 3º grau apoiadas em valores de  $L_x$ , obtidos estes pela aplicação dos multiplicadores de Beer sobre os valores de  $5 L_x$  conhecidos para as vizinhanças desse intervalo, técnica essa também descrita por Keyfitz<sup>22</sup> às páginas 232-234 de seu livro já mencionado.

Os valores de  $l_x$  para as demais idades são obtidos igualmente por interpolação polinomial diretamente sobre os valores dos  $5 L_x$  disponíveis.

Conhecidos os  $l_x$ , todos os demais atributos integrantes de uma Tabela de Sobrevivência são calculados como descrito nos cinco procedimentos anteriores.

Alguns problemas, no entanto, remanescem. Primeiro, como se desconhece  $l_{85}$ , o cálculo de  $5 P_{80}$  é feito por extrapolação com uma curva do 4º grau apoiada nos cinco pontos anteriores e, assim,  $l_{85}$  vem com

$$l_{85} = l_{80} \cdot 5 P_{80} \quad (\text{I.7.50})$$

(21) ARRIAGA, E. New life tables for latin american populations in the nineteenth and twentieth centuries. p.18 e p.294.

(22) KEYFITZ, N. Introduction to the mathematics of population. p.232-234.

Segundo,  $L_{85+}$  é obtido pela fórmula

$$L_{85+} = l_{85} \cdot \log(l_{85}) \quad (\text{I.7.51})$$

Este método produz bons resultados, mas é particularmente sensível aos erros nas taxas de crescimento  $r$ , principalmente quando estas são elevadas, e à escolha do elenco de  ${}_5L_x$  da tabela da ONU. Como vantagem fundamental ressalte-se que ele pode ser aplicado quando praticamente não há estatísticas vitais disponíveis.

Sob o enfoque dos demógrafos, faltaria discorrer sobre o método de Reed e Merrel<sup>23</sup> publicado sob o título "A Short Method for Constructing an Abridged Life Table", reproduzido no "Handbook of Statistical Methods for Demographers" do Bureau do Censo do Departamento de Comércio dos Estados Unidos de 1960. Preferiremos, contudo, devotar agora alguma atenção aos estudos dos atuários.

Antes disso, porém, mostramos no Quadro I.7.1 as Tabelas de Sobrevida obtidas por Arriaga para o Brasil, com base no Censo de 1960, empregando o recém-descrito Método B de sua concepção.

QUADRO I.7.1  
TABELAS DE SOBREVIVÊNCIA  
BRASIL - 1960  
HOMENS

Idade $x$ n	$l_x$	$n^d_x$	$n^p_x$	$n^q_x$	$n^L_x$	$T_x$	$e_x$
0 1	100,000	11,363	.88637	.11363	89,251	5,402,720	54.03
1 4	88,637	3,862	.95643	.04357	346,156	5,313,469	59.95
0 5	100,000	15,225	.84775	.15225	435,407	5,402,720	54.03
5 5	84,775	1,715	.97977	.02023	417,771	4,967,313	58.59
10 5	83,060	914	.98900	.01100	413,053	4,549,542	54.77
15 5	82,146	1,264	.98461	.01539	408,028	4,136,489	50.36
20 5	80,882	1,732	.97859	.02141	400,268	3,728,460	46.10
25 5	79,150	1,875	.97631	.02369	391,030	3,328,192	42.05
30 5	77,276	1,930	.97503	.02497	381,621	2,937,163	38.01
35 5	75,346	2,157	.97137	.02863	371,540	2,555,542	33.92
40 5	73,189	2,630	.96406	.03594	359,745	2,184,002	29.84
45 5	70,558	3,413	.95163	.04837	344,856	1,824,257	25.85
50 5	67,145	4,527	.93258	.06742	325,204	1,479,401	22.03
55 5	62,618	5,983	.90445	.09555	299,163	1,154,198	18.43
60 5	56,635	7,785	.86255	.13745	264,973	855,034	15.10
65 5	48,851	9,740	.80062	.19938	221,190	590,062	12.08
70 5	39,111	11,193	.71380	.28620	168,246	368,872	9.43
75 5	27,918	11,141	.60093	.39907	111,068	200,626	7.19
80 5	16,776	8,983	.46456	.53544	59,228	89,558	5.34
85 +	7,794	7,794	0.00000	1.00000	30,331	30,331	3.89

FONTE: Eduardo Arriaga: New life tables..., p.42.

(23) REED, L. & BARBOSA, M. A. short method for constructing an abridged life table. In: U.S. DEPARTMENT OF COMMERCE, BUREAU OF CENSOS. Handbook of Statistical Methods for Demographers. Washington, 1960.

QUADRO I.7.1  
( Continuação )  
TABELAS DE SOBREVIVÊNCIA  
BRASIL - 1960  
MULHERES

Idade	$l_x$	$d_x$	$n^p_x$	$n^q_x$	$n^L_x$	$T_x$	$e_x$
x n	x	n x	n x	n x	n x	x	x
0 1	100,000	9,649	.90351	.09649	90,930	5,704,320	57.04
1 4	90,351	3,680	.95927	.04073	353,431	5,613,390	62.13
0 5	100,000	13,329	.86671	.13329	444,361	5,704,320	57.04
5 5	86,671	1,697	.98042	.01958	427,397	5,259,959	60.69
10 5	84,974	960	.98870	.01130	422,510	4,832,561	56.87
15 5	84,014	1,256	.98506	.01494	417,304	4,410,051	52.49
20 5	82,758	1,662	.97992	.02008	409,818	3,992,747	48.25
25 5	81,097	1,834	.97738	.02262	400,918	3,582,929	44.18
30 5	79,262	1,901	.97602	.02398	391,600	3,182,011	40.15
35 5	77,361	2,017	.97392	.02608	381,852	2,790,411	36.07
40 5	75,344	2,286	.96965	.03035	371,237	2,408,559	31.97
45 5	73,058	2,818	.96143	.03857	358,669	2,037,322	27.89
50 5	70,240	3,642	.94815	.05185	342,681	1,678,653	23.90
55 5	66,597	4,870	.92688	.07312	321,733	1,335,972	20.06
60 5	61,728	6,703	.89141	.10859	293,263	1,014,239	16.43
65 5	55,025	9,123	.83420	.16580	254,054	720,976	13.10
70 5	45,901	11,531	.74880	.25120	202,151	466,922	10.17
75 5	34,371	12,509	.63606	.36394	140,458	264,772	7.70
80 5	21,862	10,839	.50420	.49580	79,757	124,314	5.69
85 +	11,023	11,023	0.00000	1.00000	44,557	44,557	4.04

FONTE: Eduardo Arriaga: New life tables.... p.43.

Contrariamente aos demógrafos, os atuários estão interessados em grupos particulares de pessoas que são segurados de algum esquema previdenciário ao tempo em que estão também fortemente preocupados, em função dos compromissos que assumem para muitos anos no futuro, com as mudanças progressivas das taxas de mortalidade dos anos que estão por vir.

Grupo Segurado é, no entanto, um conceito frouxo. Há os que fazem seguro individual e os que o fazem coletivamente. Ademais, há diferentes modalidades de seguro. Um caso particular no leque de possibilidades previdenciárias, mas usual na prática, é o grupo dos que constituem Fundos de Aposentadoria e Pensão.

Os grupos segurados diferem bastante da população como um todo. Primeiro, eles se compõem de faixas etárias mais adultas, isto é, dos que trabalham ou já deixaram de trabalhar, por alguma razão como aposentadoria ou invalidez, e dos pensionistas daqueles que faleceram.

Em segundo lugar, a proporção de homens e mulheres distancia-se bastante do natural equilíbrio de sexos esperado para a população e esse desequilíbrio é importante porque a função de mortalidade é mais madrastra com os homens, dando-lhes 3 a 6 anos menos que as mulheres, de vida média.

Terceiramente, os grupos que trabalham, por força de insalubridade e periculosidade de muitos dos trabalhos que realizam, apresentam dinâmica populacional diversa do todo da comunidade.

Em quarto lugar, o grupo de aposentados parece sofrer da síndrome da descontinuação do hábito do trabalho, o que lhes confere maior mortalidade, pelo menos nos anos que se seguem à aposentadoria, e isto se dilui menos nos grupos segurados e é absorvido melhor pela população global.

Em quinto lugar, há vetores seletivos, como idade, estado de saúde e muitas vezes raça, cor e religião, que tornam os grupos segurados muito a típicos quando postos "vis-à-vis" da população. Acidentes de trânsito, doenças profissionais, doenças sociais como a cirrose e o câncer de pulmão, doenças com componente nervoso como o diabetes e os distúrbios circulatórios são também causas de seleção.

Por último, outros fatores como diferentes facilidades de acesso à medicina e à saúde pública, congestionamento populacional, poluição, pressão social, econômica e psicológica, localização geográfica de certas categorias de emprego, entre outros, diferenciam o grupo dos cidadãos ativos, tipicamente urbano, competitivo e preocupado com segurança, do todo da população.

Se os dados demográficos são escassos, os dados atuariais são abundantes, embora heterogêneos e distribuídos em inúmeras entidades previdenciárias não necessariamente articuladas, e são, como vimos, viesados por vetores seletivos os mais diversos.

Como lição preliminar, para os que se interessem pelo estudo de Fundos de Pensão, salta aos olhos que as Tabelas de Sobrevivência dos demógrafos não são de aplicação completamente adequada mesmo para largos grupos populacionais como o da Previdência Social e são inteiramente inadequadas para grupos profissionais atípicos que compõem certos Fundos de Pensão Fechados.

O estudo da Atuária é bastante antigo, principalmente na Inglaterra, importante polo mundial do negócio de seguros. O Instituto dos Atuários, organismo fundado em Londres em 1848, publica desde então o "Journal of the Institute of Actuaries".

Outro dos mais prestigiados periódicos da área é o "Transactions of the Society of Actuaries" que publica também um "Annual Report" com as melhores discussões do ano.

Na América do Norte se destacam a "American Society of Pension Actuaries" sediada em Washington e que treina, registra e controla os profissionais da área, e a "International Foundation of Employee Benefit Plans" que, em conjunto com a "Wharton School" da Universidade da Pennsylvania, patrocina um programa nacional de treinamento para especialistas em benefícios previdenciários.

Diversos outros periódicos circulam no mundo empresarial de seguros, como é o caso do "The Journal of Risk and Insurance", publicado pela "American Risk and Insurance Association, Inc." com artigos de interesse prático e também acadêmico.

Ademais, a "Wharton School of Finance and Commerce" patrocina o funcionamento, através do seu Departamento de Seguros, do "Pension Research Council", que publica uma alentada bibliografia do melhor teor científico sobre a matéria. Teremos a oportunidade de fazer referências a algum desse material ao longo deste trabalho.

O estudo da mortalidade dos grupos que pagam anuidades dentro de um esquema previdenciário está muito bem descrito em dois trabalhos antológicos.

O primeiro, e o melhor deles, foi preparado por Ray M. Peterson<sup>24</sup> sob o título "Group Annuity Mortality" e publicado no periódico "Transaction of the Society of Actuaries, IV, 1951".

Peterson menciona como peças atuariais importantes, baseadas necessariamente em Tabelas de Sobrevivência, mas voltadas para os cálculos dos prêmios a serem pagos pelos segurados, as seguintes:

- 1) a "Combined Annuity Table", que registra a experiência com grupos burocráticos de idades jovens entre 1923 e 1926;
- 2) a "1937 Standard Annuity Table", que enfeixa experiência com grupos de mesma natureza entre 1932 e 1936;

(24) PETERSON, Ray M. Group annuity mortality. Transaction of the Society of Actuaries, IV. 1951.

- 3) "The Annuity Table for 1949", também conhecida por "a-1949 Table" e preparada por Jenkins e Lew para grupos de segurados burocráticos com idade abaixo de 60 anos;
- 4) "The Prudential 1950 Group Annuity Table" com experiência com grupos mistos mas predominantemente de pessoal burocrático.

A Tabela de Peterson foi nomeada de "Group Annuity Table for 1951" ou abreviadamente "Ga-1951 Table" e tornou-se um padrão internacional de Tabela de Sobrevivência praticamente até hoje, já que os resultados de sua revisão em 1971 não foram muito bem recebidos pelos estudiosos da matéria.

Esta tabela usou dados da experiência com os beneficiários de anuidades no período 1946-1950 para os grupos aposentados, isto é, com 65 anos ou mais, enquanto as taxas de mortalidade para o grupo ativo foram extraídas da "a-1949 Table". Todos esses estudos efetuaram-se separadamente para o grupo dos homens e das mulheres.

Sua amplitude de idades vai de 5 a 110 anos e apresenta apenas cinco das variáveis atuariais aqui comentadas.

Uma novidade nessa tabela diz respeito à preocupação com a tendência de redução da mortalidade. Peterson criou assim a figura da "margem", reduzindo a mortalidade dos homens em 10% e a das mulheres em 12% para tornar mais caras as anuidades a serem pagas no período ativo para adquirir um mesmo benefício no período inativo, já que este seria prolongado por uma maior longevidade futura.

Outra característica desta tabela é a utilização de diversas Escalas de Projeção para adequá-la no futuro às reduções de mortalidade dos grupos, à semelhança do que já propunha a "a-1949 Table" de Jenkins.

Seria enfadonho e desnecessário descrever aqui os detalhes de construção dessa tabela, que usa técnicas de graduação, de interpolação e extrapolação semelhantes às já mencionadas, mas é importante comentar o exaustivo estudo comparativo de mortalidade entre diferentes grupos realizado pelo autor para aferir a adequação de sua tabela.

Para tanto, Peterson analisou a experiência com os seguintes agregados, nos Estados Unidos:

- 1) grupo dos seguros de vida;

QUADRO I.7.2  
TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO  
GROUP ANNUITY TABLE FOR 1951 - 2,5% A.A.

HOMENS					
x	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$q_x$
5.....	9999.9999	5.5900	8838.5428	290870.8245	.000559
6.....	9994.4099	5.1871	8618.1484	282032.2817	.000519
7.....	9989.2228	4.9347	8403.5859	273414.1333	.000494
8.....	9984.2881	4.8024	8194.5702	265010.5474	.000481
9.....	9979.4857	4.7502	7990.8572	256815.9772	.000476
10.....	9974.7355	4.7579	7792.2474	248825.1200	.000477
11.....	9969.9776	4.8454	7598.5664	241032.8726	.000486
12.....	9965.1322	4.9427	7409.6326	233434.3062	.000496
13.....	9960.1895	5.0399	7225.3245	226024.6736	.000506
14.....	9955.1496	5.1468	7045.5302	218799.3491	.000517
15.....	9950.0028	5.2735	6870.1343	211753.8189	.000530
16.....	9944.7293	5.4099	6699.0176	204883.6846	.000544
17.....	9939.3194	5.5660	6532.0716	198184.6670	.000560
18.....	9933.7534	5.7318	6369.1840	191652.5954	.000577
19.....	9928.0216	5.9072	6210.2527	185283.4114	.000595
20.....	9922.1144	6.1120	6055.1781	179073.1587	.000616
21.....	9916.0024	6.3462	5903.8519	173017.9806	.000640
22.....	9909.6562	6.5998	5756.1692	167114.1287	.000666
23.....	9903.0564	6.8628	5612.0347	161357.9595	.000693
24.....	9896.1936	7.1648	5471.3615	155745.9248	.000724
25.....	9889.0288	7.4959	5334.0491	150274.5633	.000758
26.....	9881.5329	7.8657	5200.0057	144940.5142	.000796
27.....	9873.6672	8.2741	5069.1381	139740.5085	.000838
28.....	9865.3931	8.7309	4941.3562	134671.3704	.000885
29.....	9856.6622	9.2160	4816.5689	129730.0142	.000935
30.....	9847.4462	9.7588	4694.6980	124913.4453	.000991
31.....	9837.6874	10.3689	4575.6541	120218.7473	.001054
32.....	9827.3185	11.0263	4459.3477	115643.0932	.001122
33.....	9816.2922	11.7599	4345.7018	111183.7455	.001198
34.....	9804.5323	12.5596	4234.6299	106838.0437	.001281
35.....	9791.9727	13.4542	4126.0540	102603.4138	.001374
36.....	9778.5185	14.4233	4019.8875	98477.3598	.001475
37.....	9764.0952	15.4956	3916.0569	94457.4723	.001587
38.....	9748.5996	16.6799	3814.4800	90541.4154	.001711
39.....	9731.9197	17.9943	3715.0766	86726.9354	.001849
40.....	9713.9254	19.4279	3617.7633	83011.8588	.002000
41.....	9694.4975	21.2503	3522.4661	79394.0955	.002192
42.....	9673.2472	23.6995	3429.0194	75871.6294	.002450
43.....	9649.5477	26.7196	3337.1886	72442.6100	.002769
44.....	9622.8281	30.2830	3246.7784	69105.4214	.003147
45.....	9592.5451	34.3413	3157.6203	65858.6430	.003580
46.....	9558.2038	38.8541	3069.5766	62701.0227	.004065
47.....	9519.3497	43.7795	2982.5354	59631.4461	.004599
48.....	9475.5702	49.0835	2896.4085	56648.9107	.005180
49.....	9426.4867	54.7396	2811.1269	53752.5022	.005807
50.....	9371.7471	60.6821	2726.6368	50941.3753	.006475
51.....	9311.0650	66.9186	2642.9091	48214.7385	.007187
52.....	9244.1464	73.3800	2559.9166	45571.8294	.007938
53.....	9170.7664	80.0700	2477.6546	43011.9128	.008731
54.....	9090.6964	86.9343	2396.1192	40534.2582	.009563
55.....	9003.7621	93.9633	2315.3221	38138.1390	.010436
56.....	8909.7988	101.0906	2235.2774	35822.8169	.011346
57.....	8808.7082	108.3295	2156.0155	33587.5395	.012298

FONTE: Ray Peterson: Group Annuity Mortality.

QUADRO I.7.2  
(continuação)  
TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO  
GROUP ANNUITY TABLE FOR 1951 - 2,5% A.A.

HOMENS					
x	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$q_x$
58.....	8700.3787	115.7324	2077.5619	31431.5240	.013302
59.....	8584.6463	123.4386	1999.9280	29353.9621	.014379
60.....	8461.2077	131.6141	1923.0937	27354.0341	.015555
61.....	8329.5936	140.4869	1847.0048	25430.9404	.016866
62.....	8189.1067	150.2947	1771.5641	23583.9356	.018353
63.....	8038.8120	161.3229	1696.6348	21812.3715	.020068
64.....	7877.4891	173.8326	1622.0357	20115.7367	.022067
65.....	7703.6565	188.1079	1547.5534	18493.7010	.024418
66.....	7515.5486	204.3703	1472.9418	16946.1476	.027193
67.....	7311.1783	220.1542	1397.9395	15473.2058	.030112
68.....	7091.0241	233.9045	1322.7754	14075.2663	.032986
69.....	6857.1196	246.4654	1247.9438	12752.4909	.035943
70.....	6610.6542	259.8185	1173.7453	11504.5471	.039303
71.....	6350.8357	274.2481	1100.1108	10330.8018	.043183
72.....	6076.5876	288.4921	1026.9315	9230.6910	.047476
73.....	5788.0955	301.4672	954.3189	8203.7595	.052084
74.....	5486.6283	313.1603	882.5504	7249.4406	.057077
75.....	5173.4680	322.9641	811.8800	6366.8902	.062427
76.....	4850.5039	331.5174	742.6310	5555.0102	.068347
77.....	4518.9865	339.5205	674.9994	4812.3792	.075132
78.....	4179.4660	345.5875	609.0589	4137.3798	.082687
79.....	3833.8785	348.6759	545.0709	3528.3209	.090946
80.....	3485.2026	347.4015	483.4135	2983.2500	.099679
81.....	3137.8011	341.0978	424.6120	2499.8365	.108706
82.....	2796.7033	329.9523	369.2236	2075.2245	.117979
83.....	2466.7510	314.3553	317.7199	1706.0009	.127437
84.....	2152.3957	295.0353	270.4689	1388.2810	.137073
85.....	1857.3604	272.7571	227.7024	1117.8121	.146852
86.....	1584.6033	248.5228	189.5257	890.1097	.156836
87.....	1336.0805	223.2858	155.9037	700.5840	.167120
88.....	1112.7947	197.8404	126.6820	544.6803	.177787
89.....	914.9543	172.8523	101.6191	417.9983	.188919
90.....	742.1020	148.8612	80.4110	316.3792	.200594
91.....	593.2408	126.0963	62.7132	235.9682	.212555
92.....	467.1445	105.1827	48.1788	173.2550	.225161
93.....	361.9618	86.3366	36.4203	125.0762	.238524
94.....	275.6252	69.6684	27.0567	88.6559	.252765
95.....	205.9568	55.2016	19.7246	61.5992	.268025
96.....	150.7552	42.8831	14.0858	41.8746	.284455
97.....	107.8721	32.6014	9.8332	27.7888	.302223
98.....	75.2707	24.2007	6.6940	17.9556	.321515
99.....	51.0700	17.4928	4.4310	11.2616	.342526
100.....	33.5772	12.2712	2.8422	6.8306	.365462
101.....	21.3060	8.3208	1.7595	3.9884	.390538
102.....	12.9852	5.4275	1.0462	2.2289	.417979
103.....	7.5577	3.4017	.5941	1.1827	.450096
104.....	4.1560	2.0331	.3187	.5886	.489201
105.....	2.1229	1.1413	.1588	.2699	.537605
106.....	.9816	.5866	.0716	.1111	.597619
107.....	.3950	.2653	.0281	.0395	.671554
108.....	.1297	.0988	.0090	.0114	.761722
109.....	.0309	.0269	.0021	.0024	.870434
110.....	.0040	.0040	.0003	.0003	.999999

FONTE: Ray Peterson: Group Annuity Mortality.

## QUADRO I.7.3

TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO  
 GROUP ANNUITY TABLE FOR 1951 - 2,5%A.A.  
 MULHERES

x	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$q_x$
5.....	9999.9999	3.3500	8838.5428	300135.0894	.000335
6.....	9996.6499	2.7491	8620.0799	291296.5466	.000275
7.....	9993.9008	2.3086	8407.5214	282676.4667	.000231
8.....	9991.5922	2.0383	8200.5650	274268.9453	.000204
9.....	9989.5539	1.9080	7998.9191	266068.3803	.000191
10.....	9987.6459	1.8877	7802.3330	258069.4612	.000189
11.....	9985.7582	2.0471	7610.5935	250267.1282	.000205
12.....	9983.7111	2.2164	7423.4471	242656.5347	.000222 <sup>b</sup>
13.....	9981.4947	2.3856	7240.7797	235233.0876	.000239
14.....	9979.1091	2.5646	7062.4869	227992.3079	.000257
15.....	9976.5445	2.7435	6888.4604	220929.8210	.000275
16.....	9973.8010	2.9123	6718.6010	214041.3606	.000292
17.....	9970.8887	3.1009	6552.8188	207322.7596	.000311
18.....	9967.7878	3.2894	6391.0057	200769.9408	.000330
19.....	9964.4984	3.4876	6233.0700	194378.9351	.000350
20.....	9961.0108	3.6955	6078.9154	188145.8651	.000371
21.....	9957.3153	3.9132	5928.4490	182066.9497	.000393
22.....	9953.4021	4.1406	5781.5796	176138.5007	.000416
23.....	9949.2615	4.3777	5638.2190	170356.9211	.000440
24.....	9944.8838	4.6443	5498.2811	164718.7021	.000467
25.....	9940.2395	4.9204	5361.6716	159220.4210	.000495
26.....	9935.3191	5.2061	5228.3099	153858.7494	.000524
27.....	9930.1130	5.5211	5098.1173	148630.4395	.000556
28.....	9924.5919	5.8654	4971.0076	143532.3222	.000591
29.....	9918.7265	6.2290	4846.8973	138561.3146	.000628
30.....	9912.4975	6.6315	4725.7107	133714.4173	.000669
31.....	9905.8660	7.0530	4607.3650	128988.7066	.000712
32.....	9898.8130	7.5231	4491.7898	124381.3416	.000760
33.....	9891.2899	8.0317	4378.9035	119889.5518	.000812
34.....	9883.2582	8.5787	4268.6320	115510.6483	.000868
35.....	9874.6795	9.1835	4160.9043	111242.0163	.000930
36.....	9865.4960	9.8359	4055.6435	107081.1120	.000997
37.....	9855.6601	10.5554	3952.7805	103025.4685	.001071
38.....	9845.1047	11.3416	3852.2410	99072.6880	.001152
39.....	9833.7631	12.1939	3753.9544	95220.4470	.001240
40.....	9821.5692	13.1413	3657.8531	91466.4926	.001338
41.....	9808.4279	14.1830	3563.8624	87808.6395	.001446
42.....	9794.2449	15.3084	3471.9112	84244.7771	.001563
43.....	9778.9365	16.5655	3381.9363	80772.8659	.001694
44.....	9762.3710	17.9237	3293.8607	77390.9296	.001836
45.....	9744.4473	19.4304	3207.6226	74097.0689	.001994
46.....	9725.0169	21.0936	3123.1479	70889.4463	.002169
47.....	9703.9233	22.9110	3040.3647	67766.2984	.002361
48.....	9681.0123	24.9092	2959.2063	64725.9337	.002573
49.....	9656.1031	27.1240	2879.6021	61766.7274	.002809
50.....	9628.9791	29.5610	2801.4765	58887.1253	.003070
51.....	9599.4181	31.8605	2724.7570	56085.6488	.003319
52.....	9567.5576	34.4145	2649.4766	53360.8918	.003597
53.....	9533.1431	37.2555	2575.5575	50711.4152	.003908
54.....	9495.8876	40.4240	2502.9192	48135.8577	.004257
55.....	9455.4636	43.9490	2431.4774	45632.9385	.004648
56.....	9411.5146	48.0175	2361.1471	43201.4611	.005102
57.....	9363.4971	52.7820	2291.8054	40840.3140	.005637

FONTE: Ray Peterson: Group Annuity Mortality.

QUADRO I.7.3  
(continuação)  
TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO  
GROUP ANNUITY TABLE FOR 1951 - 2,5%A.A.  
MULHERES

x	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$q_x$
58.....	9310.7151	58.3316	2223.3040	38548.5086	.006265
59.....	9252.3835	64.7389	2155.4878	36325.2046	.006997
60.....	9187.6446	72.0036	2088.2008	24169.7168	.007837
61.....	9115.6410	80.1083	2021.3031	32081.5160	.008788
62.....	9035.5327	88.9819	1954.6730	30060.2129	.009848
63.....	8946.5508	98.5015	1888.2179	28105.5399	.011010
64.....	8848.0493	108.5125	1821.8816	26217.3220	.012264
65.....	8739.5368	118.8315	1755.6468	24395.4404	.013597
66.....	8620.7053	129.2330	1689.5369	22639.7936	.014991
67.....	8491.4723	139.7442	1623.6186	20950.2567	.016457
68.....	8351.7281	151.9847	1557.9500	19326.6381	.018198
69.....	8199.7434	166.8976	1492.2911	17768.6881	.020354
70.....	8032.8458	185.5427	1426.2605	16276.3970	.023098
71.....	7847.3031	208.1654	1359.3334	14850.1365	.026527
72.....	7639.1377	232.7492	1290.9994	13490.8031	.030468
73.....	7406.3885	257.5868	1221.1368	12199.8037	.034779
74.....	7148.8017	281.7557	1149.9189	10978.6669	.039413
75.....	6867.0460	304.2719	1077.6558	9828.7480	.044309
76.....	6562.7741	324.9361	1004.7862	8751.0922	.049512
77.....	6237.8380	343.7548	931.7437	7746.3060	.055108
78.....	5894.0832	360.0872	858.9241	6814.5623	.061093
79.....	5533.9960	373.3178	786.7803	5955.6382	.067459
80.....	5160.6782	382.6436	715.8097	5168.8579	.074146
81.....	4778.0346	387.5655	646.5710	4453.0482	.081114
82.....	4390.4691	388.0033	579.6342	3806.4772	.088374
83.....	4002.4658	384.0086	515.5215	3226.8430	.095943
84.....	3618.4572	375.9722	454.6935	2711.3215	.103904
85.....	3242.4850	364.2219	397.5112	2256.6280	.112328
86.....	2878.2631	349.1189	344.2533	1859.1168	.121295
87.....	2529.1442	331.0270	295.1191	1514.8635	.130885
88.....	2198.1172	310.3478	250.2365	1219.7444	.141188
89.....	1887.7694	287.5073	209.6645	969.5079	.152300
90.....	1600.2621	262.9727	173.3977	759.8434	.164331
91.....	1337.2894	236.8928	141.3688	586.4457	.177144
92.....	1100.3966	210.2847	113.4890	445.0769	.191099
93.....	890.1119	183.6666	89.5623	331.5879	.206341
94.....	706.4453	157.5578	69.3482	242.0256	.223029
95.....	548.8875	132.4663	52.5674	172.6774	.241336
96.....	416.4212	108.8737	38.9083	120.1100	.261451
97.....	307.5475	87.2146	28.0348	81.2017	.283581
98.....	220.3329	67.8522	19.5948	53.1669	.307953
99.....	152.4807	51.0524	13.2298	33.5721	.334812
100.....	101.4283	36.9634	8.5856	20.3423	.364429
101.....	64.4649	25.5990	5.3237	11.7567	.397100
102.....	38.8659	16.8348	3.1314	6.4330	.433150
103.....	22.0311	10.4192	1.7317	3.3016	.472930
104.....	11.6119	6.0168	.8905	1.5699	.518156
105.....	5.5951	3.1923	.4186	.6794	.570545
106.....	2.4028	1.5181	.1754	.2608	.631813
107.....	.8847	.6225	.0630	.0854	.703676
108.....	.2622	.2066	.0182	.0224	.787851
109.....	.0556	.0493	.0038	.0042	.886054
110.....	.0063	.0063	.0004	.0004	.999999

FONTE: Ray Peterson: Group Annuity Mortality.

- 2) grupo dos seguros ordinários;
- 3) grupo dos aposentados do serviço federal civil;
- 4) grupo dos aposentados da previdência ferroviária;
- 5) grupo dos aposentados da previdência social;
- 6) grupo da população branca como um todo; e
- 7) grupos representados pelas Tabelas já disponíveis.

A comparação revelou que, exceto para a população como um todo, a "GA-1951 Table" era uma aproximação muito razoável da mortalidade nesses grupos, sobretudo para o sub-grupo dos homens.

As distorções foram, no entanto, significativas para o universo da população, principalmente nas faixas mais avançadas de idade. Estas taxas de mortalidade são mais altas do que as dos trabalhadores e aposentados da nação, já que para se manter no grupo dos ativos é necessário gozar de um melhor padrão médio de saúde. Apesar do emprego das mesmas técnicas quantitativas, o mundo do atuário não é o mesmo do do demógrafo.

Por fim, convém registrar que o espírito da tabela de Peterson foi o de manter-se fiel aos dados observados e não o de forçar a realidade para dentro das leis de Gompertz ou de Makeham.

Apresentamos nos Quadros I.7.2 e I.7.3 as Tabelas de Sobrevivência para homens e mulheres produzidas por Peterson.

Conquanto a "Ga-1951 Table" ou sua substituta, a "GAM1971 Table", sejam as utilizadas no contexto dos Fundos de Pensão, outras tabelas de sobrevivência são utilizadas para o cálculo dos prêmios de seguros de vida, baseadas na chamada "American Experience" publicada pela primeira vez em 1868. A Tabela padrão nesse ramo securitário é, segundo Hubner Black<sup>25</sup>, a Tabela "Commissioners 1958 standard ordinary mortality table", abreviadamente "1958 CSO Table", que se apoiou em dados catalogados pelas companhias de seguros e que dá o padrão legal para a constituição de suas reservas.

A experiência brasileira compilada pelo Instituto de Resseguros do Brasil está registrada na publicação IRB nº 59, de 1956, e apresenta cinco tábuas de sobrevivência baseadas nas experiências das companhias operando no país no período de 1949 a 1953.

Antes de prosseguirmos com os comentários sobre a última tabela que

---

(25) HUEBNER, S.S. & BLACK, K. Life insurance. New Jersey, Prentice - Hall Inc, 1976. p.238.

escolhemos para incluir neste trabalho, nos permitiremos uma digressão sobre a maior longevidade da mulher. Três são as linhas básicas de argumentação que tentam explicá-la. Uma biológica, outra ocupacional e uma última comportamental.

No que tange às ocupações, os trabalhos dos homens são, via de regra, mais insalubres e perigosos do que os das mulheres, quer no aspecto somático, quer no mental. O trabalho braçal, industrial, mineiro e ferroviário, entre muitos outros, são nitidamente mais perigosos que os concedidos às mulheres. Por outro lado, os trabalhos executivos e intelectuais de administradores e especialistas, ainda preponderantemente atribuídos aos homens, implicam num nível de risco profissional e de pressão de responsabilidades que os tornam também mais desgastantes que os encargos domésticos, industriais ou burocráticos normalmente de menor demanda física e mental alocados às mulheres.

A ascensão feminina no mundo profissional, hoje observada, é um fator já identificado para explicar o menor progresso na longevidade das mulheres com respeito à dos homens.

Na primeira linha de idéias, alguns antropologistas e biólogos, como Ashley Montagu<sup>26</sup>, da Universidade de Rutgers, registrou em seu artigo "The Natural Superiority of Women", invocam a tese de que as mulheres são fundamentalmente mais resistentes que os homens porque são biológica e emocionalmente melhor estruturadas para absorver o "stress" da vida.

Segundo Montagu, o homem é uma mulher incompleta, porque, enquanto estas são fruto de óvulos e espermatozoides contendo somente cromossomos do Tipo x, que são estruturas completamente desenvolvidas, os homens emergem da união de óvulos com cromossomos x e espermatozoides com cromossomos y, estes um cromossomo x incompleto ou deficiente que não está presente nas células sexuais das mulheres mas que se encontra na proporção de 50% entre as dos homens. Os homens são assim causa e efeito de sua inferioridade biológica.

Amram Scheinfeld<sup>27</sup> em seu livro "The New-You and Heredity" endossa essa linha de pensamento afirmando que as mulheres são geneticamente mais bem construídas e têm um sistema bioquímico mais eficiente. Afirma ainda esse autor que a fortaleza da mulher se destacará progressivamente à medida em que o meio-ambiente se tornar menos agressivo e a saúde pública mais eficiente, porque nestas circunstâncias a natural margem extra de resistência das mulheres as distanciará ainda mais dos homens.

(26) MONTAGU, A. The natural superiority of women.

(27) SCHEINFELD, Amram, The new-you and heredity.

O último dos aspectos enfoca a diferença de comportamento social entre os dois sexos. Os homens apresentam vida mais desordenada nos seus hábitos de trabalhar, de dormir, de comer, de beber, de fumar e de outras práticas tidas como danosas à saúde e determinantes de doenças como cirrose, câncer de pulmão, distúrbios circulatórios, entre outras.

Já as mulheres, apresentam-se mais disciplinadas nesses aspectos, premidas por razões várias, mas sobretudo com origem na moral religiosa e social.

As tendências bem nítidas hoje de aproximação do comportamento social entre o homem e a mulher nos pontos enfocados provavelmente contribuirão para reduzir a vantagem que as estatísticas hoje creditam à mulher.

Discussões e teorias à parte, para tornar equivalentes as taxas de mortalidade entre homens e mulheres nas faixas etárias terminais da vida, é necessário recuar a escala de idade do homem de 3 a 6 ou mais anos, na dependência da tabela que se tenha à mão.

Uma das maiores preocupações dos atuários de hoje, que se envolvem com cálculo de obrigações para um futuro mediato, é sobre as variações na longevidade futura de homens e mulheres, de tendências não muito bem definidas.

A última tabela de sobrevivência que comentaremos é também de interesse atuarial e se constitui numa revisão da "Ga-1951 Table" de Ray Peterson. Foi executada por Harold Greenlee and Alfonso Keh<sup>28</sup> sob os auspícios da "American Life Convention" e da "Life Insurance Association of America" e está registrada no artigo "The 1971 Group Mortality Table" publicada no periódico "Transactions of the Society of Actuaries".

Apóia-se fortemente na metodologia, e faz uso até mesmo de dados, como ponto de partida, da Tabela de Peterson. Suas grandes diferenças poderiam ser assim resumidas:

- 1) os dados para as idades ativas foram extraídos de cinco grandes fundos de pensão para o ano de 1967;
- 2) os dados para as idades aposentadas vieram da experiência do conjunto de companhias operando no ramo de anuidades no período 1964-1968;

(28) GREENLEE, H. & Keh A. The 1971 group annuity mortality table. Transactions of the Society of Actuaries.

## QUADRO I.7.4

TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO - GAM-1971  
GROUP ANNUITY MORTALITY TABLE FOR 1971 - 6%A.A.

## HOMENS

Idade $x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$N_x^{(12)}$
5.....	10,000.0000	4.5600	7,472.5818	128,391.8325	124,966.8994
6.....	9,995.4400	4.2381	7,046.3908	120,919.2508	117,689.6551
7.....	9,991.2019	4.0264	6,644.7200	113,872.8599	110,827.3634
8.....	9,987.1755	3.9150	6,266.0775	107,228.1400	104,356.1879
9.....	9,983.2605	3.8835	5,909.0766	100,962.0624	98,253.7358
10.....	9,979.3770	3.8919	5,572.4321	95,052.9858	92,498.9546
11.....	9,975.4851	3.9603	5,254.9612	89,480.5537	87,072.0300
12.....	9,971.5248	4.0385	4,955.5424	84,225.5926	81,954.3024
13.....	9,967.4863	4.1165	4,673.1466	79,270.0502	77,128.1914
14.....	9,963.3698	4.2046	4,406.8081	74,596.9036	72,577.1166
15.....	9,959.1652	4.3123	4,155.6118	70,190.0954	68,285.4401
16.....	9,954.8529	4.4200	3,918.6909	66,034.4837	64,238.4171
17.....	9,950.4329	4.5473	3,695.2368	62,115.7927	60,422.1426
18.....	9,945.8856	4.6845	3,484.4793	58,420.5559	56,823.5030
19.....	9,941.2011	4.8314	3,285.6964	54,936.0766	53,430.1325
20.....	9,936.3697	4.9980	3,098.2071	51,650.3802	50,230.3687
21.....	9,931.3717	5.1842	2,921.3667	48,552.1731	47,213.2134
22.....	9,926.1875	5.3999	2,754.5677	45,630.8064	44,368.2962
23.....	9,920.7876	5.6151	2,597.2351	42,876.2387	41,685.8393
24.....	9,915.1725	5.8599	2,448.8350	40,279.0036	39,156.6209
25.....	9,909.3126	6.1339	2,308.8563	37,830.1686	36,771.9428
26.....	9,903.1787	6.4370	2,176.8181	35,521.3123	34,523.6040
27.....	9,896.7417	6.7694	2,052.2671	33,344.4942	32,403.8718
28.....	9,889.9723	7.1406	1,934.7768	31,292.2271	30,405.4544
29.....	9,882.8317	7.5406	1,823.9433	29,357.4503	28,521.4763
30.....	9,875.2911	7.9891	1,719.3883	27,533.5070	26,745.4541
31.....	9,867.3020	8.4853	1,620.7522	25,814.1187	25,071.2740
32.....	9,858.8162	9.0307	1,527.6965	24,193.3666	23,493.1723
33.....	9,849.7855	9.6331	1,439.9030	22,665.6700	22,005.7145
34.....	9,840.1524	10.2928	1,357.0705	21,225.7670	20,603.7764
35.....	9,829.8596	11.0291	1,278.9161	19,868.6965	19,282.5266
36.....	9,818.8305	11.8219	1,205.1709	18,589.7804	18,037.4104
37.....	9,807.0086	12.7001	1,135.5848	17,384.6095	16,864.1332
38.....	9,794.3085	13.6826	1,069.9191	16,249.0247	15,758.6452
39.....	9,780.6259	14.7590	1,007.9475	15,179.1057	14,717.1297
40.....	9,765.8669	15.9476	949.4590	14,171.1581	13,735.9894
41.....	9,749.9193	17.4426	894.2533	13,221.6991	12,811.8330
42.....	9,732.4767	19.4650	842.1260	12,327.4458	11,941.4714
43.....	9,713.0117	21.9514	792.8695	11,485.3199	11,121.9213
44.....	9,691.0603	24.8963	746.2997	10,692.4503	10,350.3963
45.....	9,666.1640	28.2446	702.2476	9,946.1507	9,624.2872
46.....	9,637.9194	31.9786	660.5619	9,243.9031	8,941.1456
47.....	9,605.9408	36.0607	621.1039	8,583.3412	8,298.6686
48.....	9,569.8801	40.4614	583.7474	7,962.2373	7,694.6864
49.....	9,529.4187	45.1695	548.3768	7,378.4898	7,127.1505
50.....	9,484.2492	50.1242	514.8844	6,830.1131	6,594.1244
51.....	9,434.1250	55.3501	483.1729	6,315.2287	6,093.7745
52.....	9,378.7749	60.7744	453.1491	5,832.0558	5,624.3625
53.....	9,318.0005	66.4094	424.7290	5,378.9067	5,184.2393
54.....	9,251.5911	72.2179	397.8320	4,954.1777	4,771.8381
55.....	9,179.3732	78.1991	372.3835	4,556.3457	4,385.6699
56.....	9,101.1741	84.2951	348.3125	4,183.9622	4,024.3190

QUADRO I.7.4  
(continuação)  
TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO - GAM-1971  
GROUP ANNUITY MORTALITY TABLE FOR 1971 - 6% A.A.

HOMENS					
Idade $x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$N_x^{(12)}$
57.....	9,016.8790	90.5204	325.5532	3,835.6497	3,686.4379
58.....	8,926.3586	97.1991	304.0424	3,510.0965	3,370.7438
59.....	8,829.1595	105.2789	283.7091	3,206.0541	3,076.0208
60.....	8,723.8806	114.4486	264.4587	2,922.3450	2,801.1348
61.....	8,609.4320	124.3202	246.2163	2,657.8863	2,545.0372
62.....	8,485.1118	134.5994	228.9254	2,411.6700	2,306.7459
63.....	8,350.5124	145.4074	212.5415	2,182.7446	2,085.3298
64.....	8,205.1050	157.4150	197.0193	1,970.2032	1,879.9027
65.....	8,047.6900	171.0939	182.3014	1,773.1839	1,689.6291
66.....	7,876.5961	186.2263	168.3261	1,590.8825	1,513.7330
67.....	7,690.3698	202.3798	155.0438	1,422.5563	1,351.4946
68.....	7,487.9900	218.5594	142.4185	1,267.5126	1,202.2374
69.....	7,269.4306	235.7840	130.4355	1,125.0941	1,065.3111
70.....	7,033.6466	253.9569	119.0611	994.6586	940.0889
71.....	6,779.6897	271.2418	108.2663	875.5975	825.9754
72.....	6,508.4479	285.2457	98.0517	767.3311	722.3908
73.....	6,223.2022	295.5337	88.4475	669.2794	628.7410
74.....	5,927.6685	303.6211	79.4785	580.8319	544.4042
75.....	5,624.0474	310.9705	71.1392	501.3533	468.7478
76.....	5,313.0769	319.1459	63.4016	430.2141	401.1550
77.....	4,993.9310	329.2199	56.2200	366.8125	341.0450
78.....	4,664.7111	338.6347	49.5413	310.5925	287.8860
79.....	4,326.0764	344.7537	43.3442	261.0512	241.1851
80.....	3,981.3227	348.0910	37.6321	217.7070	200.4589
81.....	3,633.2317	346.7738	32.3980	180.0749	165.2258
82.....	3,286.4579	340.7761	27.6469	147.6769	135.0054
83.....	2,945.6818	330.8089	23.3776	120.0300	109.3153
84.....	2,614.8729	316.7029	19.5775	96.6524	87.6794
85.....	2,298.1700	298.9966	16.2324	77.0749	69.6350
86.....	1,999.1734	278.5148	13.3213	60.8424	54.7369
87.....	1,720.6586	255.8860	10.8164	47.5212	42.5636
88.....	1,464.7726	232.1460	8.6867	36.7047	32.7233
89.....	1,232.6266	207.9552	6.8962	28.0180	24.8573
90.....	1,024.6714	183.8793	5.4083	21.1218	18.6431
91.....	840.7921	160.1617	4.1865	15.7136	13.7948
92.....	680.6304	137.2702	3.1972	11.5270	10.0617
93.....	543.3602	115.7281	2.4079	8.3298	7.2262
94.....	427.6321	96.8736	1.7878	5.9219	5.1025
95.....	330.7585	79.7671	1.3045	4.1341	3.5362
96.....	250.9914	64.1230	0.9339	2.8296	2.4016
97.....	186.6864	51.0503	0.6553	1.8957	1.5953
98.....	135.8181	39.4094	0.4498	1.2404	1.0342
99.....	96.4087	29.8023	0.3012	0.7906	0.6526
100.....	66.6064	21.9685	0.1963	0.4894	0.3995
101.....	44.6379	15.7328	0.1241	0.2931	0.2363
102.....	28.9051	10.9036	0.0758	0.1690	0.1343
103.....	18.0015	7.3123	0.0445	0.0932	0.0728
104.....	10.6892	4.7193	0.0250	0.0487	0.0372
105.....	5.9699	2.8965	0.0131	0.0237	0.0177
106.....	3.0734	1.6576	0.0064	0.0106	0.0076
107.....	1.4158	0.8581	0.0028	0.0042	0.0029
108.....	0.5577	0.3834	0.0010	0.0014	0.0009
109.....	0.1743	0.1369	0.0003	0.0004	0.0002
110.....	0.0374	0.0374	0.0001	0.0001	0.0000

FONTE: Harold Greenlee & Alfonso Keh: The 1971 Group Annuity Mortality Table.

## QUADRO I.7.5

TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO - GAM-1971  
 GROUP ANNUITY MORTALITY TABLE FOR 1971 - 6%A.A.  
 MULHERES

Idade $x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$N_x^{(12)}$
5.....	10,000.0000	2.3400	7,472.5818	129,684.2744	126,259.3412
6.....	9,997.6600	1.9295	7,047.9559	122,211.6926	118,981.3796
7.....	9,995.7305	1.6194	6,647.7317	115,163.7367	112,116.8598
8.....	9,994.1111	1.4291	6,270.4290	108,516.0050	105,642.0585
9.....	9,992.6820	1.3390	5,914.6532	102,245.5760	99,534.6934
10.....	9,991.3430	1.3189	5,579.1138	96,330.9228	93,773.8291
11.....	9,990.0241	1.4286	5,262.6202	90,751.8090	88,339.7749
12.....	9,988.5955	1.5482	4,964.0260	85,489.1889	83,214.0104
13.....	9,987.0473	1.6678	4,682.3176	80,525.1628	78,379.1007
14.....	9,985.3795	1.7974	4,416.5430	75,842.8453	73,818.5965
15.....	9,983.5821	1.9268	4,165.8001	71,426.3022	69,516.9773
16.....	9,981.6553	2.0463	3,929.2416	67,260.5022	65,459.5998
17.....	9,979.6090	2.1755	3,706.0718	63,331.2606	61,632.6444
18.....	9,977.4335	2.3048	3,495.5319	59,625.1888	58,023.0700
19.....	9,975.1287	2.4439	3,296.9099	56,129.6568	54,618.5732
20.....	9,972.6848	2.5929	3,109.5303	52,832.7469	51,407.5456
21.....	9,970.0919	2.7418	2,932.7565	49,723.2166	48,379.0366
22.....	9,967.3501	2.9105	2,765.9905	46,790.4601	45,522.7145
23.....	9,964.4396	3.0790	2,608.6631	44,024.4696	42,828.8324
24.....	9,961.3606	3.2573	2,460.2425	41,415.8065	40,288.1954
25.....	9,958.1033	3.4555	2,320.2245	38,955.5641	37,892.1279
26.....	9,954.6478	3.6633	2,188.1315	36,635.3396	35,632.4460
27.....	9,950.9845	3.8809	2,063.5153	34,447.2081	33,501.4303
28.....	9,947.1036	4.1181	1,945.9534	32,383.6927	31,491.7975
29.....	9,942.9855	4.3749	1,835.0450	30,437.7394	29,596.6771
30.....	9,938.6106	4.6612	1,730.4129	28,602.6943	27,809.5885
31.....	9,933.9494	4.9571	1,631.6993	26,872.2815	26,124.4193
32.....	9,928.9923	5.2921	1,538.5709	25,240.5821	24,535.4038
33.....	9,923.7002	5.6466	1,450.7083	23,702.0113	23,037.1033
34.....	9,918.0536	6.0302	1,367.8140	22,251.3029	21,624.3882
35.....	9,912.0234	6.4527	1,289.6060	20,883.4889	20,292.4195
36.....	9,905.5707	6.9141	1,215.8175	19,593.8829	19,036.6333
37.....	9,898.6566	7.4240	1,146.1970	18,378.0654	17,852.7252
38.....	9,891.2326	7.9822	1,080.5069	17,231.8685	16,736.6361
39.....	9,883.2504	8.5885	1,018.5235	16,151.3615	15,684.5383
40.....	9,874.6619	9.2625	960.0363	15,132.8380	14,692.8214
41.....	9,865.3994	9.9936	904.8451	14,172.8017	13,758.0811
42.....	9,855.4058	10.7818	852.7627	13,267.9566	12,877.1071
43.....	9,844.6240	11.6758	803.6130	12,415.1940	12,046.8713
44.....	9,832.9482	12.6451	757.2263	11,611.5810	11,264.5189
45.....	9,820.3031	13.7190	713.4458	10,854.3546	10,527.3587
46.....	9,806.5841	14.8962	672.1218	10,140.9088	9,832.8530
47.....	9,791.6879	16.1955	633.1140	9,468.7870	9,178.6098
48.....	9,775.4924	17.6154	596.2895	8,835.6730	8,562.3737
49.....	9,757.8770	19.1937	561.5235	8,239.3836	7,982.0186
50.....	9,738.6833	20.9479	528.6972	7,677.8600	7,435.5405
51.....	9,717.7354	22.5841	497.6981	7,149.1628	6,921.0512
52.....	9,695.1513	24.4317	468.4353	6,651.4648	6,436.7652
53.....	9,670.7196	26.4785	440.8065	6,183.0294	5,980.9932
54.....	9,644.2411	28.7591	414.7165	5,742.2230	5,552.1446
55.....	9,615.4820	31.3080	390.0753	5,327.5064	5,148.7219
56.....	9,584.1740	34.2538	366.7974	4,937.4311	4,769.3156

FONTE: Harold Greenlee & Alfonso Keh: The 1971 Group Annuity Mortality Table

QUADRO I.7.5  
(continuação)  
TABELA DE SOBREVIVÊNCIA PARA FUNDO DE PENSÃO - GAM-1971  
GROUP ANNUITY MORTALITY TABLE FOR 1971 - 6% A.A.  
MULHERES

Idade $x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$N_x^{(12)}$
57.....	9,549.9202	37.7031	344.7986	4,570.6337	4,412.6010
58.....	9,512.2171	41.7396	323.9975	4,225.8351	4,077.3363
59.....	9,470.4775	46.4149	304.3167	3,901.8376	3,762.3591
60.....	9,424.0626	51.7286	285.6842	3,597.5209	3,466.5823
61.....	9,372.3340	57.6961	268.0341	3,311.8367	3,188.9877
62.....	9,314.6379	64.2524	251.3057	3,043.8026	2,928.6208
63.....	9,250.3855	71.3390	235.4455	2,792.4969	2,684.5844
64.....	9,179.0465	79.0132	220.4054	2,557.0514	2,456.0323
65.....	9,100.0333	87.0236	206.1398	2,336.6460	2,242.1653
66.....	9,013.0097	95.2225	192.6117	2,130.5062	2,042.2258
67.....	8,917.7872	103.6336	179.7894	1,937.8945	1,855.4910
68.....	8,814.1536	113.4998	167.6416	1,758.1050	1,681.2693
69.....	8,700.6538	125.8202	156.1159	1,590.4634	1,518.9103
70.....	8,574.8336	141.2875	145.1494	1,434.3475	1,367.8207
71.....	8,433.5461	160.2374	134.6771	1,289.1981	1,227.4711
72.....	8,273.3087	181.2765	124.6399	1,154.5210	1,097.3944
73.....	8,092.0322	203.2071	115.0084	1,029.8811	977.1690
74.....	7,888.8251	225.8728	105.7739	914.8728	866.3931
75.....	7,662.9523	248.1647	96.9296	809.0989	764.6729
76.....	7,414.7876	269.9576	88.4816	712.1693	671.6153
77.....	7,144.8300	291.2876	80.4341	623.6877	586.8221
78.....	6,853.5424	311.6443	72.7876	543.2536	509.8926
79.....	6,541.8981	331.1247	65.5451	470.4660	440.4245
80.....	6,210.7734	348.3312	58.7052	404.9208	378.0143
81.....	5,862.4422	362.6096	52.2761	346.2156	322.2558
82.....	5,499.8326	373.6367	46.2667	293.9395	272.7339
83.....	5,126.1959	381.1378	40.6826	247.6728	229.0266
84.....	4,745.0581	386.7269	35.5262	206.9902	190.7074
85.....	4,358.3312	388.6717	30.7838	171.4640	157.3548
86.....	3,969.6595	386.9147	26.4514	140.6803	128.5567
87.....	3,582.7448	381.3904	22.5219	114.2288	103.9063
88.....	3,201.3544	372.0806	18.9853	91.7069	83.0053
89.....	2,829.2738	359.0150	15.8290	72.7216	65.4666
90.....	2,470.2588	342.3211	13.0381	56.8926	50.9168
91.....	2,127.9377	321.7271	10.5956	43.8545	38.9982
92.....	1,806.2106	298.1639	8.4846	33.2589	29.3702
93.....	1,508.0467	272.0531	6.6830	24.7744	21.7113
94.....	1,235.9936	243.9221	5.1673	18.0914	15.7230
95.....	992.0715	214.4154	3.9128	12.9241	11.1307
96.....	777.6561	184.2812	2.8935	9.0113	7.6851
97.....	593.3749	153.1257	2.0829	6.1178	5.1631
98.....	440.2492	123.3741	1.4579	4.0349	3.3667
99.....	316.8751	96.5452	0.9899	2.5770	2.1233
100.....	220.3299	73.0680	0.6494	1.5871	1.2895
101.....	147.2619	53.2147	0.4094	0.9377	0.7501
102.....	94.0472	37.0703	0.2467	0.5283	0.4152
103.....	56.9769	24.5209	0.1410	0.2816	0.2170
104.....	32.4560	15.3037	0.0758	0.1406	0.1059
105.....	17.1523	8.9054	0.0378	0.0648	0.0475
106.....	8.2469	4.7416	0.0171	0.0271	0.0192
107.....	3.5053	2.2446	0.0069	0.0099	0.0068
108.....	1.2607	0.9038	0.0023	0.0031	0.0020
109.....	0.3569	0.2878	0.0006	0.0007	0.0005
110.....	0.0691	0.0691	0.0001	0.0001	0.0001

FONTE: Harold Greenlee & Alfonso Keh: The 1971 Group Annuity Mortality Table

- 3) os métodos de graduação e interpolação foram mais refinados, dadas as facilidades de computação ainda rudimentares à época do primeiro estudo;
- 4) as margens foram reduzidas de 10 para 8% para os homens e de  $12\frac{1}{2}$  para 10% para as mulheres como testemunho do menor gradiente de progresso na longevidade de ambos os sexos; omitiram-se as possibilidades de espetaculares progressos médicos na cura do câncer, das doenças renais e circulatórias e no retardamento do envelhecimento.

Seguindo a mesma filosofia da Tabela de 1951, procurou traduzir a experiência passada e não se submeter a curvas teóricas de sobrevivência. Esperou-se assim expressar as altas taxas de mortalidade por acidentes nas idades jovens e as taxas cambiantes de mortalidade por doenças profissionais, sociais e outras decorrentes de fenômenos contemporâneos como o incremento da poluição urbana e agrícola e as mutações dos hábitos e da moral social no mundo de hoje.

Mostramos a seguir a "GAM-1971 Table" separada para homens e mulheres e cobrindo o intervalo de 5 a 110 anos. Apresenta no original apenas duas variáveis básicas,  $l_x$  e  $d_x$ , acrescidas de algumas funções de comutação empregadas pelos atuários e calculadas com a taxa atuarial de 6% ao ano atualmente empregada no Brasil.

#### I.8. INTRODUÇÃO À PROJEÇÃO MATRICIAL DE UMA POPULAÇÃO A UM SEXO

As regras de eliminação e de admissão dos componentes de um grupo de terminam claramente sua evolução quantitativa e quando essas regras estão fortemente apoiadas no atributo idade, então determinam também sua estrutura etária.

Tanto uma população quanto uma coleção de segurados de um fundo de pensão são exemplos de grupos que têm suas eliminações pautadas por regras apoiadas em maior ou menor grau no fator idade.

No caso da população, o domínio da idade é quase absoluto. As defecções só se fazem pela morte e a probabilidade de sua ocorrência com a idade está estatisticamente disciplinada pela Tabela de Sobrevivência do grupo a que o indivíduo pertence. Já as adições, os nascimentos, estão comandados por fatores biológicos como a fertilidade da mulher, e por fatores sócio-cul

turais que determinam o número e a idade em que os casais preferem ter filhos.

Sejam quais forem os fatores que comandam as adições a uma população, este comportamento pode ser estatisticamente acompanhado nos seus aspectos estáticos e dinâmicos pela análise da experiência passada. Ademais, todos os neófitos entram no grupo sempre com a mesma idade que é a de zero anos, um fato altamente simplificador da análise.

Já para um grupo dos contribuintes ativos de um fundo de pensão, há outras razões decrementais que não a morte. A invalidez permanente, o abandono do emprego, o rompimento do contrato com o fundo, são outros exemplos de defecções, o que torna o estudo mais complexo do que o das populações.

No que toca às adições, o problema é também mais complexo. Os novos contratos estão comandados pelo nível da atividade econômica, pela imagem do fundo, se aberto, pela política de pessoal da empresa, se fechado, por diversas outras razões. Diferentemente da população, as idades dos entrantes são as mais variadas, embora mais concentradas naquelas faixas em que os jovens entram no mercado de trabalho.

A dinâmica populacional de um desses grupos, isto é, a evolução de sua dimensão e de sua estrutura etária, é um fenômeno complexo que seria desejável começar a conhecer com um modelo discreto relativo ao problema mais simples da população. Diferiremos para o Capítulo IV alguns comentários relativos aos fundos de pensão.

Começemos introduzindo pequenas adaptações na notação até então adotada posto que, em termos cronológicos, a variável tempo-calendário se tornará prioritária sobre a variável tempo-idade, uma vez que nossa intenção é projetar populações no tempo-calendário baseando-nos nos dados passados disponíveis.

Adotaremos uma escala de tempo  $t$  cuja unidade representa cinco anos, intervalo mínimo no qual se farão projeções, e cujo instante genérico representa o meio do primeiro ano de cada intervalo. A unidade de idade continuará sendo  $x$  e igual a um ano, mas os subgrupos de idades a serem tratados como um pacote terão também amplitude padrão de cinco anos.

Desta forma,  ${}^t K_n^x$  significa o número de pessoas no instante genérico  $t$  e com idades entre  $x$  e  $x+n$ ; como  $n$  será sempre cinco anos, será omitido em favor da simplicidade.

O modelo, que só contempla o contingente das mulheres, se apóia em

várias premissas simplificadoras tais como:

- 1) a base física e natural da população bem como seu ambiente sócio-cultural continuam os mesmos;
- 2) o grupo é fechado a migrações;
- 3) as taxas de fertilidade e de mortalidade permanecem constantes ao longo do período projetado;
- 4) a proporção de recém-nascidos é a mesma para homens e mulheres.

Admitindo-se uma igualdade entre as tabelas de sobrevivência de homens e mulheres, a dinâmica populacional está comandada decididamente pelos atributos demográficos relativos ao grupo feminino, isto é, suas taxas de fertilidade e de mortalidade. A diferenciada mortalidade do homem é apenas um elemento ajustador dessa dinâmica imposta pelo chamado "sexo fraco".

Neste contexto, a probabilidade de uma mulher, com idade entre  $x$  e  $x+5$  anos incompletos no instante  $t$ , sobreviver até o instante  $t+1$ , isto é, por exatos cinco anos, está dada por

$${}_5p_x^t = \frac{{}_5L_{x+5}^t}{{}_5L_x^t} \quad (\text{I.8.1})$$

e a população remanescente desse grupo no mesmo instante  $t+1$  estará quantificada por

$${}_{x+5}^{t+1}K = {}_5p_x^t \cdot {}_x^tK = \left[ \frac{{}_5L_{x+5}^t}{{}_5L_x^t} \right] {}_x^tK \quad (\text{I.8.2})$$

ou simplesmente  ${}_{x+5}^{t+1}K = p_x \cdot {}_x^tK$  tendo em vista o que acima se anunciou.

A Equação I.8.2 nos informa que se  $t$  é uma origem arbitrária zero e se  $x$  é a idade início do grupo dos  $x$  aos  $x+5$  anos incompletos, então a dimensão deste grupo no instante  $t+1 = 1$ , cinco anos depois, quando terá idades entre  $x+5$  e  $x+10$  anos incompletos, será dada pelo produto da dimensão inicial pela probabilidade de sobrevivência no período.

Até então o que temos é a visão das defecções e nos falta acrescentar a contra-face das adições. Denominemos por  $F_x$  a razão entre o número de

meninas nascidas no ano  $t$  a partir das mulheres com idade de  $x$  a  $x+5$  anos in completos, e o número total das mulheres nessa faixa de idade, contadas no meio do ano  $t$ ,

$$F_x = \frac{t_B}{t_K} \quad (I.8.3)$$

Admitindo uma linearidade na distribuição dessas mulheres ao longo das faixas de idades e uma constância da taxa de fertilidade nos anos desses intervalos, decorre que o número de meninas nascidas de uma coorte ao longo do período  $t$ , cinco anos, estaria dado por, genericamente,

$${}^0B_x = 5 \left[ \frac{{}^0K_x + {}^1K_{x+5}}{2} \right] F_x = \frac{5}{2} \left[ {}^0K_x F_x + {}^1K_{x+5} F_x \right] \quad (I.8.4)$$

para a contribuição das mulheres entre idade  $x$  e  $x+5$  incompleta para a formação da coorte de meninas que nascem no intervalo de cinco anos que vai do tempo  $t=0$  ao tempo  $t=1$ .

Parece razoável esperar-se que a média dos pontos extremos relativos ao período  $t$ , onde as idades vão de  $x$  a  $x+5$ , seja feita não apenas com as idades mas com o produto idade vezes taxa de fertilidade, para considerar também a variação deste último fator, o que daria

$$\begin{aligned} {}^0B_x &= \frac{5}{2} ({}^0K_x F_x + {}^1K_{x+5} F_{x+5}) = \frac{5}{2} ({}^0K_x F_x + \frac{L_{x+5}}{L_x} {}^0K_x F_{x+5}) = \\ &= \frac{5}{2} (F_x + \frac{L_{x+5}}{L_x} F_{x+5}) {}^0K_x \end{aligned} \quad (I.8.5)$$

Entretanto, as mulheres entre as idades  $x$  e  $x+5$  não são as únicas produzindo meninas no intervalo de  $t=0$  a  $t=1$ . Todas as demais em idade fértil podem fazê-lo e logo o somatório de meninas nascidas nesse período seria dado por

$${}^0P_x = \sum_i^j \left[ {}^0B_x \right] = \frac{5}{2} \sum_i^j \left[ F_x + \frac{L_{x+5}}{L_x} F_{x+5} \right] {}^0K_x \quad (I.8.6)$$

onde  $i$  e  $j$  são os rótulos do início e fim do período fértil feminino.

Mas estas crianças não estarão todas vivas ao fim dos cinco anos do período  $t=0$ , quando teriam 5 anos de idade. Já que  $x$  e  $t$  se relacionam por  $x=5(t-1)$  e que  $dt = \frac{dx}{5}$ , a proporção de meninas vivas nessa idade estaria da da por

$${}^5P_0 = \frac{\int_0^1 1(5t-5)dt}{1_0} = \frac{\int_0^5 1(x)dx}{5 \ 1_0} = \frac{{}_5L_0}{5 \ 1_0} \quad (I.8.7)$$

O número de sobreviventes é o resultado do produto do número de nascidas dado pela Equação I.8.6 pela proporção encontrada na Equação I.8.7; logo, o extrato da base da pirâmide populacional de mulheres será dado, para um instante genérico,  $t$ , por

$${}^{t+1}K_0 = \frac{L_0}{2 \ 1_0} \sum_i^j \left[ F_x + \frac{L_{x+5}}{L_x} F_{x+5} \right] {}^tK_x \quad (I.8.8)$$

e que se decompõe em tantas parcelas quantas forem as classes existentes entre 0 e  $w$ , sendo que as classes entre zero e  $i$  e as classes entre  $j$  e  $w$ , que se referem aos dois períodos inférteis da mulher, são preenchidos com zeros.

As outras camadas da pirâmide estão sujeitas somente ao fenômeno decremental da morte e se reduzem de tamanho pela Equação I.8.2 à medida em que o tempo as empurra para cima.

O resultado disso tudo pode ser resumido numa matriz explicitada em 1945 por P. H. Leslie<sup>29</sup> no seu artigo "On the Uses of Matrices in Certain Population Mathematics" publicado no nº 33 do periódico *Biometrika*.

Essa matriz quando multiplica o vetor população do tempo  $t$  produz o vetor população do tempo  $t+1$ , processo esse que usado recursivamente permite conhecer o destino estrutural da população, desde que prevaleçam os pres-

(29) LESLIE, P.H. On the uses of matrices in certain populations mathematics. *Biometrika*, V. 33, 1945.

supostos admitidos no início desta Seção. Assim, denominando por  $L$  a matriz de Leslie, cuja estrutura é

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{L_0}{2} \frac{1}{l_0} \left[ \frac{L_{15}}{L_{10}} F_{15} \right] & \frac{L_0}{2} \frac{1}{l_0} \left[ F_{15} + \frac{L_{20}}{L_{15}} F_{20} \right] & \dots & 0 & 0 \\ \frac{L_5}{L_0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_{10}}{L_{15}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_{15}}{L_{10}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{L_{85}}{L_{80}} & \frac{L_{85}}{l_{85}} \end{pmatrix}$$

(I.8.9)

que é sempre uma matriz quadrada com  $\frac{w}{5} + 1$  linhas e colunas rotuladas de zero a  $w$  com intervalos usualmente de cinco anos.

Admitindo-se que o primeiro quinquênio de fertilidade é o que vai dos 10 aos 15 anos de idade e que o último é o que vai dos 40 aos 45 anos de idade, a primeira linha de  $L$  conterá as duas primeiras casas nulas, as sete próximas preenchidas com as taxas de fertilidade ditadas pela expressão entre parênteses da Equação I.8.8 e as últimas nove caselas novamente nulas.

A sub-diagonal inferior mostra as taxas de sobrevivência em cada grupo de idade e o escalar  $L(19,19)$ , que retrata a sobrevivência no intervalo aberto de 85 e mais anos, é dado por

$$P_{85+} = \frac{L_{85+}}{l_{85+}} \quad (\text{I.8.10})$$

Em notação matricial a equação de recorrência antes mencionada está dada por

$${}^{t+1}K = L \cdot {}^tK \quad (\text{I.8.11})$$

onde  ${}^{t+1}K$  e  ${}^tK$  são vetores colunas com igual número de linhas que  $L$  e que representam as distribuições absolutas das coortes sintéticas por grupos quinquenais nos momentos a que se referem.

Generalizando a equação para uma projeção a  $n$  períodos na escala de  $t$ , vem

$${}^{t+n}K = L^n \cdot {}^tK \quad (\text{I.8.12})$$

e se esse intervalo é bastante amplo como 30 ou mais quinquênios, a estrutura percentual de  ${}^{t+n}K$  tende a se estabilizar, não sem antes passar por um processo oscilatório nessa estrutura relativa, o que discutiremos mais adiante. As sucessivas potenciações de  $L$  são a origem dessa estabilidade já que quando elevada a potências cada vez mais altas,  $L$  tende a se estabilizar não no sentido de que seus elementos não cresçam mais de valor, mas no sentido de que, dada uma matriz de alta potência, suas linhas e suas colunas se tornam proporcionais. A estabilidade também significa que, dadas duas matrizes de potências consecutivas, seus elementos se tornam proporcionais por uma mesma constante que, no limite de exponenciação, é o maior ou primeiro autovalor da matriz, antes comentada.

Recordando que o produto de uma matriz  $L$   $n \times n$  por um vetor coluna  $n \times 1$  produz um vetor coluna  $n \times 1$ , onde cada escalar da linha  $i$  do vetor produto é obtido pelo produto da  $i$ -ésima linha da matriz pelo vetor fator, é fácil perceber que o produto da matriz de Leslie pelo vetor população de mulheres no instante  $t$  atende à lógica seguinte:

- 1) a população em idade zero no tempo  $t+1$  é o produto das taxas de fertilidade em cada idade pelos respectivos contingentes populacionais em cada idade, sendo este o único escalar do vetor produto que depende do processo de nascimento;
- 2) todas as projeções de populações no tempo  $t+1$  e nas idades de 5 a 85+ anos só dependem do processo de mortalidade e vê-se com facilidade que, havendo um só desses fatores em cada linha de  $L$ , des-

locado para uma posição de sub-diagonal inferior e que por isso multiplica a casela de ordem anterior do vetor fator, surge naturalmente no resultado o número de sobreviventes do grupo de idades em que está posicionado o fator de sobrevivência;

- 3) a única linha com dois fatores de sobrevivência é a última, já que por ser aberta no extremo superior, a categoria de 85 ou mais anos é a única que produz sobreviventes dentro da própria categoria em adição aos que vêm da classe imediatamente anterior.

Apresentamos no Quadro I.8.1 uma matriz de Leslie para o Brasil no ano de 1980 calculada pelo autor com base nos dados avançados do último censo publicados ainda em caráter provisório, e com o emprego do Método B de Arriaga.

Esse mesmo Quadro mostra o vetor população feminina no Brasil para o ano de 1980 e sua projeção para o ano 2.000, sendo ambos apresentados também na sua forma normalizada para revelar suas decomposições percentuais por faixa de idade.

Encontra-se também calculado o maior autovalor da matriz de Leslie, que equivale a  $1 +$  "taxa intrínseca de nascimentos" para o período de cinco anos das categorias de idade da matriz. Isto representa um crescimento geométrico de 1,675% ao ano.

Está também oferecido o respectivo autovetor que é, por sua vez, uma apresentação normalizada do vetor da população estável que será alcançada por convergência ao fim de  $n$  atuações, em geral 30 ou mais, ou seja, 150 anos, da matriz de Leslie sobre o vetor população.

Estas projeções não serão evidentemente válidas se os pressupostos de estabilidade das taxas de fertilidade e mortalidade que ela contém não se confirmarem. As discrepâncias revelarão que estão ocorrendo migrações e/ou variações nas taxas de fertilidade e mortalidade.

Recordemos um pouco a álgebra dos autovalores e autovetores. Um escalar  $t$  é chamado autovalor de uma matriz  $M$  se existe um vetor  $X$  não nulo tal que

$$MX = tX \quad (I.8.13)$$

Uma matriz quadrada  $n \times n$  tem  $n$  autovalores que podem ser reais ou

## QUADRO I.8.1

BRASIL - POPULAÇÃO FEMININA  
 MATRIZ DE LESLIE E VETOR POPULAÇÃO EM 1980  
 PROJEÇÃO DO VETOR POPULAÇÃO PARA O ANO 2.000

#####

PROJECAO MATRICIAL DE UMA POPULACAO

#####

DADOS DE ENTRADA

=====

MATRIZ DE LESLIE 15 X 15 :

LINHA 1

0.000000	0.000000	0.073020	0.280038	0.422794
0.389301	0.284814	0.168946	0.069572	0.017508
0.006442	0.001817	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 2

0.961822	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 3

0.000000	0.988571	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 4

0.000000	0.000000	0.997676	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 5

0.000000	0.000000	0.000000	0.997606	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 6

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.993784
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 7

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.992223	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 8

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.990548	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

LINHA 9

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.987592	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

## QUADRO I.8.1 (CONT.)

LINHA 10				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.981447	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 11				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.970563
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 12				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.953730	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 13				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.925932	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 14				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.880025	0.000000	0.000000
LINHA 15				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.795701	0.567415

O MAIOR AUTOVALOR DA MATRIZ ACIMA E' : 1.086586

VETOR POPULACAO NORMALIZADO E' :

1.000000	0.885178	0.805331	0.739435	0.678883
0.620902	0.566981	0.516867	0.283487	0.424322
0.379015	0.332674	0.283487	0.229594	0.351885

VETOR POPULACAO PARA O PERIODO 0

LINHA 1	8,192,115.	13.671 %
LINHA 2	7,045,598.	11.757 %
LINHA 3	6,746,806.	11.259 %
LINHA 4	6,793,147.	11.336 %
LINHA 5	5,973,696.	9.969 %
LINHA 6	4,950,374.	8.261 %
LINHA 7	3,916,886.	6.536 %
LINHA 8	3,232,579.	5.394 %
LINHA 9	2,844,848.	4.747 %
LINHA 10	2,407,010.	4.017 %
LINHA 11	2,113,899.	3.528 %
LINHA 12	1,673,590.	2.793 %
LINHA 13	1,334,127.	2.226 %
LINHA 14	1,131,306.	1.888 %
LINHA 15	1,568,787.	2.618 %
TOTAL	59,924,768.	100.000 %

## QUADRO I.8.1 (CONT.)

#####

DADOS DE SAIDA

=====

MATRIZ DE LESLIE A POTENCIA 4

-----				
LINHA 1				
0.265650	0.415992	0.390128	0.299613	0.194370
0.094559	0.036584	0.017790	0.006481	0.001216
0.000447	0.000126	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 2				
0.066779	0.265650	0.404736	0.371220	0.270120
0.159708	0.065461	0.016322	0.005902	0.001618
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 3				
0.000000	0.068636	0.265650	0.401043	0.367858
0.268703	0.159120	0.065330	0.016338	0.005945
0.001648	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 4				
0.000000	0.000000	0.069268	0.265650	0.401071
0.369299	0.270180	0.160265	0.065997	0.016608
0.006111	0.001724	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 5				
0.946349	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 6				
0.000000	0.977796	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 7				
0.000000	0.000000	0.981409	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 8				
0.000000	0.000000	0.000000	0.974397	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 9				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.964616
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 10				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.952641	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 11				
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.931845	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

QUADRO I.8.1 (CONT.)

LINHA 12					
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.897209	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 13					
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.841192	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 14					
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.754264
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
LINHA 15					
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.618371	0.367896	0.225448	0.145362	0.103658	

VETOR POPULACAO PARA O PERIODO 4

LINHA 1	11,627,109.	12.715 %
LINHA 2	10,405,231.	11.379 %
LINHA 3	9,426,577.	10.308 %
LINHA 4	8,351,843.	9.094 %
LINHA 5	7,752,597.	8.478 %
LINHA 6	6,889,161.	7.534 %
LINHA 7	6,621,374.	7.241 %
LINHA 8	6,619,221.	7.238 %
LINHA 9	5,762,322.	6.301 %
LINHA 10	4,715,929.	5.157 %
LINHA 11	3,649,931.	3.991 %
LINHA 12	2,900,299.	3.172 %
LINHA 13	2,393,063.	2.617 %
LINHA 14	1,815,521.	1.985 %
LINHA 15	2,550,725.	2.789 %
TOTAL	91,444,901.	100.000 %

#####

complexos e cada autovalor tem uma família de autovetores proporcionais.

Exemplifiquemos com a matriz M abaixo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que conduz ao sistema de duas equações com três incógnitas

$$x + 2y = tx$$

$$3x + 2y = ty$$

e ao sistema homogêneo de equações

$$(t - 1)x - 2y = 0$$

$$-3x + (t - 2)y = 0$$

(I.8.14)

A Álgebra Linear nos ensina que um sistema de equações simultâneas tem sua solução obtida por

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta, \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta \quad \dots \quad x_n = \Delta_n / \Delta$$

onde  $\Delta$  é o determinante da matriz M dos coeficientes à esquerda das igualdades e  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , respectivamente, são os determinantes das matrizes derivadas de M quando se substitui a coluna dos coeficientes da variável que se quer determinar pela coluna dos coeficientes à direita da igualdade.

Para um sistema homogêneo,  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  são nulos, porque suas matrizes ficariam com uma coluna de zeros e assim surgiria a óbvia solução nula em que  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , no caso de  $\Delta \neq 0$ .

Um sistema homogêneo tem solução não nula se, e somente se, o determinante da matriz de seus coeficientes for nulo, porque o símbolo de indeterminação zero/zero conduzirá a inúmeras soluções não nulas.

Assim, fazendo, no exemplo,

$$\begin{vmatrix} (t-1) & -2 \\ -3 & (t-2) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{vem}$$

$t^2 - 3t - 4 = 0 = (t-4)(t+1) = 0$ ; surgem como raízes evidentes  $t_1 = +4$  e  $t_2 = -1$

que são os dois autovalores de  $M$  aos quais estão associados, respectivamente, uma família de autovetores, como veremos a seguir.

Voltando com  $t_1 = +4$  para as Equações I.8.14, vem

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{array} \right\} = 3x - 2y = 0$$

um sistema não krameriano que apresenta inúmeras soluções das quais a óbvia é  $x=2$  e  $y=3$  que é um dos autovetores pertencentes ao autoespaço de  $t_1 = 4$ . Qualquer par múltiplo ou submúltiplo dos valores acima se constitui também um autovetor de  $t_1$ . Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

O mesmo se dá com o autovetor  $t_2 = -1$ , que produz as equações

$$\left. \begin{array}{l} -2x - 2y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{array} \right\} x + y = 0$$

com solução óbvia  $x=1$  e  $y=-1$  que seria um dos autovetores do autoespaço  $t_2=-1$ .

Para evitar esta multiplicidade de autovetores, fala-se de um autovetor normalizado onde, ou o seu primeiro escalar é unitário ou a soma de seus elementos é unitária.

Autovalores e autovetores são entidades ricas de significado, na dependência do campo científico em que se aplica a Álgebra Matricial.

Uma matriz de Leslie  $18 \times 18$  tem 18 autovalores, dos quais o primeiro é sempre o maior e é real, podendo dentre os demais serem encontrados autovalores complexos sendo estes os responsáveis pela oscilação da estrutura percentual na população, como veremos adiante.

Sendo um autovalor um escalar que multiplicado por um vetor coluna produz o mesmo resultado que uma matriz multiplicada pelo mesmo vetor coluna, fácil é concluir que o autovalor é como que um procurador da matriz para fins de projeção populacional por multiplicação.

Mas se uma matriz tem muitos procuradores, os primeiros são maiores e mais importantes que os últimos e estes vão tendo sua importância anulada à medida em que se exponencia a matriz de Leslie para fins de projeção popu-

lacional. Os três primeiros autovalores reúnem praticamente toda a informação contida numa matriz de Leslie que conta usualmente com 12 a 18 autovalores dependendo da categorização de idades que se usa na análise.

Há diferentes algoritmos para se calcular o maior ou todos os autovalores de uma matriz, e seus respectivos autovetores normalizados. Apresentamos em Apêndice três programas codificados pelo autor em Basic Microsoft para microcomputadores estruturados no processador Zilog Z 80. O primeiro calcula apenas o maior autovalor e seu correspondente autovetor normalizado e foi adaptado de um código em Fortran apresentado por McCormick e Salvadori<sup>30</sup> em seu livro "Numerical Methods in FORTRAN".

O segundo calcula todos os autovalores, e respectivos autovetores normalizados, pelo método de Rutishauser, que usa transformação triangular inferior e foi adaptada de um código em Fortran apresentado por Brice Carnahan et Alii em seu livro "Applied Numerical Methods".

O terceiro foi inteiramente desenvolvido pelo autor e projeta populações pelo método da exponenciação da matriz de Leslie, calculando ainda o maior autovalor e respectivo autovetor.

Convém, contudo, discorrer um pouco mais sobre as implicações deste processo de projeção populacional matricial que nos levará a outros métodos de cálculo de autovalores.

Dissemos que, a partir de uma certa potência de  $L$ ,  $L^n$  e  $L^{n+1}$  diferem por um fator constante entre qualquer de seus elementos correspondentes, e que esse fator seria exatamente o primeiro e maior autovalor de  $L$ . Assim, no limite de  $n$  tendendo para infinito, mas na prática fazendo  $n$  igual a 20, 30 ou 40,

$$t_1 = \frac{a_{ij} \text{ de } L^{n+1}}{a_{ij} \text{ de } L^n} \text{ para qualquer par } ij. \quad (\text{I.8.15})$$

Dividindo-se  $L^n$  por  $t_1^n$  encontra-se a matriz do Primeiro Componente Espectral de  $L$  e que representa aquela parte de  $L$  diretamente associada com  $t_1$

$$Z_1 = \frac{L^n}{t_1^n} \quad (\text{I.8.16})$$

(30) MCCORMICK & SALVADORI. Métodos numéricos em fortran. São Paulo, Editora USP/Polígono, 1971. p.236.

e que apresenta grande interesse demográfico, pois cada uma de suas colunas é proporcional ao vetor população estável.

Subtraindo-se  $t_1 Z_1$  de  $L$  sobra uma primeira Matriz Reduzida,  $N_1$ , que contém os efeitos dos restantes  $n-1$  autovalores ainda não expurgados pela de composição espectral.

$$N_1 = L - t_1 Z_1 \quad (I.8.17)$$

mátriz esta que se estabiliza mais rapidamente que  $L$  por exponenciação, o que permite, "mutatis mutandis", voltar às Equações I.8.15, I.8.16 e I.8.17 para calcular  $t_2$ ,  $Z_2$  e  $N_2$  e assim sucessivamente até  $t_m$ ,  $Z_m$  e  $N_m$ , sendo  $m$  a dimensão da mátriz de Leslie, para chegar à equação fundamental da decomposi ção espectral que estabelece

$$L = t_1 Z_1 + t_2 Z_2 + \dots + t_m Z_m \quad (I.8.18)$$

que diz ser uma matriz a soma do produto de seus autovalores pelos seus respectivos componentes espectrais.

Essas matrizes  $Z_s$  têm curiosas características:

- 1) seu somatório produz a matriz identidade

$$\sum_1^m Z_i = I; \quad (I.8.19)$$

- 2) cada  $Z$  é ortogonal em relação às demais, ou seja, o produto de qualquer par de  $Z_s$  é nulo

$$Z_i Z_j = 0 \text{ para } i \neq j; \quad (I.8.20)$$

- 3) cada  $Z$  é idempotente, repetindo-se a si mesma por exponenciação a qualquer potência inteira

$$Z_i^n = Z_i \text{ para qualquer } n \text{ inteiro}; \quad (I.8.21)$$

- 4) cada  $Z$  funciona como se fosse uma automatriz, figura paralela em sentido a autovetor, atendendo a

$$MZ_i = t_i Z_i. \quad (I.8.22)$$

Com respeito ao primeiro componente espectral  $Z_1$ , cada uma de suas colunas, de per si, são representações proporcionais da população estável

que se obterá no limite da exponenciação de  $L$  quando esta atinge sua estabilidade, no sentido já enunciado.

Como  $Z_1$  só depende de  $L$  e transporta sozinho toda a informação sobre a estrutura percentual estável por faixa de idade; chega-se a uma das duas importantes conclusões que buscamos nesta Seção. A estrutura relativa da população estável, a ser obtida a partir de um vetor população qualquer, será sempre a mesma independentemente da estrutura desse vetor inicial. Seria bastante mais fácil fazerem-se cálculos demográficos e atuariais nas condições descritas se elas fossem reais.

A segunda e derradeira conclusão a que desejamos chegar neste Capítulo sobre Demografia é, antecipando, que a prefalada estabilidade não ocorre sem antes se verificar um movimento oscilatório nessa estrutura percentual, provocado pelos autovalores complexos.

O autovalor complexo tem dois componentes, um real e um imaginário, e ocorre sempre em conjugados pares que podem ser expressos na forma cartesiana por

$$t = a \pm i.b \quad (\text{I.8.23})$$

cujo módulo é dado por

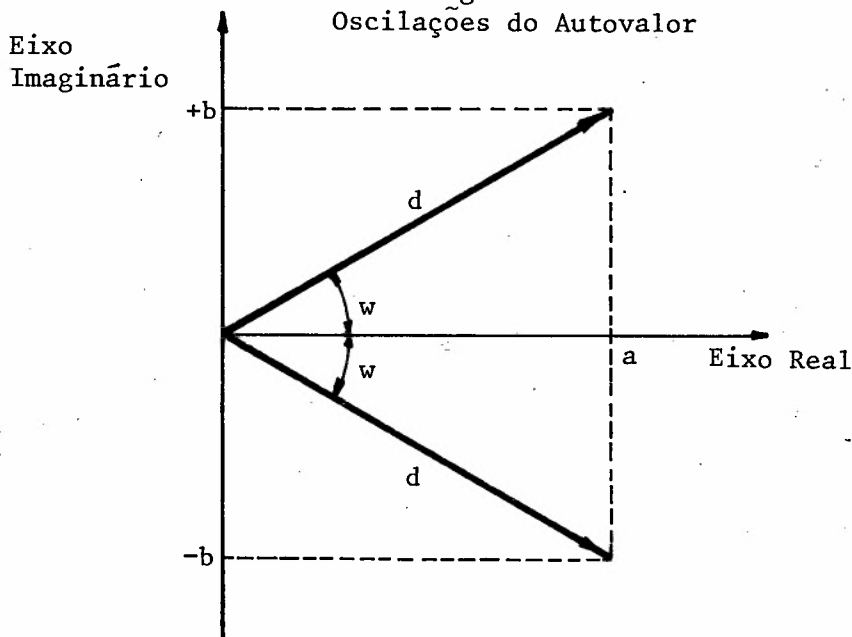
$$d = |t| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad (\text{I.8.24})$$

na forma polar vem

$$t = d(\cos w \pm \text{sen } w) \quad (\text{I.8.25})$$

em consonância com as duas representações geométricas, cartesiana e polar, superpostas na Figura I.8.1 abaixo.

Figura I.8.1  
Oscilações do Autovalor



$$\text{onde } w = \text{tg}^{-1} (b/a) \quad (\text{I.8.26})$$

dado este que se refere à forma polar.

Quando se eleva a Equação I.8.18 à potência  $n$  para se calcular  $L^n$ , a fim de projetar o vetor população para  $n$  períodos depois, obtemos

$$L_n = t_1^n Z_1 + t_2^n Z_2 + \dots + t_m^n Z_m \quad (\text{I.8.27})$$

cuja simplicidade se deve às propriedades de ortogonalidade e idempotência dos  $Z_s$ .

Observa-se assim que  $L^n$  é uma função de potência inteira " $n$ " dos autovalores que, quando são complexos, produzem o que a seguir se expõe.

Lembrando que o termo real " $a$ " é dado por  $d \cos w$  e o coeficiente do termo imaginário é  $d \sin w$ , então quando se eleva, por exemplo, ao quadrado um autovalor complexo, vem

$$\begin{aligned} t^2 &= (a \pm i.b)^2 = [d(\cos w \pm i. \sin w)]^2 = d^2 (\cos w \pm i. \sin w)^2 = \\ &= d^2 [(\cos^2 w - \sin^2 w) \pm i.(2 \sin w \cos w)] = \\ &= d^2 [(\cos 2w) \pm i. (\sin 2w)] \quad , \quad (\text{I.8.28}) \end{aligned}$$

onde se vê que ao se quadrar  $t$ , eleva-se ao quadrado o seu módulo mas multiplica-se por dois o ângulo da nova representação polar.

A Equação I.8.28 pode ser generalizada com o auxílio do Teorema de De Moivre para

$$t^n = d^n (\cos w \pm i. \sin w)^n = d^n [\cos(nw) \pm i. \sin(nw)] \quad (\text{I.8.29})$$

As componentes imaginárias de  $t$ , e de suas potências, se anulam sempre, mas suas componentes segundo o eixo real somam-se sempre e são estas que alteram  $L^n$  através da Equação I.8.27, que por sua vez altera o vetor população segundo a Equação I.8.12.

Na dependência do ângulo  $nw$ , essas componentes horizontais podem ser positivas ou negativas e portanto a contribuição da potência  $n$  de um certo autovalor complexo pode ser a de aumentar ou a de reduzir certas categorias etárias do vetor população  $t^{+n} K$ .

A população no seu todo cresce se  $t_1 > 1$ , como é usual, mas sua estrutura etária sofre oscilações antes de atingir a estabilidade total a que nos referimos.

Se  $w$  é ângulo inicial,  $p=360/w$  é o número de períodos de cinco anos para que o vetor  $nw$  volte pela primeira vez, a contar da origem da análise, à posição inicial. Assim uma onda de recém-nascidos anormalmente alta num certo período provocará um "eco" de muitas crianças  $p$  períodos depois, intervalo esse chamado de tempo médio de gerações, mesmo sem aumento da fertilidade dos adultos; esse "eco", no entanto, vai-se atenuando pelas sucessivas potências de  $t$  pois os módulos dos autovalores complexos da matriz de Leslie são sempre inferiores à unidade e como tal também o são seus vetores ortogonais componentes.

Concluimos aqui nossa incursão no campo da Matemática da População que teve a intenção de produzir, por paralelismo, algumas importantes reflexões sobre o comportamento dos contingentes ligados aos fundos de pensão.

Por exemplo, caso um desses fundos fosse constituído só de pessoas com a idade mínima,  $m$ , que só são eliminadas, todas, pela aposentadoria na idade máxima,  $M$ , e que fosse alimentado de novos integrantes sempre nessa mesma idade mínima, então, esse grupo não crescerá de tamanho e sua estrutura etária, em cada período, teria uma casela preenchida e todas as demais vazias.

Quando ocorrer a situação em que a casela preenchida é a da idade máxima, surgirá o primeiro "eco" resultante da estrutura etária inicial, repetindo-se todo o processo para gerar um próximo eco  $M-m$  anos depois. Aqui, esses ecos não se atenuariam nunca, repetindo-se indefinidamente.

Este exemplo é uma rara exceção onde não há convergência nem da matriz de Leslie exponenciada nem da estrutura etária do vetor população. O maior autovalor é 1, já que a população não cresce e porque ele sempre se situa entre a menor e a maior soma das linhas de  $L$ , que aqui se igualam a um.

Suponhamos dentro deste modelo que  $m = 15$  anos,  $M = 65$ , e que há cinco categorias etárias entre essas idades, então, teríamos para  $L$  e para  ${}^tK$  normalizado, respectivamente

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tK = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As projeções da população nas cinco décadas futuras seriam

$${}_{t+1}K = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad {}_{t+2}K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad {}_{t+3}K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad {}_{t+4}K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad {}_{t+5}K = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde a oscilação estrutural é bem evidente.

A singeleza do exemplo não impede de reconhecer a potencialidade da técnica de projeção matricial dos grupos populacionais que pode ser desdobrada e ampliada em vários sentidos. Os mais evidentes nos levam a admitir populações com diferentes taxas de eliminação e realimentação por faixas de idade e diferentes vetores população inicial ou a incluir no algoritmo distintas matrizes de Leslie, uma para cada período projetivo.

Essa diferenciação pode ser a expressão das tendências de mudanças nos fenômenos decremental e incremental que atuam sobre o grupo ou das hipóteses de trabalho calcadas nessas tendências e em políticas relativas à evolução do grupo.

## CAPÍTULO II

## UM SUMÁRIO DE MATEMÁTICA ATUARIAL

## II.1. INTRODUÇÃO

A Matemática Financeira dos Pagamentos Certos está razoavelmente bem difundida entre aqueles afeitos ao trato de assuntos econômicos e há mesmo um inusitado interesse em aprendê-la nesses tempos inflacionários com taxas de juros de três dígitos.

Sua utilização encontra-se hoje enormemente facilitada pelas calculadoras eletrônicas programadas para Finanças e já não é mais um grande mistério utilizar-se o Método de Newton-Raphson para obtenção das raízes de um polinômio em  $x$  para se chegar a uma Taxa Interna de Retorno ou de Custo de um fluxo heterogêneo de pagamentos.

A Matemática Financeira dos Pagamentos Incertos,<sup>1</sup> na qual se inclui a Matemática Atuarial, ao contrário, é praticamente desconhecida dos economistas e administradores em geral, sendo instrumento de trabalho quase que exclusivo da nebulosa figura do atuário que labora nas Companhias de Seguro, nos Institutos de Previdência e nos Fundos de Pensão.

Tal desconhecimento não parece se dever à sua maior complexidade, já que o incremento da dificuldade é insignificante, mas ao horizonte mais limitado de suas aplicações.

Conceituamos como Probabilidade Matemática ou Objetiva a chance de ocorrência de um evento que está determinada "a priori" pela construção do experimento que pode produzi-lo. São exemplos disso os arranjos físicos de jogos não viciados, como dados, urnas e roletas.

Chamaremos de Probabilidade Estatística, Subjetiva ou Empírica a chance de ocorrência de um evento calculada "a posteriori", com base em um grande número de observações de um certo fenômeno, como a razão entre o número de saídas desse particular evento e o número de saídas totais.

A probabilidade estatística é o principal elemento que a Matemática Atuarial acrescenta em seus cálculos que, de resto, se apoiam na Matemática Financeira convencional.

Alguns autores diferenciam Risco de Incerteza. A este último conceito associam aquelas situações em que é totalmente desconhecida a distribui-

(1) Ver MENGE, Walter & FISHER, Carl. The mathematics of life insurance - a practical guide to the application of insurance principles. Ann Arbor, MI, Ulrich Books, Inc. 1965. como exemplo de um bom texto sobre a matéria.

ção de probabilidades dos diversos eventos que compõem o espaço amostral de um experimento.

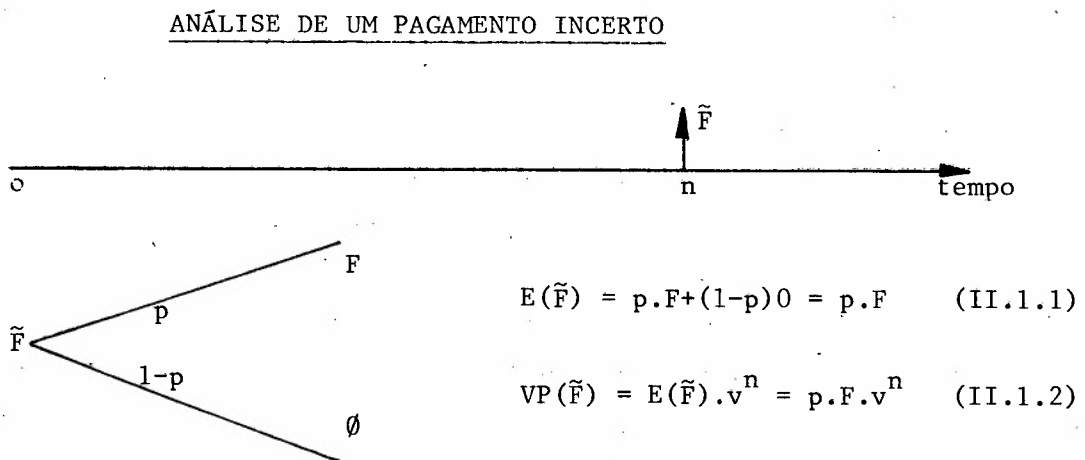
O Risco, por sua vez, retrataria as situações já analisadas pela experiência passada e traduzidas por distribuições empíricas de probabilidades que se supõe sejam válidas para o futuro mais ou menos imediato.

A Atuária trabalha sob condições de risco e, se o evento sob análise é a morte, suas probabilidades são extraídas das Tabelas de Sobrevivência de que falamos no capítulo anterior.

Pagamento incerto, numa visão pura, é, pois, uma transferência de riqueza entre dois entes econômicos que têm um valor e um prazo perfeitamente determinados, cuja chance de ocorrência não é de 100%, caso particular dos pagamentos certos, mas de algum valor inferior à unidade.

O Valor Presente de um Pagamento Incerto é o valor presente da esperança matemática do experimento probabilístico dicotômico mostrado na Figura II.1.1.

FIGURA II.1.1



Seja  $\tilde{F}$  um pagamento futuro incerto ao fim de  $n$  períodos, ao qual está associada a probabilidade  $p$  de ocorrência pelo seu valor integral, e a probabilidade complementar  $1-p$  de não ser efetivado. A equação de seu valor presente a uma dada taxa de desconto é a mesma dos pagamentos certos acrescida do fator relativo à probabilidade de sua ocorrência.

Para um decisor do tipo Valor Monetário Esperado<sup>2</sup> (VME), o valor presente de um pagamento incerto significa o montante que deveria ser pago pela aquisição do direito creditório  $\tilde{F}$  para assegurar duas coisas:

(2) Ver RAIFFA, Howard. Decision analysis - introductory lectures on choices under uncertainty. Reading, MA, 1970.

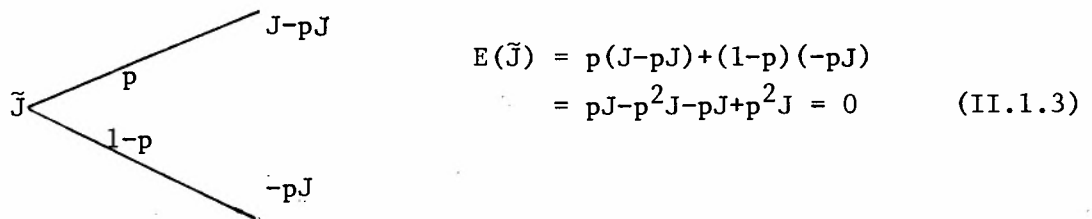
- que o jogo seja justo;
- que o investimento proporcione a taxa de juros usada no processo de atualização.

A Teoria dos Jogos nos ensina que um jogo é "justo" quando sua esperança matemática é nula. Um jogo é uma aposta sobre um resultado a ser conhecido num prazo muito curto e, portanto, a variável tempo e o processo de atualização não estão presentes no cálculo do valor de seu bilhete. A compra e o resultado estão separados no tempo por alguns dias, mas o jogador despreza, por insignificantes, as consequências financeiras dessa demora.

Um jogo é a compra de um pagamento incerto no presente e o seu VME é o dado pela Equação II.1.1. Caso o comprador pague por esse direito credi- tório o montante  $E(\tilde{J})=p.J$ , ele ganhará  $J-p.J=(1-p)J$  se receber seu direito e perderá  $p.J$  se não o conseguir. Esse jogo estaria grafado na Figura II.1.2.

FIGURA II.1.2

JOGO = PAGAMENTO INCERTO NO PRESENTE



e para a situação de jogo "justo" que não traz vantagem para qualquer das partes envolvidas.

Para que o jogo fosse vantajoso para o jogador seria necessário que sua esperança matemática fosse positiva, mas esses jogos não existem, na prática. Os investimentos empresariais, diretos ou em ações de empresas, se têm por traz do jogo uma gestação econômica de riqueza real através da operação da empresa, seriam a única exceção à regra de inexistência de jogos com esperança positiva para o jogador.

Vantajosos para o banqueiro e "injustos" para o jogador são todos os jogos de azar conhecidos, pois cobram pelo direito de participar do jogo quantia maior do que seu valor monetário esperado (VME).

Um Benefício Securitário é o direito a um jogo de resultados só conhecidos no futuro mais ou menos remoto, situação em que, afora as considera-

ções de "justiça" expendidas acima, se revestem de importância os investimentos que o banqueiro pode fazer com os dinheiros das apostas. Daí porque o valor presente "justo" de um dado pagamento de benefício securitário é o valor presente convencional da esperança matemática de seu valor futuro, como mostra a Equação II.1.2.

Dentre os eventos que interessam às empresas seguradoras, morte, invalidez, aposentadoria, desemprego, entre outros, ressalta de importância o primeiro deles, a morte. Baseadas nesse fato, essas companhias apostam com seus clientes que eles morrem ou que eles não morrem em determinados intervalos de tempo.

Há, portanto, apostas de morte e apostas de vida, isto é, benefícios a serem pagos por ocasião da sobrevivência e benefícios a serem concedidos no evento da morte. Há, ainda, apostas mistas, como o Seguro Dotal que veremos adiante.

Companhias de Seguros, Institutos de Previdência e Fundos de Pensão são grandes casas de apostas nas quais os eventos são em geral dicotômicos como: morrer-não morrer, estar válido-estar inválido, estar ativo-estar inativo, entre os mais importantes.

Em um Seguro de Vida, a companhia está apostando que o cliente não morre e este está, paradoxalmente, apostando no evento de sua morte. Acontecendo esta, o cliente "ganha" e a companhia, em perdendo, paga a aposta aos beneficiários.

Um Dote Puro, ao contrário, é um Seguro de Morte, na medida em que a Companhia está apostando que o cliente morre num certo período, enquanto este aposta que estará vivo ao fim dele, para receber o Dote. Se o cliente morre, a companhia ganha e se apossa definitivamente da aposta e dos resultados financeiros de seu investimento.

Há uma variedade incrível de arranjos securitários dos quais elegemos quarenta dos mais usuais para tratar aqui. O melhor arranjo para um indivíduo, visto isoladamente, depende de suas condições particulares, como idade, número de dependentes, potencial de trabalho, situação financeira presente e futura, atitude face ao risco, entre outras.

O estudo dos seguros, apoiado no que vimos no capítulo anterior, pode ser focado através dos modelos discreto e contínuo. A exemplo do que ocorre com a Matemática Financeira que, dispondo de ambos os modelos para atualização e capitalização, utiliza quase que exclusivamente na prática o mode

lo discreto, seguiremos aqui esta abordagem, eleita pela maioria dos autores e ratificada pela prática securitária, para expor o que nos parece útil mostrar nesta parte de nosso trabalho.

## II.2. ALGUNS CONCEITOS ESSENCIAIS

Tanto do ponto de vista individual como do grupal, a morte é certa, embora incerto seja o momento de sua ocorrência. A reunião de indivíduos em grandes grupos, no entanto, torna o comportamento decremental do grupo previsível através das leis de mortalidade de que nos ocupamos anteriormente.

É esta capacidade de previsão da Estatística, uma ciência dos grandes números, associada ao princípio da mutualidade, que distribui sobre todo o grupo as perdas individuais, a base em que se assenta a lógica atuarial das companhias que vendem benefícios securitários.

Essas companhias dispõem assim de um vultoso número de apostas "injustas" do ponto de vista do cliente que estatisticamente geram um "surplus" capaz de lhes permitir a realização de lucro.

Em linguagem securitária, Benefício é o valor prometido pelo banqueiro da aposta e Prêmio é quanto custa ao cliente para participar do jogo. A seguir, detalharemos diferentes alternativas do jogo, no que se refere aos prêmios e aos benefícios.

Denominamos de Prêmio Puro Unitário (PPU) o valor atual de um pagamento futuro incerto de \$1,00 ou de um caudal de pagamentos futuros incertos de \$1,00 por período, ou de qualquer outro arranjo de pagamentos futuros incertos de \$1,00 a serem eventualmente pagos em cada momento em que, por força do contrato, se devam aferir as condições da aposta.

No exemplo mais simples de um só pagamento futuro incerto, o Prêmio Puro Unitário seria obtido pela particularização da Equação II.1.2, fazendo-se  $F=1$  e obtendo-se

$$PPU = p \cdot v^n \quad (II.2.1)$$

Apesar de tratar-se de um caso particular, podemos inferir que PPU depende apenas de probabilidade "p" de recepção do valor de \$1,00, n anos no futuro e da taxa de juros embutida no operador de atualização a juros compostos  $v=(1+j)^{-1}$ . Assim, para benefícios securitários cuja recepção depende da

condição de estar vivo ou estar morto,

$$PPU = f(\text{probabilidade do evento, taxa de juros}) \quad (\text{II.2.2})$$

Chamaremos de Prêmio Comercial Unitário (PCU) a uma quantidade superior ao PPU, por uma certa quantia que possibilita à companhia:

- cobrir seus custos administrativos;
- absorver os desvios indesejáveis no comportamento decremental do grupo; e
- extrair o seu lucro.

Vemos assim que o PCU é uma função de mais três elementos, além dos dois já incluídos no PPU, ou seja,

$$PCU = F \left( \begin{array}{l} \text{probabilidade do evento, taxa de juros,} \\ \text{taxa de custos administrativos, taxa de} \\ \text{contingências e taxa de lucro} \end{array} \right) \quad (\text{II.2.3})$$

A razão entre o PCU e o PPU leva-nos ao Fator de Carregamento que transforma o último no primeiro e que pode variar de companhia para companhia, em função de suas características e objetivos próprios. Isto explica, em parte, porque, em concorrências ou tomadas de preços, diferentes companhias pedem diferentes PCUs.

O estudo dos desvios do comportamento decremental de um grupo com respeito ao "padrão" determinado pela experiência passada constitui-se em assunto de vanguarda no campo securitário, e se inclui na chamada Teoria da Ruína.

Influem nesses desvios, não são os motivos já mencionados determinantes da progressiva mudança nas Tabelas de Sobrevivência, mas ainda acontecimentos imprevisíveis como guerras, epidemias, convulsões sociais e da natureza que, segundo nossa conceituação anterior, colocam-se mais no campo da incerteza do que no campo do risco calculado.

O resseguro é uma das formas de tratar o risco da ruína de uma Companhia de Seguros, já que se esta é um "pool" de riscos individuais, uma Companhia de Resseguros é um "pool" de riscos coletivos que leva a um degrau mais alto o princípio da mutualidade.

Os contratos sobre a vida ou a morte das pessoas podem ser feitos

individual ou coletivamente. Abordaremos neste capítulo apenas exemplos relativos a indivíduos já que não comporta neste trabalho examinar toda a Atuária e sobretudo porque o Capítulo V, ao tratar de Fundos de Pensão, estará cuidando do grupo em particular a que se destina este estudo.

Para dar uma visão sucinta dos diferentes Benefícios Securitários, vamos dividi-los em duas grandes famílias: a dos que se recebem em vida, que denominaremos genericamente de Anuidades, e a dos benefícios a que se faz jus em caso de morte e que chamaremos genericamente de Seguros. Em seguida, detalharemos os seis atributos principais que caracterizam esses benefícios na mesma estrutura de numeração e qualificação que está usada no programa que se mostra adiante para resolver os quarenta problemas mais tradicionais da Atuária.

Assim sendo, temos:

A - Família das Anuidades:

I - Nome do Benefício:

1. Dote Puro;
2. Dote de "Tonti" ou Dote Tontine;
3. Anuidade Propriamente Dita.

II - Forma de Pagamento do Benefício:

1. Pagamento Único de \$1;
2. Pagamentos Anuais Iguais de \$1 cada, feitos de uma só vez em cada ano;
3. Pagamentos Anuais Iguais de \$1 cada, mas Desdobrados em Parcelas Equidistantes;
4. Pagamentos Anuais em Progressão Aritmética de Primeiro Termo Igual a \$1 e Razão Igual a \$1;
5. Pagamentos Anuais Desiguais Como em 4) Acima e Desdobrados em m Parcelas Equidistantes Como em 3) Acima.

III - Duração dos Direitos aos Benefícios:

1. Vitalícia - Até o Fim da Vida;
2. Temporária por n dos Anos que Teoricamente Restam até a Idade Máxima w.  $\overline{x:n}$

IV - Vigência dos Direitos aos Benefícios:

1. Ordinária - Sem Qualquer Período de Carência;

2. Diferida por k Anos - Com k Anos de Carência. k|

V - Época de Pagamento dos Benefícios:

1. Imediata - No Fim do Ano da Sobrevivência;
2. Antecipada - No Início do Ano da Sobrevivência. ..

VI - Condições de Pagamento do Prêmio:

1. Prêmio Único, no Ato da Compra;
2. Prêmio Anual Ordinário Antecipado Temporário por k Anos (Valem aqui, "mutatis mutandis", os mesmos significados para idênticos conceitos registrados acima para os Benefícios).

A combinação de todas as possibilidades desses seis atributos conduziria à existência de 240 diferentes tipos de anuidades. Delas trataremos apenas 27, sendo que as restantes ou não existem por inconsistência lógica, com um Dote Puro de Pagamento Anual, Vitalício, Ordinário, Antecipado com Prêmio Anual por k Anos, ou não são de maior interesse prático como um Dote Puro Antecipado que é igual ao Dote Puro Imediato pago no ano anterior.

No detalhamento da Família dos Seguros, usaremos numeração seqüencial àquela usada para a Família das Anuidades sempre que o detalhamento diferir do já empregado, visando a criar um "menu" manejável pelo programa já referido. Há, no entanto, duas categorizações que, por idênticas, repetem a numeração já usada no detalhamento anterior. Em respeito à clareza, elas serão enunciadas de novo:

B - Família dos Seguros:

I - Nome do Benefício:

4. Seguro de Vida Simples;
5. Seguro de Vida Dotal;
6. Seguro de Vida com Devolução dos Prêmios Históricos Acumulados.

II - Forma de Pagamento do Benefício:

6. Um Único Pagamento ao Longo de Todo o Período Segurado e de Valor Imutável;
7. Um Único Pagamento ao Longo de Todo o Período Segurado

mas de Valor Crescente Ano a Ano sob a Forma de uma Progressão Aritmética.

III - Duração dos Direitos ao Benefício:

1. Vitalícia - Até o Fim da Vida;
2. Temporária por n dos Anos que Teoricamente Restam até a Idade Máxima w.

IV - Vigência dos Direitos ao Benefício:

1. Ordinária - Sem Qualquer Período de Carência;
2. Diferida por k Anos - Com k Anos de Carência.

V - Época de Pagamento do Benefício:

3. Imediata - no Fim do Ano da Morte.

Obs.: Não é possível planejar-se pagamento antecipado de Seguro, já que não se conhece "a priori" quem vai morrer em cada ano.

VI - Condições de Pagamento do Prêmio:

3. Prêmio Único, no Ato da Compra;
4. Pagamento Anual Ordinário Antecipado Vitalício;
5. Pagamento Anual Ordinário Antecipado Temporário por a Anos (sendo  $a \leq k$  já que o prêmio deve estar todo pago antes da entrada em vigor da cobertura securitária).

Obs.: Valem em 4) e 5) os mesmos conceitos descritos para os Benefícios.

O produtório dessas categorizações progressivas revela a existência de 72 alternativas possíveis de seguros das quais estudaremos as 13 mais usuais. Dentre as demais, repetimos, algumas são inconsistentes, enquanto outras não têm aplicação prática.

A numeração utilizada na categorização dessas duas grandes famílias de benefícios vai permitir a identificação, de forma inequívoca, do particular problema que temos à mão dentre os 40 que estão detalhados a seguir e que se encontram resumidos nos quadros II.6.2 e II.6.3 adiante.

Antes de iniciarmos essa jornada, três palavras de esclarecimentos adicionais.

A primeira diz respeito à natureza dos fluxos de caixa envolvidos num dado problema atuarial. Os benefícios são sempre grandezas probabilísticas, pois são sempre pagamentos futuros incertos. Os prêmios, se únicos, ou se aquela primeira parcela de uma série anual ordinária antecipada, que são pagamentos feitos no ato do contrato, são determinísticos. Os demais prêmios são igualmente probabilísticos, já que seus pagamentos cessam com a morte do cliente.

Na segunda, damos notícias da existência das chamadas Funções ou Símbolos de Comutação que facilitam significativamente os cálculos dos PPU's. São seis os símbolos mais empregados, dos quais os dois primeiros são úteis tanto para Anuidades como para Seguros. São eles:

$$D_x = v^x l_x \quad ; \quad N_x = \sum_{x=x}^{w-1} D_x \quad . \quad (II.2.4)$$

Um terceiro símbolo de comutação diz respeito só a cálculos relativos a Anuidades e é:

$$S_x = \sum_{x=x}^{w-1} N_x \quad . \quad (II.2.5)$$

As demais funções de comutação só são úteis nos cálculos ligados a Seguros e são:

$$C_x = v^{x+1} . d_x \quad ; \quad M_x = \sum_{x=x}^{w-1} C_x \quad ; \quad R_x = \sum_{x=x}^{w-1} M_x \quad . \quad (II.2.6)$$

Os significados de  $l_x$  e de  $d_x$  são os mesmos do modelo discreto de Demografia e, recordando, traduzem respectivamente, em relação a uma dada coorte, o número de sobreviventes com idade  $x$  e o número de mortes ocorridas entre indivíduos nessa idade  $x$ .

Por último, adiantamos que seria enfadonho deduzir com todos os detalhes todas as 40 equações que pretendemos apresentar. Por isso, tomaremos a liberdade de nos determos apenas naquelas que são paradigmas de um certo grupo afim ou daquelas que envolverem uma dificuldade particular na sua exposição.

### II.3. OS DOTES PRINCIPAIS

#### II.3.1 - Dote Puro ou Anuidade de Pagamento Único, Temporária por um Ano, Diferida de k Anos, Antecipada e a Prêmio Único

Aproveitaremos este primeiro exemplo para expor um raciocínio atuarial que, além de traduzir o espírito de mutualidade, muito ajuda no entendimento dos problemas securitários, quando adaptado às peculiaridades de cada caso.

Suponhamos que um grupo bastante grande de pessoas, todas com a mesma idade  $x$ , decida constituir um fundo, através de uma única, igual e instantânea contribuição de cada participante, capaz de pagar \$1 a cada um dos que estiverem vivos após decorrido um período especificado de  $k$  anos. Nenhuma devolução é feita aos que morrem no intervalo de tempo  $x$  a  $x+k$ .

Os recursos com que o fundo contará para honrar esses compromissos incertos do futuro são os inicialmente depositados, acrescidos dos juros obtidos por seu investimento a juros compostos pré-fixados e por idêntico prazo  $k$ . A indagação diz respeito ao montante da contribuição individual para a constituição do fundo.

A solução é simples. Se a Tabela de Sobrevivência à disposição do atuário do grupo for representativa, ao fim de  $k$  anos existirão apenas  $l_{x+k}$  sobreviventes e o fundo terá que pagar assim  $\$l_{x+k}$ , a partir de contribuições e juros.

Atualizando esse montante futuro com o operador  $v^k$  temos no presente  $\$l_{x+k} \cdot v^k$  que deverão ser divididos equitativamente entre os  $l_x$  participantes, fazendo com que a contribuição individual seja de

$${}^E_k x = v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^k \cdot k^P_x \quad (\text{II.3.1})$$

Na ótica da Teoria dos Jogos diríamos simplesmente que o jogador está apostando na sua sobrevivência ao fim de  $k$  anos, quando receberia um pagamento incerto de \$1 com probabilidade de ocorrência  $l_{x+k}/l_x$ .

A esperança matemática dessa riqueza é  $l \cdot l_{x+k}/l_x$ , montante esse que deverá ser pago pelo "ticket" desse jogo para que ele seja "justo". A atualização dessa esperança matemática futura corre agora por conta da Matemática Financeira dos Pagamentos Certos.

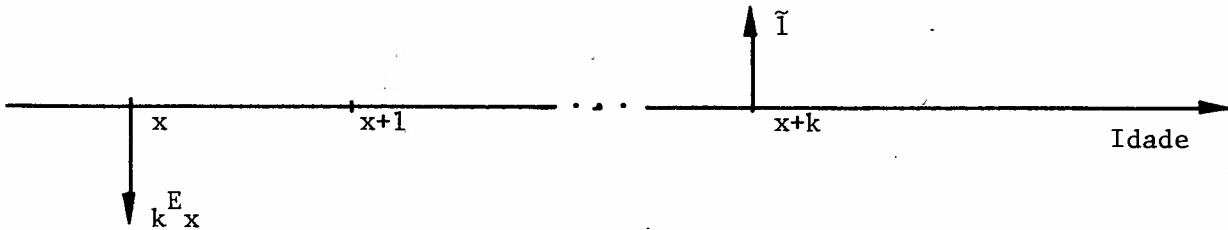
Multiplicando o numerador e o denominador da Equação II.3.1 por  $v^x$

e recordando a definição do símbolo de comutação  $D_x$  vem

$${}_k E_x = \frac{v^{x+k} l_{x+k}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+k}}{D_x} \quad (\text{II.3.2})$$

como a equação que é aplicada na prática pelos atuários para calcular o prêmio puro unitário. Puro, porque se trata de um jogo justo. Unitário, porque o dote oferecido é \$1.

Na visão do cliente teríamos o perfil financeiro seguinte:



II.3.2 - Dote Tontine ou Anuidade de Pagamento Único, Temporária por um Ano, Diferida de k Anos, Imediata e a Prêmio Anual, Ordinário, Antecipado, Temporário por k Anos

É um arranjo atuarial concebido no século XVII pelo banqueiro Lorenzo Tonti e hoje em crescente desuso que prevê a constituição de um grupo de  $l_x$  indivíduos para contribuírem, se estiverem vivos, cada um com \$1, no início de cada um dos k próximos anos, para a formação de um fundo que manterá todos os seus recursos permanentemente aplicados à taxa de juros  $j$  para distribuir, ao final do prazo, o total acumulado entre os sobreviventes. Indaga-se neste caso quanto tocará a cada sobrevivente e este é o único exemplo em que o valor "presente" unitário está posicionado no instante  $x+k$ , e não no instante  $x$ , como convém ao conceito destacado entre aspas, e é o benefício individual e não o prêmio a ser cobrado.

Se não houver defecções, o grupo envolverá segundo a Tabela de Sobrevivência e os recursos aportados cada ano ao fundo serão  $\$1_x, \$1_{x+1}, \dots, \$1_{x+k-1}$ , que aplicados por ocasião da sua recepção produzirão um montante final dado por

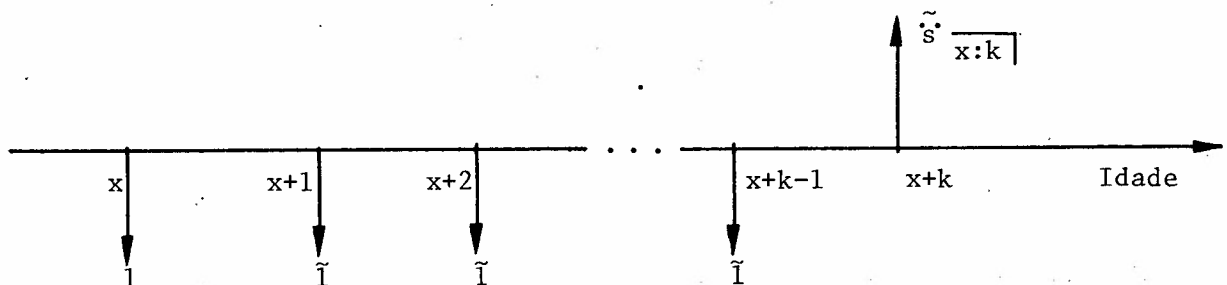
$$l_x r^k + l_{x+1} r^{k-1} + \dots + l_{x+k-1} r \quad \text{que, dividido entre os } l_{x+k} \text{ par-}$$

ticipantes finais oferecerá um benefício individual, relativo a contribuições unitárias, de

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{x:k} &= \frac{1_x r^k + 1_{x+1} r^{k-1} + \dots + 1_{x+k-1} \cdot r}{1_{x+k}} = \\ &= \frac{D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+k-1}}{D_{x+k}} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

onde  $r$  é o fator de capitalização para pagamento simples e  $N_x$  é o símbolo de comutação já enunciado.

Na visão de cada participante teríamos o seguinte perfil financeiro



#### II.4. AS ANUIDADES MAIS COMUNS

Dotes são casos particulares de Anuidades, posto que seus benefícios ocorrem uma vez só. Nestas, diferentemente, os benefícios são pagos anualmente durante um certo número de anos maior que um.

##### II.4.1 - Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

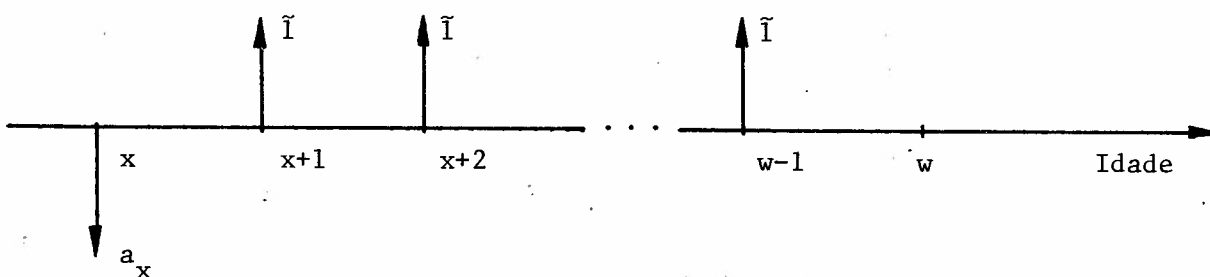
Um grupo de  $l_x$  pessoas constitui de imediato um fundo com o objetivo de prover ao fim de cada ano uma renda anual de \$1 a cada um dos sobreviventes, já a partir do primeiro ano e até que sucumba o último sobrevivente, quando o fundo deverá estar também exaurido.

Denominando de  $a_x$  esse aporte individual único ao fundo, vê-se que as entradas, quantificadas por  $l_x \cdot a_x$  devem se igualar ao somatório dos va-

lores atualizados, à taxa de juros de investimentos desses recursos,  $j$ , dos pagamentos feitos nos  $w-x-1$  anos futuros, do que decorre

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{v \cdot 1_{x+1} + v^2 \cdot 1_{x+2} + \dots + v^{w-x-1} \cdot 1_{w-1}}{1_x} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{w-1}}{D_x} = \\
 &= \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad \qquad \qquad (II.4.1)
 \end{aligned}$$

Deste arranjo cada participante teria a seguinte visão financeira:

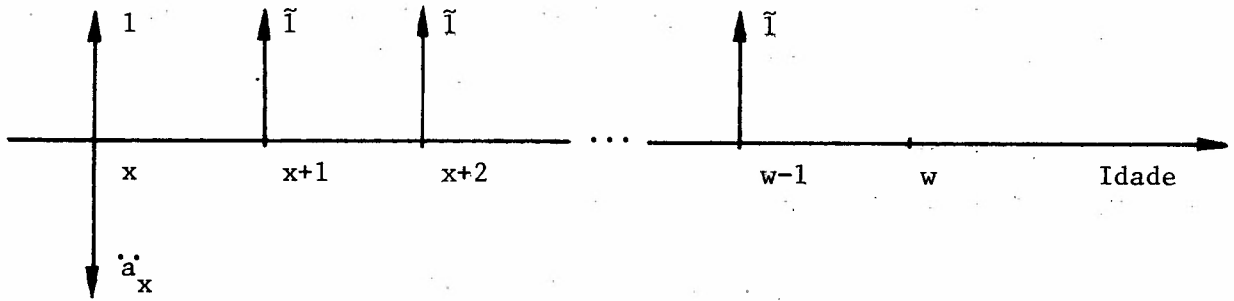


#### II.4.2 - Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

Este arranjo difere do anterior exclusivamente no que se refere à época do pagamento dos benefícios. Ao invés de no fim, eles serão devidos no início de cada ano reduzindo a capacidade do fundo de ganhar juros e logicamente aumentando em \$1 a contribuição dos recursos iniciais que toca a cada participante aportar:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} \qquad \qquad \qquad (II.4.2)$$

Um arranjo, cujo diagrama vai registrado a seguir, no qual já se retira dinheiro do fundo no mesmo instante de sua constituição, não é muito sensato.



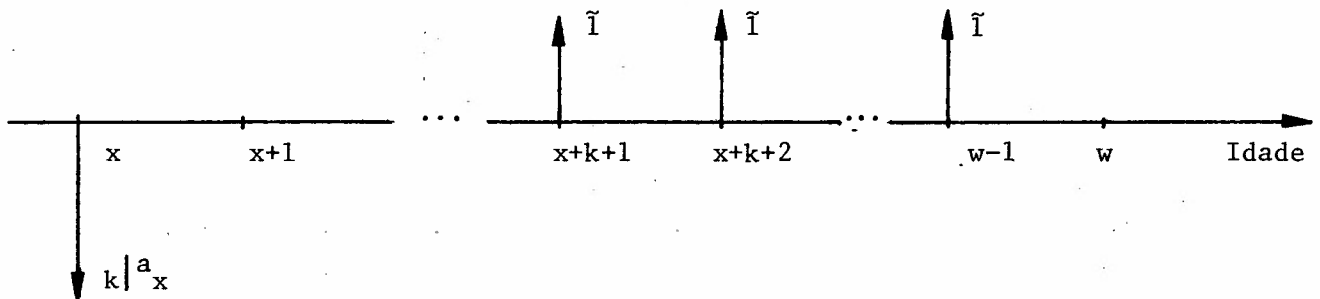
#### II.4.3 - Anuidade de Pagamento Anual, Igual, Vitalícia, Diferida de k Anos, Imediata e a Prêmio Único

Neste caso, o acordo entre os  $l_x$  participantes iniciais do grupo prevê que o bolo inicial ficará intocado por k anos enquanto cresce pelo efeito dos juros. Os que morrerem durante esse período não têm direito a qualquer restituição, mas os que sobreviverem a ele e enquanto viverem terão o direito de retirar, anualmente, ao fim de cada ano, \$1.

Este arranjo equivale a justaposição de Dotes Simples que se vencem ao final da série de anos que se inicia com o ano  $x+k$  e termina com  $w-1$ , logo

$$\begin{aligned}
 k|a_x &= k+1 \cdot E_x + k+2 \cdot E_x + \dots + w-x-1 \cdot E_x = \\
 &= \frac{D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \dots + D_{w-1}}{D_x} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} \quad (\text{II.4.3})
 \end{aligned}$$

Seu perfil financeiro para o participante seria assim:

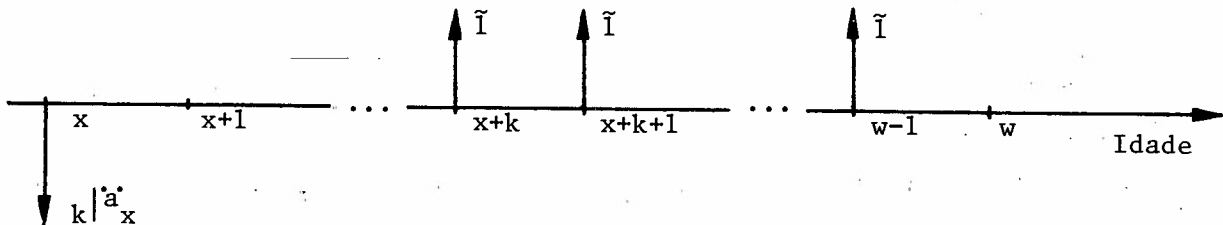


#### II.4.4 - Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Diferida de k Anos, Antecipada e a Prêmio Único

Com respeito à anuidade anterior, a única diferença é a antecipação por um ano de todo o caudal de benefícios futuros, de tal sorte que

$$k|\ddot{a}_x = kE_x + {}_{k+1}E_x + \dots + {}_{w-x-1}E_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} \quad (\text{II.4.4})$$

Antevendo o curso de ação probabilístico financeiro o cliente enxergaria:



#### II.4.5 - Apólice Anuidade ou Anuidade de Pagamento Anual Igual, Vitalícia, Diferida de k Anos, Antecipada, com Prêmio Anual Igual, Ordinário, Antecipado, Temporário por k Anos

Este é um arranjo interessante e o que mais se aproximaria de um Fundo de Pensão. Um grupo grande de  $l_x$  pessoas concorda em pagar um determinado prêmio anual durante k anos consecutivos, período no qual os que morrem perdem direito a qualquer devolução.

Os sobreviventes no instante k, no entanto, farão jus a uma pensão vitalícia de \$1 no início de cada ano e que constituem as saídas do fundo.

Suas entradas são um caudal de k prêmios incertos, exceto o primeiro, que é determinístico, que denotaremos por  $k|\dot{p}_x$ . Assim, o valor presente dos prêmios individuais estaria dado por:

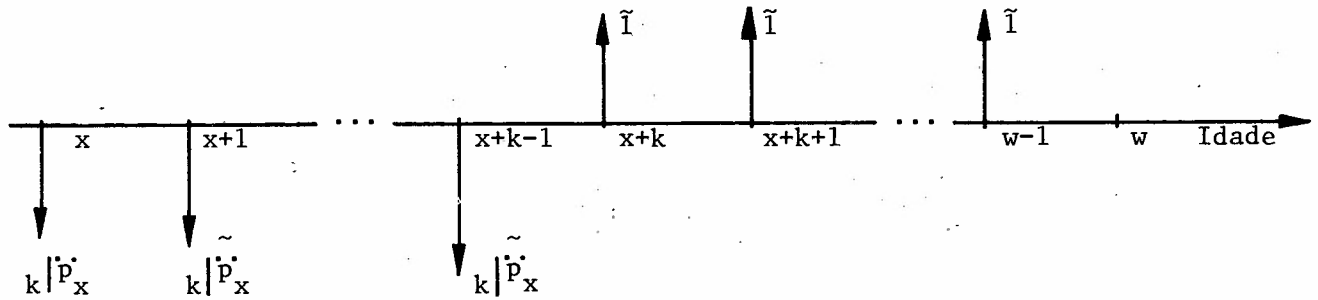
$$\begin{aligned} & k|\dot{p}_x \frac{l_x}{l_x} + k|\dot{p}_x \frac{l_{x+1}}{l_x} v + k|\dot{p}_x \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 + \dots + k|\dot{p}_x \frac{l_{x+k-1}}{l_x} v^{k-1} = \\ & = k|\dot{p}_x \left( \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+k-1}}{D_x} \right) = k|\dot{p}_x \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} \end{aligned}$$

enquanto o valor presente dos benefícios individuais incertos estaria quantificado por  $k|\ddot{a}_x$  antes enunciado.

Dessa igualdade de valores presentes surge para o prêmio anual:

$$k|\ddot{p}_x = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}} \quad (\text{II.4.5})$$

e para o perfil financeiro

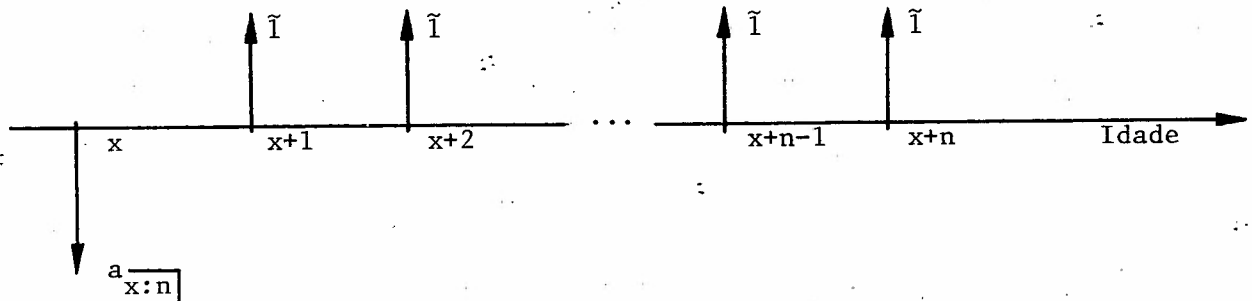


#### II.4.6 - Anuidade de Pagamento Anual Igual, Temporária por n Anos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

Este arranjo equivale à justaposição de n dotes puros unitários, sendo o primeiro vencível ao fim do primeiro ano e o último ao fim do n-ésimo ano. Seu valor presente é portanto:

$$a_{\overline{x:n}|} = 1E_x + 2E_x + \dots + nE_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n-1}}{D_x} \quad (\text{II.4.6})$$

e seu perfil financeiro tomaria o seguinte feitiço:

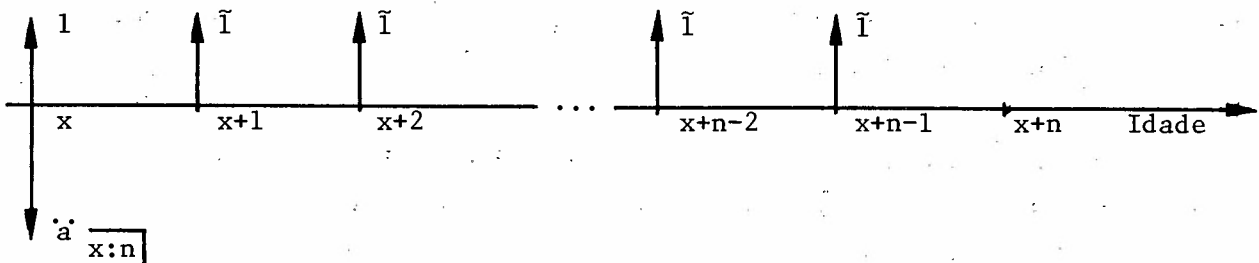


### II.4.7 - Anuidade de Pagamento Anual Igual, Temporária por n Anos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

Outra vez, a diferença de II.4.6 é a antecipação por um ano de todos os n dotes puros unitários que vistos somados no presente dariam

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:n} &= {}_0E_x + {}_1E_x + \dots + {}_{n-1}E_x = \\ &= \frac{D_x + D_{x+1} + \dots + {}_{n-1}D_x}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \end{aligned} \quad (\text{II.4.7})$$

Como perfil financeiro probabilístico surgiria:



que revela a pouca sensatez de pagamentos no instante x.

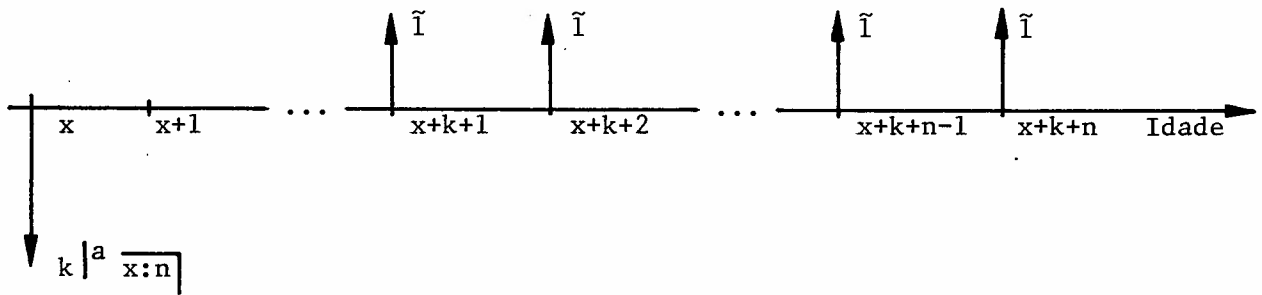
### II.4.8 - Anuidade de Pagamento Anual Igual, Temporária por n Anos, Diferida por k Anos, Imediata e a Prêmio Único

Este arranjo pode ser explicado pela subtração, a partir de um caudal vitalício diferido a k anos, de um caudal vitalício diferido a k+n anos.

Aplicando a Equação II.4.3, uma vez para o diferimento de k anos e outra vez para o diferimento de k+n anos, vem:

$$k|a_{x:n}^a = k|a_x^a - {}_{k+n}|a_x^a = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} \quad (\text{II.4.8})$$

cuja representação gráfica seria:

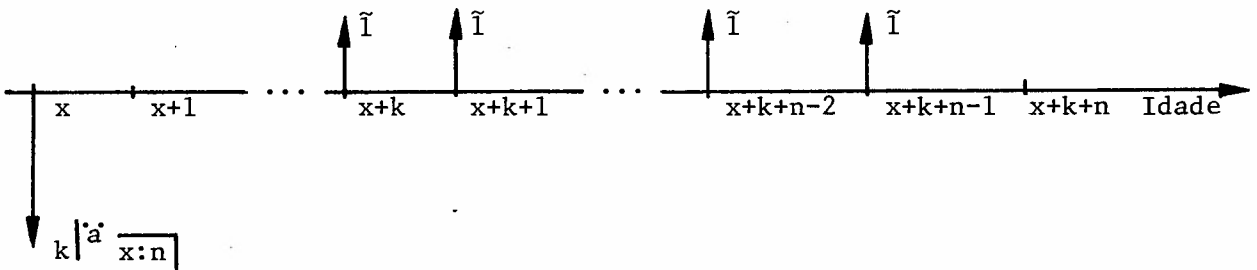


II.4.9 - Anuidade de Pagamento Anual Igual, Temporária por n Anos, Diferida de k Anos, Antecipada e a Prêmio Único

A antecipação para o início do período a que se refere é a diferença com respeito à concepção anterior e seu valor presente pode ser obtido pela mesma diferença proposta naquele caso, utilizando obviamente as anuidades vitalícias diferidas mas de natureza antecipada. Assim:

$$k|\ddot{a}_{x:n} = k|\ddot{a}_x - k+n|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} \quad (\text{II.4.9})$$

e de representação gráfica dada por:



II.4.10 - Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em m Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

A única diferença com respeito ao arranjo descrito em II.4.2 é que o benefício anual de \$1 é decomposto em m parcelas iguais, a serem pagas no início dos m subperíodos iguais à 1/m, resultantes da divisão do ano a que se refere o benefício antecipado.

Este novo esquema subperiódico de pagamentos de benefícios implica na postergação na concessão de benefícios e conseqüentemente em mais recursos disponíveis para investimentos. Logo, se o montante de juros se torna maior, para assegurar o pagamento dos benefícios é possível reduzir o prêmio único de um certo  $\Delta$  que será obtido por interpolação linear, como a seguir se explica. Esse artifício leva a cálculos aproximados mas de precisão satisfatória para o uso atuarial.

Até então, os diferimentos têm sido considerados por  $k$  anos sendo  $k$  um número inteiro. Não proporemos fórmulas para  $k$ s fracionários até porque elas seriam inúteis na ausência de uma Tabela de Sobrevivência com detalhes a nível de submúltiplos do ano.

A citada interpolação seria feita, não entre dois consecutivos números de sobreviventes da tabela, mas entre dois montantes do valor presente unitário de nosso interesse para, respectivamente, diferimento de zero anos e diferimento de um ano. Esta prática será generalizada para toda esta sub-família de anuidades com  $m$  pagamentos por ano.

No caso em questão, temos:

$${}_0|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 0 \quad ; \quad {}_1|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x - D_x}{D_x} = \ddot{a}_x - 1$$

Vê-se que, para se chegar a  ${}_k|\ddot{a}_x$  a partir de  $\ddot{a}_x$ , subtrai-se zero quando  $k$  é zero e subtrai-se 1 quando  $k$  é 1; logo, para  $k$  igual a qualquer valor entre 0 e 1, digamos  $g/m$ , dever-se-á subtrair essa importância no enfoque de uma interpolação linear.

Assim, uma anuidade diferida de  $1/m$  avos do ano seria paga não no início de cada ano, mas após decorridos  $1/m$  avos de cada ano.

Imaginemos agora  $m$  anuidades, a primeira diferida  $0/m$  avos do ano, a segunda  $1/m$  avos, a terceira  $2/m$  avos, etc., a última  $m-1/m$  avos do ano formando um conjunto de pagamentos no qual há sempre um pagamento a cada intervalo de  $1/m$  avos do ano. Logo:

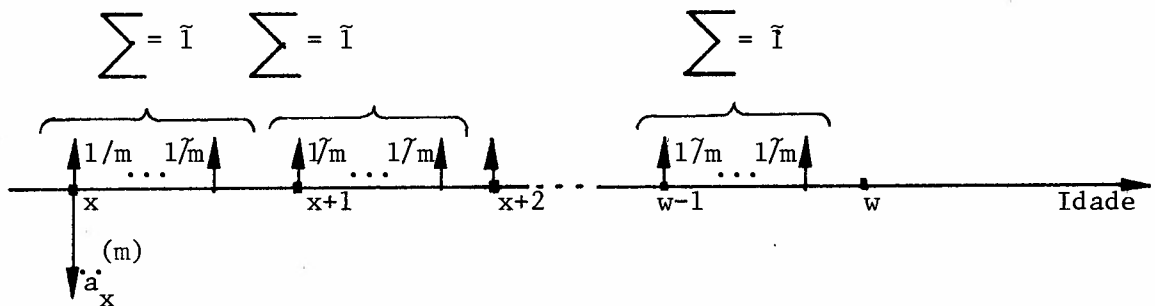
$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{a}_x^{(m)} &\doteq \left[ \ddot{a}_x + \left( \ddot{a}_x - \frac{1}{m} \right) + \left( \ddot{a}_x - \frac{2}{m} \right) + \dots + \left( \ddot{a}_x - \frac{m-1}{m} \right) \right] = \\ &= m \cdot \ddot{a}_x - \frac{m(m-1)}{2m} \end{aligned}$$

já que o termo entre colchetes é uma progressão aritmética de razão  $-1/m$ . Reorganizando:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \quad (\text{II.4.10})$$

que explica o valor presente da nova anuidade em termos da anuidade convencional e de um fator de correção que é função de  $m$ .

O diagrama financeiro é o mesmo mostrado em II.4.2, exceto pelo fato de que cada benefício  $\tilde{I}$  está agora desdobrado para o futuro imediato de um ano:



#### II.4.11 - Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em $m$ Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

O tratamento do caso "antecipado" antes do "imediato" foi deliberado porque vamos partir daquela situação para chegar a esta.

Os conceitos "imediato" e "antecipado" transportam-se do âmbito anual para o âmbito do período sub-anual de que estamos cuidando.

Quando na periodicidade anual dizemos que há um pagamento "imediato" no ano "a", isto significa uma obrigação no fim do último mês de "a". Imaginemos agora que esse pagamento vai ser desdobrado em 12 pagamentos. Como o ano a que se refere o benefício continua sendo "a", então eles serão feitos de forma "imediata", ao fim de janeiro, ao fim de fevereiro, etc., ao fim de dezembro do ano "a".

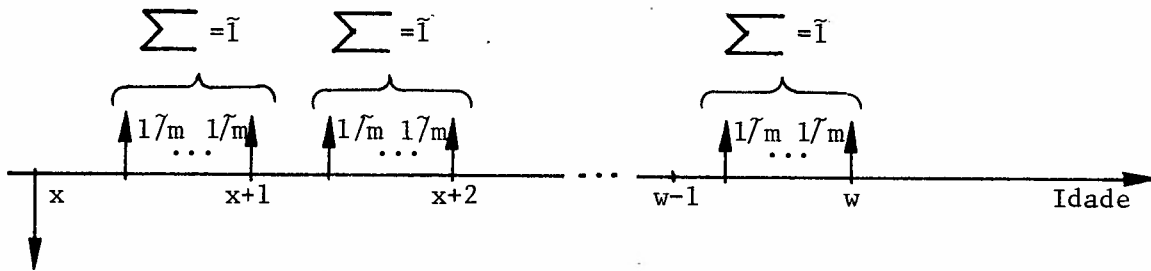
Quando o regime de pagamento é "antecipado", um pagamento relativo ao ano "a" será feito no início de janeiro desse mesmo ano, mas se mudamos sua periodicidade para mensal sem mudar-lhe o regime, então os doze pagamentos se farão no início de cada um dos doze meses de "a".

Note-se que ao adotarmos a periodicidade sub-anual não subvertemos o regime de pagamento "imediato" ou "antecipado" mas transportamos esse mesmo conceito para o submúltiplo anual adotado.

Assim sendo, para passarmos de  $\ddot{a}_x^{(m)}$  para  $a_x^{(m)}$  devemos subtrair-lhe  $\$1/m$  que é o benefício determinístico contemporâneo da constituição do fundo com  $\ddot{a}_x^{(m)}$  para cada participante. Então:

$$\begin{aligned}
 a_x^{(m)} &\doteq \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \doteq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m} = \\
 &= \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} = a_x + 1 - \frac{m+1}{2m} = a_x + \frac{m-1}{2m} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \quad (II.4.11)
 \end{aligned}$$

Graficamente teríamos:



II.4.12 - Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em m Parcelas, Vitalícia, Diferida de k Anos, Imediata e a Prêmio Único

Conhecendo-se  $a_x$ , é possível deduzir-se todas as outras equações relativas às anuidades de benefícios anuais de pagamentos únicos, já que as equações de seus valores presentes são exclusivamente função dos símbolos de comutação  $D_j$  e  $N_j$  que também estruturam  $a_x$ .

Transplantaremos as diversas equações desses relacionamentos para o mundo das anuidades com benefícios subanuais, preservando-lhe as estruturas algébricas e acrescentando, no que couber, o superescrito (m).

O que muda neste caso, com respeito à situação descrita em II.4.11, é a origem dos direitos aos benefícios vitalícios que fica postergada por k anos.

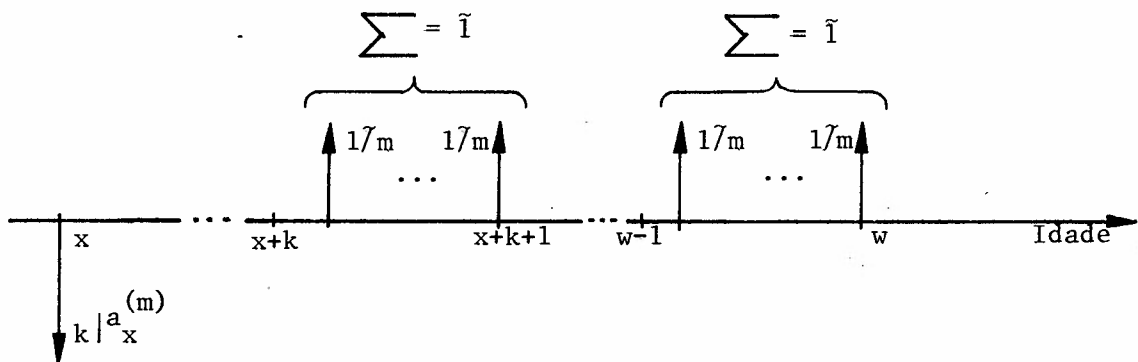
Assim, se:

$$k|a_x = a_x - a_{\overline{x:k}} \quad \text{então} \quad k|a_x^{(m)} \doteq a_x^{(m)} - a_{\overline{x:k}}^{(m)}$$

Por não dispormos ainda da equação de  $a_{\overline{x:k}}^{(m)}$ , tomaremos sua expressão por empréstimo da seção II.4.14 adiante.

$$\begin{aligned} k|a_x^{(m)} &\doteq \left( a_x + \frac{m-1}{2m} \right) - \left[ a_{\overline{x:k}} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( 1 - \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) \right] = \\ &= a_x - a_{\overline{x:k}} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) = \\ &= \frac{N_{x+k+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.4.12})$$

Seu gráfico seria mostrado por:



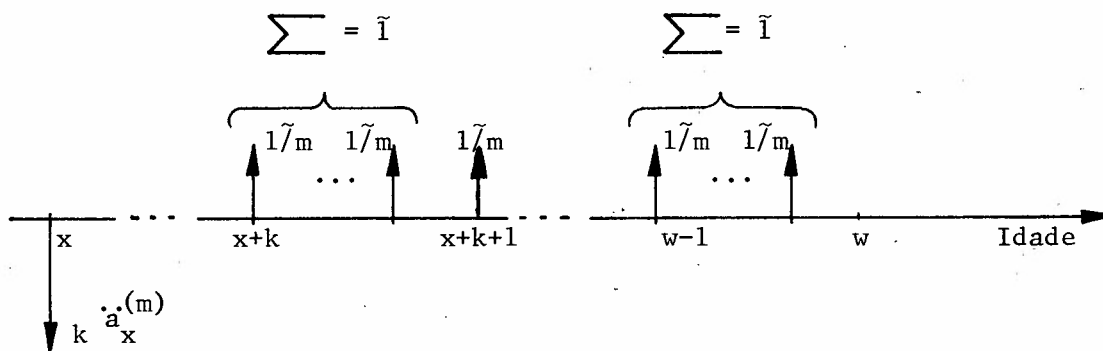
#### II.4.13 - Anuidade Pagamento Anual Igual mas Subdividido em $m$ Parcelas, Vitalícia, Diferida por $k$ Anos, Antecipada e a Prêmio Único

O que muda aqui, com respeito a II.4.12, é o caráter "antecipado" do pagamento dos benefícios.

Então, usando II.4.15 adiante, vem:

$$\begin{aligned}
{}_k|\ddot{a}_x &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{x:k}|} , & {}_k|\ddot{a}_x^{(m)} &\doteq \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{x:k}|}^{(m)} \\
{}_k|\ddot{a}_x^{(m)} &= \left( \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \right) - \left[ \ddot{a}_{\overline{x+k}|} - \frac{m-1}{2m} \left( 1 - \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) \right] = \\
&= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{x+k}|} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) = \frac{N_{x+k}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right)
\end{aligned}
\tag{II.4.13}$$

Sua feição gráfica teria a seguinte forma:

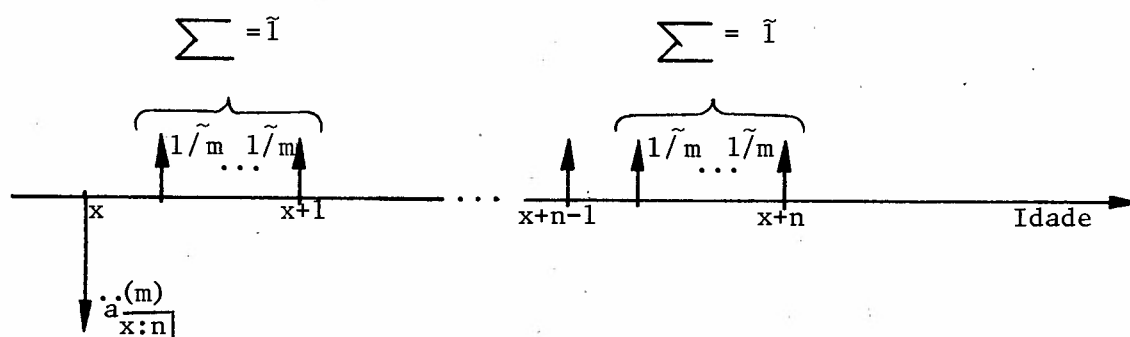


#### II.4.14 - Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividida em m Parcelas, Temporária por n Anos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

A diferença para o arranjo descrito na Seção II.4.11 é o caráter temporário da anuidade. Se:

$$\begin{aligned}
a_{\overline{x:n}|} &= a_x - n|a_x , \text{ então} \\
a_{\overline{x:n}|}^{(m)} &\doteq a_x^{(m)} - n|a_x^{(m)} = \left( a_x + \frac{m-1}{2m} \right) - \left( a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = \\
&= a_x - a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = \\
&= a_{\overline{x:n}|} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)
\end{aligned}
\tag{II.4.14}$$

com a seguinte gravura financeira:



II.4.15 - Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividido em  $m$  Parcelas, Temporária por  $n$  Anos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

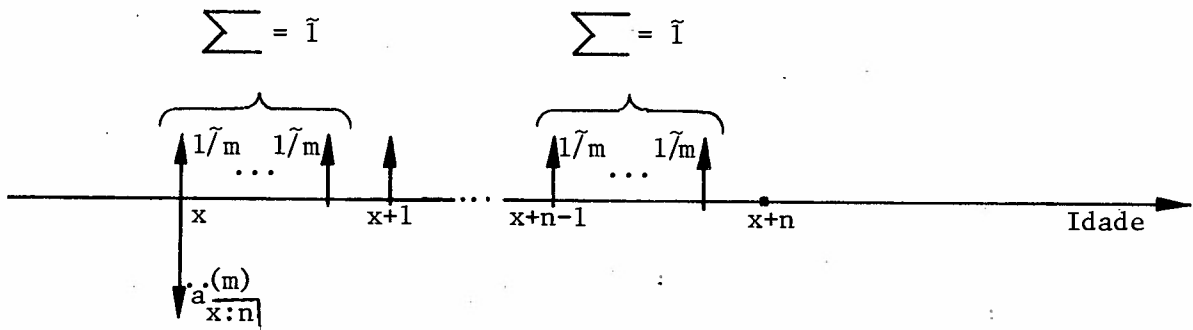
A comparação com o arranjo descrito em II.4.10 nos mostra que a única diferença é a temporaneidade da anuidade.

$$\text{Sabendo-se que } \ddot{a}_{x:n} = \ddot{a}_x - n \ddot{a}_{x+n},$$

infere-se que:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:n}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - n \ddot{a}_{x+n}^{(m)} = \\ &= \left( \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \right) - \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = \\ &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = \\ &= \ddot{a}_{x:n} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) = \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \end{aligned} \tag{II.4.15}$$

A ilustração gráfica seria a que segue:

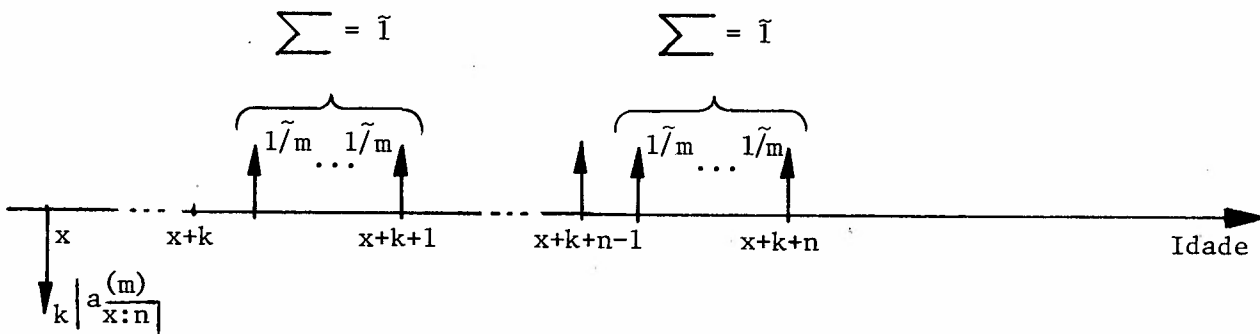


II.4.16 - Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividida em m Parcelas, Temporária por n Anos, Diferida por k Anos, Imediata e a Prêmio Único

A série de pagamentos subanuais agora só começa na idade  $x+k+1$  e vai até a idade  $x+k+n$ . Recordando que de

$$\begin{aligned}
 k | a_{x:n}^{(m)} &= k | a_x - {}_{k+n} | a_x \text{ pode-se passar para} \\
 k | a_{x:n}^{(m)} &\doteq k | a_x^{(m)} - {}_{k+n} | a_x^{(m)}, \text{ vem} \\
 k | a_{x:n}^{(m)} &\doteq \left[ \frac{N_{x+k+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) \right] - \left[ \frac{N_{x+k+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k+n}}{D_x} \right) \right] = \\
 &= \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k} - D_{x+k+n}}{D_x} \right) \tag{II.4.16}
 \end{aligned}$$

Sua representação gráfica seria:



II.4.17 - Anuidade de Pagamento Anual Igual mas Subdividida em  $m$  Parcelas, Temporária por  $n$  Anos, Diferida por  $k$  Anos, Antecipada e a Prêmio Único

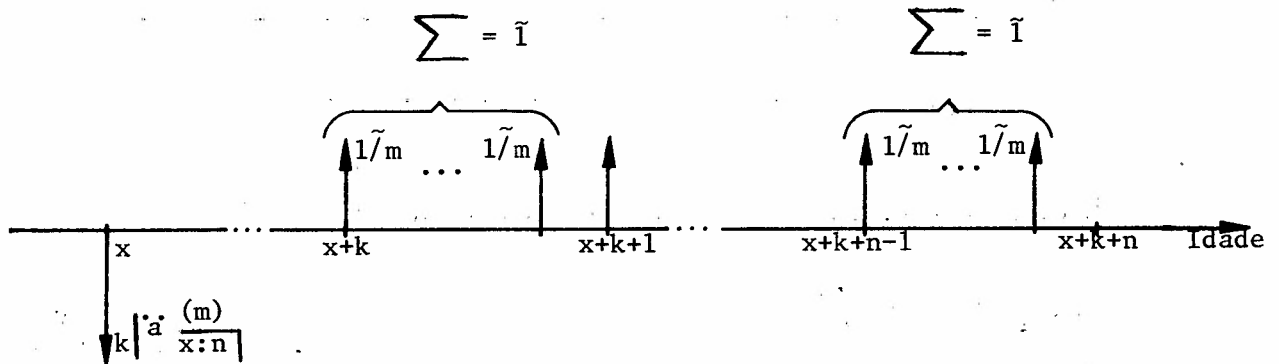
Com respeito ao arranjo imediatamente anterior, o fluxo de benefícios é todo antecipado de  $1/m$  avos do ano.

Partindo-se de  $k|\ddot{a}_{x:n} = k|\ddot{a}_x - k+n|\ddot{a}_x$  passa-se a

$$k|\ddot{a}_{x:n}^{(m)} = k|\ddot{a}_x^{(m)} - k+n|\ddot{a}_x^{(m)} \quad \text{para chegar a}$$

$$\begin{aligned} k|\ddot{a}_{x:n}^{(m)} &= \left[ \frac{N_{x+k}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) \right] - \left[ \frac{N_{x+k+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k+n}}{D_x} \right) \right] = \\ &= \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{D_{x+k} - D_{x+k+n}}{D_x} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.4.17})$$

cuja representação gráfica seria:



II.4.18 - Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

Nesta nova subfamília de anuidades os benefícios anuais são de \$1 no primeiro ano, de \$2 no segundo ano e assim por diante, numa progressão aritmética de primeiro termo e razão unitários. O valor presente de um tal caudal de benefícios seria dado por:

$$(Ia)_x = 1 \cdot {}_1E_x + 2 \cdot {}_2E_x + \dots + (w-x-1) \cdot (w-x-1)E_x + (w-x) \cdot (w-x)E_x =$$

$$= \frac{1 \cdot D_{x+1} + 2 \cdot D_{x+2} + \dots + (w-x-1) \cdot D_{w-1} + (w-x) \cdot D_w}{D_x}$$

O numerador pode ser decomposto em  $w-x-1$  polinômios do tipo

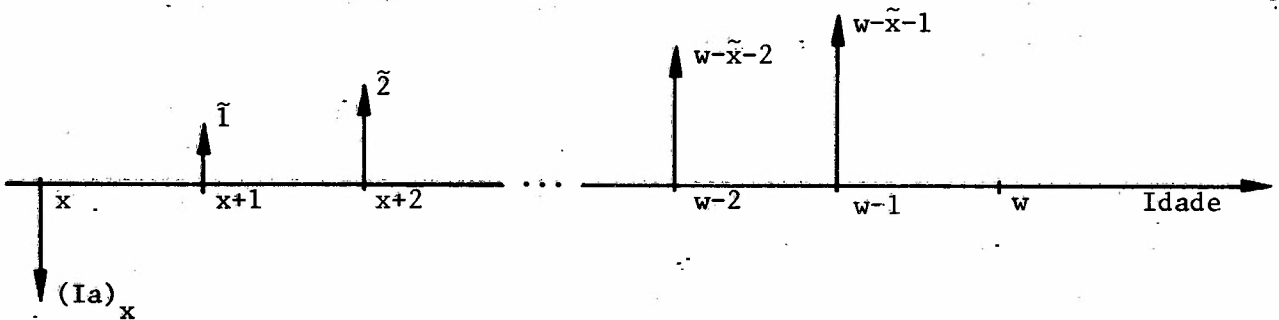
$$\begin{array}{rcl} D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + & D_{w-1} & + D_w = N_{x+1} \\ & & \\ & D_{x+2} + \dots + & D_{w-1} + D_w = N_{x+2} \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & D_{w-1} & + D_w = N_{w-1} \\ & & \\ & & D_w = N_w \end{array}$$

$$D_{x+1} + 2 \cdot D_{x+2} + \dots + (w-x-1) \cdot D_{w-1} + (w-x) \cdot D_w = S_{x+1}$$

É claro que os dados relativos à idade  $w$  são todos nulos.

Logo  $(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$  (II.4.18)

que teria por representação gráfica:

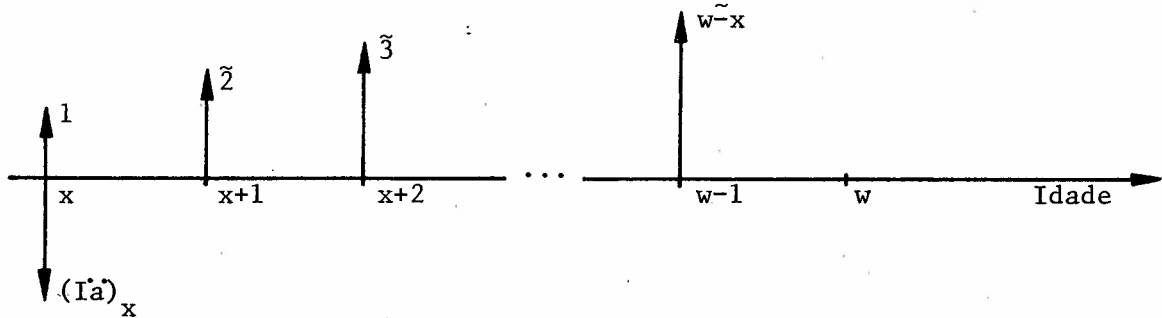


II.4.19 - Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

Tomando-se o modelo anterior e antecipando-se um período o pagamento de todos os benefícios programados chegamos ao modelo deste tópico onde:

$$\begin{aligned}
 (I\tilde{a})_x &= 1 \cdot {}_0E_x + 2 \cdot {}_1E_x + \dots + (w-x) \cdot (w-x-1)E_x = \\
 &= \frac{1 \cdot D_x + 2 \cdot D_{x+1} + 3 \cdot D_{x+2} + \dots + (w-x) \cdot D_{w-1}}{D_x} = \frac{S_x}{D_x}
 \end{aligned}
 \tag{II.4.19}$$

e com a seguinte representação gráfica:



II.4.20 - Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Temporária por n Anos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

Ao invés de uma progressão até a idade máxima  $w$ , limitemos esse elenco de valores a  $n$  pagamentos anuais

$$\begin{aligned}
 (Ia)_{\overline{x:n}|} &= 1 \cdot {}_1E_x + 2 \cdot {}_2E_x + 3 \cdot {}_3E_x + \dots + n \cdot {}_nE_x = \\
 &= \frac{1 \cdot D_{x+1} + 2 \cdot D_{x+2} + \dots + n \cdot D_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

O numerador poderia ser decomposto em:

$$D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+n} = N_{x+1} - N_{x+n+1}$$

$$D_{x+2} + \dots + D_{x+n} = N_{x+2} - N_{x+n+1}$$

$$D_{x+n} = N_{x+n} - N_{x+n+1}$$

$$D_{x+1} + 2 \cdot D_{x+2} + \dots + n \cdot D_{x+n} = N_{x+1} + N_{x+2} + \dots$$

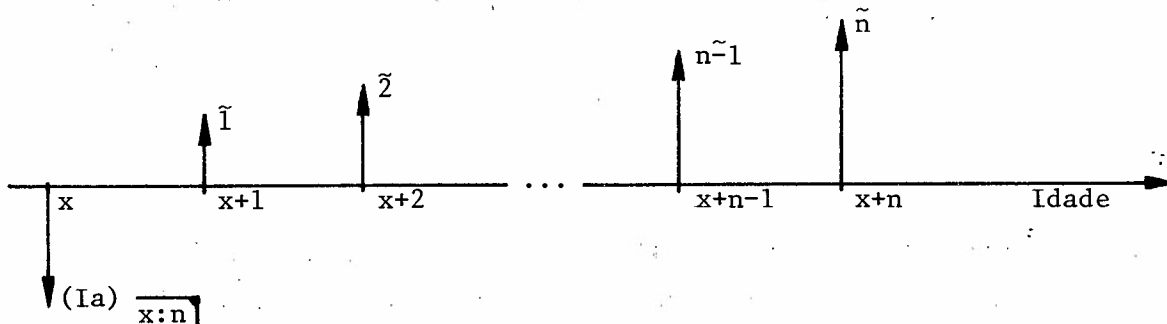
$$+ N_{x+n} - n \cdot N_{x+n+1} = S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}$$

Então,

$$(Ia) \overline{x:n} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{D_x}$$

(II.4.20)

com representação gráfica a seguir:

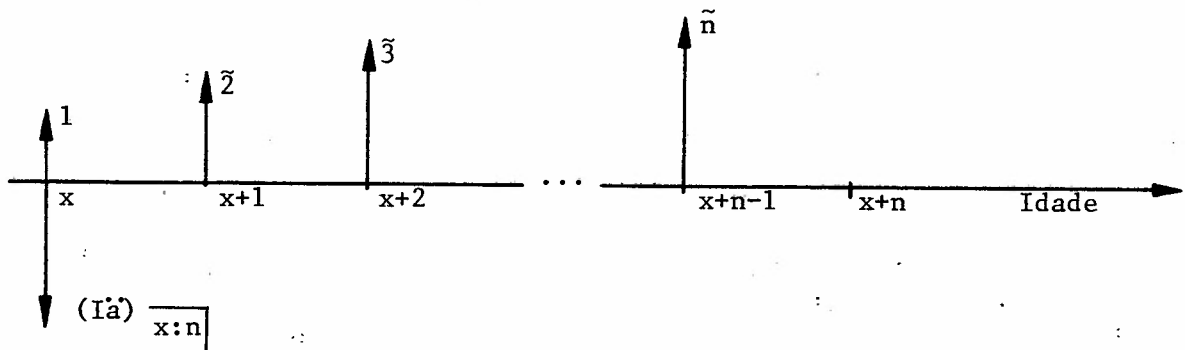


#### II.4.21 - Anuidade de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Temporária por $n$ Anos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

Deslocando-se todos os fluxos do modelo II.4.20 um ano para o presente chegamos a este arranjo securitário, cujo valor presente se expressa por:

$$\begin{aligned}
 (I\tilde{a})_{\overline{x:n}|} &= 1 \cdot 0 \cdot E_x + 2 \cdot 1 \cdot E_x + \dots + n \cdot (n-1) \cdot E_x = \\
 &= \frac{D_x + 2 \cdot D_{x+1} + \dots + n \cdot D_{x+n-1}}{D_x} = \\
 &= \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}
 \tag{II.4.21}$$

A representação pictórica do modelo estaria dada por:



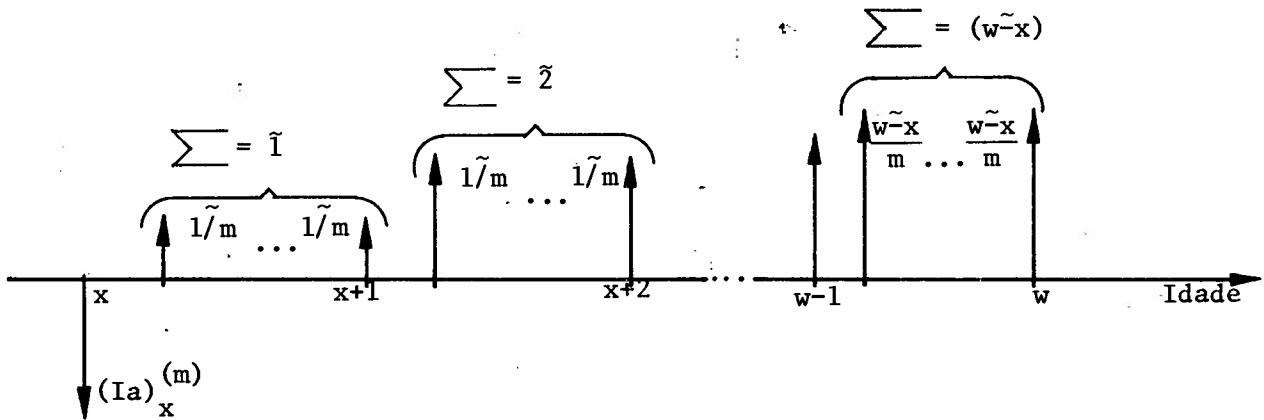
#### II.4.22 - Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética mas Subdivida em $m$ Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

Esta última subfamília de anuidades se caracteriza por apresentar um caudal de benefícios em gradiente crescente no enfoque anual mas fracionado em pagamentos subanuais.

No caso em tela sua expressão analítica é

$$(I_a)_x^{(m)} \doteq (Ia)_x + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{S_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \frac{N_{x+1}}{D_x} \right)
 \tag{II.4.22}$$

e sua feição gráfica seria:

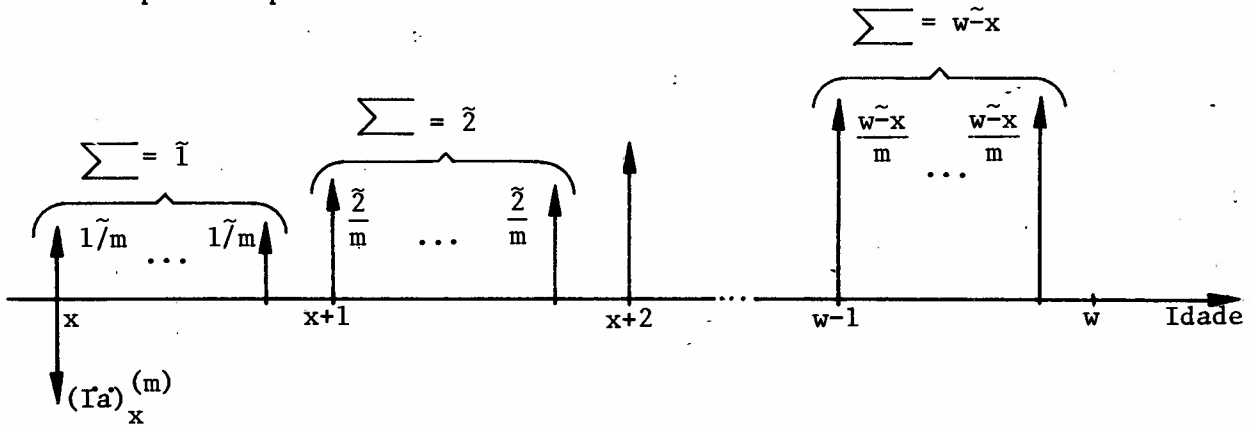


II.4.23 - Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética mas Subdividida em m Parcelas, Vitalícia, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

Partindo-se da expressão para o caso de pagamento único, acrescenta-se um termo corretivo para se chegar a:

$$(I\dot{a})_x^{(m)} \doteq (I\dot{a})_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{N_x}{D_x} = \frac{S_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{N_x}{D_x} \quad (II.4.23)$$

e ao respectivo perfil financeiro:



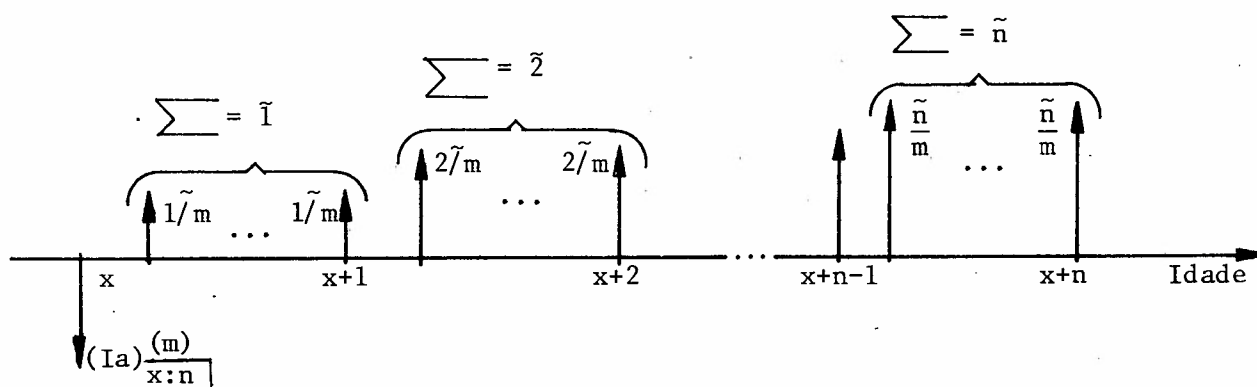
II.4.24 - Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética mas Subdividida em m Parcelas, Temporária por n Anos, Ordinária, Imediata e a Prêmio Único

Desta vez limitamos um número fixo de anos a concessão do benefício que tem as mesmas características do descrito em II.4.22. Sua expressão é:

$$\begin{aligned}
 (Ia) \frac{(m)}{x:n} &\doteq (Ia) \frac{x:n}{x:n} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left( a_{x:n} \cdot n \cdot {}_n E_x \right) = \\
 &= \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} - n \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

(II.4.24)

sendo sua representação pictórica:



II.4.25 - Anuidade de Pagamento Crescente em Progressão Aritmética mas Subdividida em  $m$  Parcelas, Temporária por  $n$  Anos, Ordinária, Antecipada e a Prêmio Único

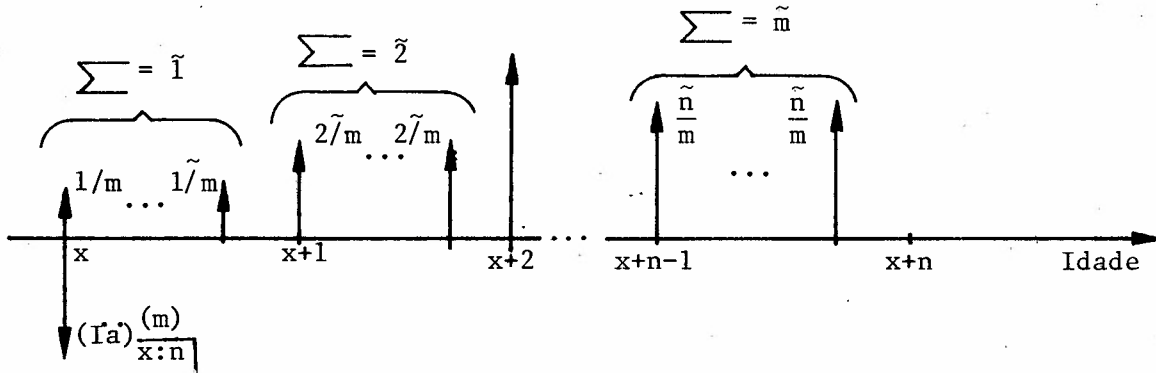
Chegamos ao último dos exemplos de anuidade que relacionamos para ilustrar este trabalho, não por falta de outras combinações, mas porque elas crescem em complexidade e em desinteresse prático.

Nesta derradeira anuidade, os fluxos de benefícios se tornam antecipados com respeito ao exemplo anterior, ficando sua expressão algébrica como segue:

$$\begin{aligned}
 (Ia') \frac{(m)}{x:n} &= (Ia) \frac{x:n}{x:n} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left( \ddot{a}_{x:n} - n \cdot {}_n E_x \right) = \\
 &= \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \left( \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - n \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)
 \end{aligned}$$

(II.4.25)

e com a correspondente representação gráfica:



#### II.4.26 - Fórmula Geral das Anuidades

O valor presente ou Prêmio Puro Unitário de uma anuidade pode, de uma forma abrangente, ser representado por:

$$PPU = \frac{N_y - N_z}{D_x} \quad (II.4.26)$$

onde:

$x$  é a idade por ocasião do contrato;

$y$  é a idade no 1º recebimento do benefício;

$z$  é a idade na 1ª. descontinuação do benefício.

#### II.5. ALGUMAS ALTERNATIVAS DE SEGUROS

Seguindo a mesma estrutura expositiva até então usada para as anuidades, trataremos de oferecer uma visão similar do mundo dos seguros individuais. Serão mantidas, no que couber, as nomenclaturas e as notações, acrescentando-se no entanto os seguintes reparos aos conceitos em uso.

O benefício a ser pago num contrato de seguro é normalmente único, isto é, far-se-á uma só vez dentro do período segurado, se ocorrer o óbito. O montante, no entanto, pode ser um valor fixo ao longo do tempo ou ser um valor variável, através do período de cobertura, segundo uma determinada regra pré-fixada como, por exemplo, uma progressão aritmética. Daí falarmos em dois

tipos de pagamento de benefício: único e constante ou único mas crescente em progressão aritmética.

Quanto à época do pagamento só faz sentido a categoria "imediate" isto é, ao fim do ano em que ocorre a morte já que não se pode adivinhar no início de um período quem nele vai falecer para lhe pagar "antecipadamente" seu benefício.

Outro reparo diz respeito à notação  $\tilde{x}$  usada para pagamentos incertos nos perfis financeiros das anuidades. Sendo estas seguros de morte, seus benefícios são pagos pela ocorrência da sobrevivência, evento que pode ocorrer por vários anos consecutivos implicando em vários pagamentos. Já os seguros de vida pagam benefícios por ocasião do evento da morte e esta só ocorre uma vez. Assim, do caudal de benefícios probabilísticos apresentados nos diagramas desta seção, apenas um se transforma em efetivo pagamento aos segurados. Para distinguir esta situação, acrescentaremos um ponto sobre o til para produzir a nova notação  $\tilde{x}$ . Os prêmios, contudo, se comportam à exata semelhança das anuidades.

Convém notar que no estudo das anuidades não há fluxo no instante  $w$ , já que ninguém atingia vivo essa idade para receber o benefício. Já no estudo dos seguros, aqueles que falecem no intervalo  $w-1$  a  $w$  legam a seus beneficiários o direito de receber o valor da proteção securitária contratada, determinando assim a possibilidade de existência de um fluxo no instante  $w$ .

Como último reparo, atente-se para a notação que usa  $A$  para registrar prêmios únicos por ocasião do contrato, mas emprega  $P$  para representar os prêmios anuais que se repetem várias vezes.

#### II.5.1 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único

Suponha-se que  $l_x$  pessoas formam um fundo, com uma contribuição única (prêmio) de  $\$Ax$  cada, que investido a  $j\%$  a.ano permitirá pagar  $\$1$  a todos quantos falecerem até a mais longa idade  $w$ . Igualando-se o valor presente das contribuições com a dos benefícios vem:

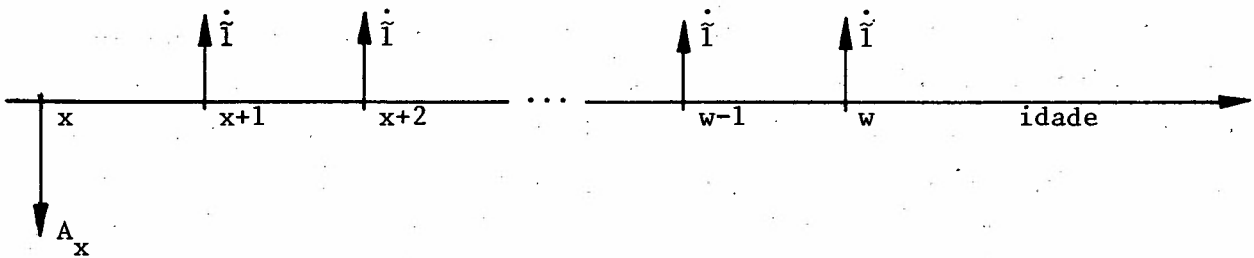
$1 A_x = v \cdot d_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots + v^{w-x} d_{w-1}$ , donde

$$A_x = \frac{v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots + v^w d_{w-1}}{v^x 1_x} \quad \text{e recordando as definições}$$

dos símbolos de comutação  $D_x = v^x \cdot 1_x$ ,  $C_x = v^{x+1} \cdot d_x$  e  $M_x = \sum_x^{w-1} C_x$  vem

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \dots + C_{w-1}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} \quad (\text{II.5.1})$$

sendo sua representação gráfica na ótica do segurado:

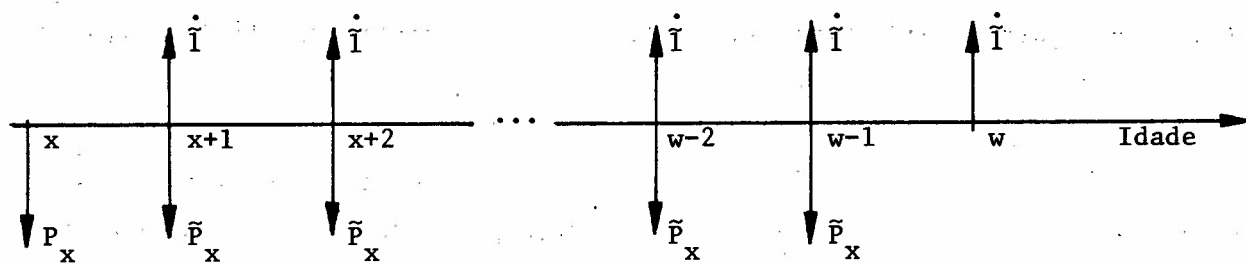


### II.5.2 - Seguro de Vida Simples de Pagamento Constante, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Vitalício, Ordinário e Antecipado

Vê-se aqui a conjugação de dois caudais de pagamentos, um de benefícios imediatos, outro de prêmios, estes necessariamente antecipados, posto que, seguro é um serviço pago sempre de forma adiantada. Chamando de  $P_x$  o prêmio anual e igualando-se os valores presentes dos dois tipos de fluxos vem:

$$P_x \ddot{a}_x = A_x \quad \text{ou} \quad P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x/D_x}{N_x/D_x}}{\frac{M_x}{N_x}} \quad (\text{II.5.2})$$

elementos esses que compõem a seguinte representação financeira:



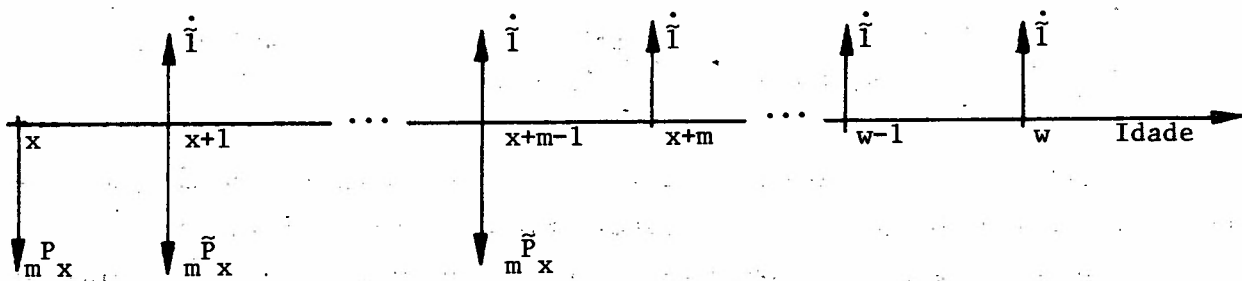
II.5.3 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Temporário por m Anos, Ordinário e Antecipado

Diferentemente do caso anterior, os direitos ao seguro vitalício são comprados por um número fixo,  $m$ , de prêmios, sendo  $m < w - x - 1$ . Chamando-se de  $P_{m x}$  o prêmio anual temporário vem:

$$P_{m x} \cdot \ddot{a}_{x:m} = Ax \quad \text{ou} \quad P_{m x} = \frac{Ax}{\ddot{a}_{x:m}} =$$

$$= \frac{M_x / D_x}{(N_x - N_{x+m}) / D_x} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \quad (\text{II.5.3})$$

Sua gravura financeira seria:



### II.5.4 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Vitalício, Diferido por k Anos, Imediato e a Prêmio Único

Este arranjo securitário é raro e utilizado em casos em que há risco invulgar de suicídio ou suspeita de doença grave de diagnóstico impreciso. Daí porque o início da vigência do direito ao benefício não se inicia com o contrato mas num certo instante k anos depois.

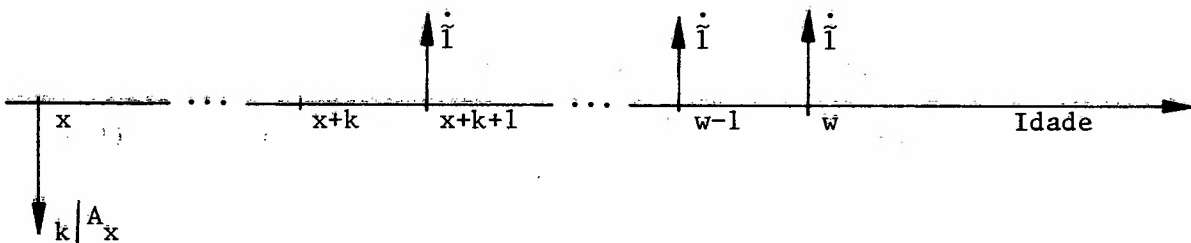
Recordando a demonstração da Equação II.5.1, vem:

$$l_x \cdot k|A_x = v^{k+1} \cdot d_{x+k} + v^{k+2} \cdot d_{x+k+1} + \dots + v^{w-x} \cdot d_{w-1}$$

e,

$$k|A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x} \quad (\text{II.5.4})$$

E sua apresentação gráfica seria:



### II.5.5 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por um Ano, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único

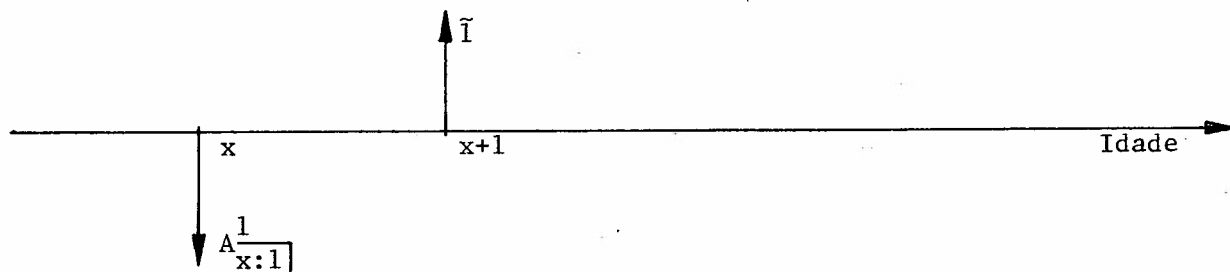
Este tipo de seguro é de particular importância para o cálculo das reservas dos seguros de vida com vigência maior que um ano, pois seu prêmio estabelece como que o custo atuarial padrão da cobertura do risco de vida em função da idade x, e por isso se chama de "prêmio natural" para essa idade.

Retornando-se à igualdade básica dos valores presentes de prêmios e benefícios, constata-se que

$$l_x \cdot A_{x:1} = v \cdot d_x \quad \text{e que} \quad A_{x:1} = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} \quad (\text{II.5.5})$$

onde o sobrescrito 1 vem reforçar, a partir de agora, o entendimento já enunciado de que há um único benefício a pagar caso ocorra o óbito no período  $x$  a  $x+1$ .

Grafando o novo arranjo, encontramos:



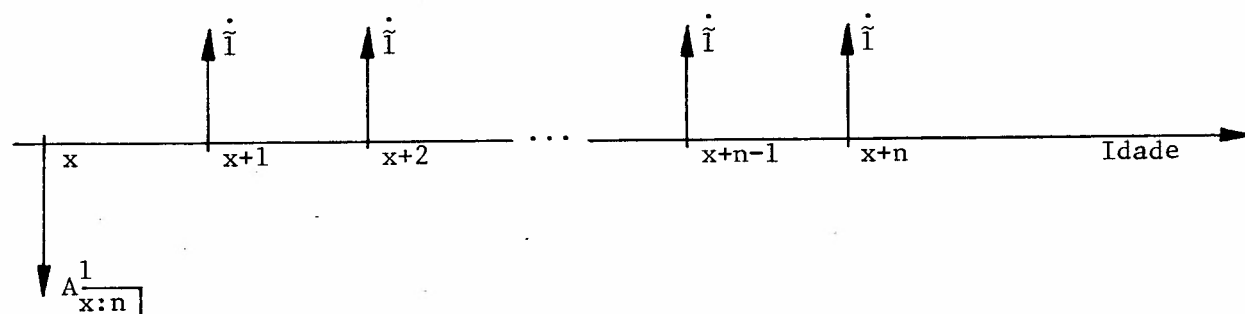
### II.5.6 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único

A temporaneidade da cobertura é agora de  $n$  anos e assim a igualdade básica fica

$$1_x \cdot A_{x:n}^1 = v \cdot d_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^n d_{x+n-1} \quad , \text{ donde}$$

$$A_{x:n}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad (\text{II.5.6})$$

e a visão pictórica do segurado



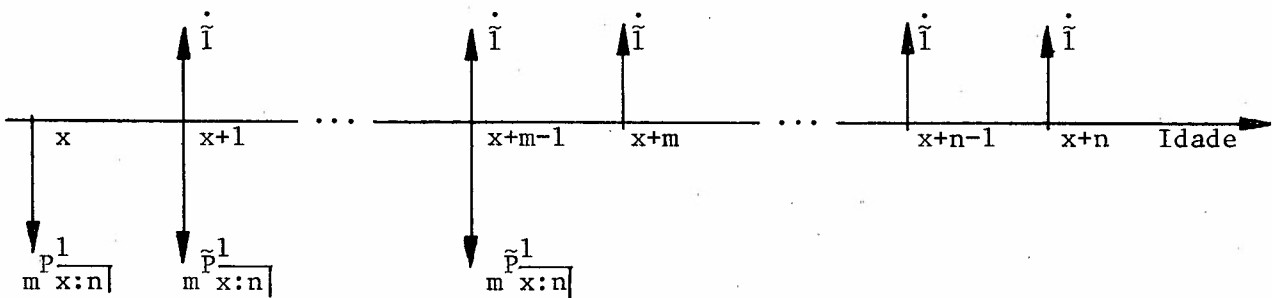
II.5.7 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Temporário por m Anos, Ordinário e Antecipado

No presente caso, ambos os fluxos, dos prêmios e do benefício, são temporários, sendo que aquele é sempre "antecipado" enquanto este é de pagamento sempre "imediato". Em adição, o prazo m dos prêmios pode quando muito se igualar ao prazo n da cobertura, isto é,  $m \leq n$ .

A igualdade essencial nos mostra que

$$\begin{aligned} {}_m P_{x:n}^1 \cdot \ddot{a}_{x:m} &= A_{x:n}^1, \text{ ou seja} \\ {}_m P_{x:n}^1 &= \frac{A_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:m}} = \frac{(M_x - M_{x+n})/D_x}{(N_x - N_{x+m})/D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \end{aligned} \quad (\text{II.5.7})$$

enquanto o enfoque gráfico nos revela:

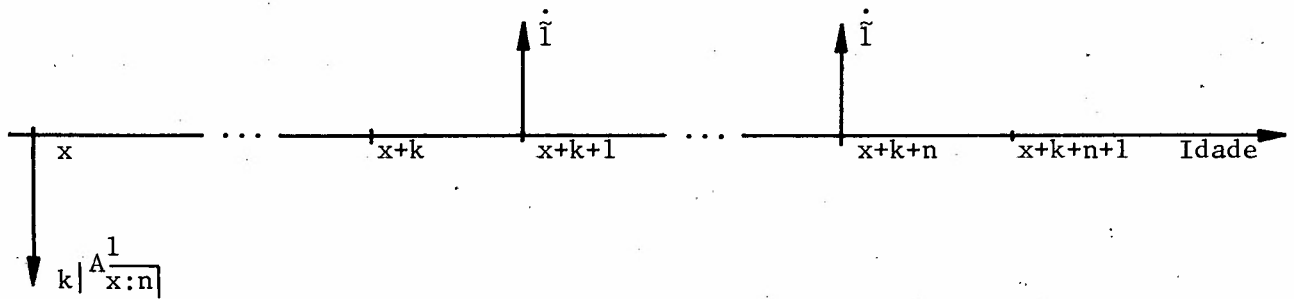


II.5.8 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Diferido por k Anos, Imediato e a Prêmio Único

Voltamos ao caso raro de seguro diferido, mas agora temporário. Sua equação básica seria

$$\begin{aligned} {}_1 P_x \cdot {}_k | A_{x:n}^1 &= v^{k+1} \cdot d_{x+k} + \dots + v^{k+n} \cdot d_{x+k+n-1} \quad \text{que conduz a} \\ {}_k | A_{x:n}^1 &= \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x} \end{aligned} \quad (\text{II.5.8})$$

com o seguinte retrato de seus fluxos:

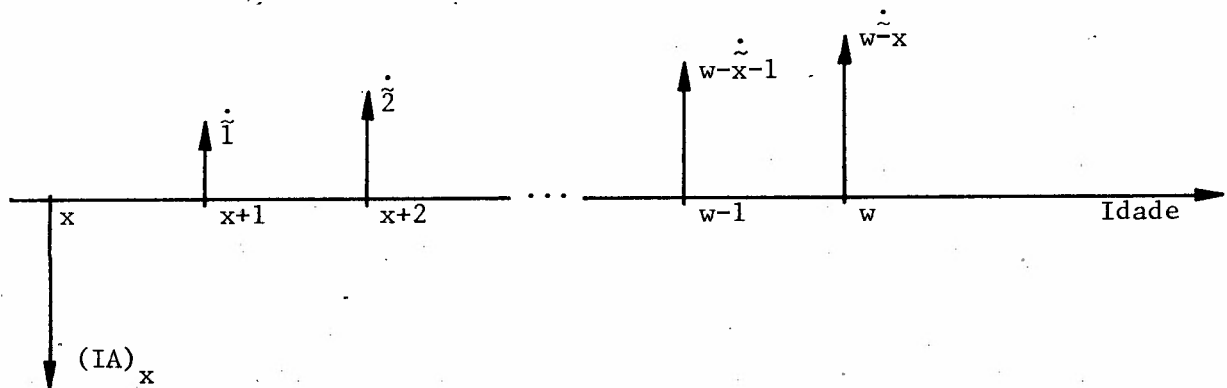


II.5.9 - Seguro de Vida Simples, de Pagamento Anual Crescente em Progressão Aritmética, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único

Um tal arranjo pode ser decomposto em  $w-x$  seguros de vida simples vitalícios, sendo o primeiro ordinário, o segundo diferido por um ano, o terceiro diferido por dois anos, e assim sucessivamente até o derradeiro, que seria diferido por  $w-x-1$  anos. Em acordo com essa análise, viria

$$\begin{aligned}
 (IA)_x &= A_x + 1|A_x + 2|A_x + \dots + w-x-1|A_x = \\
 &= \frac{M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots + M_{w-1}}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}
 \end{aligned}
 \tag{II.5.9}$$

Investigando graficamente, encontramos:



### II.5.10 - Seguro de Vida Dotal, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Único

Este é um arranjo securitário misto de seguro de morte, o dote puro que se paga ao fim de n anos em caso de sobrevivência do segurado, e, de seguro de vida simples que se paga no caso de falecimento dentro do período pactuado. Por esta razão, o seguro dotal nunca é vitalício, já que sua temporaneidade é requisito lógico essencial à formulação do arranjo dotal.

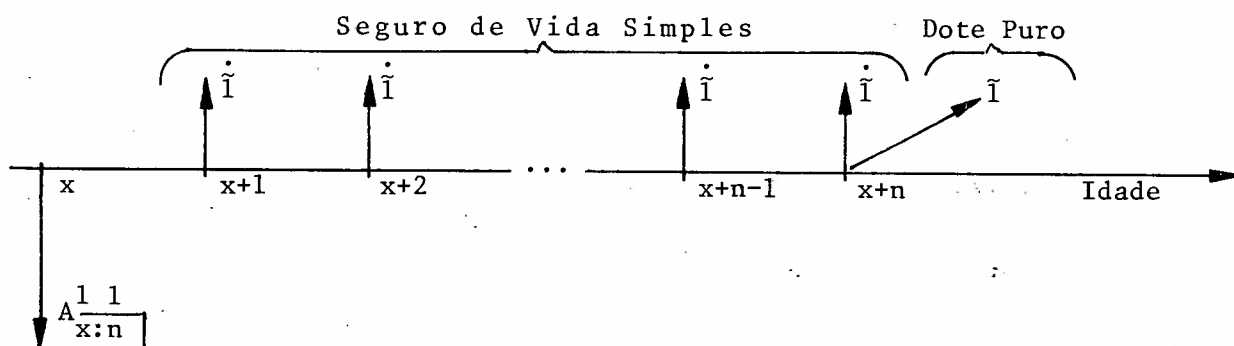
O prêmio puro de um seguro dotal é, então, simplesmente, a soma dos prêmios de um seguro temporário por n anos e de um dote puro diferido por n anos,

$$A_{\overline{x:n}|}^{\overline{1} \overline{1}} = A_{\overline{x:n}|}^{\overline{1}} + {}_n E_x$$

onde a presença de dois superescritos "1" significa que há duas qualidades de benefícios a pagar, mutuamente exclusivos, um por morte no período n e outro por sobrevivência ao período n. Assim, a feição analítica é

$$A_{\overline{x:n}|}^{\overline{1} \overline{1}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \quad (\text{II.5.10})$$

e a feição gráfica é:



### II.5.11 - Seguro de Vida Dotal, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Temporário por m Anos, Ordinário e Antecipado

Comparando com o seguro descrito na Seção II.5.7, o que se acrescen-

ta de inovação aqui é o dote ao fim do período contratual. Logo,

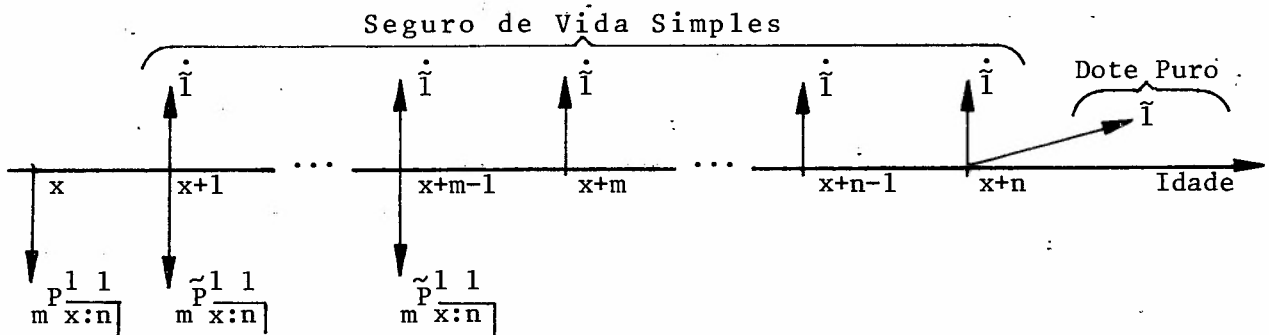
$${}_m P_{x:n}^{\overline{1} \overline{1}} \cdot \ddot{a}_{x:m} = A_{x:n}^{\overline{1}} + {}_n E_x, \text{ de onde vem}$$

$${}_m P_{x:n}^{\overline{1} \overline{1}} = \frac{A_{x:n}^{\overline{1}} + {}_n E_x}{\ddot{a}_{x:m}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} =$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

(II.5.11)

A concepção securitária aqui descrita teria o diagrama abaixo por representação gráfica:

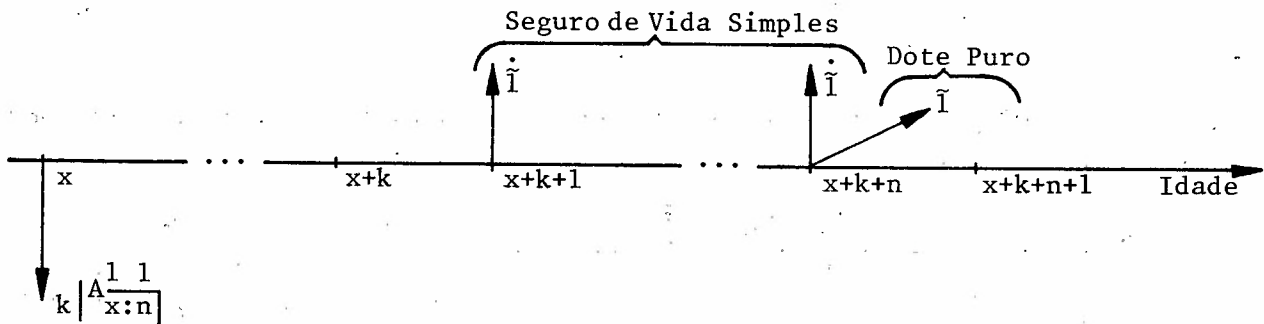


II.5.12 - Seguro de Vida Dotal, de Pagamento Constante, Temporário por n Anos, Diferido por k Anos, Imediato e a Prêmio Único

Voltamos pela última vez à esdrúxula figura do seguro diferido, mas agora na sua feição dotal. Seu valor presente seria a diferença entre os valores presentes de um seguro dotal temporário a  $k+n$  anos menos o de um seguro de vida simples temporário a  $k$  anos. Assim,

$$\begin{aligned}
{}_k|A_{\overline{x:n}}^{\overline{1} \overline{1}} &= A_{\overline{x:k+n}}^{\overline{1} \overline{1}} - A_{\overline{x:k}}^{\overline{1}} = \\
&= \frac{(M_x - M_{x+k+n} + D_{x+k+n}) - (M_x - M_{x+k})}{D_x} = \\
&= \frac{M_{x+k} + M_{x+k+n} + D_{x+k+n}}{D_x}
\end{aligned}
\tag{II.5.12}$$

Perfil financeiro teria a seguinte conformação:



II.5.13 - Seguro de Vida com Devolução dos Prêmios Históricos Acumulados, de Pagamento em Progressão Aritmética, Vitalício, Ordinário, Imediato e a Prêmio Anual Constante, Vitalício, Ordinário e Antecipado

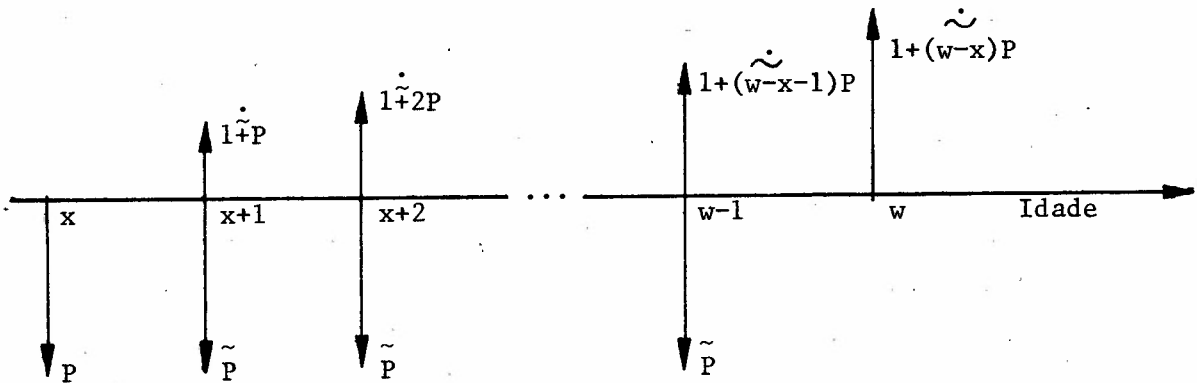
Neste curioso arranjo há um seguro de vida simples vitalício unitário acrescido da devolução dos prêmios acumulados, sem qualquer juro, pagos pelo segurado até o instante de sua morte. Notando por  $P$  o prêmio anual antecipado, o benefício seria de  $1+P$ ,  $1+2P$ , ...,  $1+nP$ , caso a morte ocorra no primeiro, no segundo, ..., e no  $n$ -ésimo ano respectivamente.

Esta apólice representa portanto a junção de dois seguros. O primeiro é o tradicional, descrito em II.5.1, com o benefício unitário de \$1. O segundo é o crescente em progressão aritmética do tipo mostrado em II.5.9, mas com termo inicial  $P$  e razão  $P$ . Podemos escrever agora a equação de igualdade dos valores presentes de prêmios e benefícios:

$P \cdot \ddot{a}_x = A_x + P \cdot (IA)_x$ , do que resulta

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x - (IA)_x} = \frac{M_x/D_x}{N_x/D_x - R_x/D_x} = \frac{M_x}{N_x - R_x} \quad (\text{II.5.13})$$

Para a representação gráfica, encontraríamos:



#### II.5.14 - Fórmula Geral dos Seguros

O Prêmio Puro Unitário ou valor presente das esperanças matemáticas dos pagamentos dos benefícios futuros do tipo seguros atende pela seguinte fórmula geral:

$$PPU = \frac{M_y - M_z}{D_x} \quad (\text{II.5.14})$$

onde,  $\tilde{a}$  semelhança das anuidades:

$x$  = idade por ocasião do contrato;

$y$  = idade por ocasião da entrada em vigência da cobertura securitária; e

$z$  = idade por ocasião da descontinuação dessa cobertura.

Quando  $x=y$ , não há carência para a cobertura do risco de vida. Quando  $z=w$ , o seguro é vitalício e  $M_z =$  zero.

## QUADRO II.6.1

## EXEMPLO DE SAÍDA DO PROGRAMA "ATUÁRIA"

COMMISSIONERS 1958 STANDARD ORDINARY (CSO) MALE MORTALITY TABLE  
TABELA DE SOBREVIV. E NUMEROS DE COMUTACAO PARA JUROS DE 6 % A.A.

IDADE	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$M_x$
0	10,000,000	70,800	10,000,000.00	168,553,924.17	459,211.84
1	9,929,200	17,475	9,367,169.81	158,553,924.17	392,419.39
2	9,911,725	15,066	8,821,399.96	149,186,754.35	376,866.70
3	9,896,659	14,449	8,309,425.73	140,365,354.39	364,216.99
4	9,882,210	13,835	7,827,635.92	132,055,928.66	352,772.03
5	9,868,375	13,322	7,374,223.87	124,228,292.74	342,433.72
6	9,855,053	12,812	6,947,423.49	116,854,068.66	333,042.23
7	9,842,241	12,401	6,545,652.39	109,906,645.37	324,521.52
8	9,829,840	12,091	6,167,363.22	103,360,992.98	316,740.98
9	9,817,749	11,879	5,811,110.55	97,193,629.76	309,584.34
10	9,805,870	11,865	5,475,546.59	91,382,519.21	302,951.16
11	9,794,005	12,047	5,159,359.66	85,906,972.62	296,700.83
12	9,781,958	12,325	4,861,333.44	80,747,612.96	290,713.84
13	9,769,633	12,896	4,580,385.18	75,886,279.52	284,935.40
14	9,756,737	13,562	4,315,414.18	71,305,894.34	279,231.49
15	9,743,175	14,225	4,065,486.51	66,990,480.15	273,572.54
16	9,728,950	14,983	3,829,765.01	62,924,993.64	267,972.92
17	9,713,967	15,737	3,607,421.71	59,095,228.63	262,408.77
18	9,698,230	16,390	3,397,714.67	55,487,806.93	256,895.41
19	9,681,840	16,846	3,199,974.09	52,090,092.26	251,478.30
20	9,664,994	17,300	3,013,590.81	48,890,118.17	246,225.63
21	9,647,694	17,655	2,837,921.31	45,876,527.36	241,136.75
22	9,630,039	17,912	2,672,384.91	43,038,606.05	236,237.39
23	9,612,127	18,167	2,516,428.52	40,366,221.14	231,548.08
24	9,593,960	18,324	2,369,502.31	37,849,792.62	227,061.22
25	9,575,636	18,481	2,231,110.07	35,480,290.30	222,791.76
26	9,557,155	18,732	2,100,758.52	33,249,180.23	218,729.45
27	9,538,423	18,981	1,977,963.24	31,148,421.71	214,845.03
28	9,519,442	19,324	1,862,289.80	29,170,458.47	211,131.77
29	9,500,118	19,760	1,753,310.80	27,308,168.67	207,565.40
30	9,480,358	20,193	1,650,626.37	25,554,857.38	204,124.98
31	9,460,165	20,718	1,553,877.89	23,904,231.50	200,808.19
32	9,439,447	21,239	1,462,712.13	22,350,353.61	197,597.78
33	9,418,208	21,850	1,376,812.26	20,887,641.48	194,492.93
34	9,396,358	22,551	1,295,866.12	19,510,829.22	191,479.56
35	9,373,807	23,528	1,219,561.21	18,214,963.10	188,545.56
36	9,350,279	24,685	1,147,660.46	16,995,381.89	185,657.71
37	9,325,594	26,112	1,079,840.20	15,847,721.43	182,799.36
38	9,299,482	27,991	1,015,864.72	14,767,881.24	179,946.91
39	9,271,491	30,132	955,478.32	13,752,016.52	177,062.29
40	9,241,359	32,622	898,465.14	12,796,538.20	174,132.79
41	9,208,737	35,362	844,616.56	11,898,073.06	171,140.73
42	9,173,375	38,253	793,748.30	11,053,456.50	168,080.95
43	9,135,122	41,382	745,696.57	10,259,708.20	164,958.37
44	9,093,740	44,741	700,300.54	9,514,011.63	161,771.58
45	9,048,999	48,412	657,410.45	8,813,711.09	158,521.14

## QUADRO II.6.1 (CONT.)

46	9,000,587	52,473	616,880.49	8,156,300.64	158,203.09
47	8,948,114	56,910	578,569.91	7,539,420.15	151,810.28
48	8,891,204	61,794	542,349.25	6,960,850.25	148,338.86
49	8,829,410	67,104	508,094.26	6,418,501.00	144,782.88
50	8,762,306	72,902	475,691.24	5,910,406.74	141,139.91
51	8,689,404	79,160	445,031.61	5,434,715.50	137,406.21
52	8,610,244	85,758	416,016.41	4,989,663.89	133,581.48
53	8,524,486	92,832	388,559.33	4,573,667.48	129,672.49
54	8,431,654	100,337	362,573.49	4,185,108.15	125,680.58
55	8,331,317	108,307	337,930.05	3,822,534.65	121,610.17
56	8,223,010	116,849	314,704.07	3,484,554.60	117,465.13
57	8,106,161	125,970	292,671.82	3,169,850.53	113,246.32
58	7,980,191	135,663	271,814.80	2,877,178.71	108,955.63
59	7,844,528	145,830	252,069.77	2,605,363.91	104,596.34
60	7,698,698	156,592	233,380.93	2,353,294.14	100,175.60
61	7,542,106	167,736	215,692.40	2,119,913.21	95,697.32
62	7,374,370	179,271	198,957.94	1,904,220.80	91,171.86
63	7,195,099	191,174	183,133.28	1,705,262.86	86,608.96
64	7,003,925	203,394	168,176.81	1,522,129.59	82,018.53
65	6,800,531	215,917	154,049.96	1,353,952.78	77,411.12
66	6,584,614	228,749	140,715.91	1,199,902.82	72,796.89
67	6,355,865	241,777	128,139.11	1,059,186.91	68,185.13
68	6,114,088	254,835	116,287.45	931,047.80	63,586.63
69	5,859,253	267,241	105,132.63	814,760.35	59,014.12
70	5,592,012	278,426	94,658.04	709,627.72	54,490.44
71	5,313,586	287,731	84,853.80	614,969.67	50,044.19
72	5,028,855	294,766	75,716.00	530,115.87	45,709.44
73	4,731,089	299,289	67,240.81	454,399.88	41,520.06
74	4,431,800	301,894	59,421.84	387,159.06	37,507.18
75	4,129,906	303,011	52,239.65	327,737.22	33,688.49
76	3,826,895	303,014	45,666.82	275,497.57	30,072.62
77	3,523,881	301,997	39,670.68	229,830.75	26,661.39
78	3,221,884	299,829	34,217.83	190,160.07	23,454.05
79	2,922,055	295,683	29,276.90	155,942.24	20,449.98
80	2,626,372	288,648	24,824.87	126,665.35	17,655.14
81	2,337,524	278,983	20,844.00	101,840.48	15,079.44
82	2,058,541	265,902	17,317.24	80,996.48	12,732.53
83	1,792,639	249,858	14,226.76	63,679.24	10,622.28
84	1,542,781	231,433	11,550.79	49,452.48	8,751.59
85	1,311,348	211,311	9,262.31	37,901.70	7,116.93
86	1,100,037	190,108	7,329.98	28,639.38	5,708.88
87	909,929	168,455	5,720.02	21,309.40	4,513.82
88	741,474	146,997	4,397.24	15,589.39	3,514.82
89	594,477	126,303	3,325.93	11,192.15	2,692.41
90	468,174	106,809	2,471.04	7,866.22	2,025.78
91	361,365	88,813	1,799.34	5,395.18	1,493.95
92	272,552	72,480	1,280.29	3,595.85	1,076.76
93	200,072	57,881	866.63	2,315.55	755.56
94	142,191	45,026	594.46	1,428.93	513.57
95	97,165	34,128	383.22	834.47	335.99
96	63,037	25,250	234.55	451.24	209.01
97	37,787	18,456	132.64	216.70	120.37
98	19,331	12,916	64.01	84.06	59.26
99	6,415	6,415	20.04	20.04	18.91
100	0	0	0.00	0.00	0.00

## QUADRO II.6.1 (CONT.)

## CARACTERIZACAO DO PROBLEMA

- 1 - DOTE PURO  
 1 - PAGAMENTO UNICO  
 2 - TEMPORARIA POR n ANOS (POR PARTE DO RESTO DA VIDA)  
 2 - DIFERIDA POR k ANOS (COM CARENCIA DE k ANOS)  
 2 - ANTECIPADA (NO INICIO DO PERIODO DE SOBREVIVENCIA)  
 1 - PREMIO UNICO (NO ATO DA COMPRA)

$$m = 0 \quad x = 30 \quad k = 10 \quad n = 1$$

RESPOSTA PARA JUROS DE 6 % AO ANO :  
 PREMIO PURO UNITARIO = \$ 0.544317693

## CARACTERIZACAO DO PROBLEMA

- 3 - ANUIDADE  
 2 - PAGAMENTOS ANUAIS IGUAIS  
 1 - VITALICIA (PELO RESTO DA VIDA)  
 2 - DIFERIDA POR k ANOS (COM CARENCIA DE k ANOS)  
 1 - IMEDIATA (NO FIM DO PERIODO DE SOBREVIVENCIA)  
 1 - PREMIO UNICO (NO ATO DA COMPRA)

$$m = 0 \quad x = 50 \quad k = 5 \quad n = 45$$

RESPOSTA PARA JUROS DE 6 % AO ANO :  
 PREMIO PURO UNITARIO = \$ 7.325244441

## CARACTERIZACAO DO PROBLEMA

- 3 - ANUIDADE  
 3 - PAGAMENTOS SUB-ANUAIS EM m PARCELAS IGUAIS SOMANDO 31  
 1 - VITALICIA (PELO RESTO DA VIDA)  
 1 - ORDINARIA (SEM CARENCIA)  
 1 - IMEDIATA (NO FIM DO PERIODO DE SOBREVIVENCIA)  
 1 - PREMIO UNICO (NO ATO DA COMPRA)

$$m = 12 \quad x = 45 \quad k = 0 \quad n = 55$$

RESPOSTA PARA JUROS DE 6 % AO ANO :  
 PREMIO PURO UNITARIO = \$ 12.545043080

## QUADRO II.6.1 (CONT.)

## CARACTERIZACAO DO PROBLEMA

- 
- 4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES
  - 6 - PAGAMENTO UNICO E CONSTANTE (AO LONGO DO PERIODO SEGURADO)
  - 2 - TEMPORARIA POR n ANOS (POR PARTE DO RESTO DA VIDA)
  - 1 - ORDINARIA (SEM CARENCIA)
  - 3 - IMEDIATA (NO FIM DO PERIODO RELATIVO A MORTE)
  - 5 - PREMIO ANUAL ORDINARIO ANTECIPADO TEMPORARIO POR m ANOS
- m = 3                      x = 80                      k = 0                      n = 5
- 

RESPOSTA PARA JUROS DE 6 % AO ANO :  
 PREMIO PURO UNITARIO = \$ 0.167309954

-----

## CARACTERIZACAO DO PROBLEMA

- 
- 5 - SEGURO DE VIDA DOTAL
  - 6 - PAGAMENTO UNICO E CONSTANTE (AO LONGO DO PERIODO SEGURADO)
  - 2 - TEMPORARIA POR n ANOS (POR PARTE DO RESTO DA VIDA)
  - 1 - ORDINARIA (SEM CARENCIA)
  - 3 - IMEDIATA (NO FIM DO PERIODO RELATIVO A MORTE)
  - 5 - PREMIO ANUAL ORDINARIO ANTECIPADO TEMPORARIO POR m ANOS
- m = 2                      x = 40                      k = 0                      n = 10
- 

RESPOSTA PARA JUROS DE 6 % AO ANO :  
 PREMIO PURO UNITARIO = \$ 0.291830333

-----

## CARACTERIZACAO DO PROBLEMA

- 
- 6 - SEGURO DE VIDA COM DEVOLUCAO DOS PREMIOS ACUMULADOS
  - 7 - PAGAMENTO UNICO MAS CRESCENTE EM PROGRESSAO ARITMETICA AO LONGO DO PERIODO SEGURADO
  - 1 - VITALICIA (PELO RESTO DA VIDA)
  - 1 - ORDINARIA (SEM CARENCIA)
  - 3 - IMEDIATA (NO FIM DO PERIODO RELATIVO A MORTE)
  - 4 - PREMIO ANUAL ORDINARIO ANTECIPADO VITALICIO
- m = 75                      x = 25                      k = 0                      n = 75
- 

RESPOSTA PARA JUROS DE 6 % AO ANO :  
 PREMIO PURO UNITARIO = \$ 0.007840541

-----

## QUADRO II.6.2

## UM RESUMO DOS CÁLCULOS DOS VALORES PRESENTES PUROS DAS ANUIDADES TÍPICAS

NOME DO BENEFÍCIO	FORMA DE PAGTO. DO BENEFÍCIO	DURAÇÃO DO DIREITO AOS BENEFÍCIOS	VIGÊNCIA DOS DIREITOS AOS BENEFÍCIOS	EPOCA DOS PAGTOS. DOS BENEFÍCIOS	CONDIÇÕES DE PAGTO. DO PRÊMIO	EQUAÇÃO	
						FÓRMULA	NUMERAÇÃO NO TEXTO
1 - DOTE PURO 2 - DOTE TONTINE 3 - ANUIDADE	1 - PAGTO. ÚNICO 2 - PAGTO. ANUAL IGUAL 3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS 4 - PAGTO. CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA 5 - PAGTO. SUB-ANUAL E EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA 2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA 2 - DIFERIDA k ANOS	1 - IMEDIATA 2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO 2 - PRÊMIO ANUAL ORDINÁRIO ANTECIPADO TEMPORÁRIO POR k ANOS		
1 - DOTE PURO	1 - PAGTO. ÚNICO	2 - TEMPORÁRIA POR 1 ANO	2 - DIFERIDA k ANOS	1 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	${}_k E_x = \frac{D_{x+k}}{D_x}$	2.3.1
2 - DOTE TONTINE	1 - PAGTO. ÚNICO	2 - TEMPORÁRIA POR 1 ANO	2 - DIFERIDA k ANOS	1 - IMEDIATA	2 - PRÊMIO ANUAL ORDINÁRIO ANTECIPADO TEMPORÁRIO POR k ANOS	${}_x \ddot{s}_{x:k} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}}$	2.3.2
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$	2.4.1
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$	2.4.2
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	1 - VITALÍCIA	2 - DIFERIDA k ANOS	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	${}_k   a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$	2.4.3
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	1 - VITALÍCIA	2 - DIFERIDA k ANOS	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	${}_k   \ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$	2.4.4
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	1 - VITALÍCIA	2 - DIFERIDA k ANOS	2 - ANTECIPADA	2 - PRÊMIO ANUAL ORDINÁRIO ANTECIPADO TEMPORÁRIO POR k ANOS	${}_k   \ddot{p}_x = \frac{N_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}$	2.4.5
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$a_{x:n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$	2.4.6
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$	2.4.7
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	2 - DIFERIDA POR k ANOS	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	${}_k   a_{x:n} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$	2.4.8
3 - ANUIDADE	2 - PAGTO. ANUAL IGUAL	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	2 - DIFERIDA POR k ANOS	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	${}_k   \ddot{a}_{x:n} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$	2.4.9
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$a_x^{(m)} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}$	2.4.11
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}$	2.4.10

QUADRO II.6.2  
-continuação-

UM RESUMO DOS CÁLCULOS DOS VALORES PRESENTES PUROS DAS ANUIDADES TÍPICAS

NOME DO BENEFÍCIO	FORMA DE PAGTO. DO BENEFÍCIO	DURAÇÃO DO DIREITO AOS BENEFÍCIOS	VIGÊNCIA DOS DIREITOS AOS BENEFÍCIOS	EPOCA DOS PAGTOS DOS BENEFÍCIOS	CONDIÇÕES DE PAGTO. DO PRÊMIO	EQUAÇÃO	NUMERAÇÃO NO TEXTO
1 - DOTE PURO 2 - DOTE TONTINE 3 - ANUIDADE	1 - PAGTO. ÚNICO 2 - PAGTO. ANUAL IGUAL 3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS 4 - PAGTO. CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA 5 - PAGTO. SUB-ANUAL EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA 2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA 2 - DIFERIDA k ANOS	1 - IMEDIATA 2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO 2 - PRÊMIO ANUAL ORDINÁRIO ANTECIPADO TEMPORÁRIO POR k ANOS	FÓRMULA	
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	1 - VITALÍCIA	2 - DIFERIDA POR k ANOS	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$k   \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right)$	2.4.12
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	1 - VITALÍCIA	2 - DIFERIDA POR k ANOS	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$k   \ddot{a}_x^{*(m)} = \frac{N_{x+k}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \left( \frac{D_{x+k}}{D_x} \right)$	2.4.13
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(m)} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)$	2.4.14
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{*(m)} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)$	2.4.15
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	2 - DIFERIDA POR k ANOS	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$k   \ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(m)} = \left( \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} \right) + \frac{m-1}{2m} \left( \frac{D_{x+k} - D_{x+k+n}}{D_x} \right)$	2.4.16
3 - ANUIDADE	3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	2 - DIFERIDA POR k ANOS	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$k   \ddot{a}_{x:\overline{n}}^{*(m)} = \left( \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} \right) - \frac{m-1}{2m} \left( \frac{D_{x+k} - D_{x+k+n}}{D_x} \right)$	2.4.17
3 - ANUIDADE	4 - PAGTO. CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$(\ddot{I}a)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$	2.4.18
3 - ANUIDADE	4 - PAGTO. CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$(\ddot{I}\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$	2.4.19
3 - ANUIDADE	4 - PAGTO. CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$(\ddot{I}a)_{x:\overline{n}} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{D_x}$	2.4.20
3 - ANUIDADE	4 - PAGTO. CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$(\ddot{I}\ddot{a})_{x:\overline{n}} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$	2.4.21

QUADRO II.6.2  
-continuação-

UM RESUMO DOS CÁLCULOS DOS VALORES PRESENTES PUROS DAS ANUIDADES TÍPICAS

NOME DO BENEFÍCIO	FORMA DE PAGTO. DO BENEFÍCIO	DURAÇÃO DO DIREITO AOS BENEFÍCIOS	VIGÊNCIA DOS DIREITOS AOS BENEFÍCIOS	ÉPOCA DOS PAGTOS. DOS BENEFÍCIOS	CONDIÇÕES DE PAGTO. DO PRÊMIO	EQUAÇÃO	
1 - DOTE PURO 2 - DOTE TONTINE 3 - ANUIDADE	1 - PAGTO. ÚNICO 2 - PAGTO. ANUAL IGUAL 3 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS 4 - PAGTO. CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA 5 - PAGTO. SUB-ANUAL EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA 2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA 2 - DIFERIDA k ANOS	1 - IMEDIATA 2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO 2 - PRÊMIO ANUAL ORDINÁRIO ANTECIPADO TEMPORÁRIO POR k ANOS	FÓRMULA  NUMERAÇÃO ND TEXTD	
3 - ANUIDADE	5 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS E EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\left( I_a \right)_x^{(m)} = \frac{S_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \left( \frac{N_{x+1}}{D_x} \right)$	2.4.22
3 - ANUIDADE	5 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS E EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\left( I_a \right)_x^{(m)} = \frac{S_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \left( \frac{N_x}{D_x} \right)$	2.4.23
3 - ANUIDADE	5 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS E EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	1 - IMEDIATA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\left( I_a \right)_{x:n}^{(m)} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \left[ \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} - n \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \right]$	2.4.24
3 - ANUIDADE	5 - PAGTO. SUB-ANUAL EM m PARCELAS E EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	2 - ANTECIPADA	1 - PRÊMIO ÚNICO	$\left( I_a \right)_{x:n}^{(m)} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \left[ \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - n \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \right]$	2.4.25

## QUADRO II.6.3

UM RESUMO DOS CÁLCULOS DE PRÊMIOS LÍQUIDOS  
DOS SEGUROS DE VIDA INDIVIDUAL MAIS USUAIS

NOME DO BENEFÍCIO	FORMA DE PAGTO. DO BENEFÍCIO	DURAÇÃO DO DIREITO AOS BENEFÍCIOS	VIGÊNCIA DOS DIREITOS AOS BENEFÍCIOS	EPOCA DOS PAGTOS. DOS BENEFÍCIOS	CONDIÇÕES DE PAGTO. DO PRÊMIO	EQUAÇÃO	
SEGURO DE VIDA							
4 - SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO E CONSTANTE	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA OU VENCIDA	3 - PRÊMIO ÚNICO	FÓRMULA	NUMERAÇÃO
5 - DOTAL							NO
6 - C/DEVOLUÇÃO DOS PRÊMIOS HISTÓRICOS ACUMULADOS	7 - PAGTO. ÚNICO MAS CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	2 - DIFERIDA k ANOS	OBS: NÃO CABE A ALTERNATIVA "ANTECIPADA"	PRÊMIO ANUAL ORDINÁRIO ANTECIPADO 4 - VITALÍCIO 5 - TEMPORÁRIO POR m ANOS		TEXTO
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$A_x = \frac{M_x}{D_x}$	2.5.1
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	4 - PRÊMIO ANUAL ORD. ANTECIP. VITALÍCIO	$P_x = \frac{M_x}{N_x}$	2.5.2
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	5 - PRÊMIO ANUAL ORD. ANTECIP. TEMPORÁRIO POR m ANOS	$m^P_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$	2.5.3
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	1 - VITALÍCIA	2 - DIFERIDA POR k ANOS	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$k A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$	2.5.4
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	2 - TEMPORÁRIA POR UM ANO	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$A_{x:\overline{1} } = P_{x:\overline{1} } = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x}$	2.5.5
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$A_{x:n}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$	2.5.6
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	5 - PRÊMIO ANUAL ORD. ANTECIP. TEMPORÁRIO POR m ANOS	$m^P_{x:\overline{n} } = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$	2.5.7
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	2 - DIFERIDA POR k ANOS	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$k A_{x:\overline{n} }^1 = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$	2.5.8
4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES	7 - PAGTO. ÚNICO CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$	2.5.9
5 - SEGURO DE VIDA DOTAL	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$A_{x:\overline{n} }^1 = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$	2.5.10
5 - SEGURO DE VIDA DOTAL	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	5 - PRÊMIO ANUAL ORD. ANTECIP. TEMPORÁRIO EM m ANOS	$m^P_{x:\overline{n} }^1 = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$	2.5.11
5 - SEGURO DE VIDA DOTAL	6 - PAGTO. ÚNICO CONSTANTE	2 - TEMPORÁRIA POR n ANOS	2 - DIFERIDA POR k ANOS	3 - IMEDIATA	3 - PRÊMIO ÚNICO	$k A_{x:\overline{n} }^1 = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n} + D_{x+k+n}}{D_x}$	2.5.12
6 - SEGURO DE VIDA COM DEVOLUÇÃO DOS PRÊMIOS HISTÓRICOS ACUMULADOS	7 - PAGTO. ÚNICO CRESCENTE EM PROGRESSÃO ARITMÉTICA	1 - VITALÍCIA	1 - ORDINÁRIA	3 - IMEDIATA	4 - PRÊMIO ANUAL ORD. ANTECIP. VITALÍCIO	$P = \frac{M_x}{N_x - R_x}$	2.5.13

## II.6 - UM PROGRAMA PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE ANUIDADES E SEGUROS DE VIDA

No Apêndice D, mostramos um programa por nós codificado em BASIC MICROSOFT utilizado por minicomputadores como o TRS-80 e o CP-500 -que utilizam o processador Z-80 da ZILOG- capaz de resolver todos os problemas por nós tratados neste sumário.

No seu primeiro estágio, o programa pede, além da taxa de juros desejada, o vetor  $l_x$  representante da Tabela de Sobrevivência a ser utilizada, a partir do que calcula, com precisão dupla de 16 algarismos significativos, os sete vetores seguintes:  $v^x$ ,  $D_x$ ,  $N_x$ ,  $S_x$ ,  $C_x$ ,  $M_x$  e  $R_x$ .

No segundo estágio, oferece ao usuário de forma seqüencial os seis "menus" relativos aos diferentes atributos descritos na seção II.2, e que sejam a caracterização do problema que se tem em mente dentro do espectro dos 40 problemas antes descritos.

No Quadro II.6.1, mostramos alguns exemplos dos resultados que produz juntamente com a tabela de sobrevivência e alguns dos vetores de comutação de que se utilizou nesses cálculos.

Os Quadros II.6.2 e II.6.3 apresentam um resumo de todos esses problemas visando facilitar e sistematizar suas soluções com o emprego do programa sob referência.

## II.7 - UMA INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE RESERVAS

Qualquer que seja o tipo de anuidade ou de seguro que se considere, a equação fundamental que estabelece a igualdade entre o valor presente dos prêmios futuros e o valor presente dos benefícios futuros na idade  $x$  do beneficiário só subsiste no instante do contrato, momento no qual se dimensiona o valor do prêmio único, temporário ou vitalício, a ser pago.

Em qualquer data posterior a esta, por exemplo,  $t$  anos após, isto é, na idade  $x+t$  do contratante, a igualdade entre os valores presentes dos prêmios e benefícios futuros se destrói porque:

- o número de pagamentos de prêmios após  $x+t$  é menor, se é que ainda há algum por cobrar;
- o valor dos benefícios cresce pela redução do prazo de atualização dos benefícios pendentes, e decresce, pela eliminação dos benefícios já concedidos.

Como na idade  $x+t$  do segurado, e numa visão prospectiva, as obrigações do segurador são maiores que seus direitos face a esse mesmo segurado, desequilíbrio esse que não existia no momento  $x$  do contrato, decorre então, naturalmente, a idéia de reserva como elemento restaurador desse equilíbrio.

Reserva de um determinado arranjo securitário é, pois, a contrapartida de um ativo a ser constituído pela instituição previdenciária capaz de garantir, em conjunto com os prêmios eventualmente por receber, o pagamento dos compromissos assumidos no contrato.

No caso particular dos seguros, um dos elementos balizadores das reservas de uma apólice é o que denominamos na Seção II.5.5 de "prêmio natural" na idade  $x$ , ou seja, quanto custa atuarialmente ao segurador a cobertura do risco de vida do segurado nessa idade.

Caso o arranjo securitário leve a pagamentos de prêmios anuais que difiram dessa quantia, surge o problema da reserva que varia, como se pode antecipar, de arranjo para arranjo. Assim, para cada um dos 12 problemas de seguros mostrados - exceção, é claro, para o relativo ao prêmio natural, que não conduz à constituição de reservas - há um cálculo próprio para sua reserva.

Há duas óticas distintas, mas quantitativamente equivalentes, para se mensurar a reserva de um seguro na idade  $x+t$ :

- visão prospectiva: olha para o futuro e estabelece que no momento  $x+t$

$$\text{Reserva} = \left( \begin{array}{l} \text{Valor Presente dos} \\ \text{Benefícios Futuros} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Valor Presente dos} \\ \text{Prêmios Futuros} \end{array} \right)$$

- visão retrospectiva: olha para o passado e prescreve que no mesmo momento  $x+t$

$$\text{Reserva} = \left( \begin{array}{l} \text{Valor Presente dos} \\ \text{Prêmios Passados} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Valor Presente dos} \\ \text{Benefícios Passados} \end{array} \right)$$

### II.7.1 - A Análise das Reservas para Dois Casos Particulares de Seguro

Tomemos o seguro descrito na Seção II.5.2, no qual benefícios e prêmios são vitalícios. Como o prêmio real é constante e o prêmio natural é crescente com a idade, nos primeiros anos ingressa na seguradora mais dinheiro

do que a quantia inerente ao risco e a diferença deve cumulativamente constituir a reserva. Nas idades mais avançadas, ocorre o contrário e a seguradora retira esse déficit da reserva para se cobrar pela cobertura oferecida e vencida até que, por ocasião do ôbito, deve existir exatamente a importância necessária para honrar o compromisso da apólice.

Na visão prospectiva, o valor presente dos Benefícios Futuros está representada por  $A_{x+t}$ , isto é, um seguro vitalício imediato diferido de  $t$  anos, ao passo que os prêmios futuros são um caudal de pagamentos incertos vitalícios antecipados também diferidos de  $t$  anos com respeito à idade  $x$  do contrato. A Reserva seria dada por

$${}^V_{t x} = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad (\text{II.7.1})$$

Na visão retrospectiva, o valor presente dos prêmios passados é um Dote Tontine a  $t$  anos com contribuição anual igual a  $P_x$ , enquanto o valor presente dos benefícios passados é dado por uma quantidade denominada "Custo Accumulado de um Seguro Temporário a  $n$  Anos", denotada por  ${}^k_{n x}$  e mensurada por

$${}^k_{n x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+n}} \quad \text{do que segue}$$

$$\begin{aligned} {}^V_{t x} &= P_x \cdot \overline{s}_{x:t} - {}^k_{t x} = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} = \\ &= \frac{M_x \cdot N_x}{N_x \cdot D_{x+t}} - \frac{M_x \cdot N_{x+t}}{N_x \cdot D_{x+t}} - \frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} = \\ &= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \end{aligned} \quad (\text{II.7.2})$$

que é idêntica à equação II.7.1.

Tomemos agora o seguro dotal descrito na Seção II.5.11 para  $m=n$ .

Na abordagem prospectiva, o valor presente dos benefícios futuros na idade  $x+t$ , onde  $t < n$ , continua sendo um seguro dotal, mas agora a  $n-t$  anos e o valor presente dos prêmios futuros é uma anuidade antecipada pelos mesmos  $n-t$  anos a decorrer. A reserva correspondente ao instante  $t$  seria dada por

$$\begin{aligned} {}_tV_{x:n}^{\overline{1} \overline{1}} &= A_{x+t:n-t}^{\overline{1} \overline{1}} - nP_{x:n}^{\overline{1} \overline{1}} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t} = \\ &= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \left( \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \right) \cdot \left( \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.7.3})$$

Na abordagem retrospectiva, o valor presente no instante  $x+t$  dos prêmios passados é um Dote Tontine a  $t$  anos enquanto o valor presente dos benefícios passados é o Custo Acumulado de um Seguro Temporário a  $n$  Anos, de tal sorte que:

$$\begin{aligned} {}_tV_{x:n}^{\overline{1} \overline{1}} &= nP_{x:n}^{\overline{1} \overline{1}} \cdot \ddot{s}_{x:t} - t k_x = \\ &= \left( \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \right) \cdot \left( \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \right) - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \end{aligned} \quad (\text{II.7.4})$$

que também é uma expressão equivalente à Equação II.7.3.

## II.7.2 - Equação Recursiva Geral para Cálculo de Reservas

É possível desenvolver para qualquer tipo de anuidade ou seguro uma fórmula recorrente para cálculo da reserva relativa ao instante  $t+1$  e apoiada

da no valor da reserva do instante  $t$ . Essa equação, conhecida como Fôrmula de Acumulação de Fackler, tem a seguinte lógica: a reserva terminal  ${}_{t+1}V$  para cada um dos  $l_{x+t+1}$  sobreviventes da idade  $x+t+1$ , quando vista na ótica do grupo deve ser igual:

- 1) a reserva grupal relativa ao período anterior,  $l_{x+t} \cdot {}_tV$ ,
- 2) mais, os prêmios pagos pelo grupo na idade  $x+t$ , isto é,  $l_{x+t} \cdot P$ ,
- 3) mais, a capitalização, à taxa de juros  $j$ , das parcelas 1) e 2) a cima, e
- 4) menos, os benefícios unitários pagos aos  $d_{x+t}$  mortos na idade de  $x+t$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
 l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V &= \left[ \left( l_{x+t} \cdot {}_tV \right) + \left( l_{x+t} \cdot P_{x+t} \right) \right] \cdot (1+j) - d_{x+t} \\
 {}_{t+1}V &= \left( {}_t^{V+P}_{x+t} \right) \cdot \frac{l_{x+t} \cdot v^{x+t}}{l_{x+t+1} \cdot v^{x+t+1}} - \frac{d_{x+t} \cdot v^{x+t+1}}{l_{x+t+1} \cdot v^{x+t+1}} = \\
 &= \left( {}_t^{V+P}_{x+t} \right) \cdot \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} - \frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}} \quad (\text{II.7.5})
 \end{aligned}$$

Sabendo-se que, quando  $t=0$ ,  ${}_0V=0$ , então é possível calcular-se recursivamente todas as reservas terminais,  ${}_1V$ ,  ${}_2V$ , ...,  ${}_{w-1}V$ , para qualquer a pólize de seguro, bastando conhecer o valor do prêmio genérico  $P_{x+t}$  devido nessa idade, se for o caso.

## CAPÍTULO III

## UMA VISÃO GENÉRICA DA PREVIDÊNCIA

## III.1. INTRODUÇÃO

Uma das preocupações primárias do homem é a busca de segurança. Em gradações diferentes, ele se preocupa permanentemente consigo próprio, com sua família e com os grupos aos quais se acha ligado. Num nível mais altruístico estão as inquietações relativas ao bem-estar de sua pátria e da própria comunidade internacional.

Esse sentimento de insegurança tem nascimento nos continuados riscos que afetaram a sobrevivência do gênero humano desde sua origem até os dias atuais. O notável progresso científico e tecnológico, se foi capaz de eliminar parte dos riscos iniciais, não conseguiu eliminar por completo a pobreza e a doença, acrescentando, ao contrário, riscos novos como a poluição ambiental e o presente perigo das guerras nucleares.

Este conceito de segurança pode ser desdobrado nos seus aspectos físicos e econômicos. Para ambos, o homem buscou, a princípio, soluções individuais, mas cedo descobriu que os resultados eram melhores quando os esforços de proteção e de produção partiam de um grupo maior que a família. Surgiram os clãs, as tribos, as vilas e aldeias, as nações e as comunidades de nações.

Para a segurança física, especificamente, foram instituídas as legislações, as forças policiais e militares e por fim os tratados entre nações. Para a segurança econômica desenvolveram-se mecanismos de partilhamento de risco através dos sistemas securitários.

No primeiro aspecto, o grande risco é a agressão à integridade física e à liberdade, enquanto no segundo o risco fundamental é a cessação das rendas que financiam o bem-estar.

Se a proteção ao risco do primeiro tipo é tão antiga quanto a humanidade, as preocupações securitárias são mais recentes e se aceleraram com a transformação da sociedade agrária em sociedade urbana provocada pela revolução industrial.

Os seguros de ativos materiais já eram praticados ao tempo das grandes descobertas, mas o seguro social é fenômeno que apenas está completando seu primeiro século de vida.

Na família agrária medieval a cessação de rendas decorria do desmantelamento da atividade produtiva, que poderia ocorrer por convulsões naturais e sociais, mas principalmente pela morte, velhice ou incapacitação física das pessoas que trabalhavam a terra, ainda que não própria. Uma primeira e óbvia solução era aumentar o número dessas pessoas através de uma prole numerosa. Outra solução, de caráter mais duradouro, era a posse da terra, que podia ser trabalhada ou arrendada e que produziu a segurança das minorias nobres e burguesas de então, segurança essa só vulnerável às dramáticas transformações sociais de que nos dá conta a História.

A segurança dessa sociedade se forjava no seio de uma família forte e se apoiava no suporte da posse material e no auferimento de rendas em espécie. Poderia então ser classificada de Segurança Familiar Material.

Com a revolução industrial e o processo de urbanização que se seguiu, um outro tipo de segurança passou a ser reclamada, ao tempo em que a família se transformava, a propriedade imobiliária se sujeitava a regulamentos mais rígidos, as rendas em espécie davam lugar às rendas monetárias e todo o composto social criava novas dimensões.

Se para a sociedade agrária os fatores determinantes da atividade econômica, numa visão intensiva, eram as condições naturais de solo e clima, na sociedade urbana-industrial eles foram acrescidos de fatores políticos trazidos nas formas e programas de governo que se seguiram.

Nessa nova organização social, em acréscimo aos já mencionados para a sociedade agrária, o desemprego surgiu como um muito importante fator determinante da cessação de rendas para a maioria das famílias urbanas. A ocupação desses braços passou a depender não só de suas capacitações profissionais, mas também do nível da atividade econômica tangida pela inovação tecnológica e pelas decisões políticas.

Nesse novo quadro de riscos, novos e maiores grupos foram reclamados para promover e assegurar o partilhamento dos riscos individuais dentro do espírito do princípio da mutualidade através do qual os benefícios e malefícios materiais, agora de natureza monetária, são diluídos através de uma grande família social. Começaram a surgir as associações classistas beneficentes, os sindicatos, os fundos de previdência e outros arranjos securitários que conduziram à Segurança Individual Monetária ou Previdência Social que hoje conhecemos.

Naturalmente, foi na Inglaterra, berço da revolução industrial, onde

esses fenômenos primeiro ocorreram, mas foi na Alemanha, em 1883, que, por uma conveniência política, surgiu o primeiro sistema estruturado de seguro social organizado pelo Estado.

Naquele ano, numa fase de expansão da industrialização alemã e do Socialismo na Europa, o príncipe Otto Von Bismarck<sup>1</sup>, hábil político e estrategista, concebeu a primeira legislação de seguro social como forma de aliviar as tensões criadas pelas reivindicações trabalhistas e pelas necessidades de mudanças econômicas defendidas pelos socialistas.

Na última passagem de século, a maioria das nações européias contava com algum tipo de legislação social e atualmente todos os Estados Nacionais, desenvolvidos, em vias de desenvolvimento ou mesmo subdesenvolvidos, já operam sistemas abrangentes ou parciais de previdência social.

Na América Latina, o Chile é dado como o líder na criação, em 1924, do primeiro sistema social extensivo do continente.

No Brasil, as evidências mais antigas de preocupações no campo da assistência social remontam à criação das Santas-Casas de Misericórdia e da tentativa de criação da "Caixa de Socorro" das estradas de ferro, ainda ao tempo do Império.

Considerando a cobertura do risco de acidente de trabalho como um seguro social, vamos encontrar a Lei 3.724, de 15 de janeiro de 1919, como outro marco importante do desenvolvimento de nossa legislação social. Com este diploma legal se atribuiu ao empregador a responsabilidade pelos acidentes de trabalho no âmbito de sua empresa.

Foi, entretanto, com o Decreto Legislativo nº 4682, de 24 de janeiro de 1923 - também cognominado de "Lei Eloy Chaves" - que se inaugurou no Brasil a Previdência Social com a criação das Caixas de Aposentadoria e Pensão dos empregados das diversas ferrovias então existentes, cobrindo os riscos de invalidez, velhice e morte e oferecendo ainda assistência médica. Dois anos mais tarde esses benefícios foram estendidos aos portuários e marítimos, trabalhos profissionais esses que, ao lado dos ferroviários, poderiam ser considerados como penosos, perigosos ou insalubres.

Com a Revolução de 1930, vieram outros importantes progressos no campo trabalhista e previdenciário, a começar com a criação do Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio, em 1931.

Ainda em 1931, o regime das Caixas de Aposentadoria e Pensão foi estendido aos empregados das empresas de luz, gás, bondes e telefones, cobrindo

---

(1) Ver PAIXAO, Floriceno. A previdência social em perguntas e respostas. Porto Alegre, Editora Síntese Ltda., 1982. p.14.

no ano seguinte as empresas de mineração e, em 1934, as nascentes empresas de transporte aéreo.

Essas "Caixas" se caracterizaram por atuarem com base em uma empresa ou grupos de empresas de uma mesma área geográfica e seu número contava-se às dezenas, principalmente no setor de serviços públicos, e sua eficiência era necessariamente variável e em média insatisfatória.

O partilhamento do risco é uma instituição apoiada na Estatística que por sua vez é uma ciência dos grandes números. A reunião dessas "Caixas" num "pool" de riscos mais amplo reduziria indubitavelmente o risco de ruína dessas organizações, o que passou a ser feito a partir de 1933 com a criação dos Institutos de Aposentadoria e Pensão de abrangência nacional mas ainda segmentados por diferentes categorias profissionais ou setores econômicos.

Assim é que são criadas, ao longo dos anos 30, seis grandes Institutos, a saber:

- Instituto de Aposentadoria e Pensão dos Marítimos - IAPM, em 1933;
- Instituto de Aposentadoria e Pensão dos Comerciantes - IAPC, em 1934;
- Instituto de Aposentadoria e Pensão dos Bancários - IAPB, em 1934;
- Instituto de Aposentadoria e Pensão dos Industriários - IAPI, em 1936;
- Instituto de Aposentadoria e Pensão dos Empregados em Transportes e Cargas - IAPETC, em 1938; e
- Instituto de Aposentadoria e Pensão da Estiva - IAPE, em 1939.

Em 1945 houve uma tentativa frustrada de aglutinação de todos esses Institutos no Instituto dos Serviços Sociais do Brasil, buscando padronizar a previdência social brasileira. Nesse mesmo ano o IAPE é absorvido pelo IAPETC.

Em 1951 deu-se a criação do Instituto de Previdência e Assistência dos Servidores do Estado - IPASE, para atender os funcionários públicos civis da União e em 1953 assistimos a unificação de 183 diferentes "Caixas" existentes no setor ferroviário e de serviços públicos, para formar uma única Caixa de Aposentadoria e Pensão dos Ferroviários e Empregados em Serviços Públicos - CAPFESP, organização essa que só em 1960 transformou-se no Instituto de Aposentadoria e Pensão dos Ferroviários e Empregados em Serviços Públicos - IAPFESP, na esteira da Lei Orgânica da Previdência.

Em 1963 foi instituído o Estatuto do Trabalhador Rural - ETR, e com ele a Previdência Social Rural através do FUNRURAL, que, embora preservando a sigla, transformou-se em 1971 no Programa de Assistência ao Trabalhador Rural

## - PRORURAL.

A aglutinação de todos os Institutos numa só organização previdenciária deu-se em três etapas a saber:

- Com a Lei nº 3807, de 1960, implantou-se um plano único de benefícios para todos os Institutos e procedeu-se à sua uniformização administrativa;
- Com o Decreto-Lei nº 72, de 1966, aglutinaram-se todos os Institutos, exceção feita ao IPASE, para a constituição do Instituto Nacional de Previdência Social - INPS;
- Com a Lei nº 6439, de 1977, institui-se o Sistema Nacional de Previdência Social - SINPAS, que absorveu não só o IPASE e o Serviço de Assistência e Seguro Social dos Economiários - SASSE, mas passou a ser integrado também por instituições de "assistência social" então existentes. O plano de benefícios do IPASE, no entanto, não foi equiparado ao vigente para os demais segurados urbanos.

As entidades que formam o SINPAS e seus respectivos encargos são:

- O Instituto Nacional da Previdência Social - INPS, que cuida:
  - . da concessão dos benefícios pecuniários oferecidos pelo sistema;
  - . da prestação de serviços de assistência complementar, reeducativa e de readaptação profissional da previdência urbana e rural; e
  - . da implementação do programa de amparo aos septuagenários e aos inválidos carentes.
- O Instituto de Assistência Médica de Previdência Social - INAMPS, que se ocupa da prestação de serviços médicos, ambulatoriais, hospitalares, farmacêuticos e correlatos aos:
  - . beneficiários da previdência urbana;
  - . beneficiários da previdência rural; e
  - . aos servidores federais do ex-IPASE.
- O Instituto de Administração Financeira da Previdência e Assistência Social - IAPAS, a quem incumbe:
  - . arrecadar e cobrar todos os recursos destinados à Previdência Social;
  - . fiscalizar todos os entes econômicos envolvidos no processo de arrecadação;
  - . executar aplicações patrimoniais e financeiras; e
  - . distribuir os recursos às entidades integrantes do Sistema.

- A Fundação Legião Brasileira de Assistência - LBA devota-se a:
  - . prestação de "assistência social" à população carente; e
  - . suplementação da assistência complementar afeta ao INPS e ao INAMPS.
- A Fundação Nacional do Bem-Estar do Menor - FUNABEM dedica-se por inteiro à educação, habilitação e reabilitação do menor delinqüente e/ou abandonado.
- A Empresa de Processamento de Dados da Previdência Social - DATA-PREV cuida das tarefas de análise de sistema e de processamento de dados relativos ao SINPAS.
- A Central de Medicamentos - CEME encarrega-se da fabricação dos remédios essenciais à assistência médica do Sistema, do qual participa como órgão autônomo.

Antes de outros detalhes sobre a previdência social brasileira, que virão nas seções seguintes, conviria ter um panorama sumário desta questão em alguns países estrangeiros.

Nos Estados Unidos da América do Norte<sup>2</sup>, paradoxalmente, a previdência social só foi estabelecida em 1935 com a aprovação do "Social Security Act" que criou o que hoje se conhece por "Old-age, Survivors an Disability Insurance System - OASDI" para proteger todos os empregados na indústria e no comércio, exceto ferroviários. Nessa época os benefícios se resumiam à aposentadoria para os trabalhadores que atingissem a idade de 65 anos.

Diversas emendas ocorridas em 1939, 1950, 1952, 1954, 1956, 1958, 1960, 1961, 1965, 1966, 1967 e 1972 tornaram-no mais liberal e mais abrangente mas, ainda assim, continua sendo um sistema que fornece apenas o mínimo essencial à sobrevivência deixando à previdência complementar e à poupança por iniciativa pessoal a maior parte dos encargos da manutenção confortável do aposentado.

Assim, a aposentadoria só ocorre aos 62 anos de idade, exceto para algumas profissões perigosas em que os empregados se aposentam aos 55 anos.

A pensão por viuvez só é paga a mulheres com mais de 60 anos de idade ou que tenham sob seus cuidados filhos de menos de 18 anos ou menos de 22 se freqüentarem escola. Esta idade é reduzida para 50 anos se for inválida.

Os maiores de 72 anos de idade, mesmo não tendo sido contribuintes, são beneficiados com uma pensão por velhice e a mulher divorciada cujo casamento durou mais de 20 anos reveste-se dos mesmos direitos da esposa.

(2) Ver MYERS, Robert. Social security. Homewood, Richard Irwin, Inc., 1975.  
p. 3.

São ainda dependentes do segurado e beneficiários do sistema os filhos nascidos fora do casamento e os netos se efetivamente vivem às expensas do trabalhador.

Os benefícios por invalidez total são pagos em qualquer idade e serviços de reabilitação profissional são também disponíveis, mas os seguros por acidente de trabalho formam um programa a parte denominado "Worker's Compensation Benefits" e são administrados pelos Governos Estaduais.

A assistência médica na América<sup>3</sup> é provida por um programa em separado, chamado de "Health Insurance for the Aged and Disabled" ou "Medicare" que se desdobra em dois subprogramas, "Hospital Insurance - HI" e "Supplementary Medical Insurance - SMI", ambos administrados pelo Governo Federal com o auxílio de organizações privadas.

O HI é compulsório e é autofinanciado pelos participantes, enquanto o SMI é um programa voluntário com subsídios governamentais de aproximadamente metade de seus custos. Em ambos os casos, atendem-se pessoas com 65 anos ou mais, ou com qualquer idade, se inválidas.

A previdência social americana se completa com um conjunto de outros programas complementares que se compõem de:

- seguro desemprego;
- seguro de acidente de trabalho, já referido;
- auxílio-doença; e
- programas especiais para funcionários públicos e veteranos de guerra.

Seria impraticável detalhar aqui toda a regulamentação que disciplina a previdência social dos Estados Unidos. Conviria, no entanto, destacar dois princípios básicos que a norteiam.

Em primeiro lugar, aquela nação é um país capitalista e uma economia desenvolvida onde a segurança se apóia muito mais na iniciativa individual que na ação do Estado. As regras para concessão dos benefícios são mais rigorosas e os benefícios mais magros que em países subdesenvolvidos. A mulher é vista em igualdade de posição com o homem, não havendo liberalidades na concessão de seus benefícios, mesmo quando estas se tornam viúvas.

Em segundo lugar, a legislação previdenciária tem por preocupação preservar a prática da medicina como uma atividade privada sendo frontalmente contrária a sua socialização como ocorre com frequência em países do terceiro mundo.

Reconhecendo que aposentadoria e pensão são os benefícios básicos de

(3) Ver INTERNATIONAL FOUNDATION OF EMPLOYEE BENEFIT PLANS. Social security, savings plans and other retirement arrangements. Brookfield, 1979. p. 4.1.

um sistema previdenciário, faremos a seguir um relato sumaríssimo sobre a previdência em outros países com base apenas nesses dois pontos e sempre que a informação nos esteve disponível. O primeiro deles, a forma de aposentadoria, é particularmente oportuno nessa fase de discussão nacional sobre aposentadoria por idade ou por tempo de serviço.

No Canadá,<sup>4</sup> a aposentadoria é paga após 65 anos sem obrigação de se retirar do emprego em acréscimo a uma pensão fixa paga a todas as pessoas que superam essa idade.

No México,<sup>4</sup> a aposentadoria é paga aos 65 anos se efetivamente inativo e aos 60 anos se involuntariamente aposentado. A mulher recebe pensão vitalícia por viuvez em qualquer idade.

No Panamá,<sup>4</sup> a idade de aposentadoria é de 60 anos para os homens e de 55 anos para as mulheres e a pensão de viuvez é paga independentemente da idade da beneficiária.

No Peru,<sup>4</sup> os homens se aposentam aos 60 anos e as mulheres aos 55 anos sob requerimento de deixar o trabalho. A pensão da viúva é paga, qualquer que seja sua idade.

No Chile,<sup>4</sup> os trabalhadores braçais se aposentam por idade aos 65 anos, exigindo-se a retirada do emprego. Já os funcionários assalariados se aposentam por tempo de serviço com 35 anos de trabalho.

Na Inglaterra,<sup>4</sup> a idade de aposentadoria é de 65 anos para os homens e de 60 para as mulheres. A pensão por viuvez só é paga se a mulher tiver filho menor de 16 - ou menor de 19 se na escola - ou se tiver mais de 40 anos de idade.

Na Holanda,<sup>4</sup> a aposentadoria é fixa e paga aos 65 anos sem obrigação de deixar de trabalhar e para as viúvas a pensão independe de idade.

Na Alemanha Ocidental,<sup>4</sup> a aposentadoria é paga aos 65 anos sem a prova de inatividade e aos 60 anos se desempregado há mais de um ano. Pode ainda ser paga aos 63 anos com pelo menos 35 anos de contribuições. A pensão de viuvez é paga com qualquer idade mas é bem reduzida para viúvas jovens, sadias e sem crianças para cuidar.

Na Suíça,<sup>4</sup> sem prova de abandono de emprego, os homens se aposentam aos 65 e as mulheres aos 62 anos. Para as viúvas, a pensão só lhes é paga depois dos 40 anos, ou antes, se tiverem filhos menores por criar.

Na Noruega,<sup>4</sup> a idade é 67 anos e atuarialmente aumentada se for postposta para os 70 anos e é paga a todos os residentes do país com mais de 40 anos de residência. Tanto as viúvas como os viúvos fazem jus a pensão.

(4) Ver MYERS, R. Social security. p. 611-624.

Na Suécia<sup>5</sup>, uma aposentadoria fixa é paga a todos os cidadãos acima de 67 anos, mas pode ser antecipada para 63 ou postecipada para 70 com equiva-  
lência atuarial. Outra aposentadoria, ligada ao salário de cada um, também re-  
quer 67 anos de idade. A pensão por viuvez é paga integralmente se houver fi-  
lho com 18 anos ou menos ou se a viúva tiver mais que 50 anos de idade, mas é  
paga parcialmente se sua idade superar 35 anos.

Na União Soviética<sup>5</sup>, 60 para os homens e 55 anos para as mulheres são  
as idades requeridas para a aposentadoria a ser paga com base no salário, mas  
a idade pode ser mais baixa para ocupações penosas, insalubres e perigosas.  
As viúvas com mais de 55 anos ou com um filho com menos de 8 anos, ou com vá-  
rios filhos menores de 15 anos, recebem pensão.

Na Grécia<sup>5</sup>, o benefício da viuvez é pago em qualquer idade, mas a apo-  
sentadoria requer 62 anos para os homens e 57 anos para as mulheres, podendo  
ambos optarem por uma aposentadoria reduzida aos 55 anos.

Em Israel<sup>5</sup>, 65 e 60 anos são respectivamente, os requerimentos para  
concessão de aposentadoria a todos os homens e mulheres do país com exigência  
de inatividade. As viúvas com mais de 50 anos ou com filhos menores de 18 a-  
nos recebem pensão, mas este benefício é reduzido para as idades superiores a  
40 anos.

No Egito<sup>5</sup>, a idade mínima é 58 anos com obrigação de inatividade, mas  
as viúvas recebem pensão em qualquer idade.

Na Índia<sup>5</sup>, paga-se apenas um pecúlio aos 55 anos de idade mediante re-  
tirada do emprego. Não há, assim, pagamentos mensais. Por morte do segurado  
outro pecúlio de valor uniforme é pago à viúva e/ou dependentes.

Na China<sup>5</sup> continental, a idade de aposentadoria é de 60 anos para os  
homens, de 55 anos para as mulheres profissionalizadas e de 50 anos para as  
mulheres de serviço manual. A viuvez é protegida por um pecúlio pago de uma  
só vez, sem pensão mensal.

No Japão<sup>5</sup> há dois sistemas nacionais. O primeiro, para trabalhadores  
na indústria e no comércio, requer 60 anos para os homens, 55 anos para as mu-  
lheres e prova de saída do emprego, para receber a aposentadoria. As viúvas são  
protegidas em qualquer idade. O segundo sistema se aplica a todos os outros  
residentes e a aposentadoria requer 65 anos de idade e 25 anos de contribui-  
ção ou 70 anos mediante uma investigação sobre os meios de sobrevivência do  
requerente. As viúvas só recebem pensão se tiverem mais de 60 anos ou com fi-  
lhos de 15 anos ou menos.

Nas Filipinas<sup>5</sup>, a idade exigida para aposentadoria é de 60 anos, com

(5) Ver MYERS, R. Social security. p. 625-633.

prova de inatividade até os 65 anos. Viúvas e dependentes recebem um pecúli ao invés de pensão.

Na Austrália<sup>6</sup> o sistema se aplica a todos os residentes e é integralmente custeado pelo Estado. Os benefícios são uniformes, independendo dos salários. Para os homens, 65 anos e, para as mulheres, 60 anos, são as idades reclamadas para aposentadoria. As viúvas com mais de 50 anos ou com filhos menores de 16 anos - 21 se na escola - ou com mais de 45, se nessa idade tinham filhos menores sob seus cuidados, recebem pensão.

Na Nova Zelândia<sup>6</sup> o sistema se aproxima do da Austrália. Os benefícios são uniformes e são pagos pelo governo a partir do imposto sobre a renda. A aposentadoria se dá aos 60 anos para homens e mulheres ou aos 55 anos para mulheres não casadas inaptas para o trabalho, mas depende de uma investigação sobre a renda e a riqueza do candidato. A viúva depois dos 50 anos, ou com filhos menores que 16 anos - 18 se na escola - ou se o casamento durou mais de 15 anos, tem direito a uma pensão vitalícia.

Como se vê, há uma ampla maioria para os sistemas que aposentam por idade ao invés de por tempo de serviço. Constata-se também que esse limite de idade é, em média, razoavelmente elevado, parecendo ser mais alto em países desenvolvidos que em nações em vias de desenvolvimento, como forma de tornar mais semelhantes as "esperanças de vida por ocasião da aposentadoria" nos dois tipos de comunidade.

De outra parte, vê-se que o tratamento dado à mulher tende a ser mais igualitário em países economicamente desenvolvidos, onde ela está mais voltada para o mercado de trabalho, e mais liberal e protetor nos países economicamente deprimidos onde a mulher depende mais do casamento para sua segurança econômica.

O Brasil, a despeito de seu estágio de potência emergente, enquadra-se visivelmente neste último grupo no que respeita aos aspectos sob discussão.

### III.2. ALGUNS CONCEITOS ESSENCIAIS

De início, cumpre-nos esclarecer que muitos dos tópicos deste capítulo se colocam na área das ciências jurídicas e sociais, mas nossa visão se fará sempre da perspectiva do pesquisador operacional que se interessa sobretudo por seus aspectos sistêmicos e quantitativos.

(6) Ver MYERS, R. Social security. p. 633-635

Na linguagem internacional, o termo "pensão" é usado "lato sensu" para significar o benefício pago periodicamente para sanar a cessação de receita em caso de velhice, morte, invalidez, doença e outros eventos que impedem a prestação do trabalho. Não há pois a conceituação de "aposentadoria" como um benefício a ser recebido em vida pelo segurado e "pensão", senso restrito, como um benefício a ser recebido por seus descendentes após sua morte. Usaremos neste trabalho um e outro sentido, quando for mais conveniente.

A Organização Internacional do Trabalho,<sup>7</sup> na publicação "New International Conventions on Social Security", veiculada no "Social Security Bulletin" de outubro de 1951, identifica nove riscos básicos para um indivíduo e que devem ser cobertos por um programa previdenciários mínimo de acordo com o seu "Minimum Standards of Social Security". Enfocando esses riscos pelo lado dos programas e dos benefícios a serem pagos quando da ocorrência desses eventos, teremos:

- Riscos de Longo Prazos ou Vitalícios:

- . pensão por velhice;
- . pensão por morte;
- . pensão por invalidez.

- Riscos de Curto Prazo ou Transitórios:

- . pensão-desemprego;
- . pensão-doença;
- . assistência médica comum;
- . pensão-maternidade;
- . assistência médica à maternidade.

- Risco Misto:

- . benefícios do acidente de trabalho.

Seguro Social é um termo largamente empregado nos meios previdenciários e tem sua origem por analogia aos seguros privados, onde cada um recebe seu benefício de acordo com sua contribuição. Estes, no entanto, são voluntários, envolvem um "contrato" bilateral com a explicitação dos direitos e obrigações de ambas as partes e seus benefícios não podem deixar de ser pagos se as condições particulares do contrato forem preenchidas, independentemente de qualquer outra restrição superveniente.

No seguro social, ao contrário, a contribuição é obrigatória, não há contrato escrito mas uma inscrição de adesão a um plano estatutário definido e os benefícios podem eventualmente deixar de ser pagos em condições especiais tais como deportação por traição à pátria ou expatriação por atividades

(7) Ver MYERS, Robert. New international convention on social security. Social Security Bulletin. oct. 1951.

subversivas, dentre outras da espécie.

Seguridade Social é outro conceito em ascensão no vocabulário previdenciário e difere de Seguro Social por duas razões principais:

- o montante dos benefícios não tem necessariamente uma ligação com o montante das contribuições, mas se dá a cada um de acordo com suas necessidades e se cobra de cada um conforme suas possibilidades;
- reune-se sob esse conceito o que se entende por Previdência Social e por Assistência Social, a seguir descritas.

A Assistência Social abrange todos os programas governamentais visando ao bem-estar coletivo, atendendo a grupos de pessoas carentes e financiado exclusivamente pelo Estado. São exemplos de assistência social no Brasil os trabalhos desenvolvidos pela LBA e pela FUNABEM.

Previdência Social, por outra parte, é um sistema coletivo de partilhamento de risco que reúne compulsoriamente um subconjunto da população global, formado pelos segurados nele inscritos e por seus dependentes e que paga benefícios em dinheiro e presta serviços através de um plano perfeitamente definido e adequadamente financiado.

Há, a respeito, uma definição bastante completa preparada pelo "Committee on Social Insurance Terminology of the Commission on Insurance Terminology of the American Risk and Insurance Association"<sup>8</sup>, que passaremos a resumir.

Previdência Social é um esquema de associação de riscos que se transferem a uma organização quase sempre governamental que se obriga por lei a proporcionar benefícios pecuniários e serviços assistenciais em favor de beneficiários em caso de certas perdas predeterminadas e sob as seguintes condições:

- 1 - a participação é obrigatória por lei em praticamente todas as situações individuais;
- 2 - o direito aos benefícios deriva do fato de ser beneficiário e não da prova de carência de recursos financeiros para sanar a perda em questão;
- 3 - os benefícios são determinados por lei e definidos num plano mas não são necessariamente proporcionais às contribuições e tendem a favorecer as pequenas rendas e as grandes famílias num processo de redistribuição de renda;
- 4 - os custos do plano de benefícios são suportados sobretudo por seus contribuintes, empregados e/ou empregadores; e

(8) OSLER, Robert W. & BICKLEY, John S. Glossary of insurance terms. Santa Monica, CA, Insurors Press, Inc., 1972.

5 - o sistema é administrado ou pelo menos supervisionado pelo governo e não se cinge apenas a seus funcionários.

A previdência social no Brasil, tal qual está estruturada no SINPAS, é mais um sistema de seguridade social que de simples previdência.

Uma característica marcante desses sistemas é a participação compulsória de grandes camadas da população de todos os níveis de renda. A "rationale" para essa compulsoriedade estaria desdobrada em dois aspectos:

- à luz do interesse social, ninguém tem o direito de decidir se pode ou não, de forma exclusiva, bancar por si próprio seu seguro social; os que falhassem estariam a mercê da caridade pública ou da assistência do Estado, exatamente o constrangimento que o sistema pretende evitar;
- a não compulsoriedade inviabilizaria o sistema pela criação de três vetores seletivos que deixariam no sistema somente os que representam altos riscos determinando assim altos custos que essa categoria não poderia suportar. Os muito ricos e os muito pobres tenderiam a ficar de fora, estes porque o dinheiro das contribuições lhes seria mais útil no presente, transferindo os problemas presentes e futuros para o Estado. As pessoas abastadas, por seu turno, não sentiriam atraídas pela segurança oferecida pelo sistema aos custos que lhe são impostos.

Um outro conceito parêlo de Previdência Social é o da Previdência Privada ou Complementar, que traduz o elenco de organizações com ou sem fim lucrativo que, mediante a cobrança de contribuições, oferece benefícios que se somam àqueles ofertados pela previdência social.

A fim de bem entender a necessidade da previdência complementar, mister se faz discorrer sobre os conceitos antagônicos de Adequação Social e Equidade Individual e que surgem sempre que o beneficiário é chamado a contribuir para o custeio do plano de benefícios.

A Adequação Social significa a qualidade de um plano que vê a comunidade como um todo e a protege dos principais riscos a que está sujeita, dentro de uma base uniforme de atendimento, em consonância com as necessidades dos beneficiários a serem satisfeitas num padrão mínimo de desejabilidade social "vis a vis" de seus custos econômicos e inteiramente indiferente ao montante das contribuições individuais de seus segurados.

A Equidade Individual, ao contrário, estabelece que os benefícios de

vem guardar relação com as contribuições já que, sob sua ótica, não seria justo que um grupo dos maiores pagantes subsidiasse os benefícios dos menores pagantes.

A adequação social é pois uma característica dos planos sociais nos quais o interesse público supera as conveniências particulares. Um tal plano não subsistiria às pressões de uma política de equidade individual sem uma limitação dos tetos de contribuição e sem altas taxas de incidência sobre a base impositiva.

A equidade individual, a seu turno, é um atributo distintivo dos planos privados que não atrairiam participantes se a adequação social fosse nelles praticada.

São visíveis agora as razões para a existência da Previdência Complementar que se apoiando fortemente no conceito de equidade individual corrige para os segurados de mais altas rendas as distorções praticadas pela Previdência Social, que, sob o comando mais ou menos intenso da adequação social, paga-lhes benefícios muito abaixo dos que são necessários à manutenção do padrão de vida, de hábito, desfrutado.

Se quiséssemos eleger um outro ponto nitidamente diferenciador dos dois tipos de previdência iríamos encontrá-lo na forma como são obtidos os recursos correntes para pagamento das obrigações correntes e na maneira como são provisionados os recursos para enfrentar as obrigações futuras.

Os sistemas sociais apóiam-se numa ampla massa segurada que diversifica bem o risco e que quase sempre se mantém em expansão. Ambos os fatos permitem que as obrigações correntes sejam pagas com as contribuições correntes sem qualquer preocupação com a contabilização das obrigações futuras nem com a conseqüente formação de ativos para enfrentá-las. Este método é denominado de "pay as you go" e à semelhança de um "consórcio" mantém o sistema equilibrado à medida em que os benefícios equivalem às contribuições.

Os sistemas privados, ao contrário, são "fundados", isto é, constituem em ativos em montante suficiente para cobrir o "valor presente de esperança matemática líquida dos benefícios futuros" fazendo com que o plano possa desincumbir-se de suas obrigações mesmo sem a adição de novos participantes.

Um sistema previdenciário não é uma caixa mágica de onde brota riqueza para assegurar o bem-estar de seus participantes. A previdência social é um sistema de transferência de rendas no presente entre quem ganha mais e quem ganha menos ou entre quem precisa menos e quem precisa mais. As insuficiências,

quando ocorrem, costumam ser cobertas pelo Estado. Já a previdência privada é um sistema de transferências de rendas entre o presente e o futuro, contabilizadas isoladamente para cada participante. As insuficiências, ou déficits atuariais, se ocorrem, devem ser cobertos pelos próprios participantes através de maiores contribuições.

Os ativos constituídos através da "fundação" desses encargos têm como contrapartida no Passivo as chamadas Reservas Técnicas que também se formam nas companhias de seguros privados baseadas no mesmo princípio atuarial.

Podemos distinguir, no entanto, três tipos de regimes financeiros num plano previdenciário qualquer:

- 1) De Repartição Simples: o que fixa taxas de custeio dos benefícios visando à produção no exercício de receitas equivalentes às despesas nele previstas. Essas taxas devem ser revistas a cada três anos e reajustadas se necessário. Requer um pulmão de caixa, mas não torna obrigatória a constituição de reservas, e financia benefícios cuja ocorrência, para uma dada massa de participantes, se estabiliza com o tempo segundo distribuições de probabilidade conhecidas como, por exemplo, auxílio-doença, auxílio-natalidade, salário-família, salário-natalidade e auxílio-funeral. Seu nome significa que as despesas são repartidas entre os participantes e o arranjo financeiro se assemelha ao "pay as you go" usado pelas Associações de Assistência Médica e pela Previdência Social;
- 2) De Capitais de Cobertura: o que fixa taxas de custeio, reajustáveis anualmente, buscando gerar no exercício receitas equivalentes aos fundos integralmente garantidores dos benefícios iniciados nesse mesmo exercício, mesmo que se estendam por muitos anos no futuro. Significa uma fundação antecipada dos dispêndios futuros e implica na constituição de "reservas de benefícios concedidos" que a cada ano deve equivaler ao valor presente atuarial das obrigações, líquido do eventual valor presente atuarial dos haveres a receber dos que estão em gozo dos benefícios. Financia dispêndios como, por exemplo, pensão, auxílio-reclusão e pecúlio. Seu nome significa que, a cada ano, deve haver aporte efetivo de recursos para, capitalizadamente, assegurar o pagamento de todos os benefícios formalmente concedidos nesse exercício. Este arranjo financeiro poderia ser rotulado de "fund as you go" e é usado na

Previdência Complementar;

- 3) De Capitalização Geral: o que fixa taxas de custeio uniformes, revistas anualmente, capazes de gerar receitas necessárias ao ajustamento do fundo garantidor de todos os benefícios já concedidos e daqueles a conceder já creditados aos participantes. Representa uma fundação antecipada dos dispêndios futuros e impõe a constituição de "reservas de benefícios concedidos" e "reservas de benefícios a conceder" que, a cada ano, somadas, devem equivaler ao saldo do valor presente atuarial das obrigações da entidade para com seus participantes, líquido do valor presente atuarial dos haveres da entidade face a esses mesmos participantes e à patrocinadora, e relativos às suas contribuições futuras. Financia basicamente as aposentadorias de qualquer natureza e seu nome deriva do processo de capitalização dos fundos existentes que, produzindo juros reais, acopla-se às receitas correntes na tarefa de financiar os benefícios contratados. Esse arranjo financeiro poderia chamar-se de "fund as you credit" e é igualmente usado pela Previdência Complementar.

Nos planos privados é administrativamente desejável desagregar, no Balanço Patrimonial, as reservas relativas aos benefícios de longo prazo em duas parcelas:

- a de "compromissos especiais" relativos a participantes que não aportaram a totalidade das contribuições devidas por terem prerrogativas especiais como, por exemplo, a de participante fundador, isto é, existente à época de sua constituição para um grupo fechado; esses compromissos especiais, via de regra, representam "déficits atuariais" a serem cobertos de alguma forma no futuro se o plano pretende ser estável;
- a de "compromissos normais" concernentes a participantes que aderiram ao plano segundo as regras atuariais definidas para assegurar sua estabilidade e, como tal, devem estar permanentemente fundadas.

Em qualquer tipo de plano, cada participante pode ser representado por uma conta T de natureza atuarial, na qual são registrados por seus valores determinísticos as contribuições e os benefícios efetivamente pagos e por seus valores probabilísticos as contribuições e os benefícios futuros.

Na análise individual essas contas não têm por que serem equilibradas, surgindo indivíduos com saldo credor, já que são penalizados mais do que são beneficiados, e outros com saldo devedor, por razão inversa.

Na visão global, contudo, o somatório desses saldos deve ser nulo ou devedor, indicando que o plano tem igual ou mais ativo que passivo atuarial, se é que se trata de um plano solvente.

### III.3. A PREVIDÊNCIA SOCIAL NO BRASIL

Retomando a discussão sobre o SINPAS, trataremos de aprofundar um pouco mais o conhecimento da realidade previdenciária no país, sem perder de vista o caráter instrumental que tal análise tem para esta dissertação e o limitado espaço de que dispomos para sistematizar uma vasta legislação e respectiva regulamentação.

Num primeiro desdobramento vamos encontrar a Previdência Social Urbana - PSU e a Previdência Social Rural - PSR como já mencionado linhas atrás. A PSU pode ser decomposta em Normal e Especial, sendo que a primeira, como o nome indica, abrange as categorias profissionais que não apresentam problemas previdenciários inusitados, ao passo que a Especial congrega os aeronautas, os jornalistas profissionais, os jogadores de futebol, os ferroviários servidores públicos ou autárquicos e por fim os septuagenários e os inválidos não regularmente assegurados.

A PSR ou PRORURAL cuida de assistir o trabalhador rural, entendido este como todo indivíduo que presta serviço de natureza rural a empregador mediante remuneração de qualquer espécie.

Entretanto, nem todo empregado rural é trabalhador rural, filiando-se nesse caso diretamente à PSU. Estão nesse caso:

- o empregado de nível universitário de empresa rural;
- o empregado de loja ou de escritório de empresa rural;
- o motorista ou tratorista com habilitação profissional que presta serviço a empresa rural.

São, no entanto, beneficiários do PRORURAL os seguintes trabalhadores:

- o pescador que trabalha sozinho ou em regime de economia familiar;
- o marisqueiro, catador de algas e crustáceos, sem utilização de

embarcações;

- o pescador que utiliza barcos de pequeno porte, até duas toneladas;
- o garimpeiro autônomo que se dedica individualmente ao garimpo, faiscação e cata de minerais;
- o empregado de olaria rural com processos rudimentares;
- o rurícola dirigente de entidade de classe rural;
- os safristas e empregados em setor agrário cujas culturas não produzem matéria-prima industrial;
- o produtor, proprietário ou não, que em regime de economia familiar e sem empregado, desenvolve atividade rural para subsistência do grupo e para comércio do excedente;
- outros casos de direitos já adquiridos.

Nosso interesse pela Previdência Social Rural é limitado, posto que a empresa rural não é meio próprio para o florescimento das entidades fechadas de previdência privada, razão por que dela não mais nos ocuparemos de ora em diante.

Dentre as inúmeras peças legais que disciplinam o funcionamento da Previdência Social Urbana e da Previdência Complementar, mencionaremos as mais recentes e importantes sem a preocupação de ser exaustivo nem de tentar resumir-lhe o conteúdo dada a amplitude da matéria que encerram, mas atribuindo-lhes um nome já consagrado ou pelo que de mais significativo nos parece que apresentam:

- 1 - Lei Orgânica da Previdência Social (LOPS) - Lei nº 3.807, de 26.08.1960;
- 2 - Leis do Salário-Família - Lei nº 4.266, de 03.10.1963, e Lei nº 5.559, de 11.12.1968;
- 3 - Atos de Pensão Especial - Ato Institucional nº 1, de 09.04.1964, Ato Institucional nº 2, de 27.10.1965, e Ato Institucional nº 5, de 13.12.1968;
- 4 - Lei do Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) - Lei nº 5.107, de 31.12.1966;
- 5 - Lei do Empregado Doméstico - Lei nº 5.859, de 11.12.1972;
- 6 - Lei da Companheira como Dependente de 1ª classe - Lei nº 5.890, de 08.06.1973;
- 7 - Regulamento do Regime da Previdência Social (RRPS) - Decreto nº 72.771, de 06.09.1973;

- 8 - Lei de Amparo à Velhice e aos Inválidos - Lei nº 6.179, de 11.12.1974;
- 9 - Leis do Salário-Maternidade - Lei nº 6.136, de 07.11.1974, e Lei nº 6.332, de 18.05.1976;
- 10 - Lei do Reajustamento Coletivo do Salário de Categorias Profissionais - Lei nº 6.147, de 29.11.1974;
- 11 - Lei da Descaracterização do Salário Mínimo com Instrumento de Correção Monetária - Lei nº 6.205, de 29.04.1975;
- 12 - Leis da Contagem Recíproca de Tempo de Serviço - Lei nº 6.226, de 14.07.1975, e Lei nº 6.864, de 01.12.1980;
- 13 - Lei do Pecúlio - Lei nº 6.243, de 24.09.1975;
- 14 - Consolidação das Leis da Previdência Social (CLPS) - Decreto nº 77.077, de 24.01.1976;
- 15 - Lei do Seguro de Acidentes do Trabalho Urbano - Lei nº 6.367, de 19.10.1976;
- 16 - Leis da Previdência Privada - Lei nº 6.435, de 15.07.1977, e Lei nº 6.462, de 09.11.1977;
- 17 - Lei da Criação do SINPAS e da Extinção do IPASE - Lei nº 6.439, de 01.09.1977;
- 18 - Decretos sobre as Entidades Fechadas de Previdência Privada - Decreto 81.240, de 20.01.1978, e Decreto 82.325, de 27.09.1978;
- 19 - Resolução sobre Reservas Técnicas das Entidades de Previdência Privada - Resolução MF/BCB 460, de 23.02.1978, e Resolução MF/BCB 472, de 25.04.1978;
- 20 - Resolução sobre o Funcionamento das Entidades Fechadas de Previdência Privada - Resolução MPAS/CPC 01, de 09.10.1978, Resolução MPAS/CPC 02, de 16.10.1978, e Resolução MPAS/CPC 04, de 20.02.1979;
- 21 - Regulamento de Custeio da Previdência Social (RCPS) - Decreto nº 83.081, de 24.01.1979;
- 22 - Regulamento dos Benefícios da Previdência Social (RBPS) - Decreto 83.080, de 24.01.1979;
- 23 - Lei dos Segurados Facultativos - Lei nº 6696, de 08.10.1979;
- 24 - Leis da Nova Política Salarial - Lei nº 6.708, de 30.10.1979, e Lei nº 6.886, de 10.12.1980;

- 25 - A Lei do Novo Limite Máximo do Salário-de-Contribuição - Lei nº 6.950, de 04.11.1981;
- 26 - Decreto sobre Novas Alíquotas de Contribuição - Decreto-Lei nº 1910, de 29.12.1981;
- 27 - Resolução sobre Normas de Aplicação de Recursos Garantidores de Reservas em Entidades Fechadas de Previdência Privada - Resolução nº 794, de 11.01.83, do Conselho Monetário Nacional;
- 28 - Decreto da Unificação do Salário Mínimo - Decreto nº 89.589, de 26.04.84;
- 29 - Resolução sobre Limites de Aplicação das EFPPs - Resolução nº 964, de 12.09.84, do Conselho Monetário Nacional; e
- 30 - Resolução sobre Limites de Aplicação das EFPPs - Resolução nº 1.025, de 05.06.85, do Conselho Monetário Nacional.

#### III.4. DOS SEGURADOS DA PREVIDÊNCIA SOCIAL URBANA

Excetuando-se os trabalhadores rurais, os servidores militares da União e os servidores civis e militares dos Estados, Municípios e Territórios, que estão filiados a outros regimes previdenciários, todos os que exercerem qualquer atividade remunerada, permanente ou transitória, com ou sem vínculo de emprego, estão em condições de se vincularem, como segurados, à PSU.

Essa filiação é obrigatória para as seguintes situações:

- Como Empregados:

- . os que trabalhem no país em empresas industriais, comerciais e de prestação de serviços;
- . os que trabalhem no país nos escritórios e lojas de empresas rurais ou na condição de técnico de nível superior, motorista, piloto ou tratorista habilitado;
- . os que trabalhem na residência de famílias desenvolvendo atividades não lucrativas, na condição de empregado doméstico, motorista, piloto, jardineiro, caseiro e outros da espécie;
- . os brasileiros que trabalhem no exterior em sucursais de empresas nacionais;

- . os brasileiros que trabalhem no exterior em entidades oficiais brasileiras ou internacionais das quais o Brasil participe;
  - . os brasileiros que, no Brasil, trabalhem para missões diplomáticas ou organismos estrangeiros;
  - . os que trabalhem nas entidades integrantes do próprio SINPAS;
  - . o servidor de Ordem, Conselho ou outra entidade de controle do exercício profissional;
  - . o serventuário da Justiça quando não filiado a regime próprio e obrigatório de previdência;
  - . os servidores civis, públicos e autárquicos da União, Distrito Federal e territórios que contribuam para o extinto IPASE;
  - . os funcionários de Sociedades de Economia Mista, Empresas Públicas ou Fundações de Direito Público;
  - . os funcionários de Fundações de Direito Privado, Associações, Sociedades Civis e qualquer pessoa de direito; e
  - . os empregados sob qualquer condição, não incluídos acima.
- Como Empregadores:
- . os titulares de firma individual;
  - . os diretores e membros de conselho de administração de sociedades anônimas;
  - . os sócios com qualquer titulação de toda e qualquer empresa urbana ou rural que dela recebam "pro labore";
  - . todos os demais cidadãos que, desenvolvendo atividades com ou sem fins lucrativos, empreguem pessoas e invistam capitais.
- Como Autônomos:
- . os ministros de confissão religiosa e membros de ordens religiosas por elas mantidos e que tinham menos de 60 anos em 09.10.1979;
  - . os que sem profissão definida ou estável prestem serviços como biscateiros mediante recibo;
  - . os estivadores, conferentes e assemelhados anteriormente integrantes da extinta categoria dos "avulsos";
  - . os profissionais liberais e Estagiários de Advogado que trabalhem por conta própria;
  - . os proprietários de veículos habilitados profissionalmente e os motoristas e auxiliares de condução desses veículos;
  - . os colaboradores de empresas jornalísticas;

- . os tripulantes de barcos de pesca que não possuam carta e os pescadores engajados com "parte" ou "quinhão no frete";
- . os feirantes-comerciantes que comprem e revendam produtos hortifrutigrangeiros;
- . os barbeiros, manicures e assemelhados quando trabalhem por conta própria;
- . os pilotos que, sem relação de emprego, operem aeronave por conta própria;
- . os artistas que, sem relação de emprego, se exibam por conta própria;
- . os trabalhadores temporários que prestem serviço a empresa sob essa condição, sem vínculo empregatício;
- . os corretores de livros que trabalhem sem vínculo de emprego;
- . os vendedores de bilhetes de loteria, jornais e revistas, sem vínculo de emprego;
- . os membros de Conselho Fiscal de sociedade anônima;
- . os trabalhadores associados a cooperativas de trabalho;
- . os pescadores regularmente inscritos como autônomos no INPS em 06.12.1972;
- . os garimpeiros que em 10.01.1975 estavam regularmente inscritos no INPS como trabalhador autônomo;
- . os funcionários de representações e organismos oficiais estrangeiros que não disponham de outro sistema previdenciário;
- . todos os demais profissionais que, não incluídos acima, exerçam habitualmente e por conta própria atividade profissional remunerada ou prestem a uma ou mais empresas serviços de caráter eventual.

A filiação à PSU é, no entanto, facultativa para os ministros de confissão religiosa ou membros de congregações ou ordens religiosas que tinham 60 anos completos ou mais em 09.10.1979.

A contribuição para a PSU é, por sua vez, facultativa para aquele que deixando de ser segurado obrigatório pela cessação da condição que a determinava, deseja manter a condição de segurado mediante contribuição em dobro. Isto ocorre com os desempregados e os licenciados sem vencimentos.

Uma outra classificação poderia dividir os segurados da PSU em duas categorias:

- Os contribuintes individuais, compostos pelos empregados domésticos, pelos trabalhadores autônomos e pelos empregadores, dentre os obrigatórios, e pelos segurados facultativos; e
- Os contribuintes coletivos, abrangendo todos os que têm vínculo em pregatício com empresas, às quais incumbe recolher suas contribuições para o sistema.

### III.5. DOS DEPENDENTES

São dependentes dos segurados aquelas pessoas por ele economicamente assistidas sem o que não teriam condições de sobrevivência dentro de um padrão de vida socialmente aceitável.

Em conjunto, segurados e dependentes formam o corpo de beneficiários da PSU com direitos aos benefícios diferenciados que adiante se explica.

Os dependentes são agrupados em quatro classes para fins do estabelecimento de uma hierarquia ou direito de precedência aos benefícios do sistema. São dependentes de:

- Primeira Classe:
  - . a esposa que vive regularmente sob o teto do casal;
  - . a esposa desquitada com direito a alimentos;
  - . a esposa que, acompanhada dos filhos do segurado, tenha abandonado o lar há mais de cinco anos;
  - . o marido, se inválido;
  - . a companheira quando mantida há mais de cinco anos;
  - . a companheira quando mãe de filho de segurado;
  - . os filhos sob qualquer condição (legítimos, legitimados, ilegítimos naturais, ilegítimos espúrios e adotivos) menores de 18 anos ou inválidos se homens, menores de 21 ou inválidos se mulheres solteiras;
  - . a mãe e o pai inválido, se não existem filhos menores e por manifestação escrita do segurado; e
  - . os enteados, e por decisão judicial, os tutelados e menores sob guarda do segurado que, à semelhança dos filhos, dele dependem economicamente e que sejam contemplados com declaração escrita nesse sentido.

- Segunda Classe:

- . uma sô pessoa do sexo masculino com menos de 18 anos ou mais de 60 anos ou inválido, dependente econômico de segurado sem dependentes de 1.ª classe; ou
- . uma sô pessoa do sexo feminino de qualquer idade e nas mesmas condições acima.

- Terceira Classe:

- . a mãe e o pai inválido se não incluídos na primeira classe.

- Quarta Classe:

- . os irmãos menores de 18 anos ou inválidos; e
- . as irmãs solteiras menores de 21 anos ou inválidas.

Afora a assistência médica, do mesmo nível prestado ao segurado, os dependentes sô fazem jus aos seguintes benefícios em dinheiro:

- pensão por morte do segurado;
- auxílio para o funeral do segurado;
- auxílio pela reclusão do segurado;
- pecúlio por afastamento de segurado com mais de 60 anos do regime do INPS; e
- pecúlio por invalidez ou morte de segurado com menos de 12 meses de contribuição.

### III.6. OUTROS BENEFICIÁRIOS DA PREVIDÊNCIA SOCIAL URBANA

A Lei de Amparo à Velhice e aos Inválidos incluiu como beneficiários da PSU as pessoas que além de preencherem "cumulativamente" as seguintes condições:

- ser maior de 70 anos ou ser permanentemente incapacitado para o trabalho;
- não ser dependente econômico de outra pessoa;
- não exercer qualquer atividade remunerada; e
- não ter renda de qualquer espécie superior à metade do maior salário-mínimo do país,

possam preencher ainda uma das seguintes condições:

- ter contribuído para a PSU ou PSR por doze meses ou mais, consecutivos ou não;

- ter-se filiado ao INPS com mais de 60 anos, o que implica em direitos limitados;
- ter exercido por cinco anos ou mais, sem filiação à previdência, a atividade que àquela época não implicava em obrigatoriedade de contribuição mas que hoje se inclui nessa condição.

Além da assistência médica padrão prestada pelo INAMPS, essas pessoas têm direito a uma Renda Mensal Vitalícia no montante do maior salário-mínimo do país,<sup>9</sup> vedada qualquer acumulação de outros benefícios, exceto o Pecúlio se for o caso.

### III.7. DO CUSTEIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL

Antes de listar as diversas fontes de receitas da Previdência Social vamos discorrer sobre um conceito vital nesta área, que é o chamado Salário-de-Contribuição e que serve de base de cálculo sobre a qual se aplica a maioria das percentagens adiante comentadas.

Restrito em qualquer caso ao limite mínimo de um salário-mínimo regional e ao limite máximo de vinte vezes o maior salário-mínimo do país, o salário-de-contribuição se desdobra em três categorias a saber:

- "remuneração efetiva" para os segurados empregados;
- "salário-base" para os segurados:
  - . autônomos;
  - . facultativos;
  - . empregadores;
  - . domésticos;
  - . funcionários do SINPAS;
  - . segurados do extinto IPASE; e
  - . outros casos, e
- "salário-declarado" do contribuinte em dobro.

Integram a "remuneração efetiva" do empregado as seguintes parcelas:

- as importâncias recebidas a título de salários, ordenados, vencimentos, adicionais, quinquênios, abonos, prorrogações, etc.;
- a gratificação anual inclusive a da participação dos lucros;
- o valor total das diárias quando exceder a 50% do salário regular;
- excesso de salário-família com respeito ao nível da lei;
- o montante do aviso-prévio;

(9) O Decreto nº 89.589, de 26.04.84, adotou um único salário-mínimo para todo o território nacional. Assim sendo, ao longo deste texto leia-se "salário-mínimo" onde se lê "maior salário-mínimo do país", que também se abre via por MS-MP.

- remuneração relativa a férias;
- abono de férias quando excedente a 20 dias de salários;
- o salário-maternidade; e
- outras importâncias previstas no regimento interno da empresa e não enquadráveis nas exceções previstas na regulamentação do sistema.

Não compõem o salário-de-contribuição do empregado:

- o 13º mês;
- o salário-família;
- o valor do transporte, alimentação e habitação pagos pela empresa para quem trabalha longe de seu domicílio;
- o terço do valor das férias transformado em abono pecuniário de férias;
- o abono ou gratificação de férias que não ultrapasse 20 dias de trabalho;
- o valor dos alimentos fornecidos ao abrigo dos programas governamentais de nutrição do trabalhador;
- diversos outros casos previstos pela PSU.

O salário de contribuição dos trabalhadores autônomos, empregadores e segurados facultativos está determinado por uma "escala de salário-base" que divide o intervalo que vai de um salário-mínimo a vinte vezes o salário-mínimo do país em dez "classes". A cada uma destas se atribui um valor para o "salário-base" de contribuição que é crescente com o "tempo de filiação do seguro". A tabela em vigor tem a seguinte estrutura:

QUADRO III.1

ESCALA DE SALÁRIO-BASE PARA AUTÔNOMOS, EMPREGADORES E FACULTATIVOS

CLASSE	ANOS DE FILIAÇÃO	NÚMERO DE VEZES O SALÁRIO MÍNIMO
1	0 ————— 1	1 SM
2	1 ————— 2	2 SM
3	2 ————— 3	3 SM
4	3 ————— 5	5 SM
5	5 ————— 7	7 SM
6	7 ————— 10	10 SM
7	10 ————— 15	12 SM
8	15 ————— 20	15 SM
9	20 ————— 25	18 SM
10	25 ————— w	20 SM

Os interstícios, tempo de permanência em cada classe, não são constantes, mas crescem entre a primeira classe, 1 ano, e a nona classe, quando é de 5 anos. Os incrementos das percentagens do SM são crescentes na primeira metade da tabela e decrescentes na segunda metade. O maior incremento é de 15% na quinta e na sétima classes.

A progressão entre classes não é obrigatória, valendo essa escala como tetos de contribuição em função do tempo de filiação. Os profissionais liberais, no entanto, já ingressam na segunda classe ou de 2 SM.

Os empregados domésticos, entretanto, não se enquadram nessa escala. Seu salário-de-contribuição é o que está anotado em sua carteira, não podendo ser inferior a um nem superior a três salários-mínimos regionais.

O salário-base dos funcionários civis da União e dos funcionários das entidades integrantes do SINPAS corresponde à soma das seguintes parcelas:

- vencimento do cargo;
- gratificação por tempo de serviço;
- gratificação de função;
- gratificação de raios x; e
- diferença de vencimentos recebida a título de vantagem pessoal.

O "salário-declarado" do contribuinte em dobro é escolhido por este no intervalo que vai de um salário-mínimo regional ao montante de seu último salário-de-contribuição quando da interrupção de sua atividade.

O salário-de-contribuição do servidor federal aposentado por força dos Atos Institucionais é o valor de sua aposentadoria. Já o menor-aprendiz tem por salário-de-contribuição mínimo metade ou dois terços do salário-mínimo, respectivamente, para as primeira e segunda fases de seu aprendizado.

Os fluxos de recursos que ingressam nos cofres da Previdência Social têm basicamente quatro origens:

- contribuições dos segurados;
- contribuições das empresas;
- contribuições da União;
- outras receitas.

O Decreto-Lei nº 1910, de 29.12.1982, majorou as alíquotas de contribuição para segurados a partir de aposentados e pensionistas. Segundo as informações de que dispomos, o custeio da Previdência se faz como a seguir se explica.

## III.7.1 - AS CONTRIBUIÇÕES DOS SEGURADOS

Os Empregados em Empresas Urbanas e Rurais pagam taxas diferenciadas que são crescentes com o nível do salário-de-contribuição, como mostra o Quadro abaixo:

QUADRO III.2  
ALÍQUOTAS DE CONTRIBUIÇÃO DOS EMPREGADOS

FAIXAS DE SALÁRIOS EXPRESSAS EM SALÁRIOS-MÍNIMOS	CONTRIBUIÇÕES (%)
1 ————— 3	8,50
3 ————— 5	8,75
5 ————— 10	9,00
10 ————— 15	9,50
15 ————— 20	10,00

Os Trabalhadores Autônomos e os Segurados Facultativos recolhem 19,2% do salário-base apurado de acordo com o Quadro III.1.

O Segurado Empregador contribui com uma taxa variável de 8,5% a 10%, segundo o respectivo salário-base, cabendo à empresa a contribuição de 10% sobre o total do pró-labore.

Os Contribuintes em Dobro, por sua vez, recolhem 19,2% de seu salário-declarado.

Os Empregados Domésticos contribuem com 8,5% do salário inscrito em sua Carteira de Trabalho, limitado que está a três salários mínimos.

Os Funcionários das Entidades do SINPAS contribuem com:

- 6% do salário-base, para atendimento das prestações previdenciárias;
- adicional de 1,2% do mesmo salário-base, limitado ao teto imposto pela Lei nº 6.332, de 18,05.1976; e
- 2% do mesmo salário-base de contribuição para custeio da assistência patronal.

Os Servidores Públicos Federais Estatutários e Autárquicos contribuem com:

- 6% do salário-base antes definido; e

- 1,2% do mesmo salário-base respeitado o limite fixado pela Lei nº 6.332, de 18.05.1976; ou
- 4,8% do salário-de-contribuição como definido para os empregados em geral.

Os Servidores Aposentados por força de Ato Institucional contribuem em consonância com o Quadro III.2, sendo o salário-de-contribuição o montante mensal de sua aposentadoria.

Os Aposentados em Geral contribuem, para custeio da assistência médica, de forma estratificada, com as percentagens constantes do Quadro III.3 e que incidem sobre os valores dos benefícios que marginalmente pertencem às classes ali mencionadas.

QUADRO III.3  
DA CONTRIBUIÇÃO DOS APOSENTADOS

FAIXAS MARGINAIS DE BENEFÍCIOS EXPRESSAS EM SALÁRIO-MÍNIMOS		CONTRIBUIÇÕES (%)
1	3	3,0
3	5	3,5
5	10	4,0
10	15	4,5
15		5,0

Os pensionistas também passaram a contribuir para o custeio da assistência médica, mas com uma alíquota fixa de 3% sobre o montante dos respectivos benefícios.

### III.7.2 - AS CONTRIBUIÇÕES DAS EMPRESAS EM GERAL

A empresa brasileira faz outros dispêndios de natureza trabalhista em favor de diversas entidades governamentais e classistas, como mostraremos em outra seção deste trabalho, mas, no que concerne ao Sistema de Previdência Social Brasileiro, suas contribuições seriam as que a seguir expomos.

As Empresas Urbanas e as Empresas Rurais (estas sô nos casos discuti dos linhas acima) contribuem com:

- 10% da folha de salários-de-contribuição de seus empregados e trabalhadores avulsos;
- 10% do somatório das remunerações de seus diretores, membros do conselho de administração e fiscal, se sociedades anônimas, de seus sócios-gerentes, sócios-cotistas, sócios-solidários, sócios-de-indústria, se estruturadas sob outras formas de sociedade mercantil, e de seu titular, se firma individual;
- 10% sobre o que exceder o salário-base do trabalhador autônomo cujo trabalho eventualmente utilize;
- 4% sobre a folha de salários-de-contribuição de seus empregados e trabalhadores avulsos para custeio do salário-família;
- 1,5% sobre a mesma folha para custeio do abono anual;
- 0,3% sobre a folha de salário-de-contribuição de seus empregados regulares para custeio do salário-maternidade;
- 0,4% ou 1,2% ou 2,5% sobre a folha de salários de contribuição dos empregados regulares e avulsos para complemento do custeio dos benefícios devidos por acidentes de trabalho.

Os Órgãos e Entidades Públicos e Autárquicos, para seus funcionários ativos e no âmbito da Previdência Social Urbana, contribuem com:

- 1,2% da folha dos salários-base antes definidos e observado o mesmo limite da Lei nº 6.332, já comentado; ou
- 4,8% da folha dos salários-de-contribuição na sua acepção geral.

Esses mesmos Órgãos e Entidades, e no que respeita aos servidores aposentados por força dos Atos Institucionais nºs 1, 2 e 5, contribuem com:

- quantia igual à contribuição desses servidores; e
- 4%, 1,5% e 0,3% sobre a folha de seus salários-de-contribuição para custeio, respectivamente do salário-família, abono anual e do salário-maternidade.

As Entidades Integrantes do SINPAS aportam:

- 1,2% da folha dos salários-de-contribuição de seus servidores para custeio da previdência básica; e
- 3% da sua dotação orçamentária destinada a pessoal para custeio da assistência patronal.

As Associações Esportivas, entendidas estas como as filiadas do Sis-

tema Desportivo Nacional, têm as mesmas obrigações das empresas em geral, exceto para a parcela de 10% da folha de salários-de-contribuição de seus empregados, inclusive atletas, que se transforma num recolhimento especial de 5% da renda líquida que lhes couber nos espetáculos desportivos de que participem em território nacional.

O Empregador Doméstico, para fins de contribuição previdenciária, se equipara às empresas, naquela parcela substantiva de 10% sobre a folha dos salários-de-contribuição de seus empregados, mas está isento de qualquer outra contribuição, inclusive a que se relaciona aos acidentes de trabalho.

### III.7.3 - AS CONTRIBUIÇÕES DA UNIÃO

Na estrutura expositiva do Decreto 83.081, de 24.01.1979, as contribuições da União vêm em separado no Título V - Receitas Diversas sem uma relação biunívoca clara com o custeio da Previdência Social Urbana, Rural e dos Funcionários Federais que são didaticamente tratados sob títulos próprios.

Essas contribuições têm três origens principais:

A - as chamadas "cotas de previdência", que compreendem:

- . 3,6% do imposto de importação, de acordo com a Lei nº 3.244, de 04.08.1957;
- . 10% da renda bruta da Loteria Esportiva Federal, autorizados pelo Decreto-Lei nº 594, de 27.05.1969;
- . 14% da venda dos bilhetes da Loteria Federal, consoante Decretos-Lei Nºs 717 e 1.285, de 30.07.1969 e 06.09.1973, respectivamente;
- . 6% do preço ex-refinaria da gasolina A, conforme Decreto-Lei nº 1.505, de 23.12.1976; e
- . 3% do movimento das apostas de reuniões hípicas, segundo o Decreto-Lei nº 1.515, de 30.12.1976;

B - as "dotações próprias" do Orçamento Geral da União consignadas ao Ministério da Previdência e Assistência Social - MPAS e que se desdobram em duas compulsórias e duas contingentes, expostas abaixo nessa ordem, a saber:

- . para atender à complementação do custeio dos benefícios em dinheiro e às despesas de assistência médica prestados aos funcionários civis federais;

- . para atender à parcela da aposentadoria correspondente ao tempo de serviço prestado pelos funcionários públicos sujeitos ao regime estatutário de que se ocupa a Lei nº 6.184, de 11.12.1974;
  - . para cobrir o déficit acaso existente entre as receitas proporcionadas pelas "cotas de previdência" e as despesas administrativas e de pessoal do INPS, INAMPS e IAPAS; e
  - . para absorver os déficits financeiros globais decorrentes das atividades desenvolvidas ao abrigo do SINPAS; e
- C - a taxação sobre o consumo supérfluo objeto da Lei nº 6.950, de 04.11.1981, que determina a arrecadação de 20% sobre o preço de comercialização final dos bens considerados supérfluos pelo Poder Executivo.

Destaque-se, neste ponto, que a contribuição global da União é de caráter "tampão", não guardando uma relação atuarial definida com o volume dos benefícios concedidos pelo Sistema nem uma proporcionalidade fixa com as contribuições dos outros participantes, segurados e empresas.

#### III.7.4 - OUTRAS RECEITAS DA PREVIDÊNCIA SOCIAL

Conta ainda o sistema previdenciário brasileiro com os seguintes recursos:

- o fruto da cobrança de multas, correções monetárias e juros de mora sobre pagamentos fora da época;
- a remuneração de serviços prestados a terceiros, nas tarefas de arrecadação, fiscalização e cobrança;
- as receitas pelo fornecimento de outros serviços e bens;
- as receitas patrimoniais, industriais, financeiras e eventuais;
- as subvenções, legados e doações;
- outras receitas de suas entidades integrantes; e
- uma quinta contribuição da União para suplementar o custeio da Previdência Social Rural de conformidade com a Lei Complementar nº 11 de 25.01.1971.

### III.7.5 - OUTROS ENCARGOS DE NATUREZA TRABALHISTA PARA AS EMPRESAS

As empresas, na dependência de suas classificações e afora as contribuições de caráter nitidamente securitário já discutidas linhas atrás, fazem ainda outras contribuições, de cunho previdenciário ou não, e que incidem sobre as folhas mensais dos salários-de-contribuição conforme as legislações específicas que as criaram, além da legislação última sobre o assunto consubstanciada no Decreto-Lei nº 1.867, de 26.03.1981, e na Lei nº 6.950, de 04.11.1981.

Essas contribuições, que alcançam o limite máximo individual de vinte vezes o salário-de-contribuição, se for o caso, são as seguintes:

- 1,2% incidente apenas sobre a folha do 13º salário e para renda do IAPAS;
- 2,4% para receita do FUNRURAL;
- 2,5% para o Salário-Educação;
- 1,0% para o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial - SENAI;
- 1,5% para o Serviço Social da Indústria - SESI;
- 1,0% para o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial - SENAC;
- 1,5% para o Serviço Social do Comércio - SESC;
- 2,5% para o Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária - INCRA;
- 2,5% para o Departamento de Portos e Canais - DPC; e
- 2,5% para o Fundo Aeroviário.

Em adição a esses desembolsos, a empresa sofre ainda as pressões financeiras relativas ao:

- Fundo de Garantia por Tempo de Serviço - FGTS;
- Programa de Integração Social - PIS; e
- Fundo de Investimento Social - FINSOCIAL,

mas que não serão detalhados aqui por fugirem ao interesse imediato do presente trabalho.

### III.8 - OS BENEFÍCIOS DA PREVIDÊNCIA SOCIAL

Tentaremos sumariar aqui, usando de diferentes esquemas classificatórios e explicitando certos conceitos pertinentes, os benefícios em geral da Previdência Social.

Uma visão abrangente das benesses previdenciárias nos revelaria o cenário seguinte:

I - BENEFÍCIOS EM DINHEIRO:-

1. De Prestação Continuada:

A - Nas Situações Normais da PSU:

- a) a aposentadoria previdenciária por tempo de serviço;
- b) a aposentadoria previdenciária especial;
- c) a aposentadoria previdenciária por velhice;
- d) a aposentadoria previdenciária por invalidez;
- e) a pensão previdenciária por morte;
- f) o abono anual de aposentadoria;
- g) o abono anual de pensão;
- h) o auxílio-doença, previdenciário;
- i) o abono anual de auxílio-doença;
- j) o auxílio-reclusão;
- l) o abono anual de auxílio-reclusão;
- m) o salário-maternidade;
- n) o salário-família; e
- o) o abono de permanência em serviço.

B - Nas Situações Particulares do Funcionário Federal:

- a) a pensão especial por demissão com base em Ato Institucional;
- b) a pensão previdenciária vitalícia; e
- c) a pensão previdenciária temporária.

C - Nas Situações de Acidente de Trabalho Urbano:

- a) a aposentadoria acidentária por invalidez;
- b) a pensão acidentária por morte;
- c) o auxílio-doença, acidentário;
- d) o auxílio-acidente; e
- e) o auxílio-suplementar.

D - Nas Situações de Acidente de Trabalho Rural:

- a) a aposentadoria acidentária por invalidez;
- b) a pensão acidentária por morte;
- c) o auxílio-doença acidentário.

E - Nas Situações de Amparo à Velhice e à Invalidez:

- a) a renda mensal vitalícia.

## 2. De Prestação Única:

### A - Nas Situações Normais da PSU:

- a) o auxílio-natalidade;
- b) o auxílio-funeral;
- c) o pecúlio por descontinuação de trabalho;
- d) o pecúlio por invalidez; e
- e) o pecúlio por morte.

### B - Nas Situações Particulares do Funcionário Federal:

- a) o pecúlio especial.

### C - Nas Situações de Acidente de Trabalho Urbano:

- a) o pecúlio por invalidez, acidentário; e
- b) o pecúlio por morte, acidentário.

## II - BENEFÍCIOS EM SERVIÇOS PRESTADOS:

Estes benefícios são aproximadamente uniformes para todas as situações descritas acima e se compõem de:

### A - Assistência Médica:

- a) ambulatorial;
- b) hospitalar;
- c) cirúrgica em geral;
- d) cirúrgica de reparação estética para casos de acidentados;
- e) farmacêutica; e
- f) odontológica.

### B - Custeio do Deslocamento para Tratamento de Saúde em Outra Localidade:

- a) passagens para o beneficiário e acompanhante; e
- b) diárias.

### C - Reabilitação Profissional:

- a) programas e recursos de reabilitação e reeducação;
- b) aparelhos de prótese e órtese; e
- c) outros instrumentos de auxílio.

### D - Assistência Complementar de Serviço Social:

- a) obtenção de documentos; e
- b) assistência jurídica.

Os benefícios em dinheiro, de prestação continuada, são rendas que, uma vez concedidas, são pagas periodicamente; até que uma das razões previstas em regulamento determinem a sustação de suas prestações. Seus valores se calculam, com algumas exceções, com base no chamado "salário-de-benefício", de

de que nos ocuparemos adiante.

Os benefícios em dinheiro, de prestação única, são pagamentos simples que ocorrem uma só vez na vida do beneficiário ou, se recursivos, não têm época certa de ocorrência. Seus valores se pautam principalmente pelo chamado "valor-de-referência" que, igualmente, será objeto de nossa atenção logo mais.

Trabalhando, agora, por razões de simplicidade, só com as situações normais da PSU, podemos chegar a outras classificações úteis de seus benefícios.

Assim, considerando o ente alvo do benefício, encontramos:

A - Benefícios Concedidos aos Segurados:

- a) a aposentadoria por tempo de serviço;
- b) a aposentadoria especial;
- c) a aposentadoria por velhice;
- d) a aposentadoria por invalidez;
- e) o abono anual de aposentadoria;
- f) o auxílio-doença;
- g) o abono anual de auxílio-doença;
- h) o salário-maternidade;
- i) o salário-família;
- j) o abono de permanência em serviço;
- l) o auxílio-natalidade;
- m) o pecúlio por descontinuação de trabalho;
- n) o pecúlio por invalidez;
- o) a assistência médica;
- p) o custeio do deslocamento para tratamento de saúde;
- q) a reabilitação profissional;
- r) a assistência complementar.

B - Benefícios Concedidos aos Dependentes:

- a) a pensão por morte;
- b) o abono anual de pensão;
- c) o auxílio-reclusão;
- d) o abono anual de auxílio-reclusão;
- e) o auxílio-funeral;
- f) o pecúlio por morte;
- g) a assistência médica;

- h) o custeio do deslocamento para tratamento de saúde; e
- i) a assistência complementar.

Conceituando como "período de carência" o requisito do pagamento de um determinado número de contribuições mensais necessário à fruição de um certo benefício previdenciário, estes se classificam em:

A - Sujeitos à Carência de 3 Contribuições:

- a) a assistência médica, exceto nos casos de acidente de trabalho e atendimento de urgência;
- b) o custeio do deslocamento para tratamento de saúde;
- c) a reabilitação profissional; e
- d) a assistência complementar.

B - Sujeitos à Carência de 12 Contribuições:

- a) a aposentadoria por invalidez;
- b) o abono anual dessa aposentadoria;
- c) a pensão por morte;
- d) o abono anual dessa pensão;
- e) o auxílio-doença, exceto os casos especiais adiante tratados;
- f) o abono anual desse auxílio-doença;
- g) o auxílio-reclusão;
- h) o abono anual desse auxílio-reclusão; e
- i) o auxílio-natalidade.

C - Sujeitos à Carência de 60 Contribuições:

- a) a aposentadoria por tempo de serviço;
- b) a aposentadoria especial;
- c) a aposentadoria por velhice;
- d) os abonos anuais dessas aposentadorias; e
- e) o abono de permanência em serviço.

Estão isentos de carência:

- a) o auxílio-doença devido a tuberculose ativa, lepra, alienação mental, neoplasia maligna, cegueira, paralisia irreversível e incapacitante, cardiopatia grave, doença de Parkinson, espondiloartrose anquilosante, nefropatia grave e estados avançados de osteíte deformante;
- b) o salário-maternidade;
- c) o salário-família;
- d) o auxílio-funeral;

- e) o pecúlio por descontinuação do trabalho;
- f) o pecúlio por invalidez; e
- g) o pecúlio por morte.

Listados os benefícios, a quantificação daqueles pagos em dinheiro é uma função do salário-de-benefício ou do valor-de-referência.

Com a proibição do uso do salário-mínimo como instrumento contratual de correção monetária, criou-se o Valor-de-Referência como sendo o "valor-padrão resultante da aplicação ao salário mínimo vigente em 30 de abril de 1975 do coeficiente de correção monetária que teve por base o fator de reajustamento salarial de que tratam os artigos 1º e 2º da Lei nº 6.147, de 29 de novembro de 1974, excluído o coeficiente do aumento de produtividade, estando estabelecido como limite para a variação daquele coeficiente, a contar de 21 de junho de 1977, a variação das Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN), na forma da Lei nº 6.423, de 17 de junho de 1977".

A intenção foi a de criar uma nova moeda instrumental que projetasse para o futuro o mesmo nível salarial relativo ao estado tecnológico da economia em 1975, sem incorporar qualquer ganho de produtividade decorrente do aprimoramento das dotações de capital associada a cada trabalhador.

A essa esdrúxula moeda foram vinculados apenas os benefícios de prestação única, como o auxílio-natalidade e o auxílio-funeral, traduzindo uma presunção pouco lógica de que, no longo prazo, os custos e o padrão dos serviços que eles financiam não serão impactados pela evolução tecnológica por vir.

O Salário-de-Benefício, por sua vez, é uma grandeza situada entre um salário-família regional e vinte vezes o maior salário-mínimo do País e que atende a duas fórmulas diferentes de cálculo para dois distintos pacotes de benefícios em dinheiro, de prestação continuada.

A primeira produz a média aritmética simples dos 12 últimos salários-de-contribuição, havidos nos últimos 18 meses, para servir como o valor para a aplicação da "percentagem base" e da "percentagem de acréscimo" no cálculo da renda mensal dos seguintes benefícios:

- a aposentadoria por invalidez;
- o abono dessa aposentadoria;
- a pensão por morte;
- o abono dessa pensão;
- o auxílio-doença; e
- o auxílio-reclusão.

A segunda apura a média aritmética simples dos 36 últimos salários-

-de-contribuição ocorridos nos últimos 48 meses, atualizando-se previamente, através de coeficientes de reajustamento do SINPAS, aqueles salários anteriores aos últimos 12 meses. Esta modalidade se emprega para o cálculo da renda mensal atribuída aos seguintes benefícios:

- a aposentadoria por tempo de serviço;
- a aposentadoria especial;
- a aposentadoria por velhice;
- os abonos anuais dessas três aposentadorias; e
- o abono de permanência em serviço.

Os dois benefícios em dinheiro, de prestação continuada, restantes, fogem completamente às duas fórmulas expostas. O benefício do salário-maternidade equivale ao salário integral da segurada gestante, mesmo que este salário exceda a 20 vezes o maior salário-mínimo do País. O benefício do salário-família, por seu turno, se calcula aplicando-se 5% sobre o valor do salário-mínimo regional.

A Percentagem Base é um fator percentual que se aplica uma só vez sobre o salário-de-benefício para produzir a parcela principal da renda mensal de um benefício em dinheiro de prestação continuada. Seu valor é de 70% para:

- a aposentadoria especial;
- a aposentadoria por velhice;
- a aposentadoria por invalidez; e
- o auxílio-doença.

O fator percentual básico é de 80%, 95% e 95%, respectivamente, para a aposentadoria por tempo de serviço de homens e mulheres e ex-combatentes.

A Percentagem de Acréscimo é outro fator percentual que se aplica sobre o salário-de-benefício tantas vezes quantos forem os anos completos de serviço reconhecidos pela Previdência Social - limitada no entanto a determinados tetos percentuais - para produzir a parcela complementar da renda mensal do benefício a que se refere.

Esta percentagem é de 1% por ano de contribuição para:

- a aposentadoria especial, limitada ao máximo de 25%;
- a aposentadoria por velhice, restrita também ao máximo de 25%;
- a aposentadoria por invalidez, até o teto de 30%; e para
- o auxílio-doença, desde que não ultrapasse 20%.

O fator percentual de acréscimo para aposentadoria por tempo de serviço é de 3% por cada ano que ultrapasse os 30 anos de contribuição, limitado

ao máximo de 15%, para o sexo masculino mas inexistente para o sexo feminino e para os ex-combatentes já brindados com um básico de 95% do salário-de-benefício aos 30 e 25 anos de atividade computável pela PSU.

### III.9. OS BENEFÍCIOS EM DINHEIRO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL

Conhecida a lista e alguns dos atributos essenciais desses benefícios, pretendemos dar nesta Seção uma visão condensada de outras características de cada uma dessas rendas e pagamentos simples. Seguiremos a ordem enunciada e incluiremos apenas o que nos parecer mais relevante em cada caso.

1 - A Aposentadoria por Tempo de Serviço é uma renda mensal vitalícia a que faz jus o segurado que completa o número mínimo de anos de serviço já indicado acima, que preenche a carência de cinco anos de contribuição e que se desliga da atividade.

O Tempo de Serviço, desde que comprovado, se inicia com o ingresso do segurado em atividade hoje abrangida pela PSU, ainda que não o fosse àquela época, computando além dos intervalos efetivos trabalhados, os períodos a seguir mencionados relativos:

- à prestação de serviço militar obrigatório e voluntário, exceto se já contado para fins de inatividade remunerada nas Forças Armadas;
- à contribuição em dobro;
- à contribuição como segurado facultativo;
- ao exercício de mandato sindical ou classista junto aos colegiados do SINPAS e Justiça do Trabalho;
- aos períodos de 15 dias iniciais do auxílio-doença;
- aos períodos de incapacidade, auxílio-doença e aposentadoria por invalidez se intercalados entre períodos de atividade;
- aos períodos de auxílio-doença por acidente de trabalho, intercalados ou não;
- ao tempo de serviço público federal, estadual e municipal, estatutário, autárquico, de fundações ou sociedades de economias mistas, com certidão anterior a 30.09.1975;
- a tempo prestado como jurado às Justiças Estaduais, desde que recolhida a contribuição; e
- a outros tempos de situações especiais e transitórias.

Não são computáveis como tempo de serviço:

- o prestado com menos de 12 anos de idade;
- o período de mandato eletivo federal, estadual ou municipal;
- o período anterior a filiação de segurado facultativo;
- o período dedicado a atividades não abrangidas pela Previdência Social;
- o período já considerado em outra aposentadoria; e
- o tempo de serviço vinculado a outros sistemas previdenciários que não asseguram contagem recíproca com o SINPAS.

O tempo de serviço em nenhuma hipótese pode ser atestado exclusivamente por prova testemunhal. São admitidas provas documentais e razoável começo de prova escrita sujeita à complementação por Justificação Administrativa ou Judicial.

O valor deste benefício varia de 80% a 95% do salário-de-benefício em função do tempo de contribuição além dos 30 anos de serviço.

2 - A Aposentadoria Especial é uma renda mensal vitalícia a que se faz jus com a completção de um número mínimo de anos de serviço em atividades penosas, insalubres ou perigosas, com o preenchimento da carência de 60 contribuições e com o desligamento da atividade.

Com relação aos tempos de serviço mínimos normais já apontados, esse tempo mínimo pode ser reduzido para os valores indicados nos casos em que o trabalhador contacta de forma permanente com agentes nocivos como:

A - De Natureza Física:

- a) calor, 25 anos;
- b) frio, 25 anos;
- c) radiações ionizantes, 25 anos;
- d) trepidação, 25 anos;
- e) ruído, 25 anos; e
- f) pressão diversa da atmosfera, 20 anos.

B - De Natureza Química:

- a) arsênico, 25 anos;
- b) berílio ou glicínio, 25 anos;
- c) cádmio, 25 anos;
- d) chumbo, 25 anos;
- e) cromo, 25 anos;
- f) fósforo, 25 anos;

- g) manganês, 25 anos;
- h) mercúrio, 25 anos;
- i) ouro, 25 anos;
- j) compostos orgânicos, 25 anos;
- l) outros tóxicos inorgânicos, 25 anos; e
- m) minérios de silício, carvão, amianto e cimento, 15, 20 ou 25 anos.

C - De Natureza Biológica:

- a) carbúnculo, brucela, mormo, tuberculose e tétano, 25 anos;
- b) animais doentes e seus materiais contagiantes, 25 anos;
- c) soros e vacinas, 25 anos;
- d) pessoas doentes e seus materiais contagiantes, 25 anos; e
- e) germes tóxicos, 25 anos.

O mesmo problema do tempo mínimo reduzido pode ser posto num outro esquema classificatório mas agora estruturado por atividades profissionais.

Os grupos profissionais das atividades a seguir aposentam-se com os tempos de serviço indicados:

A - 15 Anos de Serviço:

- a) mineração de subsolo - frente de trabalho.

B - 20 Anos de Serviço:

- a) mineração de subsolo - atividades complementares.

C - 25 Anos de Serviço:

- a) engenharia;
- b) química-radioativa;
- c) medicina;
- d) odontologia;
- e) farmácia;
- f) bioquímica;
- g) enfermagem;
- h) veterinária;
- i) pesca;
- j) mineração de superfície;
- l) extração de petróleo;
- m) transporte marítimo, fluvial e lacustre;
- n) transporte ferroviário;
- o) transporte urbano e rodoviário;
- p) transporte aéreo;

- q) fabricação de tintas, esmaltes e vernizes;
- r) preparação de couros e peles;
- s) indústria editorial, gráfica e jornalística;
- t) combate ao fogo; e
- u) estiva e armazenagem.

D - 30 Anos de Serviço:

- a) o jornalista profissional, mas com 95% de seu salário-de-benefício.

Para a formação desses prazos não pode ser computado o tempo de serviço militar, mas são contados os tempos de contribuição em dobro de períodos de inatividade intercalados.

O valor deste benefício varia de 70 a 95% do salário-de-benefício em função do tempo de serviço para fins da Previdência.

3 - A Aposentadoria por Velhice é uma renda mensal vitalícia concedida ao homem que completando 65 anos e à mulher que perfazendo 60 anos de idade apresentam 60 ou mais contribuições mensais e se desligam da atividade.

É facultado ao segurado empregado, homem e mulher, não requerer aposentadoria nessas idades e continuar trabalhando mais 5 anos. A partir de então, suas permanências no emprego dependerão da aquiescência do empregador que passa a ter o direito de pedir sua aposentadoria compulsória.

O valor desse benefício varia entre 70 e 95% do salário-de-benefício de conformidade com o tempo de serviço reconhecido pela Previdência.

Os aposentados por tempo de serviço, especiais e por velhice, que se encontrem hábeis e que desejem, podem retornar à atividade filiando-se novamente à Previdência Social, sem prejuízo da aposentadoria que estiverem recebendo.

4 - A Aposentadoria por Invalidez é uma renda temporária concedida ao segurado enquanto for julgado sem condições de reabilitar-se para o desempenho de qualquer trabalho que lhe assegure a sobrevivência e que tenha cumprido a carência de 12 meses prevista no caso. Esta renda se torna vitalícia se a incapacidade persistir a partir dos 55 anos de idade.

O valor deste benefício varia de 70 a 100% na dependência do número de anos de trabalho que o segurado reconhecidamente tenha em atividade abrangida pela Previdência.

5 - A Pensão por Morte é uma renda mensal temporária devida aos dependentes de segurado falecido com mais de 12 contribuições ao Sistema, carência essa dispensada se a morte decorrer de uma das doenças já listadas para i

dêntica isenção no que concerne ao auxílio-doença.

O valor desse benefício se baseia, para segurado aposentado, no montante da aposentadoria que estivesse recebendo ou, para segurado ativo, no montante da aposentadoria por invalidez a que tivesse direito por ocasião do óbito.

O montante da pensão se desdobra em uma "parcela familiar" equivalente a 50% do valor básico explicado no parágrafo anterior e em tantas "parcelas individuais" de 10% da mesma base, até o máximo de cinco parcelas, quantos forem os dependentes do segurado.

A perda da condição de dependente acontece nas seguintes circunstâncias:

- para o dependente em geral, pelo casamento e pelo falecimento;
- para o dependente inválido, pela cessação da incapacidade;
- para o filho e outros a ele equiparados, ao completar 18 anos;
- para a filha e outras a ela equiparadas, ao completar 21 anos;
- para a esposa:
  - . pelo desquite sem a prestação de alimentos;
  - . pela separação judicial sem a prestação de alimentos;
  - . pelo divórcio sem a prestação de alimentação;
  - . pela anulação do casamento; e
  - . pelo abandono do lar sem motivo justo, reconhecido por sentença judicial;
- para a companheira:
  - . pela cessação dessa condição;
  - . pela cessação da dependência econômica;
  - . pelo cancelamento da designação; e
- para a pessoa designada:
  - . pelo cancelamento da designação.

6 - O Abono Anual de Aposentadoria é uma renda anual vitalícia paga aos aposentados de qualquer natureza a título de 13º salário e equivale a um doze avos do somatório da respectiva aposentadoria recebida durante o ano.

7 - O Abono Anual de Pensão é uma renda anual temporária paga como 13º salário aos pensionistas de um segurado falecido e monta a  $\frac{1}{12}$  do agregado da pensão recebida durante o ano.

8 - O Auxílio-Doença é uma renda temporária paga a segurado empregado ou empregador que por motivo de doença se veja incapacitado para o trabalho por mais de 15 dias, período inicial esse que cabe ao empregador inden-

zar. Já para os segurados autônomos, facultativos e empregados domésticos este benefício é devido a partir do dia do requerimento.

O valor deste auxílio é de 70% do salário-de-benefício acrescido de 1% sobre a mesma base por cada ano de serviço computável para a Previdência Social, limitada a percentagem global a 90%.

9 - O Abono Anual de Auxílio-Doença é uma renda anual temporária devida ao segurado que num dado ano civil recebeu auxílio-doença por mais de seis meses e é calculado como  $\frac{1}{12}$  do montante desse auxílio recebido nesse ano.

10 - O Auxílio-Reclusão é uma renda mensal temporária devida aos dependentes de segurado preso, detento ou recluso que não recebe qualquer outra renda da sua empresa ou da Previdência.

O montante desse benefício é idêntico ao da pensão por morte do segurado e é devido a partir da efetiva restrição a sua liberdade decorrente de prisão preventiva ou de sentença condenatória.

11 - O Abono Anual de Auxílio-Reclusão é uma renda anual temporária devida aos dependentes de segurado preso que perceberam o auxílio-reclusão por mais de seis meses e importa em um doze avos dos valores recebidos sob esse benefício.

12 - O Salário-Maternidade é uma renda temporária equivalente ao salário integral da segurada empregada relativo ao período de quatro semanas antes e oito semanas depois do parto normal, podendo esse prazo total de 12 semanas ser dilatado para 16 semanas em situações excepcionais.

Para casos de parto antecipado também se pagará o benefício sobre o período de 12 semanas, mas para abortos não criminosos este fica reduzido para duas semanas.

Esse benefício, que não tem período de carência e não impede o recebimento do auxílio-natalidade, é pago pela empresa que será reembolsada mensalmente pelo IAPAS. Seguradas outras, que não as empregadas de empresas, não têm direito a esta prestação previdenciária.

13 - O Salário-Família é uma renda mensal temporária paga a segurado empregado de empresa que sustente filhos de qualquer condição, menores de 14 anos de idade ou inválidos.

Os segurados empregadores, autônomos, facultativos, contribuintes em dobro, trabalhadores rurais e empregados domésticos não usufruem deste benefício que é pago no montante equivalente a 5% do salário-mínimo regional por cada filho, sem limite do número para os que preencham as condições exigidas.

Para os funcionários ativos ou no gozo do benefício de auxílio-doença por acidente, o pagamento do salário-família cabe à própria empresa, que é reembolsada mensalmente pelo IAPAS. A este cabe pagá-lo nos demais casos, podendo ainda fazê-lo os sindicatos de categorias profissionais, mediante convênio com o Sistema Previdenciário.

14 - O Abono de Permanência em Serviço é uma renda mensal temporária para o aposentado que, já contando com tempo suficiente para se aposentar, opta por manter-se em atividade.

Este abono é de 20% sobre o salário-de-benefício, a partir do tempo mínimo exigido para aposentadoria, mas pode ser aumentado para 35% se o segurado postergar por cinco anos a utilização desse direito.

15 - A Aposentadoria Acidentária por Invalidez em Trabalho Urbano é uma renda mensal temporária ou vitalícia devida a segurado empregado de empresa que por força de acidente de trabalho sofreu lesão corporal ou perturbação funcional que o incapacite temporária ou definitivamente para o exercício de qualquer outra atividade que lhe permita a sobrevivência.

Diferentemente dos benefícios previdenciários, que se baseiam no salário-de-benefício e alcançam todos os segurados, os benefícios acidentários se apóiam no salário-de-contribuição do dia do acidente e só beneficiam os segurados empregados, exceto os domésticos.

O montante desse benefício é idêntico ao salário-de-contribuição do dia do acidente e pode ser acrescido de 25% se o segurado necessitar de cuidados permanentes de outra pessoa.

16 - A Pensão Acidentária por Morte é uma renda mensal temporária de vida aos dependentes do segurado que venha a falecer em virtude de acidente de trabalho. Importa esse benefício em quantia igual ao salário-de-contribuição relativo ao dia do acidente.

17 - O Auxílio-Doença, Acidentário, em Trabalho Urbano, é uma renda mensal temporária concedida a partir do 16º dia da incapacidade provocada por acidente de trabalho. Esta renda será mantida pelo tempo necessário à definição da capacidade residual do trabalhador, em função do que lhe pode ser concedida alta por recuperação total, aposentadoria por incapacidade total, ou um dos dois benefícios, a seguir tratados, por recuperação parcial.

O montante do auxílio-doença é a remuneração integral do empregado, para os primeiros 15 dias, a ser paga pelo empregador, e é 92% de seu salário-de-contribuição à data do acidente, a partir do 16º dia, a cargo do INPS.

18 - O Auxílio-Acidente em Trabalho Urbano é uma renda mensal vitalícia devida a segurado que, vítima de acidente de trabalho, resultou residualmente incapaz para o exercício da profissão que desempenhava ao tempo do sinistro mas capaz ainda de desenvolver outras tarefas que requerem menos atividade do trabalhador.

A quantia desta renda está estipulada em 40% da aposentadoria acidentária por invalidez que lhe caberia se estivesse totalmente incapacitado para o trabalho e lhe é devida ao fim do auxílio-doença acidentário.

19 - O Auxílio-Suplementar Acidentário, em Trabalho Urbano, é uma renda mensal vitalícia a que faz jus o segurado vítima de acidente de trabalho que após a fase de convalescença pode voltar a desempenhar a mesma atividade anterior ao acidente, mas sob condição de maior desconforto e esforço pessoal.

A compensação dessa desvantagem se faz através do pagamento de 20% do que seria sua aposentadoria por invalidez acidentária.

20 - A Renda Mensal Vitalícia é o benefício devido aos septuagenários ou inválidos que, tendo perdido a condição de segurados ou que tendo desenvolvido por mais de cinco anos atividades abrangidas pela Previdência Social Urbana ou Rural, mesmo sem para elas terem contribuído, encontram-se desassistidos por qualquer pessoa e sem rendimentos para sobreviver.

O montante dessa renda é de 50% do maior salário-mínimo do País, não podendo superar 60% do salário-mínimo regional da localidade do beneficiário.

21 - O Auxílio-Natalidade é um pagamento simples destinado a custear as despesas provocadas por nascimento de filho de segurada gestante ou de esposa ou companheira dos segurados em geral da PSU.

A dimensão desse auxílio está determinada pelo "valor-de-referência" da região em que vive o beneficiário.

22 - O Auxílio-Funeral é um pagamento simples que pretende ressarcir as despesas, até o limite de dois valores-de-referência regionais, de quem custeou o sepultamento de segurado falecido. Este auxílio não se aplica a dependentes de segurado da PSU.

23 - O Pecúlio por Descontinuação de Trabalho é um pagamento simples devido ao segurado que antes de falecer se afasta do trabalho nas duas situações seguintes:

- . segurado que ingressou na Previdência Social com mais de 60 anos não tendo, assim, direito aos benefícios regulares; e

- . aposentado por velhice ou por tempo de serviço que voltou a trabalhar e a se filiar ao regime da Previdência.

O valor desse pecúlio está sujeito a duas regras distintas:

- . quando a primeira contribuição é anterior a julho de 1975, somam-se as contribuições da empresa e do empregado, atualizando-se os valores anteriores aos últimos 12 meses segundo índices da Previdência Social; e
- . quando todas as contribuições são posteriores àquela data, apuram-se apenas as contribuições do segurado, mas corrigidas monetariamente e vencendo juros de 4% ao ano.

24 - O Pecúlio por Invalidez é um pagamento simples devido ao segurado que não tendo completado a carência de 12 contribuições mensais, nem tendo sido acometido por uma daquelas doenças que merecem atendimento especial, vem a incapacitar-se para o trabalho.

Esta devolução se faz contando-se em dobro as contribuições pagas, a crescidas de juros de 4% ao ano.

25 - O Pecúlio por Morte é um pagamento simples devido aos dependentes do segurado que falece sem ter completado 12 contribuições mensais nem ter sido vítima de uma daquelas doenças merecedoras de consideração especial.

Como no caso anterior, quantifica-se essa devolução atribuindo-se juros de 4% ao ano ao dobro das contribuições recolhidas.

26 - O Pecúlio por Invalidez, Acidentário em Trabalho Urbano é um pagamento simples a que tem direito o segurado que inicia o recebimento da aposentadoria por invalidez acidentária. Seu montante corresponde a 15 vezes o valor-de-referência da região onde trabalhava o acidentado.

27 - O Pecúlio por Morte, Acidentário, em Trabalho Urbano é um pagamento simples feito aos dependentes do segurado que desaparece vítima de acidente de trabalho. 30 salários-de-referência regionais é a quantia a ser paga a título desse benefício.

Todos os benefícios oferecidos pelo Sistema estão, de uma forma ou de outra, ajustados para as mudanças no custo de vida, muito embora a proteção esteja longe do desejável. Num ambiente inflacionário em derredor de 250% com reajustamentos salariais semestrais, as fórmulas de cálculo do salário-de-benefício e do valor-de-referência não são favoráveis aos beneficiários que enfrentam ainda a incerteza sobre os índices de reajustamento a serem produzidos e usados pelo SINPAS.

### III.10. DIFERENÇAS DE DIREITOS PREVIDENCIÁRIOS DE ALGUMAS CATEGORIAS DE SEGURADOS

Ainda que amparados pela Lei nº 5.859, de 11.12.1972, os empregados domésticos não gozam da plenitude dos direitos trabalhistas e previdenciários concedidos às outras categorias profissionais.

No âmbito trabalhista, eles não têm direito a horário-padrão de trabalho, horas extras, repouso semanal remunerado, salário-mínimo, 13º salário, aviso-prévio, estabilidade, indenização, fundo de garantia, PIS ou qualquer outro direito que não um período de 20 dias de férias remuneradas, se tiver menos de seis ausências durante o ano.

Os benefícios decorrentes de acidente de trabalho só lhes são devidos se o empregador, facultativamente, contribuir com o prêmio de seguro respectivo.

No aspecto previdenciário, o empregado doméstico ou seus dependentes têm direito a todos os benefícios prestados sob a forma de serviços mas apenas aos seguintes benefícios prestados em dinheiro:

- aposentadoria por tempo de serviço;
- aposentadoria por invalidez;
- aposentadoria por velhice;
- pensão por morte;
- auxílio-doença;
- auxílio-reclusão;
- auxílio-funeral;
- auxílio-natalidade; e
- abono de permanência em serviço.

O ministro de confissão religiosa ou membro de congregação ou ordem religiosa foi objeto de legislação previdenciária específica na forma da Lei nº 6.696, de 08.10.1979, que os equiparou aos trabalhadores autônomos atribuindo-lhes assim todos os direitos e obrigações desta categoria.

Para os religiosos que já haviam completado 60 anos de idade na data da vigência da lei, no entanto, lhes foi facultada a filiação mas com um elenco bem reduzido de benefícios a saber:

- renda mensal vitalícia, após 70 anos de idade;
- salário-família;
- auxílio-funeral;
- pecúlio; e

- os benefícios em serviços prestados.

Para o cidadão comum, com mais de 60 anos de idade, que venha a desenvolver atividade abrangida pela Previdência Social e que nunca tenha para ela contribuído ou que tendo contribuído tenha perdido a condição de segurado por mais de cinco anos, a filiação é obrigatória, mas o elenco de benefícios para si e seus dependentes fica reduzido ao mesmo acima apontado para os religiosos.

Cumprê destacar que em caso de acidente de trabalho, mesmo sendo um empregado de empresa e estando coberto por apólice de seguro obrigatório, esse segurado só terá direito à assistência médica e aos outros serviços a ela relativos.

A extinção do IPASE com a criação do SINPAS não determinou a equiparação dos benefícios e das contribuições relativas aos funcionários civis da União, do Distrito Federal, dos Territórios e das Autarquias Federais, aos dos outros segurados da Previdência.

A absorção se deu com a preservação do plano de benefícios e custeios então existente. Disso decorre uma diferença previdenciária sobretudo no que concerne aos benefícios devidos aos dependentes desses servidores que se resumem aos seguintes:

- Pensão Vitalícia, que é uma renda mensal concedida até a morte da esposa (ou marido inválido), ou da companheira ou da mãe viúva, todos economicamente dependentes;
- Pensão Temporária, que é uma renda mensal transitória paga aos filhos e filhas menores de 21 anos ou inválidos ou às filhas e irmãs solteiras, viúvas ou desquitadas, maiores de 21 anos, enquanto perdurar a dependência econômica. As pensões vitalícia e temporária e quivalentem, em conjunto, a 50% do salário-base do segurado falecido;
- Pensão Especial, que é uma renda mensal temporária devida aos dependentes do servidor vitalício ou estável demitido em decorrência dos Atos Institucionais nos 1, 2 ou 5. Equivalente a 50% de seu salário-base, é pagável enquanto o demitido mantém-se afastado de eventuais futuros cargos públicos ou empregos em sociedades de economia mista; e
- o Pecúlio Especial, que é um pagamento simples devido aos dependentes do servidor morto. Seu montante é de três vezes seu salário-base quando o óbito se dá com mais de 43 anos de idade, mas é progressivamente aumentado em situações de mortes mais precoces, atingin-

do o máximo de 7,6 vezes esse salário se o falecimento se der aos 20 anos de idade.

### III.11. A PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR

#### III.11.1 - GENERALIDADES

Vale a pena recordar que na sociedade agrária os velhos podiam trabalhar até a idade mais avançada, ainda que em regime de tempo parcial ou em trabalhos mais leves, contribuindo assim de alguma forma para a produção cuja responsabilidade maior repousava nos ombros dos mais jovens.

A estes cumpria sustentar os mais velhos num sistema de solidariedade inter-gerações. É ainda um costume hoje em dia no meio rural de alguns países europeus que o primogênito se "case na casa", o que significa ser ele o que vai suceder os pais naquela habitação em troca do encargo de sustentá-los na velhice.

Os requerimentos de horário, de especialização e de produtividade, entre outros, da moderna sociedade industrial, cria um natural mecanismo de expulsão dos velhos do trabalho, em idades progressivamente mais jovens, dada a dinâmica da obsolescência do próprio conhecimento profissional individual. Em certos setores industriais de vanguarda, um especialista formado há dez anos já é considerado ultrapassado nos seus conhecimentos específicos, a menos que se mantenha em permanente processo de reciclagem.

O progresso da Ciência Médica nos últimos 50 anos ampliou sobremaneira a longevidade do homem pelo melhor conhecimento dos distúrbios funcionais, mas, sobretudo, através do combate às doenças infecciosas.

A tendência ao planejamento familiar e ao controle da natalidade, bem visível depois da II Guerra Mundial em maior ou menor grau na maioria dos países, contribuiu para um deslocamento da estrutura etária na direção de uma maior proporção de velhos.

A automação e os aumentos de produtividade são outros fatores indutores de uma aposentadoria mais cedo em níveis de renda pré-aposentadoria mais altos.

A máquina publicitária e os cartões de crédito da moderna sociedade industrial, por seu lado, associados às constantes ameaças da inflação, dos impostos e de uma nova guerra mundial, fazem com que se consuma toda ou quase

toda a renda disponível, relegando-se a um plano secundário o terceiro instrumento de previdência para a velhice, que é a poupança individual e voluntária.

De outra parte, a filosofia da previdência social como instrumento previdenciário básico é a de proporcionar um piso de proteção social capaz de fazer calar a consciência coletiva, mas não muito mais que isso.

O resultado de todos os fatores alinhados acima é uma massa crescente de velhos urbanos com alta esperança de vida inativa e crescentes rendas pré-aposentadoria mas com inadequada proteção previdenciária.

É este o quadro que destaca a importância transcendental da Previdência Complementar, o segundo instrumento previdenciário, em nações com um ponderável segmento de classe média urbana ligada mais às especializações intelectuais ou habilidades manuais e progressivamente desligada da posse material imobiliária, sobretudo da terra agrícola.

O plano privado de pensão, a despeito de sua colocação em segundo lugar, é na realidade um instituto mais antigo que a previdência social, inclusive no Brasil, e foi por ocasião de sua concepção e criação que se forjaram e se discutiram as três teorias ou os três conceitos que dão "rationale" às instituições previdenciárias como um todo.

A primeira delas, mecanicista, via o homem como uma máquina, igualmente sujeito à depreciação. A erosão do capital humano através do seu uso na produção deveria ter como contrapartida a constituição de um fundo em montante adequado para financiar a etapa inativa dos velhos "exauridos" e impedir que ficassem a deriva, como trastes incômodos a uma sociedade que eles ajudaram a enriquecer e de cuja caridade dependem agora para sobreviver.

Essa tese, a despeito de seu forte conteúdo emocional e larga aceitação sindical, cedeu lugar à idéia de que o custo do "durante" e do "depois" devem ser atribuídos à produção corrente sendo as pensões, assim, salários diferidos ou simples transferências inter-temporais de renda.

Este seria o raciocínio mais adequado ao entendimento da previdência complementar, voluntária, desde que acrescido de algumas qualificações sobre a "fundação" do plano.

O conceito do diferimento de renda esconde o pressuposto de que ao trabalhador se dá a opção entre uma renda maior agora sem nenhuma renda na velhice e uma renda menor agora com uma renda decente na inatividade.

Independentemente de como os aportes de recursos se fazem na prática, provindo no todo ou em parte do empregador e/ou do empregado, a "fundação" do plano deve ser vista, segundo este conceito, como sendo custeada inte

gralmente por uma fatia diferida do salário do empregado e não por uma liberdade do empregador.

A terceira e última teoria se adequa aos planos previdenciários sociais obrigatórios e centra-se na idéia de que a comunidade deve suportar coletivamente os seus inativos e inválidos mediante a imposição de um tributo sobre os salários dos segmentos ativos da população. Seria o modelo familiar, dos mais novos sustentando os mais velhos, transplantando para o todo da sociedade através do mecanismo de um fundo financeiro comunitário único.

Convergindo nossas atenções para os fundos privados, vamos descobrir novas razões para sua existência, todas decorrentes da eliminação ou sensível redução do risco de cessação das rendas dos trabalhadores nas diversas fases de sua vida ativa e inativa.

A implantação de um plano privado de pensão conduz à elevação do sentimento de objetivo comum do grupo, ou do "esprit de corps", a uma maior produtividade, a uma menor rotatividade da mão-de-obra, a menores custos de recrutamento, seleção e treinamento, à obtenção de pessoal melhor qualificado, a um maior engajamento dos quadros dirigentes e a menores pagamentos de imposto de renda pela fundação hoje dos salários de amanhã.

Um fundo privado de pensão bem estruturado deve ser uma pessoa jurídica em separado, estar integrado com o plano da previdência social, ter caráter permanente, ser facultativo mas abrangente e não discriminatório, conceder benefícios adequados, cobrar eficientemente contribuições equitativas, ter um porte mínimo para se manter atuarialmente solvente, constituir e bem gerir os ativos que se contrapõem às reservas técnicas reclamadas, definir direitos e obrigações com todo o detalhe e por escrito, manter baixas suas despesas administrativas e deve, por fim, ser dirigido com honestidade e na perspectiva do justo interesse das partes envolvidas.

Se a contribuição para a previdência social é compulsória e se o objetivo da previdência complementar é assegurar um padrão de vida, para o aposentado e seus dependentes, consistente com o até então desfrutado, os planos de benefícios de ambos devem ser integrados num único objetivo final.

Há três formas de proceder a essa articulação através de ajustamentos nas regras do plano privado. A primeira raciocina com os benefícios e consiste em computar as vantagens incrementais individuais oferecidas pela previdência complementar, tratando-as como se fossem um plano estanque para fins de cálculo das contribuições que o financiam, mas assumindo o risco das flutuações do plano social básico.

Esta solução é aparentemente simples mas na verdade introduz complexidade apreciável nos cálculos atuariais que passam a necessitar de hipóteses probabilísticas sobre a evolução futura dos valores básicos.

Na segunda, parte-se dos salários dos quais se desconta aquela porção já taxada pela previdência social para evitar uma dupla incidência, aplicando-se sobre o excedente os coeficientes atuariais requeridos. Neste caso a responsabilidade do plano privado se limita a esses valores complementares, correndo por conta do segurado o risco das variações ou erosões inflacionárias dos valores básicos.

A terceira abordagem usa taxas diferenciadas para as porções abaixo e acima do salário-de-contribuição, cobrando-se obviamente menos da parcela inferior. O plano privado assume, no entanto, a responsabilidade pelo montante global dos benefícios, como no primeiro caso, e com os problemas ali mencionados. A grande desvantagem deste método está no tratamento injusto dado aos que ganham menos que o teto de contribuição para quem os benefícios marginais ou não existem ou são comparativamente mais caros que os dos assalariados de altos vencimentos.

Um outro ponto delicado do planejamento de um plano privado diz respeito à proporção entre as rendas depois e antes da aposentadoria.

Razões há que aconselham uma razão menor que um, equivalendo dizer, uma renda previdenciária inferior à renda do período de atividade. Nessa fase da vida, o segurado usualmente já se desincumbiu da educação dos filhos e possivelmente da amortização do empréstimo da casa própria e de outros investimentos.

Argumentos em contrário existem e estão ligados à necessidade de maiores gastos com a saúde e com o lazer ou eventualmente com o estabelecimento de um negócio por conta própria.

Cumpra não perder de vista, todavia, que um fundo previdenciário não é uma máquina miraculosa de produzir bem-estar mas um instrumento de transferência de recursos entre diversas idades que deve ser ajustado às necessidades do grupo.

Quando se advoga, por exemplo, o pagamento de 60 a 80%, ao invés de 100%, do salário pré-aposentadoria, não se está querendo penalizar o segurado com uma renda previdenciária injusta, mas adequar sua poupança previdenciária às suas necessidades de dinheiro gastável, cambiantes ao longo da vida. Uma aposentadoria mais modesta pode ser desejável na medida em que, custando menos em termos de contribuições, libera mais recursos nas épocas em que eles se fa

zem mais necessários.

Em tese podemos identificar três modalidades distintas de planos privados e que resumidamente discutiremos agora.

Há os planos financeiros que simplesmente acumulam as contribuições em contas individuais acrescidas das rendas obtidas com o investimento desses recursos. O princípio da mutualidade não opera e as contribuições são feitas pelo empregador e/ou pelo empregado como uma percentagem fixa do salário de cada um tendo em vista certo nível de bem-estar proporcional ao padrão econômico de cada um e acertado entre o grupo e o empregador. É, contudo, a contribuição, e não o benefício, a variável básica do modelo.

O plano é automaticamente fundado pelo agregado das várias contas de poupança, inexistindo qualquer preocupação de natureza atuarial com respeito ao seu funcionamento já que prevalece por inteiro o princípio da equidade individual que reza "a cada um de acordo com suas contribuições".

Caso o segurado deseje estabelecer um "objetivo dotal" maior que aquele a que conduzirá o funcionamento determinístico de sua conta de poupança ao tempo da aposentadoria, pode ele escolher um incremento nesse valor e sozinho para ele contribuir dentro do mecanismo convencional de fundo de amortização ou "sinking fund".

Com a morte antecipada ou a aposentadoria, a massa final de recursos estará disponível, no todo ou em parte, de acordo com as regras do plano, para que ele a use como bem lhe aprouver ou compre uma anuidade vitalícia atualmente equivalente em uma companhia de seguros.

Este arranjo securitário tem umas poucas vantagens, entre elas a simplicidade, mas padece de uma porção de desvantagens dentre as quais realça a frustração do objetivo básico dos planos previdenciários que se apóia na solidariedade das venturas e dos riscos. Ademais, é um esquema mais próximo da poupança voluntária — terceiro instrumento previdenciário — que da previdência complementar.

O segundo modelo de plano incorpora uma dose mediana de espírito mutualista e elege como variável primária um elenco bem definido de benefícios para os segurados, e seus dependentes, como função de seus salários e de seus tempos de contribuições.

Cada participante tem uma conta individual onde são contabilizados pontos ou unidades de benefício, e não unidades monetárias, por cada ano de trabalho.

As contribuições são feitas pelo empregado e pelo empregador e inci-

dem sobre um conjunto bem definido de rendas auferidas pelo empregado. Ambas evoluem com o tempo em face do natural progresso funcional dos trabalhadores.

Os benefícios podem ser pagos com base na média de toda uma vida-de-salários, o que simplifica os cálculos atuariais, ou apenas com base nos salários dos 'n' anos terminais. Neste caso, se requer o conhecimento das curvas de progressão funcional para o cálculo atuarial das contribuições.

Para os que a morte prematura impede a aposentadoria, o modelo é padrão no sentido de que a pensão para os sobreviventes pode ficar bem aquém daquela que lhes asseguraria a manutenção do mesmo padrão de vida anterior ao desaparecimento do segurado.

O derradeiro modelo evolui do anterior pela absorção de um maior espírito de solidariedade concedendo uma certa porção do salário terminal, tanto por morte como por aposentadoria, independentemente do tempo de serviço do segurado.

Algumas cautelas se tornam necessárias para prevenir distorções graves neste tipo de plano. O requerimento de um tempo mínimo de participação ou o emprego de percentagens diferenciadas para o cálculo dos benefícios em função do tempo de participação ou ainda a proibição de adesões próximas da aposentadoria são medidas que, se o fazem aproximar-se do modelo anterior, deixam-no menos vulnerável às práticas danosas ao seu equilíbrio financeiro.

Um aspecto vital para os fundos de pensão relaciona-se com a forma como são "fundados" seus compromissos atuariais futuros. Três são, também, as modalidades possíveis ou mais usuais.

A forma mais simples é não acumular qualquer recurso com essa intenção e acreditar que a empresa é perpétua e dinâmica e, como tal, capaz de honrar os compromissos futuros à medida que se tornarem vencidos.

Uma segunda alternativa prevê que a empresa deve constituir em seu passivo exigível, de curto e longo prazos, provisões ou previsões com vistas a cobrir esses compromissos futuros. Do lado do ativo, contudo, não se constitui um fundo nem se segregam esses recursos numa conta de poupança em instituição outra que a própria empresa. Ao contrário, esses recursos continuam à disposição da empresa, para financiar seu crescimento e expansão, sem vencer qualquer remuneração.

A inadequação das duas soluções acima, aos olhos do empregado, é evidente. Sua segurança presente, a estabilidade de seu emprego corrente, e sua segurança futura, a garantia de seu salário diferido, são ovos postos numa mesma cesta, contrariando frontalmente os mais rudimentares conselhos sobre a

diversificação do risco empresarial.

A solução mais razoável resulta óbvia: fundar fora da empresa a totalidade dos compromissos estocásticos nascidos do plano de benefícios. Este será o cerne do presente trabalho.

### III.11.2 - A LEGISLAÇÃO BRASILEIRA SOBRE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR

Embora os montepios venham funcionando no Brasil há muito tempo, sua regulamentação só se deu em julho de 1977 com a Lei nº 6.435 que dispõe sobre as entidades de previdência privada abertas ou fechadas.

O espírito da lei foi o de disciplinar o funcionamento de uma atividade reconhecidamente necessária impondo padrões mínimos de segurança financeira para proteger os interesses dos participantes.

Os fundos de previdência privada compõem uma atividade que depende de autorização governamental para funcionar, a ser concedida pelo Ministério de Indústria e Comércio - MIC para os fundos abertos e pelo Ministério da Previdência e Assistência Social - MPAS para os fundos fechados.

As entidades abertas, que integram o Sistema Nacional de Seguros Privados e se revestem da forma de sociedades anônimas se tiverem fins lucrativos ou da forma de sociedades civis ou fundações em caso contrário, são organizações que oferecem diferentes planos de benefícios complementares para o público em geral.

As entidades fechadas são consideradas instituições de assistência social e não podem ter fins lucrativos. Estruturam-se como sociedades civis ou fundações de direito privado, compõem o Sistema de Previdência Social Brasileiro e oferecem benefícios apenas aos empregados de uma empresa ou grupo de empresas patrocinadoras.

Dado nosso interesse específico pelas Entidades Fechadas de Previdência Privada - EFPP, apenas delas nos ocuparemos de ora em diante.

São dois os órgãos que disciplinam e fiscalizam essas entidades.

Como órgão normativo, temos o Conselho de Previdência Complementar-CPC, composto dos seguintes membros:

- Ministro da Previdência e Assistência Social - Presidente;
- Representante do Ministério do Trabalho;
- Representante do Ministério da Fazenda;
- Representante do Ministério da Indústria e Comércio;

- Representantes (dois) da Secretaria de Atuária do MPAS; e
- Representantes (dois) das Entidades Fechadas de Previdência Privada.

São suas atribuições:

- fixar as políticas, normas e diretrizes para a previdência complementar fechada;
- regular a constituição e o funcionamento dessas entidades;
- estabelecer as características de seus planos de benefícios e as condições técnicas de seu custeio; e
- estipular as normas de contabilidade, atuária e estatística que lhe são aplicáveis.

Para órgão executivo foi designada a Secretaria de Previdência Complementar - SPC, do MPAS, com os seguintes encargos:

- processar os pedidos de autorização para constituições e modificações dessas entidades;
- fiscalizar seus aspectos contábeis, atuariais e estatísticos;
- aplicar as penalidades cabíveis e proceder a liquidação daqueles sem condições de funcionamento.

Subordinam-se ainda as EFPPs ao Conselho Monetário Nacional no que tange à constituição e gestão de seus ativos; ao Banco Central, cabe-lhes também enviar suas demonstrações financeiras, ainda que são para fins estatísticos.

O CPC, em sua primeira resolução sobre a matéria, classificou as EFPPs segundo seu tamanho do seguinte modo:

- entidades de grande porte são as que contam com mais de 5.000 participantes, o que lhes confere a possibilidade de assumir a totalidade dos riscos de seus planos;
- entidades de médio porte são as que congregam mais de 1.000 e menos de 5.000 segurados e que garantirão diretamente todos os benefícios de seus planos, exclusive a parte do pecúlio por morte excedente à metade do capital máximo previsto para um segurado; e
- entidades de pequeno porte são as que reúnem entre 100 e 1.000 participantes que garantirão diretamente:
  - . os benefícios previstos para custeio por regime financeiro de repartição simples;
  - . os pecúlios por morte até 300 ORTNs por segurado; e
  - . as aposentadorias e pensões até a metade do valor pactuado com

cada segurado.

Os riscos não cobertos diretamente pelas duas últimas categorias serão cobertos por seguro contratado com entidades abertas de previdência privada ou com companhias de seguro, ficando vedadas as EFPPs com menos de 100 participantes.

São riscos sujeitos ao regime financeiro de repartição simples:

- o auxílio doença;
- o auxílio-natalidade;
- o salário-família;
- o salário-maternidade; e
- o auxílio-funeral.

Estão enquadrados no regime financeiro de capitais de cobertura:

- a pensão por morte;
- o auxílio-reclusão; e
- o pecúlio.

As aposentadorias de qualquer espécie são os únicos riscos sujeitos ao regime financeiro de capitalização.

A integração com a previdência social é obrigatória. Os benefícios sob a forma de renda vitalícia mensal não podem exceder a 1,25 vez a média dos valores do último ano que serviram de base para cálculo do valor das contribuições; os pecúlios deverão respeitar o teto de 40 vezes o salário-de-contribuição para a previdência social. A aposentadoria por tempo de serviço requer ainda a idade mínima de 55 anos completos.

Além dos empregados da empresa patrocinadora, poderão ser amparados seus gerentes, diretores e conselheiros bem como os empregados e dirigentes da própria EFPP, mas é requerida uma adesão mínima de 50% dos potenciais participantes para sua constituição e organização.

Os planos de benefícios das EFPPs contemplam sobretudo as complementações de aposentadorias e pensões mas podem conter outros benefícios integrantes do plano da previdência social. O financiamento desses planos cabe aos empregados e aos empregadores, devendo estes participarem com 30% ou mais do custeio total.

Poderão oferecer ainda serviços assistenciais, desde que totalmente financiados pela patrocinadora e empréstimos a seus participantes sempre que não se configurem em transferência de renda para seus tomadores.

Os benefícios de prestação continuada deverão ser anualmente reajus-

tados com base em um dos seguintes índices, claramente definidos em regulamento:

- a variação do valor nominal das ORTNs; ou
- a variação do Índice Geral de Preço da Fundação Getúlio Vargas, com ceito de disponibilidade interna; ou
- a variação geral de salários do mês em que se dá o reajustamento; ou
- o índice adotado com igual propósito pelo INPS; ou
- outro indicador econômico, desde que aprovado pelo CPC.

Os demais benefícios também deverão contar com mecanismo explícito de correção compatível com a realidade inflacionária e serão reajustados em intervalos de no máximo um ano.

As contribuições dos participantes estão sujeitas a três limites percentuais e a três intervalos de aplicação, a serem utilizados de forma marginal, a saber:

- máximo de 3% para o intervalo de um salário-mínimo à metade do teto de contribuição;
- máximo de 5% para o intervalo entre a metade e o valor do teto de contribuição; e
- mínimo de 7% para o intervalo aberto acima do teto de contribuição da previdência social.

Esses limites percentuais poderão ser reduzidos quando a patrocinadora contribuir com mais de 50% do custeio do plano. Para tanto utiliza-se a seguinte equação:

$$L' = L \left( 2 - \frac{P}{50} \right)$$

onde L' = novo limite;

L = limite regulamentar; e

P = participação da empresa.

Esta disciplina expressa o terceiro esquema de integração com a previdência social de que já nos ocupamos em outro ponto deste trabalho.

As EFPPs usam uma contabilidade padronizada cujo plano de contas resumido está dado por:

- ATIVO:
  - . Circulante;
  - . Realizável de Longo Prazo;
  - . Resultado de Exercícios Futuros; e

- . Permanente.
- Passivo:
  - . Circulante;
  - . Exigível de Longo Prazo;
  - . Reservas; e
  - . Resultados de Exercícios Futuros.

Nessa estrutura convencional, o único aspecto digno de menção são, no Passivo, as Reservas, que equivalem ao Patrimônio Líquido e que se decompõem em:

- Reservas Matemáticas relativas aos benefícios já adquiridos pelos participantes, concedidos ou não;
- Reserva de Contingência, até o limite de 25% do item anterior;
- Reserva para Futuro Reajuste de Benefícios; e
- Déficit Técnico.

Em situações de perfeita previsão do futuro, quando todas as premissas atuariais se cumprem sobre uma ampla massa de participantes, as Reservas Matemáticas seriam as únicas a existir.

A Reserva de Contingência tem por objetivo absorver os desvios verificados nas suposições básicas do estudo atuarial do plano de benefícios. Quando esses desvios são favoráveis o bastante para preenchê-la até o limite indicado, o excedente é contabilizado como Reserva para Reajuste de Benefício. Uma alternativa é a preservação do plano original com uma redução no nível das contribuições.

O Déficit Técnico só ocorre quando as Reservas Matemáticas não são preenchidas em toda a sua plenitude e revelam a dimensão da insuficiência patrimonial do plano em questão.

A regulamentação das EFPPs manda que as Reservas e Provisões sejam revistas trimestralmente e que uma avaliação atuarial completa, denominada Nota Técnica, seja feita anualmente por atuário registrado no Instituto Brasileiro de Atuária - IBA ou por organização especializada credenciada pela Secretaria de Previdência Complementar - SPC.

Nesses cálculos, os compromissos atuariais poderão ser ainda desdobrados em "compromissos normais", relativos aos participantes que se filiaram a plano já em andamento e "compromissos especiais", referentes aos participantes que se filiaram quando do nascimento do plano e foram brindados com o crédito de anos de serviço anteriores a essa data. Eventuais déficits atuariais deverão ter sua cobertura esquematizada em prazo não superior a 20 anos.

Esses estudos anuais se pautarão ainda por tábuas biométricas fornecidas pelo Conselho de Previdência Complementar - CPC e adotarão taxa de juro real não superior a 6% para rendimento de seus ativos, além de uma taxa de administração não superior a 15% da receita de contribuições.

As aplicações das reservas técnicas não comprometidas de uma EFPP se fazem segundo disciplina do Conselho Monetário Nacional, que atualmente se traduz em:

- 20%, no mínimo, em:
  - . Letras do Tesouro Nacional - LTN;
  - . Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional - ORTN,;
- 10%, no mínimo, em:
  - . títulos da dívida pública dos Estados.;
- 20%, no mínimo, em:
  - . ações de companhias abertas.;
- 35%, no máximo, em
  - . imóveis de uso próprio;
  - . imóveis urbanos para renda;
  - . unidades habitacionais para venda;
  - . direitos resultantes da venda desses imóveis;
  - . empréstimos aos participantes a custos reais não inferiores à taxa de juros atuarial do plano.

Os recursos remanescentes poderão ser aplicados em depósitos a prazo, letras de câmbio, letras imobiliárias, cédulas hipotecárias, quotas de fundos mútuos de investimentos, títulos da dívida pública de municípios, obrigações da ELETROBRÁS, títulos do BNDES, e títulos da dívida agrária.

As reservas comprometidas, que é aquela parte das Reservas Matemáticas necessárias à complementação das receitas previdenciais para a cobertura dos dispêndios dos próximos 360 dias, serão impositivamente aplicadas em LTNs, ORTNs, depósitos a vista ou a prazo e ações ou debêntures de companhias abertas preponderantemente de capitais nacionais.

Os dirigentes de uma EFPP são solidariamente responsáveis pelos prejuízos causados aos participantes e a terceiros decorrentes da inobservância das leis e regulamentos que disciplinam a previdência complementar. Merecem destaque particular aqueles danos nascidos do inadequado dimensionamento das reservas obrigatórias.

Afora os balancetes mensais, devem as EFPPs aferir suas situações e

mutações patrimoniais através da apuração anual das seguintes demonstrações financeiras conferidas por auditor independente registrado na Comissão de Valores Mobiliários - CVM e divulgadas entre os participantes:

- Balanço Patrimonial;
- Demonstração de Resultado do Exercício;
- Demonstração das Origens e Aplicações dos Recursos; e
- Demonstração dos Investimentos.

Por fim, sua insolvência técnica ou econômica não dá lugar a pedido de concordata ou de falência, mas a um processo de liquidação extrajudicial, na forma da legislação específica que trata das Entidades Fechadas de Previdência Privada, a ser procedida por liquidante nomeado pelo Ministro da Previdência e Assistência Social.

## CAPÍTULO IV

## UMA INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA DOS FUNDOS DE PENSÃO

## IV.1. INTRODUÇÃO

A despeito da multiplicidade de métodos de custeio existentes para fundar um plano privado de seguridade, nosso propósito neste capítulo é esclarecer certos conceitos mais usuais da linguagem dos fundos de pensão e também rever o mais importante dos trabalhos sobre a matéria, um artigo de Charles Trowbridge<sup>1</sup> sob o título "Fundamentals of Pension Funding, publicado no número 4 do periódico "Transactions of the Society of Actuaries" em 1952.

Até há poucos anos atrás, este era o escrito mais abrangente acerca do assunto, embora existissem dezenas de estudos sobre formas particulares de fundação de arranjos securitários da espécie. Inexistia, àquela época, um texto compreensivo sobre as diversas modalidades possíveis para a estruturação atuarial-financeira de um fundo de pensão, lacuna que o artigo de Trowbridge procurou preencher.

Mais recentemente, como fruto do trabalho do "Pension Research Council" da Wharton School da Universidade da Pensilvânia, surgiram diversos livros que tratam o tema com clareza e profundidade, do que são exemplos os seguintes:

- Pension Mathematics with Numerical Illustrations de Howard Winklevoss;
- Fundamentals of Private Pensions de Dan McGill;
- Concepts of Actuarial Soundness in Pension Plans de Dorrance Bronson;
- Actuarial Aspects of Pension Security de Williams Marples;
- Status of Funding under Private Pension Plans de Frank Griffin e Charles Trowbridge; e
- Guaranty Fund for Private Pension Obligations de Dan McGill.

Trowbridge<sup>2</sup> publicou ainda, em 1976, juntamente com C.E. Farr, mas fora desse "Council", o livro "The Theory and Practice of Pension Funding", onde reordena e expande as colocações do célebre artigo que nos propomos a rever adiante.

Antes de fazê-lo, contudo, julgamos conveniente mencionar alguns dos conceitos indispensáveis ao entendimento da apresentação que se segue.

(1) TROWBRIDGE, Charles. Fundamentals of pension funding. Transactions of the Society of Actuaries: Vol. 4. p. 17, 1952.

(2) TROWBRIDGE, C. & FARR C. The theory and practice of pension funding. Homewood, IL, Richard Irwin, Inc., 1976.

IV.2. ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS SOBRE O CUSTEIO DE FUNDOS DE PENSÃO

A Tabela de Serviço, ã semelhança de uma Tabela de Mortalidade, mostra a involução de uma coorte de empregados ativos, todos admitidos na empresa e filiados ao fundo com a mesma idade, mas sujeitos a um ambiente multi-decremental onde, em acréscimo ã morte, o desemprego, a incapacidade e a aposentadoria constituem outros fatores decrementais desse grupo homogêneo sob análise.

Jã para o grupo de empregados inativos o ambiente é uni-decremental, sob o comando exclusivo do evento da morte.

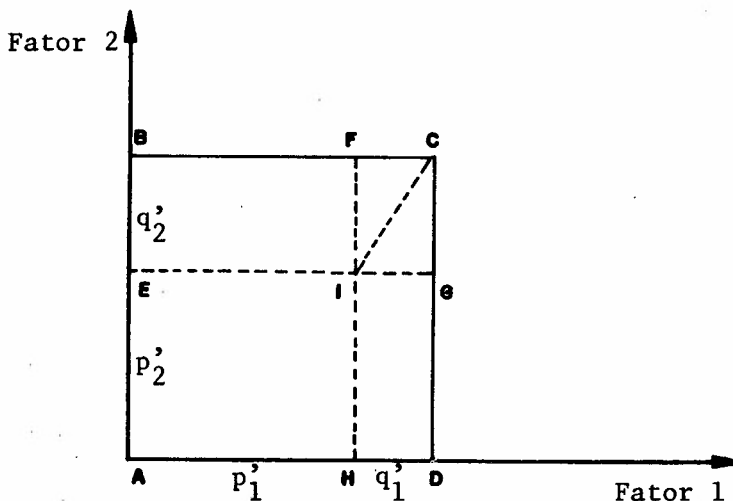
Para a coorte ativa, essa involução se retrata através do número de sobreviventes ao cenário multi-decremental - vetor  $l_x^{(T)}$  - e da probabilidade de nele remanescer até a idade de aposentadoria,  $a$ , estando o indivíduo presentemente na idade  $x$  - vetor  ${}_{a-x}p_x^{(T)}$ .

A taxa decremental da causa genérica  $k$ , na idade  $x$ ,  $q'_k$ , de um ambiente uni-decremental não pode ser aplicada a ambientes multi-decrementais, já que a base sobre a qual se aplica involui por outras razões que não  $k$ . Considerando-se duas causas decrementais simultâneas, e supondo-se que cada uma de las impõe ã base inicial involuções lineares ao longo do ano, adota-se, para se obter probabilidade decremental da causa 1,  $q_1$ , na presença da causa 2, a seguinte equação:

$$q_1 = q'_1 - \frac{1}{2} q'_1 q'_2 \tag{IV.2.1}$$

onde  $q'_1$  e  $q'_2$  são as taxas dos fatores decrementais 1 e 2 vistos isoladamente sem interação entre si, enquanto  $q_1$  é a taxa decremental da causa 1 na presença da causa 2.

FIGURA IV.2.1  
GRÁFICO DO DECREMENTO A DOIS FATORES



Graficamente, como se vê na Figura IV.2.1, o todo inicial estaria representado pelo quadrado unitário ABCD, que sujeito isoladamente ao fator decremental 1 se reduziria para o quadrilátero ABFH. Da mesma forma, a ação isolada do fator decremental 2 reduziria a mesma área ABCD para o retângulo AEGD. Já a ação conjunta de ambos os fatores reduziria a área inicial para a do retângulo AEIH. Nesta involução perde-se a área EBCDHI que é igual à soma das reduções ABFH, produzida pelo primeiro fator, e AEGD, imposta pelo segundo fator, soma esta corrigida pela eliminação da área de IFGC, para evitar sua dupla contagem. Assim, a área decrementada estaria dada por

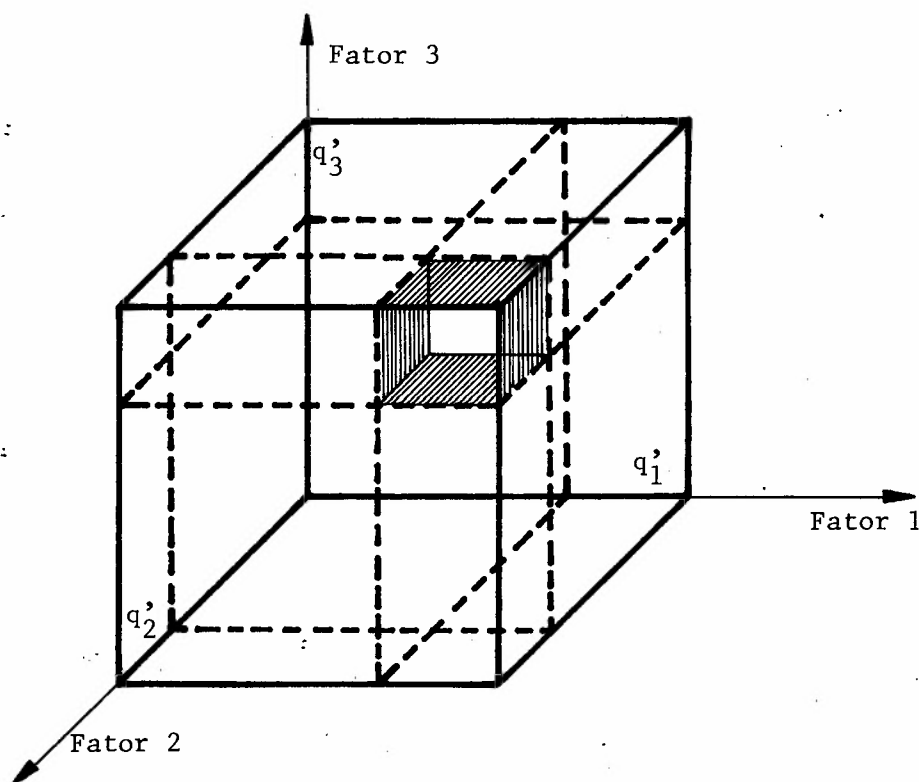
$$EBCDHI = HFCD + EBCG - IFGC.$$

Considerando que o decremento representado por IFGC é fruto da ação das duas causas que fornecem as arestas desse retângulo e admitindo-se que este decremento é simultaneamente produzido por ambas as causas, resulta que a taxa decremental de causa 1 na presença da causa 2 estaria representada pelo trapézio HICD, o que, analiticamente, daria a Equação IV.2.1 acima, vista em outro arranjo algébrico:

$$q_1 = q_1' \left(1 - \frac{1}{2} q_2'\right) \quad (\text{IV.2.2})$$

O ambiente decremental a três fatores tem tratamento lógico semelhante passando sua representação gráfica para um cubo unitário coordenado pelos eixos desses fatores.

FIGURA IV.2.2  
GRÁFICO DO DECREMENTO A TRÊS FATORES



As fatias volumétricas determinadas por  $q_1'$ ,  $q_2'$  e  $q_3'$  representam a ação de cada fator visto isoladamente. Os dois volumes relativos às interseções binárias de  $q_1'$  com  $q_2'$  e  $q_3'$ , respectivamente, precisam ser rateados entre os integrantes do par e deduzidos de  $q_1'$  reduzindo-lhe assim a ação decremental isolada. Mas este ajustamento volumétrico de  $q_1'$  descontou duplamente uma porção de volume na interseção ternária formada por  $q_1'$ ,  $q_2'$ ,  $q_3'$ , o que se corrige adicionando a terça parte do volume dessa interseção para resultar em

$$q_1 = q_1' - \frac{1}{2} q_1' q_2' - \frac{1}{2} q_1' q_3' + \frac{1}{3} q_1' q_2' q_3' \quad \text{ou}$$

$$q_1 = q_1' \left[ 1 - \frac{1}{2} (q_2' + q_3') + \frac{1}{3} q_2' q_3' \right] \quad (\text{IV.2.3})$$

A indução a partir da Equação IV.2.2 produziria uma forma aproximada de cálculo com erros a menor na obtenção de  $q_1$ , a saber:

$$q_1 = q_1' (1 - \frac{1}{2} q_2') (1 - \frac{1}{2} q_3') = q_1' \left[ 1 - \frac{1}{2} (q_2' + q_3') + \frac{1}{4} q_2' q_3' \right] \quad (\text{IV.2.4})$$

O ambiente decremental a quatro fatores não pode ser representado graficamente e a equação de  $q_1$ , por semelhança às das outras taxas decrementais, é obtida por indução:

$$q_1 = q_1' \left[ 1 - \frac{1}{2} (q_2' + q_3' + q_4') + \frac{1}{3} (q_2' q_3' + q_2' q_4' + q_3' q_4') - \frac{1}{4} q_2' q_3' q_4' \right] \quad (\text{IV.2.5})$$

Neste caso encontraríamos com cálculo aproximado:

$$q_1 = q_1' (1 - \frac{1}{2} q_2') (1 - \frac{1}{2} q_3') (1 - \frac{1}{2} q_4') =$$

$$= q_1' \left[ 1 - \frac{1}{2} (q_2' + q_3' + q_4') + \frac{1}{4} (q_2' q_3' + q_2' q_4' + q_3' q_4') - \frac{1}{8} q_2' q_3' q_4' \right] \quad (\text{IV.2.6})$$

Conhecidas as taxas decrementais de cada fator em ambiente multi-decremental, torna-se possível conhecer a probabilidade de sobrevivência por um período nesse cenário.

Duas são as alternativas de cálculo. Na primeira, consideram-se as taxas uni-decrementais como independentes entre si para escrever para o caso de  $n$  fatores,

$$p^{(T)} = (1 - q_1') (1 - q_2') (1 - q_3') \dots (1 - q_n') \quad (\text{IV.2.7})$$

Na outra, usam-se as taxas corrigidas recém-obtidas, dando:

$$p^{(T)} = 1 - (q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n) = 1 - q^{(T)} \quad (\text{IV.2.8})$$

Ambos os cálculos produzem o mesmo resultado se cada  $q_k$  for calculado com a equação correta para seu ambiente decremental. A Equação IV.2.8 levará, no entanto, a um resultado errado para maior se cada  $q_k$  for obtido com o auxílio das equações aproximadas como as mencionadas neste texto.

Denotando por  $l_x^{(T)}$  o número de sobreviventes na idade  $x$  em um ambiente multi-decremental e lembrando que  $q_x^{(T)}$  é a taxa multi-decremental na idade  $x$ , mensura-se o número dos que se afastam do serviço nessa idade por qualquer das causas decrementais, por

$$d_x^{(T)} = l_x^{(T)} q_x^{(T)} \quad (\text{IV.2.9})$$

As Tabelas de Serviço, como as Tabelas de Sobrevivência, variam de coorte para coorte, não sendo iguais, portanto, as probabilidades de sobrevivência em serviço até a aposentadoria de dois indivíduos com a mesma idade mas com diferentes tempos de serviço na empresa. Em qualquer idade, menor tempo de serviço é indicador de maior mobilidade passada e presumivelmente de idêntica tendência para o futuro.

O segundo importante conceito para este estudo é o de Valor Presente dos Benefícios Futuros - VPBF - de um plano previdenciário e pode ser enfocado no interesse de um participante ou no agregado de toda a entidade, retratando, em ambos os casos, a visão mais ampla dos compromissos futuros assumidos pelo fundo.

Na ótica individual, representa o somatório dos benefícios futuros prometidos a um particular participante, quer estejam adquiridos ou não, fundados ou não. Significa o montante de recursos que deveria existir num certo momento para assegurar o pagamento a esse participante de todos os benefícios prometidos para o futuro sem que se processe qualquer outra contribuição ao plano. Seu montante independe de como estão sendo aportadas as contribuições ou de como estão sendo creditados os direitos aos benefícios.

Considerando somente o benefício anual vitalício constante da aposentadoria a iniciar-se na idade  $a$ , e pago sempre pelo mesmo valor real, para um participante correntemente com  $x$  anos de idade, que aderiu ao plano na

idade  $y$ , teremos para expressão de seu  $VPBF_{x,y}$  individual:

- se o participante for ativo,  $x < a$ ,

$$VPBF_{x,y} = B_{a,y} \cdot a-x p_{x,y}^{(T)} \cdot v^{a-x} \cdot \ddot{a}_a \quad (IV.2.10)$$

- se o participante for inativo,  $x \geq a$ ,

$$VPBF_{x,y} = B_{a,y} \cdot \ddot{a}_x \quad (IV.2.11)$$

onde, para ambos os casos:

$B_{a,y}$  = montante anual do benefício complementar de aposentadoria pago no início de cada ano para um participante com  $a-y$  anos de contribuição; a dimensão desse benefício varia com as regras do plano, podendo ou não ser função do tempo de contribuição, mas é constante após a concessão;

$a-x p_{x,y}^{(T)}$  = probabilidade de um participante ativo, com  $x$  anos de idade, entrante no plano na idade  $y$ , sobreviver em serviço os  $a-x$  anos que o separam da aposentadoria; nesta abordagem não há pensão por morte;

$v^{a-x}$  = fator de atualização composta, de capitalização anual, para o período de  $a-x$  anos, onde  $v = 1/(1+j)$ , estando  $j$  na expressão decimal;

$\ddot{a}_a$  = valor de uma anuidade de pagamentos iguais unitários, vitalícios, antecipados; visão atuarial no início do ano "a" do caudal de pagamentos unitários probabilísticos entre  $a$  e  $w$ , como detalhado na Seção II.4.2 deste trabalho;

$\ddot{a}_x$  = o mesmo que  $\ddot{a}_a$ , mas para uma idade  $x \geq a$ .

O Valor Presente dos Benefícios Futuros de aposentadoria para todos os participantes ativos e inativos de um fundo, num certo ano  $t$  de análise, estaria dado por:

$$\begin{aligned} \text{VPBF}_t &= \sum_x \sum_y \text{VPBF}_{x,y} = \sum_x \sum_y B_{a,y} \cdot a^{-x} p_{x,y}^{(T)} \cdot v^{a-x} \cdot \ddot{a}_a + \\ &+ \sum_x \sum_y B_{a,y} \cdot \ddot{a}_x \end{aligned} \quad (\text{IV.2.12})$$

O terceiro conceito, da maior importância para o estudo atuarial dos fundos de pensão, é o de Custo Normal - CN - e pode ser visto tanto no enfoque individual do participante como na ótica global do fundo, variando sua quantificação com o método de custeio adotado, como veremos adiante ao revisarmos o pré-falado artigo do Trowbridge.

Inobstante essa falta de unicidade com respeito ao conceito de Custo Normal, pode-se defini-lo em caráter geral como sendo o montante anual antecipado a ser pago por um participante, que entra no plano com a idade  $y$ , capaz de amortizar ao longo de sua vida ativa o seu  $\text{VPBF}_{y,y}$  individual, dimensionado nesse momento  $y$ .

O perfil dessas contribuições anuais pode variar de infinitas formas apresentando-se, por exemplo, nivelado, crescente ou decrescente segundo múltiplas trajetórias, nascendo desse fato as diversas possibilidades de custear um fundo de aposentadoria.

Custo Normal é a contribuição antecipada adequada capaz de manter equilibrado um fundo já equilibrado. É o custo efetivo e justo da cobertura securitária representada por um plano corretamente estruturado, sem faltas ou sobras de recursos para honrar seus compromissos previdenciais.

Numa visão prospectiva tomada na idade de adesão ao fundo,  $y$ , tem-se para cada participante a igualdade abaixo, que só prevalece para a idade de adesão  $y$ ,

$$\text{VPCNF}_{y,y} = \text{VPBF}_{y,y} \quad (\text{IV.2.13})$$

onde,

$\text{VPCNF}_{y,y}$  = Valor Presente dos Custos Normais Futuros, com respeito à idade  $y$ , para entrante na idade  $y$ , na ausência de contribuições na fase inativa, e está dado por:

$$\text{VPCNF}_{y,y} = \sum_{i=y}^{a-1} \text{CN}_{i,y} \cdot i^{-y} p_{y,y}^{(T)} \cdot v^{i-y} \quad (\text{IV.2.14})$$

Em qualquer idade ativa,  $x$ , o Valor Presente dos Custos Normais Futuros, para um entrante na idade  $y$ , estaria dado por:

$$VPCNF_{x,y} = \sum_{i=x}^{a-1} CN_{i,y} \cdot i-xP_{x,y}^{(T)} \cdot v^{i-x} \quad (IV.2.15)$$

Em ambas as equações acima,  $CN_{i,y}$  representa aquela contribuição relativa a um participante admitido com idade  $y$ , prevista, para ocorrer na idade genérica futura  $i$ , situada entre a idade inicial,  $y$  ou  $x$ , e a idade de aposentadoria,  $a$ , capaz de fundar durante sua vida ativa o caudal de benefícios da aposentadoria a ser percebido vitaliciamente depois da idade  $a$ . Caso o participante contribua depois da aposentadoria, as Equações IV.2.14 e IV.2.15 ganham outro termo semelhante ao já existente, para tratar do período de vida entre  $a$  e  $w$ , onde  $CN_{i,y}$  pode estar governado por outra regra de cálculo e onde a força decremental é apenas a da morte física.

Numa visão retrospectiva, tomada na idade de aposentadoria,  $a$ , e ainda na ausência de contribuições normais dos inativos, ter-se-ia para cada participante, no início de sua aposentadoria, a igualdade abaixo, que também só é verdadeira para a idade  $a$ :

$$VACNP_{a,y} = VPBF_{a,y} \quad (IV.2.16)$$

onde,

$VACNP_{a,y}$  = Valor Acumulado dos Custos Normais Passados, em relação à idade  $a$ , para entrante na idade  $y$ , e está expresso por:

$$VACNP_{a,y} = \sum_{i=y}^{a-1} CN_{i,y} \cdot r^{a-i} / a-iP_{i,y}^{(T)} \quad (IV.2.17)$$

Para qualquer idade ativa,  $x$ , o Valor Acumulado dos Custos Normais Passados, para um entrante na idade  $y$ , ficaria mensurado por:

$$VACNP_{x,y} = \sum_{i=y}^{x-1} CN_{i,y} \cdot r^{x-i} / x-iP_{i,y}^{(T)} \quad (IV.2.18)$$

Nessas duas equações,  $r$  é o fator de capitalização simples, expresso por  $1+j$ , estando a taxa de juros na sua expressão decimal.

No caso de contribuição dos inativos, a Equação IV.2.16 tomaria a forma  $VACNP_{a,y} + VPCNF_{a,y} = VPBF_{a,y}$  para considerar o aporte das contribuições da fase inativa, e a Equação IV.2.18 se desdobraria em dois termos, o primeiro para capitalizar até a idade  $a$ , e daí até a idade  $x$ , as contribuições da fase ativa entre  $y$  e  $a$ , e o segundo para capitalizar até essa mesma idade  $x$  as contribuições entre  $a$  e  $x$ .

Em ambos os casos,  $CN_{i,y}$  representa, mais uma vez, o termo genérico da expressão monetária da contribuição em cada idade  $i$ , entre a idade inicial,  $y$ , e a idade terminal,  $a$  ou  $x$ , de um participante entrante na primeira dessas idades e contribuindo de acordo com o método atuarial adotado pelo plano, dentre as infinitas possibilidades teoricamente possíveis e as muitas praticamente disponíveis.

A nível agregado do fundo, o Custo Normal, o Valor Presente dos Custos Normais Futuros e o Valor Acumulado dos Custos Normais Passados são, respectivamente, o somatório, para todos os participantes do fundo, de idênticas variáveis, a nível individual. Assim, para um determinado ano  $t$ ,

$$CN_t = \sum_x \sum_y CN_{x,y} ,$$

$$VPCNF_t = \sum_x \sum_y VPCNF_{x,y} \quad e$$

$$VACNP_t = \sum_x \sum_y VACNP_{x,y} \quad (IV.2.19)$$

O quarto conceito, também de extrema importância, neste estudo é o de Passivo Atuarial - PA - com respeito a cada participante e ao conjunto de todos os participantes.

Em termos simples, o Passivo Atuarial,  $PA_{x,y}$ , relativo a um participante ativo de idade  $x$ , entrante na idade  $y$ , é aquela porção do seu  $VPBF_{x,y}$  já teoricamente amortizada, mensurada ou pelo Valor Acumulado dos Custos Normais Passados (visão retrospectiva) ou pelo complemento do Valor Presente dos Custos Normais Futuros (visão prospectiva).

Na abordagem prospectiva, mais segura e correta, teríamos o Passivo Atuarial Prospectivo -  $PAP_{x,y}$  - para um indivíduo na idade  $x$ , entrante na idade  $y$ , na fase ativa, ou na fase inativa se contribuinte,

$$PAP_{x,y} = VPBF_{x,y} - VPCNF_{x,y} \quad \text{para } y \leq x \leq w \quad (IV.2.20)$$

Quando  $x = y$ , não há ainda qualquer contribuição e o Valor Presente dos Custos Normais Futuros se iguala ao Valor Presente dos Benefícios Futuros segundo a Equação IV.2.13, fazendo com que  $PAP_{y,y}$  seja nulo. A igualdade mencionada só subsiste na idade  $y$ , exatamente como discutimos na Seção II.7 sobre reservas de seguros e de anuidades. O Passivo Atuarial Prospectivo é a dimensão da reserva que deveria existir se o plano tivesse a receber apenas os Custos Normais Futuros para completar os recursos necessários ao pagamento dos benefícios futuros.

Quando  $x = a$ , não há mais contribuições futuras a recolher, supondo-se que os aposentados não pagam mais qualquer contribuição, e o  $VPBF_{a,y}$  assume o seu valor máximo implicando conseqüentemente no máximo valor do Passivo Atuarial individual.

Para o trecho em que  $x > a$ , decrescem  $VPBF_{x,y}$  e  $PAP_{x,y}$  já que, iniciando o pagamento dos benefícios, vai o fundo progressivamente se desincumbindo de suas obrigações previdenciais com relação àquele particular participante, até anular-se com sua morte que nunca ultrapassa a idade terminal  $w$ .

Assim, para inativos não contribuintes, e ainda na visão prospectiva,

$$PAP_{x,y} = VPBF_{x,y} \quad (IV.2.21)$$

Passivo Atuarial Retrospectivo - PAR - é a dimensão da reserva formada com a contribuição dos Custos Normais Passados, reduzida dos Benefícios Passados, reserva essa que só será suficiente para honrar os compromissos futuros se o plano tiver nascido e se comportado até então de forma equilibrada e assim venha a se manter até a desincumbência de todos esses compromissos.

No enfoque individual, Passivo Atuarial Retrospectivo, na idade  $x$ ,  $PAR_{x,y}$ , para ativos e inativos, é igual ao Valor Acumulado dos Custos Normais Passados -  $VACNP_{x,y}$  - menos o Valor Acumulado dos Benefícios Passados -  $VABP_{x,y}$  - recebidos até essa mesma idade, exclusive. Assim,

$$PAR_{x,y} = VACNP_{x,y} - VABP_{x,y} \quad \text{ou,}$$

$$PAR_{x,y} = \sum_{i=y}^{x-1} (CN_{i,y} - B_{i,y}) r^{x-i} / x-i P_{i,y}^{(T)} \quad (IV.2.22)$$

ficando claro que  $CN_{i,y}$  e  $B_{i,y}$  s3o podem existir simultaneamente na mesma idade  $i$  para inativos que pagam contribuic3o.

O Passivo Atuarial para o agregado dos participantes do plano,  $PA_t$ , prospectivo ou retrospectivo, estaria dado pelo somat3rio do passivo atuarial, no instante  $t$ , de seus integrantes ativos e inativos,

$$PA_t = \sum_x \sum_y PA_{x,y} \quad (IV.2.23)$$

Como quinto conceito fundamental, vamos fazer refer3ncia a Passivo Atuarial Suplementar - PAS - traduzido pela discrep3ncia entre os Passivos Atuariais Prospectivo e Retrospectivo de cada participante e, por via de consequ3ncia, do fundo como agregado desses participantes.

A exist3ncia de Passivo Atuarial Suplementar indica sempre a exist3ncia de alguma anormalidade passada ou presente no custeio do fundo por raz3es que ser3o indicadas linhas adiante. Esse Passivo Atuarial Suplementar pode se encontrar 1) j3a efetivamente amortizado por contribuic3es extras do passado; 2) j3a financeiramente equacionado, com contribuic3es extras pactuadas para o futuro; e 3) nem amortizado nem equacionado, parcela esta que carece de ser solucionada para que o fundo retome sua condi33o de pleno equil3brio.

A n3vel individual, o Passivo Atuarial Suplementar de um participante, ativo ou inativo, entrante na idade  $y$  e correntemente com idade  $x$ , estar3a dado por:

$$\begin{aligned} PAS_{x,y} &= PAP_{x,y} - PAR_{x,y} = \\ &= (VPBF_{x,y} - VPCNF_{x,y}) - (VACNP_{x,y} - VABP_{x,y}) \end{aligned} \quad (IV.2.24)$$

Quando  $PAS_{x,y}$  3e maior que zero, constata-se que o somat3rio dos Custos Normais Passados e Futuros valorados no instante  $x$  n3o 3e suficiente para cobrir os Benef3cios Passados e Futuros, tamb3m valorados, no mesmo instante  $x$ . O Passivo Atuarial Suplementar Individual 3e assim o res3duo de passivo estoc3stico n3o coberto no seu custeio com as contribuic3es normais previstas para o patrocinador e para o participante em quest3o.

Usualmente, eventuais  $PAS_{x,y}$  relativos a participantes inativos n3o s3o amortizados com contribuic3es suplementares desses mesmos inativos, mas com contribuic3es suplementares apenas do patrocinador. De outra parte, a E-

quação IV.2.24, quando aplicada a participantes ativos, não contém o termo  $VABP_{x,y}$ , por razões óbvias.

Segundo nos ensina Winklevoss,<sup>3</sup> cinco são as causas principais do surgimento do Passivo Atuarial Suplementar:

- 1) a concessão de créditos especiais de benefícios futuros para os participantes fundadores do plano relativos a tempo de serviço anterior à instituição do arranjo securitário e sem qualquer contribuição que lhes corresponda; esta insuficiência de reservas, que costuma ser chamada de Passivo Atuarial Inicial - PAI, deve ser eliminada de alguma forma nos períodos futuros para assegurar a estabilidade ao plano, ou com contribuições extras do patrocinador ou com o aumento das contribuições dos segurados fundadores e não fundadores;
- 2) a compra de tempo anterior à filiação ao plano sem uma contribuição imediata ou parcelada, atuarialmente equivalente ao incremento de benefícios conquistados;
- 3) a liberalização do plano de benefícios sem a necessária contrapartida de ingressos de recursos para custeá-la;
- 4) a mudança desfavorável nas premissas atuariais adotadas em relação à realidade da massa de participantes do plano e do ambiente que os cerca, quando esta tendência não é embutida no modelo de custeio; e
- 5) o desvio do comportamento do plano em relação às premissas atuariais corretamente adotadas, em função de acidentes amostrais revelados pela massa segurada; tais discrepâncias determinam o que se denomina de Ganhos ou Perdas Atuariais, na dependência de tipo de afastamento que se constate.

Acrescentaríamos para a realidade brasileira a não consideração na função salarial de detalhes importantes como a progressão funcional, os ganhos cumulativos de produtividade e as reposições salariais reais para compensar perdas salariais passadas.

O Passivo Atuarial Suplementar de plano é, para um certo ano  $t$ , o somatório dos Passivos Atuariais Suplementares dos seus participantes,

$$PAS_t = \sum_x \sum_y PAS_{x,y} \quad (IV.2.25)$$

(3) WINKLEVOSS, Howard. Pension mathematics with numerical illustrations. Homewood, IL, Richard Irwin, Inc., 1977. p. 72.

O sexto conceito que julgamos conveniente esclarecer nesta altura da discussão tem o nome de Custo Suplementar - CS - e, como os anteriores, pode ser analisado no enfoque individual ou coletivo. Trata-se da contribuição adicional, paga de uma só vez ou em parcelas, destinada a amortizar o Passivo Atuarial Suplementar respectivo.

Para um indivíduo com idade  $x$ , entrante na idade  $y$ , o desequilíbrio representado por seu Passivo Atuarial Suplementar se corrige quando suas contribuições adicionais, sob a forma de Custos Suplementares, atendem à seguinte igualdade:

$$PAS_{x,y} = VACSP_{x,y} + VPCSF_{x,y} \quad (IV.2.26)$$

onde:

$VACSP_{x,y}$  = Valor Acumulado dos Custos Suplementares Passados; e

$VPCSF_{x,y}$  = Valor Presente dos Custos Suplementares Futuros, desdobrado na porção Equacionada -  $VPCSF_{x,y; eq}$ , e na porção Não Equacionada,  $VPCSF_{x,y; neq}$ .

Para o agregado do fundo, o Passivo Atuarial Suplementar, num ano genérico,  $t$ , estaria dimensionado por

$$PAS_t = \sum_x \sum_y PAS_{x,y} \quad (IV.2.27)$$

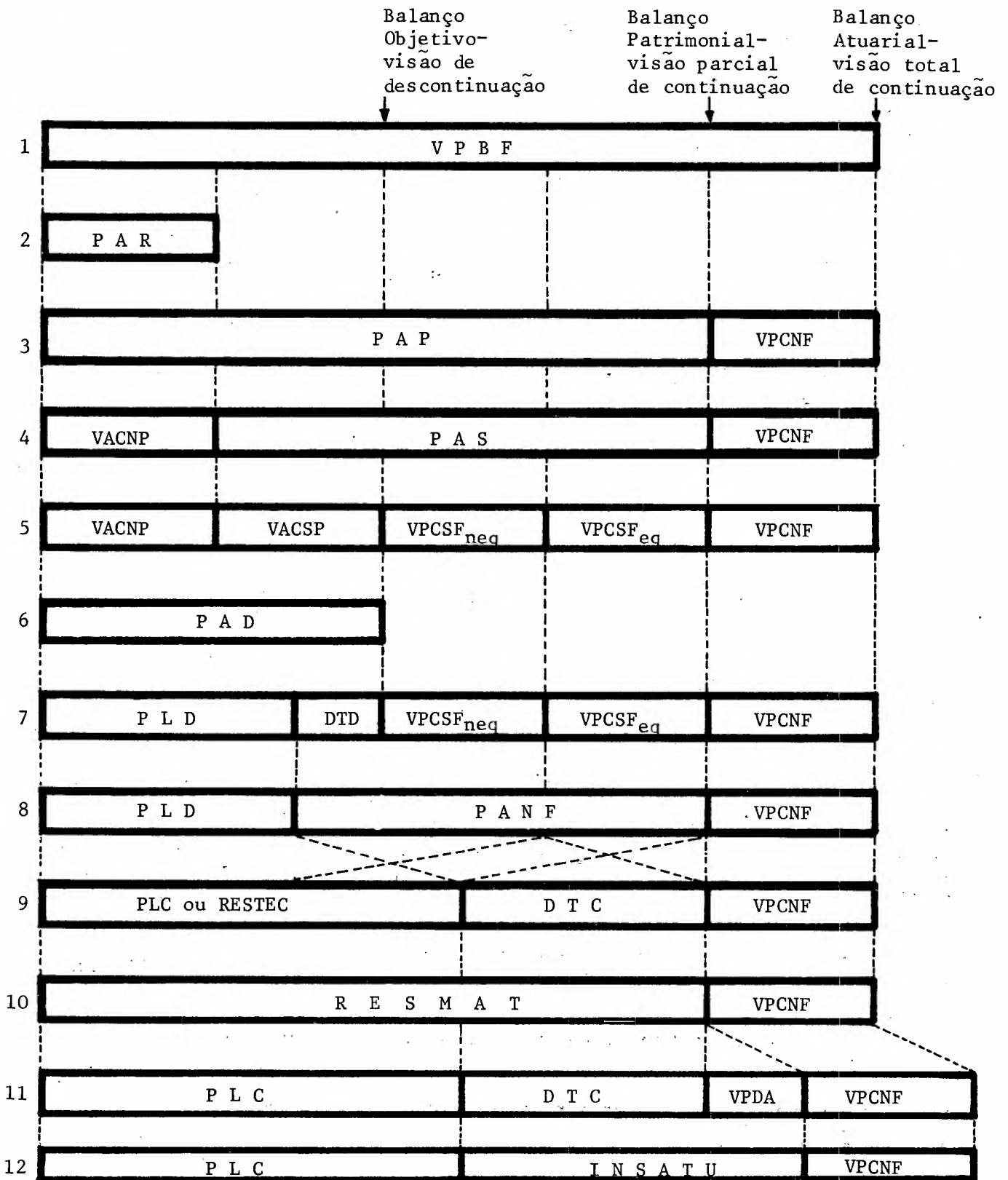
Para um fundo totalmente equacionado em seu custeio, mesmo tendo nascido com Passivo Atuarial Inicial, ou tendo acumulado Passivo Atuarial Suplementar em períodos passados, deve prevalecer a equação seguinte, num certo instante  $t$ ,

$$VPBF_t = VACNP_t + VPCNF_t + VACSP_t + VPCSF_t \quad (IV.2.28)$$

A Figura IV.2.3 pretende integrar os conceitos já expostos, e outros ainda por analisar, num só corpo concatenado de idéias relativas a um participante ativo com idade  $x$  e, por agregação, também em relação ao conjunto do plano, num dado momento  $t$ .

FIGURA IV.2.3

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS PRINCIPAIS VARIÁVEIS DE UM FUNDO DE PENSÃO DEFICITÁRIO NO ANO GENÉRICO  $t$



Em sétimo lugar tem-se o Passivo Atuarial de Descontinuação - PAD - representando aquela exigibilidade atuarial objetiva do plano na situação hipotética de sua descontinuação com pagamento factível do equivalente certo de todos os compromissos atuariais. Nesta visão patrimonial estrita, suspende-se a recepção das contribuições futuras, tanto normais como suplementares, mas preserva-se, se possível, o pagamento dos benefícios já concedidos aos inativos pagando-se-lhes imediatamente o equivalente certo do caudal de rendas futuras. Rateia-se o saldo, se existir, entre os ativos na proporção de créditos efetivamente amortizados por Custos Normais e Suplementares passados, dos benefícios parciais a que teriam direito nas épocas próprias, pagando-se-lhes imediatamente o equivalente certo que lhes corresponde.

Para um participante inativo na idade  $x$ , entrante na idade  $y$ , seu  $PAD_{x,y}$  se identificaria com o seu  $VPBF_{x,y}$ . Para os participantes ativos, regidos pelo largamente empregado sistema de créditos por anos contribuídos, os direitos frente ao fundo poderiam ser mensurados por:

$$PAD_{x,y} = \frac{\text{Nº créditos amortizados}}{\text{Nº máximo de créditos}} \cdot VPBF_{x,y} \quad (\text{IV.2.29})$$

Para o todo do Fundo, num certo ano  $t$ , esta grandeza se obtém pelo simples somatório das parcelas de seus diferentes participantes,

$$PAD_t = \sum_x \sum_y PAD_{x,y} \quad (\text{IV.2.30})$$

O posicionamento desse novo parâmetro requer algumas considerações. Primeiro, a existência de Passivo Atuarial Suplementar reduz a importância do parâmetro  $y$ , idade de entrada no plano, que ficaria substituído pelo número total de créditos, normais e suplementares, efetivamente amortizados. É natural, pois, neste quadro de extinção hipotética, que os créditos relativos aos Valores Presentes dos Custos Suplementares Futuros, equacionados e não equacionados, não compareçam no numerador da Equação IV.2.29, uma vez que, em ambos os casos, não ingressaram nos cofres do fundo.

Assim sendo, para um fundo bem estruturado, o Passivo Atuarial de Descontinuação se igualaria à soma dos Valores Acumulados dos Custos Normais e Suplementares Passados,

$$PAD_t = VACNP_t + VACSP_t \quad (\text{IV.2.31})$$

Em oitavo lugar, temos o do Déficit Técnico de Descontinuação - DTD - que representa a brecha entre o Passivo Atuarial de Descontinuação e o Patrimônio Líquido de Descontinuação - PLD - e está dado por

$$DTD_t = PAD_t - PLD_t \quad (IV.2.32)$$

O PLD, nono conceito em nossa lista, é o Patrimônio Líquido de Descontinuação do fundo reduzido dos eventuais Realizáveis relativos a Custos Suplementares já equacionados e que hipoteticamente não seriam mais realizados, pois isso dependeria de o patrocinador estar solvente e de os participantes estarem vivos, situações essas que não encontram lugar neste cenário estritamente objetivo.

Em décimo lugar, registramos o conceito de Passivo Atuarial não Fundado - PANF - que se traduz na diferença positiva acaso existente no ano  $t$  entre o Passivo Atuarial Prospectivo e o Patrimônio Líquido de Descontinuação do plano.

Assim, teríamos:

$$PANF_t = PAP_t - PLD_t \quad (IV.2.33)$$

Um fundo, que nunca tenha apresentado desequilíbrios criadores de Passivo Atuarial Suplementar ou de Ganhos ou Perdas Atuariais, tem seu Patrimônio Líquido de Descontinuação igual ao seu Passivo Atuarial Prospectivo, sendo nulo seu Passivo Atuarial Não Fundado. Ao contrário, um fundo que tenha desenvolvido Passivo Atuarial Suplementar não amortizado e/ou que tenha acumulado Perdas Atuariais não resolvidas, apresenta Passivo Atuarial Não Fundado maior que zero.

Desejando-se descer ao detalhe individual do  $PANF_{x,y}$ , poder-se-ia dizer que o Passivo Atuarial Não Fundado relativo a um participante ativo com idade  $x$ , entrante na idade  $y$ , estaria dado pelo seu  $VPCSF_{x,y}$ , equacionado e não equacionado e pela fatia que lhe corresponde no Déficit Técnico de Descontinuação do Fundo num determinado ano  $t$ . Esta última parcela poderia ser calculada multiplicando-se o  $DTD_t$  do fundo pela razão obtida entre um  $PAD_{x,y}$  individual e o total do Passivo Atuarial de Descontinuação do plano só dos participantes ativos. Assim procedendo, todo o Déficit Técnico de Descontinuação seria descarregado sobre os ombros dos ativos.

Antes de seguirmos com a enunciação de alguns conceitos faltantes, vamos nos deter na estrutura das demonstrações financeiras de um plano de previdência privada, onde se destaca como novidade, com relação à contabilidade convencional, o Balanço Atuarial.

A Demonstração de Resultados, com a conseqüente alteração das Reservas, vai abaixo transcrita.

QUADRO IV.2.1  
DEMONSTRAÇÃO DE RESULTADOS DO EXERCÍCIO

RECEITAS	DESPESAS
PREVIDENCIAIS	PREVIDENCIAIS
. Contribuições	. Benefício 1
. Do Patrocinador	:
. Dos Participantes	:
. Outras Receitas	. Benefício n
DE INVESTIMENTOS	DE INVESTIMENTOS
. Títulos Governamentais	. Diretas
. Títulos e Valores Mobiliários	. Títulos Governamentais
. Imóveis	. Títulos e Valores Mobiliários
. Operações com Participantes	. Imóveis
. Outras Receitas	. Operações com Participantes
	. Outros Investimentos
	. Indiretas
	. Serviços de Terceiros
	. Depreciações
	. Outros Encargos
ADMINISTRATIVAS	ADMINISTRATIVAS
. Correntes	. Pessoal
. Eventuais	. Material
	. Outros Encargos
REDUÇÃO DE RESERVAS (1)	CONSTITUIÇÃO DE RESERVAS (1)
. Benefícios Concedidos	. Benefícios Concedidos
. Benefícios a Conceder	. Benefícios a Conceder

NOTA: (1) Um ou outro.

Os comentários sobre as Receitas se limitam aos dois últimos títulos. As Receitas Administrativas cuidam basicamente da correção monetária do Ativo Permanente de nossa contabilidade brasileira indexada. Já a Redução de Reservas indica uma insuficiência de receitas para cobrir as despesas do período. Isto não indica necessariamente um desequilíbrio do fundo, pois é possí-

vel um plano se extinguir gradual e ordenadamente, honrando todos os seus encargos previdenciais e, assim, levar a zero as suas reservas.

Sobre as despesas, poder-se-ia dizer que as diretas com investimentos se devem a desâgios e prejuízos na venda, corretagens, custódias, imposto de renda na fonte e outras perdas. A efetiva Constituição de Reservas faz-se naturalmente com o excedente das Receitas sobre as Despesas, sobras estas que ativas produtivamente vão constituir o reservatório de riqueza que contribui para o pagamento dos encargos previdenciais futuros.

A correção monetária do Patrimônio Líquido não se processa como uma despesa dentro da Demonstração de Resultados, mas se faz pelo redimensionamento atuarial das Reservas na Demonstração do Balanço. Assim, os índices utilizados para a correção do Ativo e do Passivo não são os mesmos, surgindo daí uma possibilidade de Ganhos e Perdas Atuariais.

O Balanço Patrimonial, visão parcial de continuação do plano, vê-se abaixo:

QUADRO IV.2.2

BALANÇO PATRIMONIAL EM FIM DE EXERCÍCIO

ATIVO	PASSIVO
DISPONÍVEL	CIRCULANTE
. Caixa	. Previdencial
. Bancos	. Administrativo
INVESTIMENTOS	EXIGÍVEL ATUARIAL
. Títulos Governamentais	. Reservas Matemáticas
. Títulos e Valores Mobiliários	. Riscos Expirados
. Imóveis	. Benefícios Concedidos
. Operações com Participantes	. Benefícios a Conceder
. Outros Investimentos	. Riscos Não Expirados
	. Benefícios a Conceder
	. (Déficit Técnico de Continuação) (1)
REALIZÁVEL	NÃO EXIGÍVEL (1)
. Contribuições a Receber	. Reserva de Contingência
. Investimentos a Receber	. Reserva para Melhoria de Benefícios
. Outros Realizáveis	
PERMANENTE	RESULTADO FUTURO
. Imóveis de Uso	. Valores a Apropriar
. Móveis e Utensílios	. Outros
. Máquinas e Equipamentos	
. Outros	
RESULTADO FUTURO	
. Depósitos Judiciais	
. Valores a Apropriar	
. Outros	
T O T A L	T O T A L

NOTA: (1) Um ou outro.

Esta peça contábil requer algumas considerações. No mundo supostamente determinístico das empresas mercantis, todos os números que comparecem na contabilidade devem ser objetivos sem qualquer ranço de esperança matemática de ocorrência futura. Seria possível preservar este cenário na feitura do Balanço Patrimonial de um fundo de previdência, mas a demonstração perderia muito de seu conteúdo informacional porque teriam sido eliminados direitos e deveres de natureza estocástica efetivamente constituídos cujos fluxos estão na dependência de um evento probabilístico futuro. Dentre os direitos eliminados podemos destacar as contribuições suplementares de patrocinador solvente e dos participantes vivos já efetivamente pactuadas para determinados momentos no futuro. Como deveres eliminados são exemplos todos os benefícios previdenciais já concedidos, cujas datas de recepção ainda são futuras ou cujos eventos determinantes ainda não ocorreram.

Vê-se, portanto, que é possível conceber-se três níveis de apuração patrimonial para um fundo de pensão. Um estritamente patrimonial e objetivo no cenário pouco útil da descontinuação hipotética do plano como descrita linhas atrás no trato do PAD. Outros com um conteúdo medianamente subjetivo incorporando apenas os direitos determinísticos, como Passivo Atuarial Suplementar já equacionado com o patrocinador e com os participantes, valores estes já contabilizados no Realizável do plano, e mensurado somente os devedores já inscritos como os créditos "pro-rata" atribuídos aos participantes. Por fim, um terceiro nível, em que são contabilizadas como direitos do fundo todas as contribuições futuras, normais e suplementares, equacionadas ou não, e como obrigações do fundo todos os direitos creditados e por creditar aos participantes correntes.

Revedo a Figura IV.2.3 se observa que na primeira abordagem o exigível atuarial se identifica com o Passivo Atuarial de Descontinuação do plano, enquanto que na segunda esses compromissos previdenciais se expressam pelo Passivo Atuarial Prospectivo, e na terceira pelo Valor Presente dos Benefícios Futuros.

As últimas são, naturalmente, duas visões de continuação do plano e como tal o Patrimônio Líquido de Continuação - PLC, o décimo primeiro conceito básico de nossa lista, estaria influído pelos Realizáveis Atuariais representados pelos Custos Suplementares Futuros já equacionados com patrocinador e participantes de tal sorte que, para um certo ano  $t$ ,

$$PLC_t = PLD_t + VPCSF_{eq.t} \quad (IV.2.34)$$

Já o Déficit Técnico de Continuação do plano - DTC, o décimo segundo conceito de nossa relação, estaria composto pelo Déficit Técnico de Descontinuação, como descrito acima, e pelo Valor Presente dos Custos Suplementares Futuros não equacionados, funcionando como conta retificadora das Reservas Matemáticas, esta de natureza integralmente atuarial:

$$DTC_t = DTD_t + VPCSF_{neq, t} \quad (IV.2.35)$$

A preservação do caráter estritamente determinístico desta estrutura de Ativo requereria imaginar que o Valor Presente dos Custos Suplementares Futuros equacionados inscritos no Realizável de Curto e Longo Prazos seriam pagamentos certos no futuro como, por exemplo, a assunção de dívidas do patrocinador solvente através de um esquema de amortização pela Tabela Price. Este cenário de evento certo, contudo, não se presta, na teoria, para Custos Suplementares Futuros a serem aportados por participantes vivos, pois o fenômeno decremental é inevitável no longo prazo. A prática só registra os pagamentos certos.

Em décimo terceiro lugar, e ainda no âmbito do Balanço Patrimonial, tem-se o conceito de Reservas Matemáticas - RESMAT, uma conta de nítido caráter atuarial, que na verdade se identifica com uma das faces de nosso quarto conceito, denominada de Passivo Atuarial Prospectivo - PAP. Como ali se disse, o RESMAT<sub>t</sub> é o equivalente certo do caudal de benefícios futuros prometidos a todos os participantes ativos e inativos, reduzido do equivalente certo do caudal de aportes relativos apenas aos Custos Normais Futuros. Assim,

$$RESMAT_t = \sum_x \sum_y VPBF_{x,y} - \sum_x \sum_y VPCNF_{x,y} \quad (IV.2.36)$$

Anotamos como décimo-quarto conceito o que se convencionou chamar de Reservas Técnicas- RESTEC, também chamado de Exigível Atuarial, ou Patrimônio Líquido de Continuação, que nada mais é do que as Reservas Matemáticas diminuídas do Déficit Técnico de Continuação, se existir. É uma rubrica de caráter visivelmente patrimonial, embora resultante da retificação de uma conta atuarial.

$$RESTEC_t = RESMAT_t - DTC_t \quad (IV.2.37)$$

Quando o fundo tem Ativos Totais - ATITOT - maiores do que necessita para cobrir seus exigíveis, atuariais e não atuariais, surgem como décimo quinto e décimo sexto conceitos, a Reserva de Contingência - RESCON - e a Reserva para Melhoria de Benefícios - RESMEB. A primeira se forma pelos primeiros 25 pontos percentuais de sobras com relação à Reserva Matemática. A segunda, pelo que exceder a esse nível de sobras, de tal sorte que

$$\text{RESCON}_t = \text{Min} \begin{cases} \text{ATITOT}_t - \text{EXIGÍVEIS}_t \\ 0,25 \cdot \text{RESMAT}_t \end{cases}$$

e

$$\text{RESMEB}_t = \text{ATITOT}_t - \text{EXIGÍVEIS}_t - \text{RESCON}_t \quad (\text{IV.2.38})$$

Esta visão parcial de continuação do plano já se encontra contaminada com alguns dados de natureza probabilística em seu Ativo e Passivo, mas que não lhe desfiguram significativamente sua feição patrimonial. O Patrimônio Líquido, por exemplo, continua representando a efetiva sobra de recursos que o fundo conseguiu reunir para enfrentar compromissos atuariais futuros já creditados.

É no entanto no Balanço Atuarial, cuja estrutura básica vai mostrada no Quadro IV.2.3, que os elementos estocásticos surgem em toda a sua plenitude, com uma visão total de continuação do plano. Em seu Passivo, as obrigações atuariais são quantificadas pela sua dimensão máxima, pelo Valor Presente dos Benefícios Futuros, creditados ou não, amortizados ou não, relativos a todos os participantes correntes ativos e inativos, pensionistas e dependentes.

No Ativo, por sua vez, em acréscimo ao Patrimônio Líquido de Continuação, egresso do Balanço Patrimonial, são inscritos também os equivalentes certos de todos os Custos Normais Futuros, isto é, das contribuições previstas para serem recolhidas pelo patrocinador e pelos participantes correntes, como nos mostra a linha 9 da Figura IV.2.3.

## QUADRO IV.2.3

## BALANÇO ATUARIAL EM FIM DE EXERCÍCIO

ATIVO	PASSIVO
-PATRIMÔNIO LÍQUIDO DO BALANÇO PATRIMONIAL	-VALOR PRESENTE DOS BENEFÍCIOS FUTUROS
	. Concedidos
	. Benefício 1
	⋮
	. Benefício n
-VALOR PRESENTE DOS CUSTOS NORMAIS FUTUROS DO PATROCINADOR	. A Conceder - Riscos Expirados
	. Benefício 1
	⋮
	. Benefício n
-VALOR PRESENTE DOS CUSTOS NORMAIS FUTUROS DOS PARTICIPANTES ATIVOS	. A Conceder - Riscos Não Expirados
	. Benefício 1
	⋮
	. Benefício n
-VALOR PRESENTE DOS CUSTOS NORMAIS FUTUROS DOS PARTICIPANTES INATIVOS	
	. A Conceder - Riscos Não Expirados
	. Benefício 1
	⋮
	. Benefício n
-INSUFICIÊNCIA ATUARIAL (1)	
	-VALOR PRESENTE DAS DESPESAS ADMINISTRATIVAS
	-SUPERAVIT ATUARIAL (1)
TOTAL	TOTAL

NOTA: (1) Um ou outro

Recordando o significado de Custo Normal como aquela contribuição capaz de manter equilibrado um fundo já equilibrado, ou de manter estávelmente desequilibrado um fundo já desequilibrado, vê-se que a Insuficiência Atuarial - INSATU, nosso décimo sétimo conceito, deve igualar-se ao Déficit Técnico de Continuação já aludido acrescido do Valor Presente das Despesas Administrativas.

Em outras palavras, na passagem do Balanço Patrimonial para o Balanço Atuarial, reconheceu o fundo obrigações relativas a créditos ainda por conquistar em montante igual aos direitos decorrentes das contribuições normais futuras ainda por recolher. A ocorrência desta igualdade indica que os Custos Normais estão corretamente calculados e que não haveria Passivo Atuarial Suplementar não equacionado relativo exclusivamente ao período futuro da vida do fundo, afóra qualquer outro eventual desequilíbrio nascido de eventos passados.

Outro detalhe freqüentemente tratado com viés nos Balanços Atuariais é o nosso décimo oitavo conceito que rotularemos de Valor Presente das Despesas Administrativas - VPDA. Nesta demonstração contábil, essa rubrica deve representar o valor presente de todas as despesas futuras da administração minguante de um plano hipotético que, começando com os participantes correntes, irá se extinguindo gradualmente até a morte do último participante ou dependente.

Dada a dificuldade desse cálculo, é costume computar-se a despesa integral, ao nível corrente, para um determinado número de anos, digamos um, três ou cinco anos, em substituição ao VPDA no ano  $t$ .

Vamos encerrar nossa lista de dezenove conceitos com o mais difícil de enunciar, os Ganhos e Perdas Atuariais - GPA. Tem-se enfatizado até então que tanto os Custos Normais como os Custos Suplementares são grandezas calculadas sob determinadas premissas atuariais, algumas de expressão probabilística, que se presume funcionam perfeitamente para grandes massas de segurados.

Os comportamentos reais do fundo e de seu ambiente, entretanto, diferem dessas premissas por duas razões principais. Primeiro, as próprias premissas resultam de mensurações viesadas, por razões de método ou por eleição infeliz da amostra estudada. Segundo, mesmo que as premissas representem precisamente a realidade reinante, o sub-conjunto dessa realidade, que é o fundo, pode afastar-se da normalidade das premissas por constituir-se um "acidente amostral".

Diante disso, é comum observarem-se discrepâncias entre o planejado pelo estudo atuarial e o ocorrido efetivamente ao longo de um exercício. Se favoráveis ao fundo, constituem-se em Ganhos Atuariais e se desfavoráveis produzem Perdas Atuariais.

São exemplos de Ganhos, dentre outros, os rendimentos dos ativos acima da taxa atuarial do modelo, a cobrança de contribuições de participantes ativos que probabilisticamente deveriam ter morrido no período e o não pagamento de aposentadoria a inativos que atuarialmente deveriam ter sobrevivido ao período.

São exemplos de Perdas Atuariais os rendimentos de ativos abaixo da taxa atuarial adotada, o crédito de benefícios futuros a participantes ativos que probabilisticamente deveriam ter sucumbido no período e o pagamento de pensão a dependentes de inativos que se supunha sobreviveriam ao exercício.

Essas discrepâncias afetam as variáveis fundamentais do modelo atua-

rial como, por exemplo, o Valor Presente dos Benefícios Futuros - VPBF, o Patrimônio Líquido de Continuação - PLC e o Valor Presente dos Custos Normais Futuros - VPCNF. A análise das linhas 1, 7 e 8 da Figura IV.2.3 nos revela que essas divergências das premissas atuariais terminam por produzir um único efeito, qual seja o de determinar discrepância entre o Passivo Atuarial Não Fundado Esperado - PANFE, previsto para o fim do exercício e o Passivo Atuarial Não Fundado Verificado - PANFV, observado no fim desse mesmo exercício, em  $t+1$ .

$$GPA_t = PANFV_{t+1} - PANFE_{t+1} \quad (IV.2.39)$$

As Perdas Atuariais são portanto uma fonte de Passivo Atuarial Suplementar não equacionado enquanto que os Ganhos Atuariais são redutores desse mesmo passivo. Convém ressaltar que ao longo do exercício acontecem eventos geradores de ganhos, outros criadores de perdas e ainda outros determinantes simultaneamente de ganhos e perdas atuariais, como é o caso antes citado da morte prematura de um inativo.

A preocupação primeira é mensurar o efeito líquido desses ganhos e perdas ao longo do exercício e depois decidir como absorver esses afastamentos durante um certo período futuro, para restabelecer o equilíbrio do plano.

O  $PANFV_{t+1}$  é um dado objetivo extraído das demonstrações financeiras em  $t+1$ , mas o  $PANFE_t$  é um dado teórico obtido pela diferença entre o  $PAP_{t+1}$  e o  $PLD_{t+1}$ , ambos esperados para esse momento  $t+1$ .

Simplificadamente,

$$E \left[ PAP_{t+1} \right] = (PAP_t + CN_t - B_t) (1+j) \quad (IV.2.40)$$

$$E \left[ PLD_{t+1} \right] = (PLD_t + CN_t + CS_t - B_t) (1+j) \quad (IV.2.41)$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} GPA_t &= PANFV_{t+1} - \left[ (PAP_t + CN_t - B_t) - (PLD_t + CN_t + CS_t - B_t) \right] (1+j) = \\ &= PANFV_{t+1} - \left[ (PAP_t - PLD_t) - CS_t \right] (1+j) = \\ &= PANFV_{t+1} - \left[ (PANFV_t - CS_t) \right] (1+j) \end{aligned} \quad (IV.2.42)$$

Recebidos integralmente os Custos Normais e Suplementares previstos para o intervalo de  $t$  a  $t+1$ , haverá Ganhos ou Perdas Atuariais nesse intervalo se a diferença entre o Passivo Actuarial Não Fundado Verificado no instante  $t$  e os Custos Suplementares desse período acumulado com juros para  $t+1$  for diferente do Passivo Actuarial Não Fundado Verificado em  $t+1$ .

Os Ganhos ou Perdas Atuariais sendo, em última análise, variações no Passivo Actuarial Suplementar, têm sua absorção feita nos mesmos moldes da eliminação do PAS. Uma Perda Actuarial pode ser resolvida pelo aporte imediato desse montante a partir do patrocinador e ou dos participantes, ou cobrando-se no futuro um caudal de contribuições que tenha por equivalente certo esse montante. Um Ganho Actuarial pode ser absorvido reduzindo-se as contribuições futuras suplementares e até mesmo normais de tal sorte que o equivalente certo dessas reduções valha o montante apurado.

Na verdade, não é necessário nem recomendável absorverem-se os GPA a cada ano, pois, afastamentos negativos de um ano podem ser compensados com afastamentos positivos no ano seguinte. Deve-se acompanhar anualmente essas diferenças para verificar se elas configuram uma tendência que se confirmada de terminaria as correções reclamadas no Passivo Actuarial Suplementar acumulado e, mais que isso, nas premissas atuariais que estão provocando o desequilíbrio constatado e, dessa maneira, rever os próprios Custos Normais a vigorarem no futuro.

Os planos previdenciários complementares existentes oferecem em geral outros benefícios além da aposentadoria dos participantes, sendo os mais importantes a pensão da família sobrevivente e o pecúlio.

O estudo actuarial da pensão segue basicamente os mesmos raciocínios do da aposentadoria. A pensão é um caudal vitalício de pagamentos para o grupo familiar, para a viúva que não contrai novas núpcias e para os dependentes incapazes, e um caudal temporário para dependentes saudáveis. Para tratar corretamente a questão se requer um conjunto de outras premissas atuariais sobre esse novo público segurado.

O pecúlio é como um seguro de vida simples que se paga quando da morte do participante ativo ou inativo. Seu estudo actuarial é dos mais simples e não comporta maiores comentários.

## IV.3. OS ENSINAMENTOS DE TROWBRIDGE

Em 1966, a Harvard Business Review do bimestre Março-Abril trouxe um artigo de Charles L. Trowbridge<sup>4</sup> sob o título "ABC's of Pension Funding" exposto para a comunidade empresarial e sindical americana, de forma singela, sem qualquer conotação matemática, os fundamentos dos planos de previdência complementar.

Desse mesmo assunto o autor<sup>5</sup> já se tinha ocupado em 1952, veiculando na publicação "Transactions" Vol IV. nº 3, da "Society of Actuaries" seu importante trabalho intitulado "Fundamentals of Pension Funding", este de cunho eminentemente técnico e matemático.

Vamos começar pelo artigo mais recente por ter sido escrito em linguagem mais simples e portanto mais introdutória. Nele o autor descreve quatro métodos clássicos de custeio de um fundo de pensão preocupando-se em destacar as vantagens e desvantagens de cada um para os dois entes econômicos diretamente envolvidos com esse tipo de entidade, o empregador e o empregado.

O empregador está preocupado com o esquema cronológico de seus pagamentos, com a flexibilidade de ajustar essas contribuições a sua capacidade financeira e com os reflexos desses dispêndios no seu imposto de renda. O balanço dessas preocupações faz o empregador interessar-se por deslocar para o futuro seus aportes ao fundo, o que implica na constituição de poucas reservas para o plano.

De outra parte, o empregado está basicamente preocupado com a continuação do fundo, com a efetiva recepção de seus benefícios futuros e com a preservação da empresa e do seu emprego. Disso resulta que o empregado deseja contribuições maiores e mais cedo por parte da empresa visando a constituir altos níveis de reservas, mas sem comprometer a estabilidade e sem impedir o crescimento da empresa.

Da comparação desses desejos, vê-se que há pontos de conflito mas há também alguns importantes interesses comuns às duas partes envolvidas.

O primeiro método é o conhecido "Pay as you go" que promete pagar os benefícios à medida que forem sendo devidos, mas sem constituir qualquer reserva.

O empregador não aprecia muito este método porque traz a sensação de estar pagando um complemento de salário relativo a uma produção que já se deu há muitos anos atrás, porque julga estar fortemente comprometido o princípio

(4) TROWBRIDGE, Charles. ABC's of pension funding. Harvard Business Review, pp 115-126. March/April.1966.

(5) TROWBRIDGE, Charles. Fundamentals of pension funding. Transactions of the Society of Actuaries. Vol. 4, p. 17, 1952.

da confrontação de receitas e despesas, porque pode defrontar-se no futuro com altos dispêndios em anos de escassez financeira e, por fim, porque adia os benefícios fiscais dessas contribuições.

O empregado também não julga satisfatório este método de custeio, tendo que a descontinuação do plano ou a falência da empresa venha a frustrar o pagamento de seus benefícios.

Os três métodos restantes, rotulados de A, B e C, se inscrevem na grande família da "fundação antecipada dos benefícios" e, naturalmente, caminham em direção oposta ao anteriormente descrito.

O Método A é concebido no interesse maior do empregador e consiste em adotar, a cada ano, as seguintes medidas:

- 1) calcular o Valor Presente dos Benefícios Futuros -  $VPBF_t$  - relativo a todos os participantes ativos e inativos;
- 2) apurar o Patrimônio Líquido do Fundo -  $PL_t$ ;
- 3) calcular a diferença  $VPBF_t - PL_t$ ;
- 4) aportar p% (entre 5 e 10%) da diferença apurada acima.

As vantagens para o patrocinador seriam a de permitir um espraiamento das contribuições mais ou menos extenso para o futuro na dependência do valor de p adotado e, ainda, a de ensejar o ajustamento anual de p para anos gordos ou magros.

Para o empregado há a preocupação ligada ao baixo nível de reservas produzido, com suas conseqüências danosas em caso de descontinuação do plano ou de insucesso da empresa.

O Método B está desenhado no interesse do empregado e decompõe o Valor Presente dos Benefícios Futuros -  $VPBF_t$  - de cada um dos participantes ativos e inativos, em três parcelas distintas, a saber:

- i) benefícios conquistados com os anos de "serviço passado";
- ii) benefícios conquistados com o "serviço corrente" do ano em curso;
- iii) benefícios a serem conquistados com o "serviço futuro", até a aposentadoria.

Sob este método, o serviço passado deve ser integralmente equacionado, ou pela fundação total à vista ou pela fundação a prestação segundo um esquema qualquer de amortização, ao longo de um prazo mais ou menos longo.

O serviço corrente deve ser integralmente fundado no ano a que se refere, calculado pela porção do VPBF relativo ao crédito daquele ano. Nesse sistema, o custo de um crédito é progressivamente crescente, pois créditos tardi-

os geram menos juros através do investimento dos ativos.

Já o serviço futuro não seria fundado até que se converta em serviço corrente.

As vantagens para o empregado residem no fato de que todos os benefícios já conquistados estariam equacionados, ou pela fundação efetiva das parcelas de serviço passado já vencidas e dos serviços correntes contribuídos como tal ou pelo reconhecimento formal das parcelas restantes de serviço passado, já inscritas no Realizável do plano.

Do ponto de vista do empregador, no entanto, percebe-se que estará pressionado por dois caudais distintos de dispêndios, um de natureza transitória, que é a amortização a prazo do serviço passado, outro de cunho permanente, que é a amortização anual do serviço corrente. Os primeiros anos da vida do plano impõem ao patrocinador, portanto, um maior nível de saídas de caixa.

O Método C está estruturado buscando conciliar ambos os interesses, do empregado e do empregador. Nele se fala pela primeira vez em Custo Normal como sendo aquela contribuição anual nivelada ao longo de toda a vida útil de cada um dos participantes, necessária para fundar por antecipação os benefícios que lhe deverão ser pagos na condição de aposentado. Naturalmente, se determinado participante conta com tempo de serviço anterior ao início do plano, validado para cálculo dos benefícios, tem-se o surgimento do Passivo Atuarial Inicial que demandará um esquema especial de fundação.

Em sua implementação, o Método C requer os seguintes passos:

- 1) cálculo do Valor Presente dos Benefícios Futuros -  $VPBF_t$  - de todos os participantes ativos e inativos;
- 2) cálculo do Custo Normal -  $CN_{x,y}$  para cada um dos participantes ativos em função de suas características de sexo, idade, salário, etc., a serem recolhidos anual e integralmente;
- 3) cálculo do Passivo Atuarial Suplementar para cada um dos participantes que tiveram seu tempo anterior contado para fins de cálculo de benefício,  $PAS_t$  agregado esse que seria fundado por um Custo Suplementar também nivelado e expandido em prazo mais ou menos longo.

O método C, a despeito de sua aparente semelhança, difere significativamente do método B pelo caráter nivelado dos Custos Normais e Suplementares, o que é do agrado do empregador, mas que determina a constituição de reservas maiores e mais cedo, o que é da conveniência do empregado.

QUADRO IV.3.1  
TABELA DE SERVIÇO E NÚMEROS DE COMUTAÇÃO PARA JUROS DE 2,5% A.A.  
PARA USO NOS EXERCÍCIOS DO "FUNDAMENTALS..." DE TROWBRIDGE

IDADE	lx	dx	Dx	Nx	Mx	IDADE
30	100	16	47.674	400.490	37.906	30
31	84	13	39.070	352.816	30.464	31
32	71	11	32.218	313.746	24.565	32
33	60	9	26.562	281.528	19.696	33
34	51	7	22.027	254.966	15.808	34
35	44	4	18.540	232.939	12.859	35
36	40	4	16.444	214.399	11.215	36
37	36	2	14.438	197.955	9.610	37
38	34	2	13.304	183.516	8.828	38
39	32	2	12.216	170.213	8.064	39
40	30	2	11.173	157.997	7.319	40
41	28	1	10.174	146.824	6.593	41
42	27	1	9.571	136.650	6.238	42
43	26	1	8.992	127.079	5.892	43
44	25	1	8.435	118.088	5.555	44
45	24	1	7.900	109.652	5.226	45
46	23	1	7.386	101.752	4.905	46
47	22	1	6.893	94.366	4.591	47
48	21	1	6.419	87.473	4.286	48
49	20	1	5.964	81.054	3.987	49
50	19	1	5.528	75.090	3.696	50
51	18	1	5.109	69.562	3.413	51
52	17	1	4.708	64.452	3.136	52
53	16	1	4.323	59.745	2.866	53
54	15	1	3.954	55.422	2.602	54
55	14	1	3.600	51.468	2.345	55
56	13	0	3.261	47.868	2.094	56
57	13	1	3.182	44.607	9.094	57
58	12	0	2.865	41.425	1.855	58
59	12	1	2.796	38.560	1.855	59
60	11	0	2.500	35.764	1.628	60
61	11	0	2.439	33.264	1.628	61
62	11	1	2.380	30.825	1.628	62
63	10	0	2.111	28.445	1.417	63
64	10	0	2.059	26.334	1.417	64
65	10	0	2.009	24.275	1.417	65
66	10	1	1.960	22.267	1.417	66
67	9	0	1.721	20.307	1.226	67
68	9	0	1.679	18.586	1.226	68
69	9	1	1.638	16.907	1.226	69
70	8	0	1.420	15.269	1.048	70
71	8	0	1.386	13.849	1.048	71
72	8	1	1.352	12.463	1.048	72
73	7	0	1.154	11.111	0.883	73
74	7	0	1.126	9.957	0.883	74
75	7	1	1.099	8.831	0.883	75
76	6	0	0.919	7.732	0.730	76
77	6	0	0.896	6.814	0.730	77
78	6	1	0.874	5.917	0.730	78
79	5	0	0.711	5.043	0.588	79
80	5	1	0.694	4.332	0.588	80

FONTE: Trabalho do Trowbridge e cálculos do autor.

continua

QUADRO IV.3.1 (continuação)  
 TABELA DE SERVIÇO E NÚMEROS DE COMUTAÇÃO PARA JUROS DE 2,5% A.A.  
 PARA USO NOS EXERCÍCIOS DO "FUNDAMENTALS..." DE TROWBRIDGE

IDADE	lx	dx	Dx	Nx	Mx	IDADE
81	4	0	0.541	3.639	0.453	81
82	4	0	0.528	3.097	0.453	82
83	4	1	0.515	2.569	0.453	83
84	3	0	0.377	2.054	0.327	84
85	3	1	0.368	1.677	0.327	85
86	2	0	0.239	1.309	0.207	86
87	2	1	0.233	1.070	0.207	87
88	1	0	0.114	0.837	0.093	88
89	1	0	0.111	0.723	0.093	89
90	1	0	0.108	0.612	0.093	90
91	1	0	0.106	0.503	0.093	91
92	1	0	0.103	0.398	0.093	92
93	1	0	0.101	0.295	0.093	93
94	1	0	0.098	0.194	0.093	94
95	1	1	0.096	0.096	0.093	95
96	0	0	0.000	0.000	0.000	96

FONTE: Trabalho do Trowbridge e cálculos do autor.

Em conclusão, a fundação antecipada pode ser feita por uma miríade de métodos que permitem proporcionar uma melhor cronologia de aportes para o empregador e uma maior segurança para o empregado do que o simplório método do "pagar benefícios à medida que eles se tornam devidos".

Procurando compatibilizar as nomenclatura e notação do autor com as que desenvolvemos linhas atrás, passemos agora ao "Fundamentals of Pension Funding" de Trowbridge<sup>6</sup> onde o autor começa por introduzir conceitos e explicitar as hipóteses de trabalho, prossegue classificando vários métodos de "funding" sob condições ideais e termina por abordar o traiçoeiro tema dos Ganhos e Perdas Atuariais.

Para circunscrever o cenário sobre o qual vai discorrer, Trowbridge seleciona um longo conjunto de premissas simplificadoras que vão abaixo resumidas:

1. a população de 1.150 participantes, desde o momento do estabelecimento do fundo, é estacionária tanto no subconjunto dos ativos, 1.000, como no dos inativos, 150, valendo dizer que a passagem dos anos não altera o vetor  $l_x$  previsto na Tabela de Serviço adiante mostrada e que se cumpre rigorosamente, tendo por limite a idade inatingível,  $w$ , de 96 anos;
2. todos os anos é admitido um contingente constante de 100 novos participantes,  $l_y$ , com a idade homogênea de 30 anos, que é a mais jovem idade da Tabela de Serviço;
3. a aposentadoria se dá apenas por idade e todos os anos são aposentados um número constante de 10 participantes,  $l_a$ , com a idade homogênea,  $a$ , de 65 anos;
4. a cada ano os decrementos entre os ativos são os mesmos em cada idade no ambiente tri-decremental da morte, das saídas do emprego e da aposentadoria; dos 1.000 ativos, 10 se aposentam, 90 morrem em serviço ou deixam o emprego e 100 novos jovens são contratados; sobre o grupo de 150 inativos atua apenas o fenômeno decremental da morte com 10 vidas ceifadas por ano;
5. o único benefício oferecido é a aposentadoria vitalícia por idade aos 65 anos, constante ao longo do período de pagamento, igual para todos os inativos e no montante de \$ 420.00 por ano;
6. a escala de salários,  $s_x$ , na fase ativa é função unicamente da idade,  $x$ , fazendo com que o salário terminal,  $s_a$ , seja igual para todos;

(6) TROWBRIDGE, Charles. Fundamentals of pension funding. Transactions of the Society of Actuaries. Vol. 4, p. 17, 1952.

7. o plano se instala no início de ano, concedendo aos ativos créditos pelo tempo de serviço já decorrido e aos inativos o benefício integral da aposentadoria vitalícia; o Passivo Atuarial Inicial é amortizado em 20 anos, naqueles métodos que admitem esse tratamento;
8. nenhum aposentado paga contribuição;
9. a taxa anual dos juros é constante e igual a 2,5% ao ano;
10. a cada início de ano se processa:
  - o recebimento antecipado das contribuições anuais, C, que é uma constante, quando atingido o regime estacionário;
  - o pagamento antecipado dos benefícios anuais, B, que é outra constante, quando alcançado o equilíbrio do fundo;
  - o recebimento postecipado dos juros relativos às aplicações financeiras do ano anterior, F, uma terceira constante de cada modelo, quando atingida a maturidade financeira do plano;
  - a aplicação das sobras, após a recepção dos direitos e o pagamento das obrigações, que terminam por ser o mesmo montante do ano anterior, quando alcançado o "steady state" do plano.

Dessa situação idealizada pelo autor, na forma de uma população estável e um fundo maduro, surge o que ele chama de Equação de Maturidade, que se expressa por

$$C + j.F = B \quad (\text{IV.3.1})$$

onde B e j são grandezas inteiramente independentes do método de custeio que o plano venha a adotar. Em todas as fórmulas adiante se adotará a simplificação do benefício de \$1.00 por indivíduo e por ano, o que leva a grandezas relativas à unidade de compromisso anual do plano.

Os nove métodos que aqui são estudados estão delimitados por duas situações extremas. Na primeira, Classe I, todos os benefícios, B, estão financiados exclusivamente pelas contribuições, C, sendo nula a colaboração das rendas financeiras e conseqüentemente nulo o fundo, F. Este extremo é, portanto, o "Pay as You Go", que o autor catalogou como Fundação Classe I, onde

$$F_t = 0; C_t = \sum_{x=a}^w l_x = B_t = 150 \quad (\text{IV.3.2})$$

O Quadro abaixo mostra a evolução desse tipo de arranjo financeiro.

QUADRO IV.3.2  
 FUNDAÇÃO CLASSE I: "PAY AS YOU GO"  
 BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	0	63.000	0	63.000	0
2	"	"	"	"	"
3	"	"	"	"	"
4	"	"	"	"	"
5	"	"	"	"	"
10	"	"	"	"	"
15	"	"	"	"	"
20	"	"	"	"	"
21	"	"	"	"	"
25	"	"	"	"	"
30	"	"	"	"	"
35	"	"	"	"	"
40	"	"	"	"	"
50	"	"	"	"	"
Infinito	0	63.000	0	63.000	0

NOTAS: (1) saldo não amortizado no começo do ano;

(2) fluxo no começo do ano;

(3) saldo acumulado no fim do ano.

No outro extremo, as contribuições são nulas e os benefícios são pagos integralmente às custas das rendas financeiras de uma aplicação em perpetuidade de dimensão  $F$ . Temos aqui o que o autor chamou de "Fundação Completa" e catalogou como Fundação Classe VI. Não apresenta grande utilidade prática mas é importante do ponto de vista didático. Nele a fundação cobre todo serviço passado e futuro de ativos e inativos fazendo com que os benefícios sejam pagos só com os juros anuais. Resumidamente, tem-se:

$$C_t = 0 \quad ; \quad F_t = \frac{B}{j} = \frac{1}{j} \cdot \sum_{x=a}^w 1_x = \frac{150}{0,025} = 6.000 \quad (\text{IV.3.3})$$

No quadro seguinte pode-se observar o comportamento deste método de custeio.

QUADRO IV.3.3  
FUNDAÇÃO CLASSE VI: FUNDAÇÃO COMPLETA EM 20 ANOS  
BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	2.583.000	0	161.651	161.651	101.117
2	2.481.883	"	"	"	204.762
3	2.378.238	"	"	"	310.998
4	2.272.002	"	"	"	419.890
5	2.163.110	"	"	"	531.504
10	1.576.428	"	"	"	1.132.853
15	912.652	"	"	"	1.813.223
20	161.651	"	161.651	161.651	2.583.000
21	0	"	0	0	"
25	"	"	"	"	"
30	"	"	"	"	"
35	"	"	"	"	"
40	"	"	"	"	"
50	"	"	"	"	"
Infinito	0	0	0	0	2.583.000

NOTAS: (1) saldo não amortizado no começo do ano, antes do CS;

(2) fluxo no começo do ano;

(3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

Na passagem do extremo de fundação nula para o de fundação completa, vamos nos deparar com métodos de crescente formação de reservas, começando com o que o autor rotulou de "Fundação Terminal", ou Fundação Classe II.

Este método não funda nenhum crédito para os ativos. Com respeito aos inativos, o Valor Presente dos Benefícios Futuros na idade da aposentadoria,  $VPBF_a$ , de cada um dos participantes que se aposenta no ano genérico  $t$ , é aportado ao fundo no momento da sua aposentadoria. Assim sendo, o Custo Normal para o agregado do fundo para o ano genérico  $t$ , inclusive na inauguração do plano, está dado por

$$CN_t = l_a \cdot \dot{a}_a = l_a \frac{Na}{Da} = 10 \frac{24.275}{2.009} = 120,83 \quad (IV.3.4)$$

Como o plano se inaugura creditando anos não contribuídos para os já inativos nessa data, ele nasce com Passivo Atuarial Inicial que deve ser integralmente amortizado no início de seu funcionamento. Esse Custo Suplementar só ocorre na instalação do plano e está dado por

$$CS_1 = \sum_{x=a+1}^w \left[ l_x \cdot \ddot{a}_x \right] = F_t = 1.195,48 \quad (IV.3.5)$$

que também representa a dimensão permanente do Fundo ao longo de toda a sua vida.

As contribuições da cada ano acrescidas dos juros sobre esse fundo i gualam o montante dos benefícios pagos a cada ano, segundo a Equação de Maturidade,

$$l_a \ddot{a}_a + j \cdot \sum_{x=a+1}^w \left[ l_x \cdot \ddot{a}_x \right] = \sum_{x=a}^w l_x = 150 \quad (IV.3.6)$$

O Quadro a seguir retrata o funcionamento desse processo de custeio.

QUADRO IV.3.4  
FUNDAÇÃO CLASSE II: FUNDAÇÃO TERMINAL  
BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	502.104	50.753	502.104	552.857	502.104
2	0	"	0	50.753	"
3	"	"	"	"	"
4	"	"	"	"	"
5	"	"	"	"	"
10	"	"	"	"	"
15	"	"	"	"	"
20	"	"	"	"	"
21	"	"	"	"	"
25	"	"	"	"	"
30	"	"	"	"	"
35	"	"	"	"	"
40	"	"	"	"	"
50	"	"	"	"	"
Infinito	0	50.753	0	50.753	502.104

NOTAS: (1) saldo não amortizado no começo do ano, antes de CS;

(2) fluxo no começo do ano;

(3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

A Fundação Classe III já contempla a constituição de reservas para os participantes ativos, e o Método da Unidade de Crédito deriva o seu nome do fato de que cada indivíduo, a cada ano, tem fundado o crédito relativo a esse ano. Para o indivíduo, quanto mais longe estiver da aposentadoria, mais barata é a fundação desse crédito, pois essa contribuição passará muitos anos rendendo juros para compor aquela fração de  $VPBF_a$  na data da aposentadoria.

A nível individual, portanto, a contribuição monetária cresce a cada ano e estaria expressa por

$$CN_{x,y} = \frac{1}{a-y} \cdot a-x | \ddot{a}_x \quad (IV.3.7)$$

Como o grupo é estacionário, o Custo Normal agregado do plano termina sendo constante ao longo de toda a sua existência e se quantificaria por

$$CN_t = \frac{1}{a-y} \sum_{x=y}^{a-1} \left[ 1_x \cdot a-x | \ddot{a}_x \right] = \frac{1}{65-30} \times 2.796,90 = 79,91 \quad (IV.3.8)$$

Neste caso, o Passivo Atuarial Inicial - PAI - tem origem em duas fontes, a dos inativos, pelos anos de sobrevivência em cada idade  $x \geq a$ , dado por

$$PAI_{\text{inativos}} = \sum_{x=a}^w \left[ 1_x \cdot \ddot{a}_x \right] = 1.316,33 \quad (IV.3.9)$$

e a dos ativos, pelo serviço passado, dado por

$$PAI_{\text{ativos}} = \frac{1}{a-y} \sum_{x=y}^{a-1} \left[ (x-y) 1_x \cdot a-x | \ddot{a}_x \right] = \frac{1}{35} \times 54.505,53 = 1.557,30 \quad (IV.3.10)$$

e pode ser fundado de diferentes maneiras, à vista ou a prazo segundo diferentes esquemas de amortização, buscando-se completar o aporte antes da data da aposentadoria, do respectivo participante. O autor adotou amortizá-lo em 20 anos por uma série de pagamentos certos, tipo "begin", do patrocinador.

Quando esse Passivo Suplementar estiver todo amortizado, a dimensão do fundo estará expressa pelo somatório das Equações IV.3.9 e IV.3.10 e se tornará constante dadas as condições especiais do grupo.

O Quadro que a seguir se apresenta reflete o desenvolvimento financeiro deste esquema.

QUADRO IV.3.5  
FUNDAÇÃO CLASSE III: POR UNIDADE DE CRÉDITO  
BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	1.206.924	33.563	75.532	109.095	47.248
2	1.159.676	"	"	"	95.677
3	1.111.248	"	"	"	145.316
4	1.061.608	"	"	"	196.197
5	1.010.728	"	"	"	248.350
10	736.597	"	"	"	529.335
15	426.443	"	"	"	847.244
20	75.532	"	75.532	109.095	1.206.924
21	0	"	0	33.563	"
25	"	"	"	"	"
30	"	"	"	"	"
35	"	"	"	"	"
40	"	"	"	"	"
50	"	"	"	"	"
Infinito	0	33.563	0	33.563	1.206.924

NOTAS: (1) saldo não amortizado no começo do ano, antes do CS;

(2) fluxo no começo do ano;

(3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

A Fundação Classe IV se desdobra em quatro métodos de custeio que terminam por apresentar a mesma contribuição anual e alcançar o mesmo nível de reservas quando atingem o estado estacionário na maturidade.

O primeiro deles chama-se de Método Normal por Idade de Entrada, nome esse que traduz a forma de cobrar o Custo Normal individual como um montante constante ao longo da vida ativa normal de 35 anos de cada participante e que se expressa por:

$$CN_{x,y} = \frac{a-y | \ddot{a}_y}{\ddot{a}_{y:a-y}} = \frac{VP \text{ em } y \text{ dos Benef. depois de } a}{VP \text{ em } y \text{ das Contrib. entre } y \text{ e } a} = 0,064524 \quad (\text{IV.3.11})$$

Mais uma vez, devido à particularíssima estrutura estacionária do grupo, o Custo Normal para o fundo também é constante e mensurado por:

$$CN_t = \frac{a-y | \ddot{a}_y}{\ddot{a}_{y:a-y}} \sum_{x=y}^{a-1} 1_x = 0,064524 \times 1.000 = 64,52 \quad (\text{IV.3.12})$$

Este é o primeiro método que se ajusta proxivamente aos conceitos resumidos na Figura IV.2.3, onde se vê que para um fundo qualquer a Reserva Matemática ou Passivo Atuarial Prospectivo deve ser a diferença entre o Valor Presente dos Benefícios Futuros e o Valor Presente dos Custos Normais Futuros.

$$\begin{aligned} \text{RESMAT} &= \text{VPBF}_{\text{ativos}} + \text{VPBF}_{\text{inativos}} - \text{VPCNF}_{\text{ativos}} = \text{PAI} = \\ &= \sum_{x=y}^{a-1} \left[ 1_x \cdot a^{-x} | \ddot{a}_x \right] + \sum_{x=a}^w \left[ 1_x \cdot \ddot{a}_x \right] - \frac{a-y}{a} \frac{| \ddot{a}_y}{y:a-y} \sum_{x=y}^{a-1} \left[ 1_x \cdot \ddot{a}_{x:a-x} \right] \quad (\text{IV.3.13}) \end{aligned}$$

É bem verdade que a integral constituição do Fundo ou do Patrimônio Líquido só alcança este nível quando todo o Passivo Atuarial Inicial estiver amortizado, o que, a exemplo do método anterior, pode ser feito de diferentes maneiras, em diferentes velocidades. Uma vez atingido esse estágio, o Passivo Atuarial Não Fundado cai a zero e o Fundo assume de forma constante o montante expresso pela equação IV.3.13.

Mais uma vez o autor, em seu exemplo numérico, optou por amortizar esse Passivo Atuarial Inicial em 20 anos com uma série tipo "begin" de pagamentos determinísticos como só pode ser debitada ao patrocinador, ao qual não se está atribuindo qualquer probabilidade de quebra.

O Quadro seguinte mostra o desempenho deste esquema de custeio.

QUADRO IV.3.6  
FUNDAÇÃO CLASSE IV: 1) MÉTODO NORMAL POR IDADE DE ENTRADA  
BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	1.471.873	27.101	92.113	119.214	57.620
2	1.414.253	"	"	"	116.680
3	1.355.193	"	"	"	177.217
4	1.294.657	"	"	"	239.267
5	1.232.607	"	"	"	302.868
10	898.298	"	"	"	645.536
15	520.057	"	"	"	1.033.233
20	92.113	"	92.113	119.214	1.471.873
21	0	"	0	27.101	"
25	"	"	"	"	"
30	"	"	"	"	"
35	"	"	"	"	"
40	"	"	"	"	"
50	"	"	"	"	"
Infinito	0	27.101	0	27.101	1.471.873

NOTAS: 1) saldo não amortizado no começo do ano, antes do CS;

2) fluxo no começo do ano;

3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

O segundo método da classe IV foi chamado pelo autor de Prêmio Nivelado Individual por expressar a seguinte idéia: todos os participantes ativos, quer entrantes aos 30 anos depois da inauguração do plano, quer presentes nessa inauguração já com serviço passado, terão suas reservas individuais preenchidas com uma série uniforme probabilística antecipada. Para os novatos este é o conhecido conceito de Custo Normal. Para os já presentes à instalação do plano, a contribuição individual é como que um "Custo Normal Ajustado" para o prazo que cada um ainda tem de vida ativa, e que incorpora o Custo Normal do entrante novato, mais um Custo Suplementar nivelado, função desse serviço futuro por realizar.

Nessa ordem de idéias, o Passivo Atuarial Inicial dos inativos, que não têm mais serviço futuro, deve ser integralmente fundado na data de instalação do plano e no montante dado pela Equação IV.3.9.

Nessa mesma data também deverá ser fundado o PAI dos ativos que se apossentarão no decorrer do primeiro ano de vida do plano.

Para um ativo com idade  $x$ , inclusive 64 anos, presente na inauguração do plano, o Custo Normal Ajustado a sua idade seria dado por

$$CNA_{x,y} = \frac{a-x | \ddot{a}_x}{a \cdot \frac{x}{x:a-x}} = \frac{VP \text{ em } x \text{ dos Benef. depois de } a}{VP \text{ em } x \text{ das Contrib. entre } x \text{ e } a} \quad (IV.3.14)$$

Como dissemos, este Custo Normal Ajustado do participante fundador se compõe do Custo Normal para o entrante novato na idade de 30 anos, dado pela Equação IV.3.11, e por um Custo Suplementar nivelado dado pela diferença entre as Equações IV.3.14 e IV.3.11, tal que

$$CS_{x,y} = \frac{a-x | \ddot{a}_x}{a \cdot \frac{x}{x:a-x}} - \frac{a-y | \ddot{a}_y}{a \cdot \frac{y}{y:a-y}} \quad (IV.3.15)$$

Assim sendo, temos que a Contribuição Inicial na data da instalação do plano estaria quantificada por

$$CI = \sum_{x=y}^{a-1} \left[ l_x \cdot \frac{a-x | \ddot{a}_x}{a \cdot \frac{x}{x:a-x}} \right] + \sum_{x=a}^w \left[ l_x \cdot \ddot{a}_x \right] \quad (IV.3.16)$$

onde o primeiro termo refere-se aos fundadores ativos e o segundo aos inativos.

Para um ano  $t+1$  qualquer, no período de 34 anos após a inauguração, a Contribuição Total está dada por

$$C_{t+1} = \sum_{x=y+t+1}^{a-1} \left[ 1_x \cdot \frac{a-x+t | \ddot{a}_{x-t}}{x-t:a-x+t} \right] + \sum_{x=y}^{y+t} \left[ 1_x \cdot \frac{a-y | \ddot{a}_y}{y:a-y} \right] \quad (\text{IV.3.17})$$

onde o primeiro termo se refere aos participantes ativos fundadores remanescentes e o segundo aos participantes novatos.

O Quadro abaixo registra o desenvolvimento das principais variáveis deste método aplicado ao exemplo numérico do autor.

QUADRO IV.3.7

FUNDAÇÃO CLASSE IV: 2) MÉTODO DO PRÊMIO INDIVIDUAL NIVELADO

BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	1.471.873	27.101	745.566	772.667	727.409
2	744.465	"	137.505	164.606	849.740
3	622.134	"	108.526	135.627	945.426
4	526.448	"	89.276	116.377	1.023.774
5	448.101	"	74.906	102.007	1.089.350
10	203.660	"	34.530	61.631	1.298.517
15	88.230	"	16.297	43.398	1.398.142
20	33.680	"	7.247	34.348	1.444.780
21	27.094	"	6.076	33.177	1.450.331
25	9.864	"	2.754	29.855	1.464.588
30	1.470	"	659	27.760	1.471.046
35	0	"	0	27.101	1.471.873
40	"	"	"	"	"
50	"	"	"	"	"
Infinito	0	27.101	0	27.101	1.471.873

NOTAS: (1) saldo não amortizado no começo do ano, antes da CS;

(2) fluxo no começo do ano;

(3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

O terceiro método da Classe IV é o denominado Fundação Agregada e deriva seu nome do fato de não fazer cálculos a nível individual, dimensionando os Custos Normais e Suplementares e a formação do Fundo só a nível coletivo.

Este método apresenta o mesmo Custo Normal Agregado e o mesmo Passivo Atuarial Inicial Agregado já revelado pelos dois anteriores de sua classe, mas a amortização desse PAI se faz num prazo muito longo, tendendo para infi-

nito, implicando a existência de Custos Suplementares por igual período.

O Custo Normal Agregado está dado pela Equação IV.3.12, mas ele só se iguala à Contribuição Agregada para o plano quando são decorridos muitos anos de sua implantação, havendo sempre até lá um resíduo de Custo Suplementar embutido nessa contribuição. Assim,

$$CN_t = C_\infty = \frac{a-y | \ddot{a}_y}{\ddot{a}_y : a-y} \sum_{x=y}^{a-1} 1_x = 0,064524 \times 1.000 = 64,524 \quad (\text{IV.3.18})$$

A contribuição para o agregado do grupo, relativa a \$1 de benefício, está dada por

$$C_t = \frac{\sum_{x=y}^{a-1} \left[ 1_x \cdot a-x | \ddot{a}_x \right] + \sum_{x=a}^w \left[ 1_x \cdot \ddot{a}_x \right] - F_{t-1}}{\sum_{x=y}^{a-1} \left[ 1_x \cdot \ddot{a}_{x:a-x} \right]} \cdot \sum_{x=y}^{a-1} 1_x \quad (\text{IV.3.19})$$

ou, posta de forma vernacular,

$$C_t = \frac{\left( \begin{array}{l} \text{Valor Presente por} \\ \text{Unidade de Benefício} \\ \text{Referente aos Ativos} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Valor Presente por} \\ \text{Unidade de Benefício} \\ \text{Referente aos Inativos} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{Fundo por} \\ \text{Unidade de} \\ \text{Benefício} \end{array} \right)_{t-1}}{\left( \text{Valor Presente das Contribuições Futuras dos Ativos} \right)} \times \left( \begin{array}{l} \text{Número} \\ \text{de} \\ \text{Ativos} \end{array} \right)$$

Esta Equação comporta alguns comentários. Primeiro,  $C_t$  só depende de  $t$  no termo  $F_{t-1}$ . Todas as demais expressões são constantes para o grupo hipotético já referido. Assim,

$$\sum_{x=y}^{a-1} \left[ 1_x \cdot a-x | \ddot{a}_x \right] = 2.796,9; \quad \sum_{x=a}^w \left[ 1_x \cdot \ddot{a}_x \right] = 1.316,3;$$

$$\sum_{x=y}^{a-1} \left[ 1_x \cdot \ddot{a}_{x:a-x} \right] = 9.434,6; \quad \sum_{x=y}^{a-1} 1_x = 1.000,$$

enquanto  $F_{t-1}$  é o resultado da divisão do Fundo Agregado por \$420 de Benefício-

cio por aposentado por ano.

O numerador é assim a diferença entre o Valor Presente dos Benefícios Futuros - VPBF e o Patrimônio Líquido de Descontinuação - PLD, ou seja, é a soma do Passivo Atuarial Não Fundado - PANF com o Valor Presente dos Custos Normais Futuros - VPCNF, tudo de acordo com a Figura IV.2.3, quando  $DTD = 0$ .

Como o denominador é uma constante, a Contribuição Total a cada ano  $t$  é uma certa percentagem do VPBF não fundado. É por isso que a fundação leva um tempo infinito, porque se aporta sempre em uma mesma percentagem do saldo, que tende para zero enquanto que o Fundo tende para o valor estável do Passivo Atuarial Inicial.

Outro detalhe digno de menção é que a Equação IV.3.19 não inclui no numerador os benefícios e no denominador as contribuições da primeira onda de novatos com 30 anos que vai substituir já no primeiro ano de vida do plano os fundadores com 64 anos, nascendo desse fato a primeira sobra para a primeira constituição de reservas que dá origem ao processo de acumulação.

O Quadro IV.3.8 desvenda o andamento do plano que só atinge a estabilidade ao nível de centavo na Contribuição Total e no Patrimônio Líquido depois de 150 anos de funcionamento, segundo simulação procedida com a intenção de investigar a convergência do modelo.

QUADRO IV.3.8  
FUNDAÇÃO CLASSE IV: 3) FUNDAÇÃO AGREGADA  
BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	1.471.873	27.101	156.008	183.109	123.112
2	1.348.761	"	142.959	170.060	235.926
3	1.235.947	"	131.002	158.103	339.304
4	1.132.569	"	120.044	147.145	434.036
5	1.037.838	"	110.003	137.104	520.844
10	670.584	"	71.077	98.178	857.380
15	433.288	"	45.925	73.026	1.074.828
20	279.963	"	29.674	56.775	1.215.329
21	256.546	"	27.192	54.293	1.236.788
25	180.894	"	19.173	46.274	1.306.112
30	116.882	"	12.388	39.489	1.364.770
35	75.522	"	8.004	35.105	1.402.671
40	48.797	"	5.172	32.273	1.427.160
50	20.372	"	2.159	29.260	1.453.208
Infinito	0	27.101	0	27.101	1.471.873

NOTAS: (1) saldo não amortizado no começo do ano, antes do CS;  
(2) fluxo no começo do ano;  
(3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

O quarto e último método da Classe IV é chamado de Método Normal por Idade Atingida e apresenta características que o aproximam do Método da Unidade de Crédito e dos Métodos por Idade de Entrada e Agregado, recém-descritos.

Com o da Unidade de Crédito, ele tem em comum o princípio de que o benefício a ser proporcionado na aposentadoria deverá ser dividido em tantas unidades quantos forem os anos de filiação ao plano, separando também o que é "serviço passado" do que é "serviço futuro". Mas o Método Unidade de Crédito é homogêneo no tratamento desses créditos, usando os do serviço passado dos ativos fundadores e dos inativos para medir o Passivo Atuarial Inicial do Plano e usando os créditos do serviço futuro dos ativos para dimensionar o Custo Normal que é crescente para o indivíduo mas nivelado para o particular grupo adotado como exemplo pelo autor.

Contrariamente, o método sob análise funda os créditos do serviço futuro com o emprego do Método Agregado que, como vimos, produz contribuições decrescentes com fundação total só no tempo infinito. O método de fundação agregado trabalha à semelhança do método de depreciação "declining balance", fazendo decrementos em percentuais constantes mas sem lançar, como faz este, um decremento tampão para encerrar o processo.

Além do mais, este método divide a amortização do Passivo Atuarial Inicial de \$1.471.873 em dois processos. O primeiro funda por uma série uniforme de pagamentos certos o montante de \$1.206.924, que é exatamente o montante de PAI reconhecido pelo Método da Unidade de Crédito e que corresponde aos direitos na inauguração do plano dos inativos e ativos fundadores. O segundo funda a diferença de \$264.949 que o separa do PAI da classe IV, cujo representante mais legítimo é o Método por Idade de Entrada, que pratica um Custo Normal menor que a "Contribuição do Serviço Futuro" usada neste método. É exatamente essa discrepância que se constitui no vetor probabilístico, decrescente e infinitamente longo, chamado de Custo Suplementar Contido na Contribuição de Serviço Futuro e que funda os \$264.949 aludidos.

O Quadro IV.3.9 exhibe os principais detalhes deste método, revelando que o Passivo Atuarial Inicial, o Custo Suplementar Contido no Serviço Futuro, o Custo Suplementar Total, a Contribuição Total e o Patrimônio Líquido são vetores que só adquirem estabilidade no tempo infinito.

As equações do Custo Suplementar tipo Unidade de Crédito são as mesmas IV.3.9 e IV.3.10 daquele método, enquanto que a equação do Custo Normal contido no Serviço Futuro é a mesma Equação IV.3.12 do Método por Idade de Entrada.

A equação central deste método é a que quantifica a Contribuição Coletiva do Serviço Futuro, Normal e Suplementar, para um ano genérico  $t$ , e que para a unidade de benefício está dada por

$$CSF_t = \frac{VPBF_t - \left( \begin{array}{c} \text{Saldo não Fundado} \\ \text{do Passivo Atuarial} \\ \text{do Serviço Passado} \end{array} \right)_t - \left( \begin{array}{c} \text{Patrimônio} \\ \text{Líquido} \end{array} \right)_{t-1}}{\left( \text{Valor Presente das Contribuições Futuras dos Ativos} \right)_t} \cdot \left( \begin{array}{c} \text{Total de} \\ \text{Participantes} \end{array} \right)_t$$

## QUADRO IV.3.9

FUNDAÇÃO CLASSE IV: 4) MÉTODO NORMAL POR IDADE ATINGIDA

BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL (1)	CUSTO NORMAL CONTIDO NO SERVIÇO FUTURO (2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)		CONTRIBUIÇÃO TOTAL (2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO (3)	
			TIPO UNIDADE CRÉDITO	CONTIDO NO SERV. FUTURO			
1	1.471.873	27.101	75.532	28.083	103.615	130.716	69.409
2	1.402.464	"	"	25.734	101.266	128.367	138.145
3	1.333.728	"	"	23.581	99.114	126.215	206.394
4	1.265.480	"	"	21.609	97.141	124.242	274.327
5	1.197.547	"	"	19.803	95.336	122.437	342.108
10	857.307	"	"	12.794	88.326	115.427	683.671
15	504.438	"	"	8.267	83.799	110.900	1.040.721
20	125.928	"	75.532	5.342	80.874	107.975	1.425.696
21	46.180	"	0	4.895	4.895	31.995	1.429.559
25	32.562	"	"	3.451	3.451	30.552	1.442.038
30	21.040	"	"	2.230	2.230	29.331	1.452.596
35	13.594	"	"	1.441	1.441	28.542	1.459.419
40	8.784	"	"	931	931	28.032	1.463.827
50	3.667	"	"	389	389	27.489	1.468.516
Infinito	0	27.101	0	0	0	27.101	1.471.873

NOTAS: (1) saldo amortizado no começo do ano, antes do CS;

(2) fluxo no começo do ano;

(3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

ou,

$$CSF_t = \frac{\sum_{x=y}^{a-1} \left[ l_x \cdot a-x \cdot \ddot{a}_x \right] + \sum_{x=a}^w \left[ l_x \cdot \ddot{a}_x \right] - PAI(\text{Serv. Passado})_t - PATLIQ_{t-1}}{\sum_{x=y}^{a-1} \left[ l_x \cdot \ddot{a}_{x:a-x} \right]} \cdot \sum_{x=y}^{a-1} l_x$$

(IV.3.20)

Uma simulação em computador revelou que, à semelhança do Método Agregado, este exemplo numérico do autor só estabiliza, a nível de centavos, na altura de 150 anos de funcionamento do plano.

O único método da Classe V, denominado Fundação Inicial, é referido como de pouca utilidade prática, mas de bom interesse didático. Ele acumula reservas mais altas e determina contribuições mais baixas que qualquer das classes precedentes, exceto o da classe VI, que só por conveniência de exposição foi citado antes.

Esse tipo de custeio funda integralmente os benefícios do participante tão logo ele entra no plano na idade de 30 anos e como, na situação hipotética do exemplo, são admitidos  $l_y$  participantes cada ano, o Custo Normal coletivo para a unidade de benefício está dado por

$$CN_t = l_y a_{-y} | \ddot{a}_y \quad (IV.3.21)$$

Já o Passivo Atuarial Inicial, maior que na Classe IV, é quantificado para a unidade de benefício por

$$PAI = \sum_{x=y+1}^{a-1} \left[ l_x \cdot a_{-x} | \ddot{a}_x \right] + \sum_{x=a}^w \left[ l_x \cdot \ddot{a}_x \right] = \quad (IV.3.22)$$

$$= 2.746,0 + 1.316,3 = 4.062,3 ;$$

para \$420 de benefício per capita por ano, o PAI coletivo eleva-se para \$1.706.173.

Notar que os participantes fundadores com 30 anos terão sua reserva integral feita com o aporte de um só Custo Normal, enquanto que todos os outros fundadores obterão sua reserva integral pelo aporte de Custos Suplementares, o que pode ser feito à vista, ou em parcelas.

Mais uma vez, o autor resolveu amortizar esse Passivo Atuarial Inicial com uma série de pagamentos uniformes certos tipo "begin" e no prazo de 20 anos. O Quadro IV.3.10 mostra detalhes adicionais deste arranjo securitário.

QUADRO IV.3.10  
FUNDAÇÃO CLASSE V: FUNDAÇÃO INICIAL  
BENEFÍCIO ANUAL TOTAL = \$63.000

ANO	PASSIVO ATUARIAL INICIAL(1)	CUSTO NORMAL(2)	CUSTO SUPLEMENTAR (2)	CONTRIBUIÇÃO TOTAL(2)	PATRIMÔNIO LÍQUIDO(3)
1	1.706.173	21.386	106.777	128.163	66.792
2	1.639.381	"	"	"	135.253
3	1.570.920	"	"	"	205.427
4	1.500.746	"	"	"	277.354
5	1.428.819	"	"	"	351.080
10	1.041.290	"	"	"	748.294
15	602.838	"	"	"	1.197.706
20	106.777	"	106.777	128.163	1.706.173
21	0	"	0	21.386	"
25	"	"	"	"	"
30	"	"	"	"	"
35	"	"	"	"	"
40	"	"	"	"	"
50	"	"	"	"	"
Infinito	0	21.386	0	21.386	1.706.173

NOTAS: (1) saldo não amortizado no começo do ano, antes do CS;  
(2) fluxo no começo do ano;  
(3) saldo acumulado no fim do ano, inclusive juros.

Uma revisão destes nove métodos através do grupo hipotético descrito mostra que o Passivo Atuarial Inicial reconhecido por cada um deles varia de zero para o Método "Pay as You Go" até \$2.583.000 para o Método da Fundação Completa. Esta constatação nos ensina que há uma ampla liberdade em conceituar-se o PAI com o fim de prover a sua fundação. Esta aparente falta de unicidade não significa, contudo, a ausência de um valor natural representativo dos encargos atuariais assumidos com a instalação do plano e representado pelo montante adotado pelos métodos da Classe IV, de \$ 1.471.873,00.

Os Custos Normais trafegam exatamente no sentido oposto ao do PAI. São máximos, \$63.000, no método de fundação nula e nulos no método de fundação completa, nos revelando que os encargos de um plano são imutáveis. Ou são pagos à medida que são devidos ou são pagos todos antecipadamente à vista, ou são pagos em qualquer dos infinitos esquemas intermediários possíveis, todos financeiramente equivalentes.

As Contribuições Totais, somatório dos Custos Normais e Suplementares, começam em diferentes níveis, seguem diferentes trajetórias ao longo do tempo, mas todas, sem exceção, desaguam no seu Custo Normal quando o plano atinge a maturidade.

O Patrimônio Líquido, ou Fundo Acumulado, assume no limite do tempo, para todos os nove métodos, o exato montante do reconhecimento do Passivo Atuarial Inicial, implicando isto dizer que PAI e RESMAT são faces de uma mesma moeda e que a escolha do método de custeio se desdobra no reconhecimento imediato de um determinado nível de PAI e na intenção de, no futuro, acumular esse montante como reservas.

A escolha do método de custeio é assim uma decisão política que nasce do embate entre as conveniências do patrocinador e os interesses dos segurados, o primeiro pretendendo menor fundação e os demais maior nível de reservas, tudo de acordo com os ensinamentos de Trowbridge contidos no primeiro dos artigos aqui descritos.

Quando o grupo é imaturo, algumas das afirmações feitas acima deixam de ser verdadeiras, como, por exemplo, os benefícios anuais deixam de se igualar à soma das contribuições com as rendas anuais. Isto não impede que o fundo seja estável, constituindo reservas com as sobras ou reduzindo reservas em face das insuficiências de receitas correntes.

O tema Ganhos e Perdas Atuariais é a preocupação final do autor no artigo enfocado, e que fica desdobraado em dois importantes aspectos.

Primeiramente, discute-se a medição dessa grandeza no intervalo de um ano, destacando o método largamente empregado de comparar o fundo realmente acumulado no fim do período com o fundo esperado para esse momento, visto na perspectiva do fim do ano anterior.

O segundo aspecto diz respeito às técnicas mais habituais para absorção dessas discrepâncias dentro do método de custeio praticado pelo plano. A primeira, ou "imediate", é corrigi-las integralmente no momento de sua apuração, somando-se as perdas líquidas às contribuições do início do ano, ou de reduzindo-se os ganhos líquidos dessas mesmas contribuições. Esta técnica pode ser usada em qualquer das seis Classes descritas, mas encontra mais acolhida nos métodos das Classes I e II.

A segunda técnica, de diluição, desdobra o ajustamento para o futuro praticando mudanças que tenham por equivalente certo no presente o montante a purado no fim do exercício. Esse procedimento costuma empregar o mesmo método de custeio já adotado pelo plano em questão, de tal sorte que o resultado termine sendo uma redução ou ampliação do Custo Normal em vigor. Alternativamente, pode ser tratado como adições algébricas ao saldo do Passivo Atuarial Inicial e absorvido em conjunto com este pelo prazo restante. Sendo uma perda significativa, pode ser absorvida como se fosse semelhante a um novo Passivo Atuarial

arial Inicial, nas formas antes descritas.

#### IV.4. UMA TENTATIVA DE SÍNTESE NA CLASSIFICAÇÃO DOS MÉTODOS DE CUSTEIO DOS FUNDOS DE PENSÃO

A Matemática Atuarial dos Fundos de Pensão ainda padece da falta de uma maior padronização de nomenclatura e notação e de uma melhor sistematização na classificação dos métodos de custeio usados na prática. Nesse sentido, uma contribuição inestimável foi dada pelo "Pension Research Council" da Universidade da Pensilvânia.

Qualquer método de custeio começa por apurar o montante dos benefícios prometidos e termina por desenvolver um esquema de contribuições, ou custos, para financiar esses benefícios.

Benefício e Custo são assim as duas grandes entidades financeiras de qualquer plano de previdência e a eleição de um deles para relacionar-se com o tempo de serviço dá lugar ao primeiro e mais importante esquema classificatório dos métodos de custeio dos fundos de pensão.

A escolha da vinculação entre "benefício acumulado conquistado" e "tempo de serviço" dá origem à grande família dos Métodos de Custeio por Alocação de Benefícios cuja característica mais marcante é atribuir uma quantidade definida de direitos aos benefícios de aposentadoria por cada ano de serviço decorrido. Essa quantidade anual de direitos, normalmente uma unidade de crédito, é a variável independente dessa família de métodos que tem por variáveis dependentes o Custo Normal e o Passivo Atuarial Inicial. Nota-se que aqui os custos são função dos benefícios e estes função do tempo de serviço.

O princípio lógico desses métodos, rotulados também de "Accrued Benefit Cost Methods", estabelece uma relação definida entre o tempo de serviço decorrido e a porção já conquistada do direito da aposentadoria integral. Raciocinando com o usual sistema de um crédito por cada ano de serviço, a conquista da plena aposentadoria é uma função linear do tempo de serviço. Linear não é, no entanto, a função do custo de aquisição de cada uma dessas unidades de direito, porque, à medida que se aproxima a aposentadoria, maior vai-se tornando o equivalente certo relativo à alíquota do benefício vitalício comprado a cada ano de serviço.

Os métodos de Custeio por Alocação de Benefícios estão como que voltados para o passado e requerem dados sobretudo a nível de Balanço Patrimoni-

al que se apóia no Passivo Atuarial Prospectivo, isto é, estes métodos estão centrados nos créditos de benefícios já concedidos aos participantes. Investigações sobre o total dos benefícios futuros, expresso pelo Valor Presente dos Benefícios Futuros - VPBF, têm importância complementar para traçar o passado na direção do presente.

Em ambos os tipos de alocação, de benefícios ou de custos, essa alocação pode ser feita em duas bases distintas: em porções que se traduzem por uma quantia fixa de dinheiro ou por uma percentagem fixa do salário.

Quando a associação do "tempo de serviço" se faz com os "custos anuais", tem-se uma situação inversa que conduz à outra grande família dos Métodos de Custeio por Alocação de Custos, às vezes chamada de "Projected Benefit Cost Methods".

O princípio que norteia esta família, semelhantemente ao da construção de um "sinking fund", estabelece que o benefício total do futuro, VPBF, deve ser conquistado ano a ano pagando-se anualmente uma quantia predeterminada que pode ser um montante fixo de dinheiro ou uma percentagem fixa do salário.

Ressalte-se que agora o custo alocado anualmente é a variável independente enquanto que o benefício adquirido anualmente é a variável dependente, não expresso mais por uma unidade de crédito ao ano, mesmo que os custos sejam nivelados. Nesta situação, a contribuição do primeiro ano, que permanece aplicada a  $y$  anos, produz mais recursos para o fundo que a mesma contribuição real do último ano, fazendo com que os créditos adquiridos ano a ano sejam uma grandeza decrescente. Nesta família, os benefícios conquistados passam a ser função dos custos alocados e do tempo de serviço.

Na alocação de custo interessa conhecer "todos" os benefícios futuros ou custos globais, do indivíduo ou da massa corrente, partindo-se daí para a alocação dos custos anuais e por decorrência para a determinação dos créditos de benefícios correspondentes. É portanto uma abordagem voltada para o futuro e que necessita de dados do Balanço Atuarial a nível do VPBF para executar os seus cálculos.

Uma segunda alternativa de classificação dos métodos de custeio é encontrada na possibilidade de se determinarem os custos de forma individual ou agregada. Sob um método individual, o Custo Normal e o Passivo Atuarial são calculados isoladamente para cada segurado sendo idênticas variáveis relativas ao plano o simples somatório das parcelas individuais.

No método agregado, a transição do valor dos benefícios globais para

o montante dos custos anuais globais não passa pelo cálculo dos custos anuais individuais, como se mostrou no caso anterior.

O terceiro esquema de classificação separa o conceito de "idade de entrada" do de "idade atingida". Os métodos que adotam o de idade de entrada estabelecem que há uma idade padrão para se filiar ao plano, levando a que todos aqueles que o fazem em idade posterior gerem Passivo Atuarial Suplementar relativo ao "suposto serviço passado" e que deve ser fundado com um esquema auxiliar de Custos Suplementares.

Nos métodos ortodoxos por idade atingida não se admite o reconhecimento de Passivo Atuarial Suplementar na admissão de um participante que deve r fundar todo o seu VPBF<sub>y</sub> no restante de sua vida ativa. Haverá, assim, custos diferenciados por idade de admissão para diferentes subgrupos de segurados. Há, no entanto, planos deste tipo que permitem a existência do Passivo Suplementar mas o impedem de crescer, amortizando anualmente os juros atuariais que lhe correspondem. Outros, ainda, podem praticar amortização integral.

O quarto atributo classificador dos métodos de custeio é a aceitação ou não da existência de Passivo Atuarial Suplementar, inicial ou intermediário. Os que não geram esse tipo de passivo determinam Custos Normais capazes de fundar o serviço passado juntamente com o serviço futuro. "Com Passivo Atuarial" significa que essa grandeza é tratada explicitamente. No caso "Sem Passivo Atuarial" essa grandeza também existe mas é amortizada implicitamente dentro dos Custos Normais.

Como quinto e último atributo classificatório, têm-se as maneiras de se tratarem os Ganhos e Perdas Atuariais. Como já foi antecipado, os métodos podem ser classificados nesse tocante como de absorção direta ou imediata e de absorção indireta ou diluída.

Desta forma, um método para ser integralmente caracterizado deveria ser rotulado segundo cada um desses cinco aspectos. Dir-se-ia, por exemplo, que o Fundo XYZ adota um método de alocação de custos, por percentagem fixa do salário, com desenvolvimento de Passivo Suplementar, é do tipo idade de entrada, de cálculo individual e com reconhecimento imediato dos Ganhos e Perdas Atuariais.

Os autores ligados à Universidade da Pensilvânia seguem muito de perto esta classificação. Dan McGill<sup>7</sup>, por exemplo, expõe com detalhe um conjunto de métodos que vai a seguir resumido:

- Métodos de Custeio por Alocação de Benefícios:

(7) MCGILL, Dan. Fundamentals of private pensions. 4a. Ed., Homewood, IL., Richard Irwin, Inc., 1979. p. 359.

- Individuais:
  - . Benefício Acumulado - por Idade Atingida - com Passivo Suplementar;
  - . Benefício Fixado em Dinheiro - por Idade Atingida - com Passivo Suplementar;
  - . Benefício Fixado em Percentagem do Salário - por Idade Atingida - com Passivo Suplementar;
- Métodos de Custeio por Alocação de Custos:
  - Individuais:
    - . Contribuição Fixada em Dinheiro - por Idade Atingida - sem Passivo Suplementar;
    - . Contribuição Fixada em Dinheiro - por Idade de Entrada - com Passivo Suplementar;
    - . Contribuição Fixada em Percentagem do Salário - por Idade Atingida - sem Passivo Suplementar;
    - . Contribuição Fixada em Percentagem do Salário - por Idade de Entrada - com Passivo Suplementar.
  - Agregados:
    - . Contribuição Fixada em Dinheiro - por Idade Atingida - sem Passivo Suplementar;
    - . Contribuição Fixada em Dinheiro - por Idade Atingida - com Passivo Suplementar;
    - . Contribuição Fixada em Percentagem do Salário - por Idade Atingida - sem Passivo Suplementar;
    - . Contribuição Fixada em Percentagem do Salário - por Idade Atingida - com Passivo Suplementar.

No que respeita ao trato dos Ganhos e Perdas Atuariais, todos os métodos podem optar pela absorção imediata ou diluída, exceção feita para os métodos agregados que, por não computarem essa grandeza explicitamente, absorvem-na sempre de modo diluído.

Howard Winklevoss,<sup>8</sup> por sua vez, usa uma classificação algo diferente, adotando quatro famílias de métodos de custeio, a saber:

- Métodos de Custeio por Benefícios Adquiridos:
  - . Individual - com Passivo Suplementar;
  - . Individual - sem Passivo Suplementar;
  - . Individual - baseado no Custo de Terminação do Plano;
  - . Agregado - com Passivo Suplementar;

(8) WINKLEVOSS, Howard. Pension mathematics with numerical illustrations. pp 77, 92 e 110.

- . Agregado - sem Passivo Suplementar.
- Métodos de Custeio por Benefícios Projetados:
  - . Individual - com Passivo Suplementar;
  - . Individual - sem Passivo Suplementar;
  - . Individual - com Passivo Suplementar Parcial;
  - . Agregado - com Passivo Suplementar;
  - . Agregado - sem Passivo Suplementar.
- Métodos de Custeio Generalizados:
  - . Individual - por Benefícios Adquiridos;
  - . Individual - por Benefícios Projetados;
  - . Agregados - por Benefícios Projetados.

Nosso conhecido Trowbridge<sup>9</sup>, já ciente do esforço classificatório do "Pension Research Council", voltou a público em 1976 com uma nova visão classificatória dos métodos de custeio dos fundos de pensão por fundação antecipada.

Em seu livro "The Theory and Practice of Pension Funding" ele identifica cinco famílias ou grupos de métodos, das quais as duas primeiras são referidas como comumente em uso e têm muita aproximação com a classificação do "Council". São elas as seguintes:

- Métodos de Custeio por Benefícios Adquiridos:
  - . Forma Tradicional;
  - . Forma Pro Rata.
- Métodos de Custeio por Idade de Entrada:
  - . Forma por Valor Fixo em Dinheiro;
  - . Forma por Percentagem Fixa do Salário.
- Métodos de Custeio Agregados:
  - . Forma Original;
  - . Forma por Idade de Entrada;
- Métodos de Custeio de Passivo Atuarial Congelado:
  - . Forma por Idade de Entrada;
  - . Forma por Benefícios Adquiridos;
  - . Forma por Idade Atingida.
- Outros Métodos de Custeio:
  - . Prêmio Nivelado Individual;
  - . Fundação Terminal.

Esta classificação representa mais uma tentativa do autor de assen-

(9) TROWBRIDGE, C. & FARR C. The theory and practice of pension funding. Homewood, IL., Richard Irwin, Inc., 1976, p. 146.

tar conceitos, uma vez que a classificação do "Council" não foi bem aceita no mundo atuarial e nem foi incorporada à legislação americana sobre fundos de pensão de 1974 conhecida como "Employee Retirement Income Security Act - ERISA que basicamente repete a classificação dada em 1945 pelo "Treasury Bulletin on Sections 23(p)(1)(A)(B)" do "Internal Revenue Service - IRS" considerado por muitos anos a bíblia dos fundos de pensão na América do Norte. Este boletim descreveu os seis métodos mais comuns na época e atribuiu-lhes rótulos como "unit credit", "entry-age normal", "attained-age normal", "aggregate", "frozen initial liability" e "individual funding to normal retirement age".

Parte da terminologia do "Council" foi, no entanto, assimilada pelos atuários e pelo próprio Trowbridge. Sua primeira classificação, "Accrued Benefit Cost Methods" é um exemplo de uma família que ele antes chamava de Classe III e que se compunha apenas do método "Unit Credit", e que desenvolve menor nível de reservas que os da Classe IV.

Já a nomenclatura "Projected Benefit Cost Methods", equivalente à Classe IV do artigo atrás descrito, não foi tão bem recebida e o próprio Trowbridge prefere chamá-la de "Entry-Age Cost Methods".

Como se constata, algum tempo ainda deverá passar até que se disponha de uma terminologia uniforme para os métodos de custeio e para os conceitos substantivos usados no mundo dos fundos de pensão. Muitos progressos já foram feitos e outros estão sendo tentados pelas Sociedades dos Atuários em diversas partes do mundo.

Seria tedioso descrever aqui todos esses diferentes métodos. Preferimos dirigir agora nossa atuação para a metodologia usualmente empregada no Brasil, a partir da análise de um caso particular representado por um fundo típico e, sobretudo, desenvolver uma análise de sensibilidade com o objetivo de identificar-lhe as variáveis mais críticas ao seu funcionamento equilibrado. Desta empreitada se ocupará o quinto capítulo deste trabalho.

## CAPÍTULO V

## AS ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA NO BRASIL

## V.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, tentaremos analisar criticamente a metodologia da previdência complementar fechada no país, destacando suas principais diferenças com o sistema correlato nos Estados Unidos da América do Norte e, sobretudo, partindo-se do estudo de um caso, identificar as dificuldades que ameaçam seu desempenho futuro.

Ultrapassada a fase dos montepios, o Brasil caminha, ainda que timidamente, para a fase da previdência complementar privada. Neste novo estágio, surgiram inicialmente as entidades fechadas sem fins lucrativos ligadas a uma só empresa. Mais recentemente, vieram as entidades abertas, voltadas para o lucro e para o público em geral e predominantemente vinculadas aos conglomerados financeiros existentes.

A Diretoria de Fiscalização do Banco Central do Brasil, em seu relatório<sup>1</sup> de 31.03.85, dá conta da existência de 152 Entidades Fechadas de Previdência Privada autorizadas a funcionar no país reunindo ativos de Cr\$ 25,5 Trilhões dos quais 89,1% se referiam a entidades vinculadas ao setor governamental. Suas Reservas Matemáticas ascendiam a Cr\$ 20,5 Trilhões, sendo que 89,5% foram geradas em entidades do setor governamental.

No exercício anterior, 1984, essas entidades auferiram receitas de Cr\$ 7,4 Trilhões e incorreram em despesas de Cr\$ 1,3 Trilhões. Suas receitas previdenciais foram de Cr\$ 925 Bilhões, sendo que 65% fluíram das patrocinadoras, registrando-se essa maior participação no setor privado, 68%, contra 64,5% do setor governamental.

Nesse mesmo ano foram pagos Cr\$ 339 Bilhões em benefícios e foram movimentados Cr\$ 50,6 Trilhões na aquisição de títulos e valores mobiliários.

O sistema da previdência fechada no Brasil contava na data desse relatório com 1.467.642 participantes divididos entre 80.508 aposentados e 1.387.134 participantes ativos. Destes, 69,3% trabalhavam para empresas do setor governamental.

Por fim, das 152 EFPPs ali mencionadas, 91 tinham por patrocinadora uma organização do poder público, como pode ser constatado no Anexo a este trabalho.

(1) BANCO CENTRAL DO BRASIL - Diretoria de Fiscalização. Investidores institucionais - entidades de previdência privada - fechadas. Brasília, 1985.

## V.2. ALGUMAS CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DA PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR NO BRASIL

A previdência complementar, tanto no Brasil como nos Estados Unidos, onde se desenvolveu expressivamente no pós-guerra, é um segmento securitário que se acopla à previdência social e desta recebe influências decisivas para sua estruturação e funcionamento.

Na tarefa de avaliar as fraquezas e fortalezas desse setor previdenciário no Brasil, buscaremos identificar suas principais diferenças com relação ao que se observa no ambiente americano, começando forçosamente pelos traços mais marcantes da basilar previdência social.

Nesse cenário, a discrepância mais aguda está no evento determinante da aposentadoria. A previdência social americana, chamada de "Old-Age, Survivors and Disability Insurance - OASDI", a exemplo do INPS no Brasil, não proporciona uma cobertura geral para toda a população, como aquelas do Canadá e da Inglaterra, mas cobre os riscos de longo prazo do subconjunto das pessoas ligadas ao mercado de trabalho. Este programa deverá estar cobrando, em 1990, tanto de empregados como de empregadores, 6,2% dos salários.

O OASDI não cuida de assistência médica, o que naquele país só veio a ser adotado tardiamente e ainda assim apenas para as pessoas de idade avançada. Em 1965, o governo federal criou o programa "Health Insurance for the Aged", mas conhecido como "Medicare" e que se desdobra em dois subprogramas.

O "Hospital Insurance - HI" dá cobertura de atendimento hospitalar aos participantes do grupo vinculado ao OASDI que tenham ultrapassado a idade de 65 anos ou que se tenham tornado inválidos. Este programa deverá estar cobrando em 1990 uma taxa de 1,45% aplicada sobre os salários.

O "Supplementary Medical Insurance - SMI" não é compulsório como os anteriores, mas em base individual e voluntária acresce aos benefícios do HI os do atendimento médico e correlatos e é financiado conjuntamente pelo segurado e pelo governo federal.

A assistência médica para o homem em idade produtiva está baseada na medicina privada e nas companhias de seguro de saúde, igualmente privadas.

A idade de 65 anos é também a idade padrão para a aposentadoria do OASDI, com 100% do "Primary Insurance Amount - PIA" se detentor do status "fully insured". É possível uma aposentadoria reduzida para 80% do PIA na idade de 62 anos, ou ainda 80% mais 5/9% por cada mês além dessa idade. É, portanto, 62 anos, a idade mais cedo, tanto para homens como para mulheres, acei

ta pela "Social Security Administration" para a aposentadoria.

No Brasil, como se sabe, a aposentadoria se dá por tempo de serviço, conquistando-se 95% do salário-benefício com 35 anos de trabalho ou 80% desse mesmo salário com 30 anos de atividade.

Reside nessa diferença uma das grandes discussões sobre sistema previdenciário brasileiro que admitindo a cobertura a partir de 12 anos de idade, permite aposentadorias normais com um mínimo de 47 anos de idade. Nessa altura da existência, a esperança de vida segundo a tabela 1958CSO é de não menos que 26 anos de vida aposentada com drenagens de recursos do sistema previdencial, tanto social como privado. Para a idade de 65 anos, essa mesma tabela prevê sobrevidas de apenas 13 anos.

Argui-se com frequência que as tabelas estrangeiras não se adaptam ao Brasil por ser este um país subdesenvolvido com um povo subnutrido e, por via de consequência, com esperanças de vida mais reduzidas.

Sobre o assunto, convém recordar primeiramente os ensinamentos de Huebner e Black<sup>2</sup> quando destaca que a tabela 1958CSO contém "margens" no interesse das companhias de seguro e não no das entidades previdenciais. Estas, se querem ser conservadoras, devem utilizar tabelas retratando coortes mais longevas e assim mensurar maiores benefícios a pagar do que o real. Ao contrário, as companhias de seguros preferem tabelas de coortes artificialmente menos longevas, como a 1958CSO, que as levam a planejar maiores indenizações em favor da estabilidade da companhia.

Adotando-se uma tabela mais adequada ao estudo das rendas vitalícias da sobrevivência, vamos encontrar para 47 anos de idade sobrevidas médias que vão de 28 anos para a "United State Total Population (1969-1971)" a 31 anos para a "Individual Annuity Table - AT 1971".

Com respeito ao caso particular do nosso país, o Instituto de Resseguros do Brasil nos forneceu a Tábua SGB-71, deduzida da Tábua EB7-69 onde se vê que aos 47 anos de idade o brasileiro médio ainda teria uma sobrevida de 23 anos. Esta tabela é do tipo Seguros e tem uma margem de 5% para contingências.

Por outro lado, a "United Nations World Population Chart-1984" nos informa que a esperança média de vida ao nascer, para ambos os sexos, é de 59 anos para o mundo como um todo, de 73 anos para as regiões mais desenvolvidas e de 57 anos para as regiões menos desenvolvidas. Particularizando, é de 63 anos para o Brasil e de 74 anos para os Estados Unidos, refletindo uma diferença de 11 anos. Não confundir, contudo, esperança de vida ao nascer com es-

(2) HUEBNER, S.S. & BLACK, K. Life insurance. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, Inc., 1976. p. 241-2.

perança de vida na idade  $x$ . Os que sobrevivem a cada idade são os que se revelam mais fortes e como tal suas sobrevivências, somadas à idade, vão superando aquela esperança ao nascer, e vão-se aproximando em duas tabelas de diferentes longevidades.

Estudos demográficos das Nações Unidas<sup>3</sup> sobre o Brasil revelam que esta esperança de vida ao nascer foi de 51 anos entre 1950 e 1955, de 59,8 entre 1970 e 1975, de 63,5 anos entre 1980 e 1985 e deverá atingir 67,4 anos no fim do corrente século.

Assim, se é verdade que as nações mais pobres exibem populações com menor longevidade, é também verdadeiro que este importante parâmetro demográfico está crescendo em muitos países em via de desenvolvimento como o Brasil.

A tabela 1958CS0 tem 100 anos como idade inalcançável, enquanto que para a AT 1971 essa idade é de 111 anos, havendo entre ambas uma diferença de 11 anos comparável à diferença detectada pela ONU entre o Brasil e os Estados Unidos. Aceitando-se, então, que a 1958CS0 reflita razoavelmente bem o fenômeno decremental no Brasil, que o brasileiro típico adira ao INPS com 18 anos e se aposente com 53 anos de idade, então a esperança da duração do benefício de sua aposentadoria seria da ordem de 21 anos.

Supondo-se, agora, que uma tabela mais longeva, como a GAMT-1971 ou a AT-1971, represente satisfatoriamente a experiência dos aposentados americanos ingressados no benefício com 65 anos de idade, vamos encontrar uma sobrevivência de 17 anos, o que representa quatro anos a menos em relação à de seu companheiro brasileiro.

Enfim, tem-se como verdadeira a afirmação de que o sistema de previdência social brasileiro conduz a rendas vitalícias mais longas do que o americano, determinando-lhe assim um relativamente maior VPBF<sub>a</sub> por cada unidade de benefício prometido a seus segurados.

Outra diferença significativa entre as previdências sociais dos dois países diz respeito à contagem do tempo de contribuição para se adquirir o direito à aposentadoria. No Brasil esse tempo é totalizado em dias, convertido em meses de 30 dias e por fim em anos, podendo ser consecutivo ou não.

No sistema americano há três estados de cobertura para o segurado: "fully", "currently" e "disability". Este último requer que haja pelo menos 30 trimestres de cobertura, dentro do período de 40 trimestres que antecede à invalidez, para que este tipo de benefício seja obtido pelo segurado.

O estado "currently insured" é atingido quando se têm 6 trimestres de cobertura no período de 13 trimestres que antecede a morte, a invalidez ou

(3) UNITED NATIONS DEPARTMENT OF INTERNATIONAL ECONOMIC AND SOCIAL AFFAIRS. Demographics indicators of countries. New York, 1982. p. 230-1

a idade de 62 anos. Já a situação "fully insured" demanda um número de trimestres de cobertura pelo menos igual ao número de anos decorridos após a completação de 21 anos e antes de atingir 62 anos de idade, para que o segurado seja elegível para todos os tipos de benefícios, sobretudo a aposentadoria.

Um trimestre de cobertura significa a obtenção de pelo menos \$50.00 de salários ganhos dentro de cada trimestre civil, limitado ao máximo de quatro trimestres por ano. As contribuições se fazem sobre o efetivo salário percebido, mas limitado ao teto de \$29,700.00 de 1981, montante este automaticamente ajustado para expressar o nível geral de crescimento dos salários em base nacional.

Observa-se que o sistema americano de contribuições é bem mais flexível que o brasileiro, e se torna ainda mais liberal quando se constata que o limite mínimo de ganhos de salários de \$50,00 por trimestre para se conseguir um crédito (\$100.00 para autônomos e trabalhadores rurais), foi estabelecido em 1939 e mantido desde então. Inobstante isso, o sistema tem-se revelado equilibrado embora com ligeira tendência a elevação de gastos e de taxas de contribuição.

No Brasil o sistema junta previdência e assistência médica e é sabidamente deficitário. Mais recentemente, tem alcançado algum equilíbrio às custas de drásticas reduções no atendimento médico e de significativas elevações nas contribuições.

Vamos rever esses mesmos dois aspectos, idade de aposentadoria e tempo de contribuição, agora sob o enfoque da previdência complementar. Nos Estados Unidos, o ERISA define como idade normal para obtenção dos direitos de aposentadoria no sistema privado aquela condição definida pelo plano e que não pode ser superior a 65 anos de idade, ou, se mais tardio, a obtenção de 10 anos de participação. Para planos anteriores ao ERISA, a aposentadoria pode ocorrer, por exemplo, com 60 anos de idade e 20 de participação ou 55 anos de idade, ou 30 anos de filiação, ou ainda pela Regra dos Ks, soma da idade com a participação, devendo atingir um total constante, tal como 85, 90 ou 95 anos. Em alguns planos, o requisito é só de tempo de serviço, 30 anos por exemplo, sem qualquer referência à idade.

Mas o conceito de idade normal de aposentadoria deve ser visto mais como um dado para a definição do evento gerador do direito do que como uma idade compulsória de aposentadoria que só é atingida aos 70 anos segundo o "Age Discrimination and Employment Act".

A despeito de existirem na América múltiplas idades normais de apo-

sentadorias no sistema privado, aceita-se 65 anos como a idade universal para o empregado desempenhando tarefas que não envolvam periculosidade, insalubridade e excessivo esforço físico.

O trabalho das mulheres está regido pelas mesmas regras do dos homens e discriminações vantajosas ou desvantajosas são hoje proibidas pela "Equal Employment Opportunity Commission", discutindo-se nas cortes americanas a legitimidade da cobrança de prêmios maiores, face a maior longevidade da mulher.

A aposentadoria precoce com um mínimo de 55 anos de idade é admitida no sistema privado, reduzindo-se atuarialmente os benefícios. Essa redução é significativa e para a GANT-1971 a 5% alcança 9% por ano de antecipação fazendo com que só se receba aos 55 anos 38,9% do que se obteria aos 65 anos de idade. Este fato tem pressionado para que se adote uma redução linear menor em torno de 0,5% ao mês, ou seja, de 6% ao ano, para essas aposentadorias.

A aposentadoria tardia até os 70 anos de idade também é frequente, ou para obter mais créditos que levam a maiores benefícios, ou para desfrutar das mordomias do cargo, ou para continuar se apropriando de um salário tipicamente maior que o respectivo benefício, ou por outras razões mais subjetivas. Há, no entanto, uma boa discussão sobre a conveniência da aposentadoria diferida e sobre as fórmulas de cálculo dos benefícios adicionais.

No Brasil, a idade de aposentadoria no âmbito da previdência complementar seguiu rigorosamente as regras da previdência social até 1978, quando as autoridades se convenceram da inviabilidade de um sólido sistema fundado por antecipação e baseado no tempo de serviço. Assim é que o Decreto Nº 81.240 de 20.01.78, ao regulamentar a Lei 6.435 de 15.07.77 no que respeita às EFPPs, estabeleceu em seu Art. 31 que na aposentadoria por tempo de serviço prevalecerá a idade mínima de 55 anos completos.

Na aposentadoria especial, essa idade ficará reduzida para 53 anos naquelas situações em que a previdência social exige 25 anos de serviço, ou para 51 anos de idade quando o requerimento for de 20 anos de serviço e, por fim, para 49 anos de idade se a exigência for de 15 anos de serviço.

Com o novo limite mínimo de 55 anos de idade, a aposentadoria no sistema complementar brasileiro ficou mais próxima da equivalente americana, considerando-se as diferenças de longevidade de seus segurados.

Para os tempos de contribuições, em ambos os países, as regras seguem parênteses às de seus respectivos sistemas sociais, sendo menos padronizadas nos Estados Unidos, onde prevalece uma ampla gama de situações, nesse par

ricular, mas onde a idade continua sendo o parâmetro primário, secundado pelo tempo de serviço.

No que concerne às diferenças próprias da previdência complementar, elas são mais numerosas e igualmente expressivas. Primeiramente vamos destacar o fato de existirem na América milhares de fundos de pensão e de estarem eles ligados preponderantemente ao setor privado da economia. Segundo McGill<sup>4</sup>, os planos de pensão estavam congregando aproximadamente metade da força de trabalho não agrícola do setor privado americano, e tinham reunido ativos equivalentes a US\$ 17,5 Bilhões, no ano de 1974, quando foi instituído o ERISA.

No Brasil, os fundos fechados ainda não atingem duas centenas e uma simples leitura da lista revela que uma porção substancial, em torno de 60%, está ligada a empresas estatais ou de economia mista. Destacam-se nestas as empresas voltadas para serviços de utilidade pública, como energia elétrica, telefonia, saneamento, transporte e abastecimento, os bancos federais e estaduais, as companhias siderúrgicas estatais e os centros de pesquisa e fundações governamentais.

A segunda grande diferença diz respeito à organização jurídica dos fundos de pensão. Nos E.U.A. eles não se revestem necessariamente da forma de uma pessoa jurídica separada de seu patrocinador. Apesar da importância desse mecanismo de poupança para o processo de acumulação de capital, esses fundos só vieram a ter um marco legal melhor definido em 1974 e depois de uma década de discussões no Congresso Americano. A partir de então, segundo o ERISA, o patrocinador está obrigado a segregar de seus ativos operacionais as contribuições que faz ao fundo, mas as entrega a um administrador com responsabilidades fiduciárias bem definidas e que pode ser uma pessoa ou um grupo de pessoas físicas, um banco ou uma companhia de seguros, que as deve administrar no exclusivo interesse dos participantes.

O plano é estabelecido por escrito em linguagem legal, definindo os benefícios, as contribuições, os administradores e é enviado às várias agências governamentais envolvidas no processo.

O "Internal Revenue Service - IRS" analisa o plano para o fim de qualificá-lo para as deduções do imposto de renda e cuida marginalmente para que esteja solidamente estruturado em termos atuariais.

O "Department of Labor" e o "Treasury Department" têm atribuições alongadas que cuidam basicamente das condições de participação, aquisição de direitos, aporte das contribuições, administração do ativo, demonstrações financeiras e responsabilidades fiduciárias.

(4) MCGILL, Dan. Fundamentals of private pensions. Homewood, Il., 1979. p.30.

A "Pension Benefit Guaranty Corporation - PBCG" é uma agência federal que assegura os benefícios aos participantes na ocorrência de uma descontinuação do plano, podendo neles intervir sempre que haja ameaça de prejuízos para os direitos dos participantes. Como uma companhia de seguros, cobra um prêmio de \$2.60 por pessoa-ano dos fundos de empregador único e \$0.50 por pessoa-ano de fundos mais sólidos ligados a grupos de empresas.

Conta ainda o PBGC, como fonte de receitas, com os ativos dos planos sob terminação a seu cargo, com as rendas desses ativos, com os créditos contra as patrocinadoras desses planos que podem chegar a 30% de seus patrimônios líquidos e com empréstimos federais.

No Brasil, as Entidades Fechadas de Previdência Privada - EFPPs, se configuram em uma pessoa jurídica separada da empresa-mãe sob a forma de sociedades civis ou fundações de direito privado, com haveres e deveres bem definidos e com patrimônio próprio. Seu funcionamento depende de autorização do Ministério da Previdência e Assistência Social, a quem cabe analisar e aprovar seu estatuto através de sua Secretaria de Previdência Complementar.

Aqui, a separação legal e patrimonial entre patrocinador e respectivo fundo é total, fazendo-se com que as contribuições compareçam na contabilidade do primeiro unicamente como despesas. À EFPP cabe constituir e gerir os ativos gerados por essas contribuições.

A despeito dessa aparente estanqueidade, há dois canais de intercomunicação de recursos que merecem ser comentados. O primeiro e mais importante está expresso no Art. 45 da Lei Nº 6.435 de 15.07.77 que diz textualmente "Admitir-se-á, no caso das reservas técnicas relativas a benefícios a conceder sob a forma de renda, que os fundos de garantia sejam mantidos em níveis não inferiores a 70% (setenta por cento) das correspondentes necessidades, se as patrocinadoras das entidades assumirem o compromisso de manter em seus respectivos patrimônios, parcelas equivalentes às insuficiências observadas de modo que sua cobertura possa, em qualquer época, ser realizada".

Segundo o Decreto Nº 81.240 de 20.01.78 que regulamentou parte dessa lei, os créditos decorrentes desse empréstimo são privilegiados, vencem juros ao nível da taxa atuarial do plano e não podem superar 50% do patrimônio líquido da patrocinadora. As empresas que se valerem dessa faculdade deverão, de acordo com a Resolução Nº 460 do Conselho Monetário Nacional, submeter-se a auditoria contábil independente, fazendo divulgar o seu parecer juntamente com suas demonstrações financeiras. A despeito dessas cautelas, a comunicação de patrimônios por essa via e nessa dimensão não sobreviveu à Resolução Nº 460

de 22.02.78 que reduziu esse envolvimento a apenas 10%, como adiante se esclarece.

O segundo canal é menos significativo e diz respeito à compra pelo fundo de ações e debêntures da patrocinadora. Conquanto isto seja possível para companhias abertas, as limitações impostas pelas Resoluções Nºs 794 e 1.025 do Conselho Monetário Nacional são de ordem a não trazer maiores preocupações, pois se poderia aplicar no máximo 1,4% do patrimônio do fundo em títulos da patrocinadora.

A Nota Explicativa CVM Nº 6 de 22.02.78 da Comissão de Valores Mobiliários conceitua como "risco do fundo com a patrocinadora" a soma da insuficiência permitida pelo Art. 45 da lei sob menção com os investimentos em ações e debêntures da patrocinadora. É esse o risco que a Resolução Nº 460 do CMN limitou a 10% do patrimônio líquido da patrocinadora tornando a situação muito mais aceitável do que os mais de 50% mencionados originalmente pelo § 3º do Art. 29 do decreto regulamentador, no que concerne às entidades fechadas de previdência privada, da Lei 6.435.

O que se pretende, em última análise, é evitar que o insucesso da patrocinadora, em acréscimo à cessação dos empregos dos participantes do fundo, venha a determinar ainda a perda dos benefícios decorrentes das contribuições efetivamente aportadas ao fundo no passado, entre as quais se incluem também as contribuições dos próprios empregados.

Conquanto a intenção do legislador tivesse sido a de aliviar o fluxo de caixa da patrocinadora, um entendimento literal da franquia permite enxergar a possibilidade de a patrocinadora tragar com sua falência poupanças de salários de seus empregados em acréscimo às contribuições suas não ingressadas no fundo. A permissão para retenção de até 30% de insuficiências diz respeito a todas as reservas para benefícios a conceder, independentemente da fonte desses recursos, e não só das reservas que caberia à patrocinadora preencher. Essa disfunção ressalta de importância quando se recorda que o Art. 11 do mesmo Decreto 81.240 permite a existência de planos em que a patrocinadora contribui com apenas 30% do custeio total do plano de benefícios, tornando assim possível que a quase totalidade de suas contribuições fique contabilizada como encargos futuros, cabendo-lhe apenas pagar, numa base do "terminal funding" sua parcela da fundação dos benefícios concedidos.

Observa-se ainda uma aparente contradição entre o que diz o Art. 29 desse decreto e seu § 3º quanto ao prazo para pagamento dessa insuficiência. De um lado, falando supostamente do ativo, mas com uma linguagem imprópria,

diz que a parcela do patrimônio representativa dessa retenção de reservas deve ter liquidez tal que sua cobertura possa ser realizada em qualquer época. De outro, manda inscrever essa obrigação como exigível de longo prazo.

A terceira diferença é um desdobramento natural da anterior e trata das responsabilidades da patrocinadora no funcionamento permanente do plano com o cumprimento total de suas obrigações atuariais. Em ambos os países, os planos são criados com ânimo de permanência, mas ambas as legislações cuidam do evento de suas descontinuações.

Nos E.U.A., para esse efeito, os planos são classificados em dois grandes grupos: os de contribuições definidas e os de benefícios definidos. Nos planos de contribuições definidas a patrocinadora não promete aposentadorias predeterminadas mas se obriga a contribuir de acordo com o esquema fixado pelo plano. Os benefícios são tratados como uma variável independente e ligam-se às contribuições através das contas individuais de cada participante. As obrigações tanto do empregador como dos empregados, se for o caso, estão definidas, no entanto, em termos de contribuições.

Nestes planos não há estudo atuarial mas uma simples acumulação de dinheiro em favor de cada indivíduo que é também contribuinte para o plano cabendo usualmente ao empregador o aporte da maior porção de acordo com os contratos coletivos de trabalho. Dependendo do regulamento do fundo, os valores acumulados por ocasião do evento determinante do benefício podem ser pagos como um pecúlio ou podem servir para comprar uma anuidade vitalícia junto a uma companhia de seguros. Inexistindo o verdadeiro princípio da mutualidade, estes planos não se inscrevem como previdência complementar propriamente dita, devendo-se classificá-los no terceiro segmento da previdência que é a riqueza individual.

Eventuais inadimplências da patrocinadora para com estes planos são exigibilidades tratadas ao mesmo nível das dívidas trabalhistas e como tal não carecem da cobertura securitária da PBGC.

Os planos de benefícios definidos são aqueles que usam os benefícios, que podem ser fixos ou variáveis, como parâmetros de amarração do plano, ficando as contribuições como elemento derivado a serem estabelecidas por estudo atuarial competente. Os planos de benefício variável são aqueles mais complexos que consideram variação no custo de vida e produtividade pós-aposentadoria como fatores atuariais. Os planos de benefício fixo, o tipo dominante na América, prometem um benefício fixo que pode ser determinado segundo vários critérios como um montante fixo de dinheiro ou uma percentagem fixa do salá-

rio médio ou terminal por cada ano trabalhado ou ainda sem qualquer ligação com o histórico do serviço prestado.

Esses planos podem ser subdivididos em barganhados e não-barganhados. Nestes, é exagerado o grau de liberdade da patrocinadora registrada no documento do plano que costuma lhe assegurar o direito de unilateralmente alterar ou terminar o plano, de ajustar as contribuições às suas conveniências e mesmo de descontinua-las a qualquer tempo, exceto nos dez primeiros anos, e de impedir ações contra seu patrimônio.

Esta faculdade prevalece mesmo que os ativos acumulados não alcancem para pagar os benefícios forçando a sua redução ou o estabelecimento de prioridades, deixando a patrocinadora sem obrigações outras além das contribuições já feitas mas facultando-lhe contribuições extras e mesmo o pagamento direto dos benefícios.

Os planos negociados coletivamente não conferem ao empregador toda essa proteção, mas também não dão ao empregado a segurança explícita de que os termos do acordo em vigor vão ser renovados continuamente. Neles a patrocinadora se obriga a uma de duas responsabilidades: ou creditar pontos, e fundá-los pelos padrões mínimos do ERISA, para uma aposentadoria diferida, ou proporcionar aposentadorias vitalícias para os que se afastarem no período do acordo, num estilo "terminal funding".

No primeiro caso, se o esquema de fundação proposto foi cumprido pelo empregador, sua responsabilidade se limita ao passivo contingente que vier a surgir junto à PBGC se esta vier a descontinuar seu plano. No segundo caso, a responsabilidade da patrocinadora é maior e alcança o cumprimento integral dos benefícios prometidos que, vindo a ser pagos pela PBGC, se limitariam a uma alíquota de 30% de seu patrimônio líquido. Os que não se aposentassem antes da terminação do plano, no entanto, perderiam todos os seus direitos.

As empresas economicamente fortes e mais destacadas do setor a que pertencem costumam assumir integralmente seus compromissos com o fundo e honrar pelo menos todos os benefícios creditados ou pelo menos todos aqueles que já são considerados irreversíveis.

No Brasil prevalecem os planos de benefícios variáveis definidos mas as responsabilidades da patrocinadora não estão completamente definidas nem se dispõe no país de uma companhia governamental de seguros, a exemplo da "Pension Benefit Guaranty Corporation".

A existência de uma pessoa jurídica nova corporificada na EFPP para assumir os encargos do fundo, se foi uma vantagem no que toca à individualiza

ção de seus ativos, parece-nos agora se configurar numa desvantagem uma vez que enfraquece a linha de responsabilidade entre a empresa e seu empregado. É a EFPP quem promete os benefícios e não mais o empregador, cabendo-lhe providenciar para que os recursos patronais fluam no montante e na cronologia devidos.

O insucesso de uma EFPP não poderia contudo ser debitado exclusivamente ao empregador. Ele poderia derivar de fragilidades administrativas da EFPP para gerir seus ativos e para dimensionar tecnicamente o seu passivo atuarial e não se pode afirmar que essas entidades estão plenamente capacitadas para executar essas duas importantes tarefas.

A Lei 6.435, reguladora do sistema de previdência complementar no Brasil, põe o poder público a serviço da proteção dos interesses dos participantes nesses planos mas, como em inúmeras outras situações, não basta dispor de um texto legal, sendo necessário também contar com meios para fazer cumprir a lei. Nesse aspecto, nosso país não tem sido um bom exemplo a seguir.

Os termos da legislação brasileira são, ademais, muito frouxos na definição das responsabilidades da patrocinadora de uma EFPP. Por exemplo, o Art. 34, em seu § 1º, estabelece que "as patrocinadoras supervisionarão as entidades referidas neste artigo, orientando-se a fiscalização do poder público no sentido de proporcionar garantia aos compromissos assumidos para com os participantes dos planos de benefícios". Quando a EFPP referir-se a empresas ou instituições da administração federal, a própria fiscalização e controle do plano caberá à patrocinadora sem prejuízo da ação do Ministério da Previdência e Assistência Social.

É a EFPP e não a patrocinadora que o Art. 40 da lei citada atribui responsabilidades para a constituição das reservas técnicas, fundos especiais e provisões "para garantia de todas as suas obrigações", notadamente as previdenciais.

Os administradores das patrocinadoras, e não estas, tornam-se solidariamente responsáveis com os administradores da EFPP respectiva quando não efetivarem regularmente as contribuições a que aquelas estiverem obrigadas. A boa fé da norma, no entanto, não esconde o fato de serem estes administradores, na grande maioria dos casos, patrimonialmente incapazes de assumirem tais compromissos e de poderem acumular ambas as funções. Tampouco esta norma trata da insuficiência atuarial nascida de outras origens, que não a falta de contribuição, como as incorreções na determinação dos custos normais do plano, os passivos atuariais suplementares surgidos de liberalidades as mais di-

versas praticadas quase que sempre no âmbito da empresa e com reflexos funes tos na EFPP e, por fim, as perdas atuariais decorrentes da artificialidade das premissas atuariais.

A norma é ainda mais frouxa quando "faculta", um verbo fraco como disciplina, às patrocinadoras das EFPPs a assunção da responsabilidade de encargos adicionais referentes a benefícios concedidos resultantes da correção dos benefícios em bases superiores ao índice de variação das ORTNs, mormente agora, quando há um movimento generalizado de recuperação salarial em bases maiores que os índices gerais de preços usados na economia.

A responsabilidade profissional do atuário pela inadequação da estrutura atuarial do plano é também contemplada simploriamente pelo texto legal apenas para indicar o Instituto Brasileira de Atuária - IBA como órgão competente para apurar as incorreções praticadas e para facultar ao MPAS o pedido de auditoria atuarial independente quando lhe parecer conveniente.

A possibilidade de intervenção pelo MPAS em uma EFPP em dificuldades financeiras, prevista no Capítulo IV, da Lei Nº 6.435, visando a sua recuperação, está muito mais assentada na redução ou participação dos benefícios do que na cobrança das responsabilidades da patrocinadora no funcionamento do plano. O Art. 61 da lei sob comentário chega a ser tragicômico quando estabelece, entre outras coisas, que a patrocinadora não se pode opor a qualquer plano de recuperação do interventor, mesmo que essa intervenção envolva eventuais reduções de benefícios devidos aos participantes.

Quando essa recuperação resultar inviável será decretada a liquidação extra-judicial da EFPP liberando automaticamente a patrocinadora de suas contribuições habituais e dando-se aos participantes já em gozo dos benefícios preferência sobre os demais participantes ativos aos quais se transferem os prejuízos gerados pela ineficácia da patrocinadora, dos dirigentes do fundo, dos órgãos fiscalizadores interventores e liquidantes.

Em todo esse capítulo não há uma menção sequer às responsabilidades da patrocinadora no processo de recuperação da entidade nem mesmo quando o relatório do interventor constatar que ela compactuou com um plano visionário e irrealístico fadado ao insucesso, ou quando ações liberais da empresa tiveram impacto desfavorável no equilíbrio do fundo.

Ao contrário, o poder repressivo do texto se volta contra os administradores e conselheiros da EFPP tornando seus bens indisponíveis e cerceando-lhes o direito elementar de ir e vir até a apuração e liquidação de suas responsabilidades, se existirem.

A Seção IV dessa lei, que cuida do regime repressivo, confirma o pressuposto implícito em todo o texto, segundo o qual o insucesso de uma EFPP só pode ter origem na improbidade e incompetência de seus administradores e nunca nas ações da empresa patrocinadora. Em seu Art. 77 define como "crime contra a economia popular, punível de acordo com a legislação respectiva, a ação ou omissão dolosa, pessoal ou coletiva, de que decorra a insuficiência de reservas ou de sua cobertura, vinculadas à garantia das obrigações das entidades privadas".

A disciplina teria ficado mais ampla se mencionasse "ação ou omissão dolosa ou culposa" para que mesmo aquelas ações ou omissões destituídas da intenção de fraude fossem apanhadas pela lei, e assim poderiam ser criadas responsabilidades, no evento da intervenção ou liquidação de um plano, para as patrocinadoras, notadamente empresas estatais que reclassificando com liberdade seus planos de cargos, funções e salários, impõem sem dolo enormes insuficiências de reservas às suas EFPPs que nem o mais probo nem o mais genial dos administradores pode evitar.

Neste cenário poder-se-ia chamar à responsabilidade o próprio Ministério da Previdência e Assistência Social, a quem cabe, com exclusividade, segundo o Art. 86, a tarefa de velar pelas organizações que se enquadrem no conceito de entidade fechada da previdência complementar, ou o Conselho de Previdência Complementar, a quem compete estipular as condições técnicas de custeio, estabelecer as normas de atuária e estatística e regular o funcionamento dessas entidades fechadas.

Mas o bom senso terminou prevalecendo através de um ordenamento subalterno, como no caso anterior das insuficiências de reservas, restringidas pelo CMN em acréscimo à lei e ao decreto regulamentador. Neste caso, foi a Resolução MPAS/CPC/Nº 01/78 de 09.10.78 do Conselho de Previdência Complementar, em seu Item 44, que estabeleceu a disciplina capaz de alcançar a patrocinadora. "In verbis", verificada deficiência acentuada de cobertura de reservas técnicas da entidade, a Secretaria de Previdência Complementar poderá determinar uma das seguintes providências visando a corrigir aquela deficiência: I - cobertura por doação da patrocinadora, a qual poderá ser parcelada a critério da Secretaria de Previdência Complementar; II - revisão das contribuições da patrocinadora e dos participantes; III - redução no reajustamento dos benefícios concedidos, quando for o caso, à base da variação das ORTNs.

Em conexão com as duas diferenças anteriores, vamos mencionar a quarta discrepância mais significativa entre os sistemas brasileiro e norte-ameri

cano que diz respeito ao seguro de terminação do plano.

Como já vimos anteriormente, um plano pode começar com Passivo Atuarial Inicial a ser amortizado ao longo de um prazo relativamente longo, bem como pode acumular, por uma série de razões, novas porções de Passivo Suplementar, equacionadas ou não. Em qualquer dos casos, a consequência natural é a inabilidade para pagar os benefícios se o plano vier a ser descontinuado, decorrendo daí a conveniência de um seguro para cobrir os riscos dessa descontinuação.

Nos E.U.A. esse seguro é bancado pela "Pension Benefit Guaranty Corporation - PBGC", que cobre todos os planos de benefícios definidos eleitos pelo "Internal Revenue Service - IRS" como dedutíveis para fins de imposto de renda. Cobre ainda a PBGC todos os planos de benefício definido que afetem o comércio interestadual e que apresentem condições de aceitação pelo IRS. São excluídos textualmente os planos de contribuição definida, os planos governamentais, religiosos, de sociedades fraternais, para grupos de altos salários e benefícios, entre outros. São igualmente aceitáveis planos de empregador único ou de múltiplos empregadores, com prêmios diferenciados e cobrados sobre a base pouco racional de participante-ano, \$2.60 e \$0.50 respectivamente, ao invés de sobre o montante do risco financeiro envolvido.

A terminação de um plano se desdobra em quatro categorias nomeadas de "curtailment", "freezing", "partial termination" e "complete plan termination".

O encurtamento é uma emenda ao plano para reduzir, com respeito ao serviço futuro, os benefícios que se revelaram difíceis de financiar e não tem impacto na PBGC.

O congelamento ou suspensão do plano significa a descontinuação de todos os créditos futuros mas com a continuação das contribuições e dos benefícios relativos aos créditos já contabilizados e tem consequências nulas para a PBGC.

A terminação parcial implica a suspensão de todos os créditos futuros mas com a continuação das contribuições e dos benefícios dos participantes com direitos irreversíveis. A PBGC também não dá efetiva cobertura a este tipo de terminação a não ser em casos especiais de fragmentação do plano.

A terminação completa descontinua todos os créditos e contribuições futuras e se constitui na principal cobertura da PBGC que alcança todos os benefícios básicos entendidos como aposentadoria normal por invalidez, pensão e pecúlio e está limitada a uma quantia algo superior a \$1.000 por mês.

No Brasil não há nada semelhante à PBCG e as medidas cautelares buscam ser mais preventivas que corretivas. Há por exemplo uma justificada preocupação com o risco do pecúlio por morte, dada a possibilidade de acidentes fatais com grandes grupos. Assim esse pecúlio está limitado a 40 vezes o teto do salário de contribuição da previdência social e para o qual pode a SPC exigir a cobertura de uma companhia de seguros em função do valor do pecúlio e do porte da EFPP.

Entidades de grande porte, com mais de 5.000 participantes, são vistas como aptas a bancar todos os riscos básicos inclusive o pecúlio. Já as entidades de porte médio, congregando mais de 1.000 e menos de 5.000 participantes, deverão transferir para outra entidade securitária a fração do pecúlio que exceder a 20 vezes o teto do salário de contribuição.

As EFPPs de pequeno porte, constituídas com mais de 100 e menos de 1.000 participantes, só podem assumir diretamente riscos limitados como os listados para o regime financeiro de repartição simples, os pecúlios por morte até 300 ORTNs por segurado, e a metade dos benefícios de aposentadoria e pensão, devendo contratar o excedente com entidades abertas de previdência privada ou com companhias de seguro. Não são permitidas no Brasil EFPPs com menos de 100 participantes, enquanto que nos E.U.A. há casos com até 25 segurados.

Ocorre que as Entidades Abertas de Previdência Complementar - EAPCs - embutem um lucro da ordem de 35% sobre os custos dos benefícios que oferecem ao público em geral, como bem demonstra o trabalho<sup>5</sup> preparado pela Comissão Técnica Permanente de Benefícios Previdenciais e Assistenciais da ABRAP, apresentado no VI Congresso dessa instituição. Esse fato, se não torna inviáveis as EFPPs de pequeno porte, encarece sobremaneira sua operação em detrimento da economia de seus participantes.

Como quinta diferença, vamos analisar a participação do empregador e do empregado no encargo de aportar recursos para o fundo.

Na América, a maioria dos planos são do tipo "noncontributory", isto é, não exigem contribuição dos participantes e são fundados exclusivamente pelos empregadores seguindo o conceito de que previdência é salário diferido para o futuro mas que deve ser debitado à produção presente. Isto é válido sobretudo para os planos de benefícios definidos.

A contribuição do empregado é vista como complicadora da administração dos planos por uma série de razões. Agrega custos de controle, dá lugar a pedidos de empréstimos com a garantia desses ativos, induz a não participação

(5) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DE PREVIDÊNCIA FECHADA. Conheça melhor a entidade fechada de previdência privada. Fortaleza, Outubro 1984.

e potencializa problemas de pessoal na hora da aposentadoria.

Nos planos não contributivos a filiação é automática e cobre todos os empregados elevando o moral do grupo, o empregador tem maior flexibilidade em seus aportes de recursos, e o empregado obtém um crédito inteiramente financiado com despesas dedutíveis do imposto de renda.

Os planos de contribuições definidas, no entanto, demandam quase sempre a contribuição do participante em nível não superior ao do empregador que via de regra aporta de 2/3 a 3/4 da contribuição total.

O nível dessa contribuição total oscila em torno de 10% e, em ambos os tipos de planos, costuma ser mais baixa para aquela parcela inferior do salário que já foi taxada pela previdência social.

Os planos brasileiros são preponderantemente contributivos, no sentido do "contributory" visto acima, situação essa que é forçada ou pelo menos induzida pela legislação em vigor.

No Brasil, os encargos mínimos do empregador no custeio de uma EFPP estão definidos nos Arts. 6º e 11º do Decreto Nº 81.240 de 20.01.78, alterado pelo Decreto Nº 82.325 de 27.12.78. Inicialmente, a patrocinadora deve doar à entidade 7% da folha de salários do ano imediatamente anterior e durante o seu funcionamento suas contribuições não serão inferiores a 30% desse custeio.

As contribuições dos participantes estão tratadas no Art. 31 do primeiro desses decretos que estatui três diferentes níveis de contribuições, a saber: um máximo de 3% sobre a remuneração inferior ao menor valor-teto do salário-de-benefício da previdência social; um máximo de 5% para a remuneração entre o limite citado e o maior valor-teto; e um mínimo de 7% para a parcela da remuneração que exceder a esse último teto. Essas percentagens devem ser aplicadas em cascata, e sua disciplina de máximos e mínimos revela a possibilidade de planos mistos, isto é, não contributivo para empregados de baixas e médias rendas, mas obrigatoriamente contributivo para os quadros de salários mais elevados.

Os participantes que contribuem com um máximo de 3% são classificados como "minorantes", os que descontam um máximo de 5% são denominados de "mediantes" e os que recolhem 7% ou mais são rotulados de "majorantes" mas para todos não há qualquer redução nas respectivas taxações para aquela parte do salário já alcançada pela previdência social.

A "rationale" desse regime impositivo diferenciado reside no fato de os minorantes extraírem menores benefícios da EFPP que os demais, uma vez que suas aposentadorias são em grande medida custeadas pela previdência social.

Essa diferença, contudo, não assegura a equidade de tratamento, que se conseguiria se cada um contribuisse segundo o Valor Presente dos Benefícios Futuros individualizado.

Como sexta diferença, elegemos os direitos que o participante tem quando, por algum motivo superveniente, tem que se retirar do plano, ou seja, buscamos identificar o que sucede com os fundos amealhados em nome daqueles que interrompem seus vínculos com o plano, por outras razões que não a morte ou a invalidez, antes de completado o período de carência.

Na América a questão é discutida tendo como pano de fundo o princípio segundo o qual as contribuições do empregador e do empregado têm naturezas distintas e geram direitos diferentes. Os criados em favor do empregado pelas contribuições do empregador podem ou não subsistir ao evento do abandono do plano, na dependência da disciplina da lei. Já os fundos erigidos a partir das contribuições do empregado, quer compulsórias quer voluntárias, não lhe podem ser subtraídos, devendo retornar sob a forma de algum tipo de benefício para si, ou para seus dependentes.

Esta é a postura adotada pelo ERISA, que assegura a condição de "vested" ou "nonforfeitable" para aquela porção dos benefícios potenciais alcançada pelo participante e derivada de sua própria contribuição. A consagração desse direito, no entanto, gerou uma prática lesiva aos interesses dos empregados, notadamente aqueles em fim de carreira que, atraídos pela disponibilidade de uma expressiva quantia em dinheiro, fruto da capitalização de suas próprias contribuições, mas significativamente inferior ao valor presente dos benefícios adquiridos até então, desligavam-se do plano perdendo, assim, a totalidade dos benefícios oriundos das contribuições do empregador.

Revisando o problema, o Congresso Americano decidiu pela continuação das retiradas pelos empregados terminais mas proibiu o cancelamento dos benefícios já conquistados referentes ao salário diferido representado pela contribuição do empregador. Para os demais, instituiu critérios que permitem a conquista ordenada desses direitos segundo um dos três esquemas abaixo, à escolha do empregador.

No jargão americano, um benefício está "vested" ou conquistado quando o participante não precisa mais ficar ligado àquele empregador e àquele plano para recebê-lo, quando se tornar devido. Este conceito refere-se sobretudo à fração conquistada do benefício da aposentadoria normal e ao seu equivalente atuarial da aposentadoria antecipada.

A conquista do benefício relativo à contribuição do empregador pode

ser "completa" ou "gradual", qualificações essas usadas pelo ERISA nos três esquemas mínimos permitidos para aferir os direitos a benefícios parciais. No primeiro, a cada dez anos de participação se reconhece a conquista completa dos benefícios creditados no período.

O segundo esquema adota uma conquista gradual em que são reconhecidos apenas 25% dos direitos creditados ao longo dos primeiros cinco anos, acrescidos de 5% por cada ano do segundo quinquênio e de 10% por cada ano do terceiro lustro, de tal sorte que ao fim de 15 anos todos os benefícios até então creditados estejam completamente conquistados.

O terceiro esquema associa tempo de serviço e idade, através da Regra dos 45, estabelecendo que os créditos relativos aos primeiros cinco anos de serviço estão 50% conquistados se o participante tiver 40 anos ou mais. As conquistas posteriores serão de 10% por cada ano de serviço adicional.

Entenderam os legisladores americanos que é importante assegurar para os empregados as benesses oriundas das contribuições dos empregadores visando a tornar mais justo o tratamento aos segurados, a promover a mobilidade da mão-de-obra eliminando restrições de natureza previdencial e a estimular a previdência privada para o cumprimento efetivo de seu papel como instrumento complementar da previdência social.

Um ponto dissonante nessa legislação é a falta de proteção aos direitos à aposentadoria por invalidez e à pensão dos dependentes quando um participante "vested" se afasta do emprego e do plano. Estes direitos são normalmente garantidos apenas aos segurados ativos "vested" e, em menor escala, aos aposentados e só são considerados "vested" a partir do instante em que começam a ser pagos.

A legislação brasileira, neste tocante, é ainda bastante rudimentar, não mencionando sequer a dicotomia de direitos, nascida da origem dos recursos para sua fundação e nem assegurando ao participante a percepção de qualquer benefício, nem mesmo o relativo a sua própria contribuição.

Assim é que o Art. 42 da pré-falada Lei 6.435 manda que os regulamentos dos planos, as propostas de inscrição e os certificados dos participantes indiquem "a existência ou não, nos planos de benefício de valor de resgate das contribuições saldas dos participantes e, em caso afirmativo, a norma de cálculo quando estes se retirem dos planos, depois de cumpridas condições previamente fixadas e antes da aquisição do direito pleno aos benefícios". O grifo é nosso.

Como se vê, a devolução das contribuições dos segurados não é torna-

da obrigatória em face da lei, mas é uma faculdade a ser concedida ou não pelo estatuto da sociedade. A possibilidade de usufruto de benefícios a partir das contribuições da patrocinadora é inteiramente olvidada pelo texto legal referido.

Mais grave ainda é o que se lê no Inciso VII do Art. 31 do Decreto 81.240, a saber: "a saída voluntária e antecipada do participante do plano de benefícios instituído, exceto no caso de cessação do contrato de trabalho, implicará a perda dos benefícios para os quais não foram completadas as contribuições necessárias;"

Quando houver cessação do contrato de trabalho o Inciso VIII desse mesmo Decreto 81.240 estabelece que "o plano deverá prever o valor de resgate correspondente, em função da idade e do tempo de contribuição, sendo facultada a manutenção dos pagamentos, acrescidos da parte da empresa, para a continuidade da participação ou a redução dos benefícios em função dos pagamentos efetuados até a data daquela cessação,"

O quadro rudimentar de nossa legislação se completa com o § 2º do Inciso VIII que, cuidando ainda da cessação do contrato de trabalho, prescreve: "o participante terá direito à restituição parcial das contribuições vertidas, com correção monetária, de acordo com as normas estabelecidas no próprio plano, não inferior a 50% (cinquenta por cento) do montante apurado,"

A par de iníqua, essa legislação é confusa. A linguagem "valor de resgate em função da idade e do tempo de contribuição" do Inciso VIII dá a idéia de uma abordagem prospectiva voltada para o Valor Presente dos Benefícios Futuros Parciais creditados até então. Já o seu § 2º usa linguagem de abordagem retrospectiva quando fala das "contribuições vertidas, com correção monetária". Ademais esquece de contemplar os juros vencidos e de esclarecer se as contribuições vertidas incluem também as da patrocinadora ou só as do segurado. Neste último caso, a restituição parcial desse parágrafo é a legalização de um crime contra a economia popular, quando vista à luz do cenário mais equitativo dos regulamentos americanos.

Em suma, a legislação brasileira impõe ao ainda participante, mas supostamente desempregado, duas soluções odiosas dentre três disponíveis: ou contribui em dobro (ou triplo) e salva seu patrimônio previdencial privado, ou o recebe sem juros e pela metade do valor real, ou vê reduzido seu nível de benefícios. Considerando a carência financeira do desempregado, a segunda possibilidade é uma forte indução à espoliação do direito do segurado, situação essa que comporta sem dúvida um reparo urgente, se queremos ampliar e po-

pularizar a previdência privada no Brasil,

Não há, portanto, na legislação brasileira um conceito equivalente ao "vested" americano, naquele sentido exposto inicialmente, de permitir a recepção de benefícios a partir de um plano para o qual já não mais se contribui, ficando essa possibilidade na dependência do estatuto do plano.

Mas há, nesse contexto de conquista efetiva de benefícios, um ponto a destacar na prática brasileira. A conquista dos benefícios depende também da ultrapassagem dos respectivos períodos de carência, a serem estabelecidos pelo plano, mas de modo geral essas carências são adequadas e, a partir delas, as efetivas conquistas de créditos se fazem gradualmente a cada ano contribuído.

A sétima e última diferença aqui selecionada, e uma das mais significativas para o bom funcionamento de qualquer sistema previdenciário, é o nível de benefícios prometido, mensurado em relação ao nível de salários dos participantes.

O "Old Age, Survivors and Disability Insurance - OASDI" é um programa modesto, desenhado para atender às exigências mínimas do segurado, não oferecendo nenhum benefício do tipo continuado que exceda a 100% do "Primary Insurance Amount - PIA". Este parâmetro, por sua vez, se apóia no "Average Monthly Wage - AMW", que é basicamente a média dos salários de contribuição de todo o período de cobertura, usualmente de 10 a 20 anos.

Partindo-se da média dos salários da carreira, representada pelo AMW, chega-se ao PIA através do emprego da "fórmula de benefício". Essa fórmula tem variado muito no passado mas sempre apresentando uma boa dose de austeridade. Presentemente, está concebida de sorte a ampliar um pouco os AMWs muito baixos, \$100.00, a preservar os medianos, \$300.00, e a reduzir aproximadamente à metade os AMWs mais elevados, da ordem de \$1.500.00. Isto faz com que o PIA mensal se posicione quase sempre na faixa de \$150.00 a \$700.00 equivalente na hipótese mais otimista<sup>6</sup> a 30%, e usualmente a não mais que 15% do último salário de contribuição da vida ativa do participante.

É verdade que o PIA refere-se apenas ao benefício da pessoa do segurado. Sua esposa, se tiver mais de 62 anos ou se tiver filho menor que 18 anos ou inválido, recebe outros 50% do PIA e seu filho abaixo de 18, ou dos 22 se na escola, faz jus a outros 50% do PIA, limitado o total a 1,75 vezes o valor do PIA do segurado.

Assim sendo, o "Maximum Family Benefit - MFB" sob o OASDI alcança frequentemente escassos 25% do salário de contribuição do último ano da vida

(6) MYERS, Robert. Social security. p. 70.

ativa do segurado, redução esta que tem sua importância ressaltada se seu salário real esteve acima do teto para o salário de contribuição,

Além do mais, esses benefícios são pagos sob condição de efetivo afastamento do trabalho e sofre reduções de \$1.00 por cada \$2.00 de outros ganhos que venham a exceder o limite estabelecido para o "earnign test".

A previdência social no Brasil não faz esse teste e se exige o abandono do emprego não fiscaliza a obtenção de rendas de trabalho posterior. Ademais, calcula o salário de benefício com base nos últimos 36 salários de contribuição, não fazendo qualquer correção monetária para os últimos 12 salários, mas corrigindo os primeiros 24 meses por um sistema complicado e algo injusto, cálculo esse que produz quase sempre um salário de benefício superior a 75% do último salário de contribuição. O benefício da aposentadoria, na visão já familiar, equivale a 80 a 95% desse salário benefício, na dependência do tempo de serviço por ocasião da aposentadoria.

Não se pretende discutir o nível absoluto nem a equidade dos salários em ambos os países, mas mostrar que os benefícios do OASDI são comparativamente mais magros e concedidos sob condições mais rigorosas que os benefícios ofertados pelo nosso INPS.

Na previdência complementar, são os americanos igualmente cautelosos, embora perseguindo agora o objetivo de assegurar ao empregado aposentado e a seus dependentes um padrão de vida comparável àquele desfrutado durante os últimos anos de vida ativa. Entendem, no entanto, que isto pode ser obtido com uma quantidade menor de dinheiro em face das seguintes mudanças na vida econômica do aposentado:

- a) redução da alíquota de imposto de renda, decorrente da sua nova condição de aposentado;
- b) eliminação da contribuição para a previdência social;
- c) eliminação das contribuições para o fundo de pensão privado;
- d) eliminação de despesas relacionadas com o trabalho profissional como transporte, roupas, livros e revistas técnicas, contribuições para clubes e associações, entre outras;
- e) redução ou eliminação das despesas com a educação dos filhos, já tornados independentes;
- f) eliminação da amortização da hipoteca da casa própria, a esta altura já liquidada;
- g) cumprimento ou abandono do programa de poupança para formação de um patrimônio individual;

- h) redução nos gastos sociais em face da mudança de estilo-de-vida, imposta pela idade e pelo desligamento dos interesses do trabalho; e
- i) redução de outros gastos como "hobbies", e excentricidades, se existirem.

Reconhecem, no entanto, que as despesas com a saúde e com as viagens deverão demandar mais recursos, mas ainda assim demonstram que uma renda de a aposentadoria entre 60% e 75% da renda bruta do final da carreira permitiria desfrutar um padrão de vida equivalente ao da vida ativa terminal.

Dois outros fatores precisam ser ainda considerados: a inflação e a produtividade. Quanto ao primeiro, aceita-se sem maiores questionamentos que o poder de compra do aposentado, e portanto o seu padrão de vida, deve ser preservado. O OASDI adotou, a partir de 1975, a indexação de seus parâmetros com base no "Consumer Index Price-CIP", calculado pelo "Department of Labor".

Na previdência complementar, o ERISA requer que o estudo atuarial do plano use premissas realistas dentro das melhores estimativas possíveis, entre as quais, entende-se, deve estar a questão inflacionária. O assunto, no entanto, está mais afeto às negociações que estabelecem a estrutura do plano, tendo provocado o surgimento de um numeroso conjunto de técnicas para proteger os interesses dos segurados, não só na fase de usufruto dos benefícios, mas também na fase de seus créditos.

Quanto à produtividade, resultante do aprimoramento tecnológico do sistema produtivo, não há um consenso entre os estudiosos da matéria. Uma corrente ponderável propõe que o padrão de vida dos aposentados deve ser incrementado em compasso com o progresso tecnológico da economia, enquanto outra pretende preservá-lo no nível em que estava quando o participante se aposentou.

No que toca à inflação, a indexação e a fundação em ativos não monetários oferecem um remédio razoável para enfrentar os nominalmente crescentes benefícios futuros. Para a produtividade, ao contrário, o caudal de benefícios futuros crescerá em termos reais, a um ritmo difícil de se estabelecer, mas que deve ser fundado na fase ativa do beneficiário.

A defesa contra a inflação seria assim mandatória, mas a concessão dos ganhos de produtividade seria apenas desejável desde que convenientemente fundada. Para tanto é necessário contar-se com premissas pelo menos razoáveis para o período de 35 anos de vida ativa somados aos 20 anos de vida aposentada e ainda dispor-se de um satisfatório sistema de aferição dessa produtivi-

dade. Este é um dos assuntos de ponta no campo previdenciário.

Os fundos privados de pensão no Brasil não parecem exibir o mesmo nível de prudência na fixação dos benefícios observados no sistema americano. Como regra geral, são prometidas aposentadorias equivalentes a não menos que 100% do salário terminal e não raro são asseguradas ainda, sobretudo nos fundos ligados às empresas estatais, todas as vantagens desfrutadas pelo pessoal ativo, tais como reclassificações de cargos e funções, reposições salariais, antecipações trimestrais, reajustamentos percentuais de horas extras, excetuando-se naturalmente anuênios e promoções.

Esse incremento de benefícios costuma retroagir sobre os créditos passados, sem qualquer aporte imediato ou parcelado de fundos adicionais, gerando um passivo suplementar não equacionado que ameaça a estabilidade desses fundos. Não há, também, uma visão muito clara, por parte dos diretores dessas empresas e dos próprios participantes, sobre a necessidade de se reformular o plano de custeio do fundo sempre que os benefícios são liberalizados, mesmo que esses incrementos pudessem ter seu alcance limitado aos créditos do serviço futuro.

A leitura das demonstrações financeiras anuais com a existência de vultosos Ativos e a pouca compreensão dos itens do Passivo levam à crença de que as EFPPs têm recursos em excesso capazes de financiar progressivamente novas liberalidades nos benefícios, ou promover crescentes empréstimos à massa segurada com juros subsidiados.

Outra disfunção algo freqüente é a compra de créditos adicionais relativos a tempo de serviço passado, prestado à patrocinadora ou não, mas anterior à filiação ao plano, mediante contribuições que não equivalem ao incremento do Valor Presente dos Benefícios Futuros.

A legislação brasileira tentou criar algumas restrições a esse cenário irrealista de benesses, mas com as restrições que adotou não conseguiu instituir salvaguardas suficientes para a previdência privada nacional.

Com esse propósito, a Lei 6.435 em seu Art. 42, § 8º, prescreve que "os pecúlios instituídos por entidades fechadas não poderão exceder a 40 (quarenta) vezes o teto do salário de contribuição para a previdência social, para a cobertura de uma mesma pessoa, ressalvada a hipótese de morte por acidente de trabalho, em que o pecúlio terá por limite a diferença entre o dobro desse valor máximo e o valor do pecúlio instituído pela Lei Nº 6.367 de 19.10.76."

Os planos organizados depois da Lei Nº 6.435 de 15.07.77, e os parti

cipantes que, após essa data, se filiaram a planos pré-existentes, estão alcançados pela restrição expressa no § 5º, Inciso VIII do seu Art. 42, com a nova redação que lhe foi dada pela Lei Nº 6.462 de 09.11.77, onde se lê: "Não será admitida a concessão de benefícios sob a forma de renda vitalícia que, adicionada à aposentadoria concedida pela previdência social, exceda a média das remunerações sobre as quais incidirem as contribuições para a previdência privada nos 12 (doze) meses imediatamente anteriores à data da concessão, res salvadas as hipóteses dos §§ 6º e 7º seguintes."

O legislador pretendeu visivelmente obstar promoções e comissões de última hora como forma de engordar uma aposentadoria para a qual não se contribuiu integralmente. Mas fraquejou em seguida, no mencionado § 6º, quando diz: "... é permitida a fixação, a título complementar, de um percentual, des de que não supere 25% (vinte e cinco por cento) do valor correspondente ao te to do salário de contribuição para a previdência social, a ser adicionado ao benefício concedido." Como esse teto é de 20 salários mínimos, os benefícios vitalícios podem ser assim 5 salários mínimos acima da média dos últimos 12 meses.

Em respeito aos direitos adquiridos por participantes daqueles planos pré-existentes que ofereciam benefícios excedentes aos previstos acima, foram acrescentados os §§ 10 e 11 que cuidam respectivamente dos direitos dos que já tinham e dos que ainda não tinham tempo para se aposentar. No primeiro caso, as rendas vitalícias previstas ficaram integralmente preservadas. No se gundo, permaneceram intatos só os créditos de serviço passado anteriores ao i nício da vigência da lei.

Assim sendo, os participantes de fundos antigos podem, com a conivên cia da patrocinadora, elevar o seu nível de benefício para o patamar que bem desejarem, tudo no mais completo respeito à lei, ainda que isto implique em ameaçar de morte a galinha dos ovos de ouro. Uma análise do progres so funcional terminal de alguns participantes, sobretudo os bem relacionados com a direção da empresa, tem revelado que isto não é inusitado.

Patrocinadoras mais organizadas instituem em suas normas escritas que funcionários aposentáveis dentro de um razoável número de anos não podem mais ascender funcionalmente, como forma de fugir à natural pressão que surge nesse período para que as aposentadorias sejam artificialmente engordadas.

Vamos encontrar no Decreto Nº 87.091, de 12.04.82, mais uma discipli na tendente a redirecionar o sistema previdenciário complementar. Em seu Art.

29 se lê que "O salário-de-participação nos planos de benefícios das entidades fechadas de previdência privada não poderá ultrapassar o equivalente a 3 (três) vezes o maior valor-teto do salário-de-benefício da previdência social."

O reflexo da nova restrição só será sentido no futuro pois os direitos adquiridos dos filiados anteriormente à sua vigência ficaram mais uma vez preservados. Além do mais, o limite imposto é suficientemente amplo para acomodar os interesses da grande maioria dos participantes.

As aposentadorias acima do nível salarial terminal são muito buscadas mas são muito difíceis de fundar, sobretudo quando a função salarial tem uma inclinação muito forte. Vamos montar uma caricatura do problema admitindo que uma ampla coorte de segurados, governada pela 1958CSO, todos com 18 anos de idade, se filia a um fundo que usa uma taxa atuarial de 6% ao ano e para ele contribui por 35 anos até a aposentadoria aos 53 anos de idade. A coorte, naturalmente, vai murchando pelo decréscimo exclusivo da morte mas aqueles que sobrevivem obtêm uma renda vitalícia expressa em função do salário terminal.

Admitamos ainda que os salários, as contribuições e os benefícios sejam anuais e pagos ao fim do período e que a progressão salarial seja uma função exponencial do tipo  $S_{35} = S_1(1+s)^{34}$  onde  $S_{35}$  é o salário terminal,  $S_1$  o salário inicial e  $s$  a taxa anual de crescimento desse salário.

O fundo se forma pela aplicação da taxa  $c$  sobre a massa de salários, e como nada é gasto durante os 35 primeiros anos, o saldo acumulado é anualmente aplicado à taxa real de 6% ao ano. É esse montante terminal que deve pagar a aposentadoria de todos os aposentados enquanto sobrevivem, aplicando-se obviamente todas as sobras anuais.

Vendo-se o perfil financeiro na perspectiva de  $x=18$  anos, a aposentadoria é uma renda vitalícia, constante mas diferida por 35 anos enquanto que as contribuições são uma renda ordinária mas em progressão geométrica, dada a expansão real dos salários. A igualdade entre o valor presente dos benefícios incertos e o valor presente das contribuições incertas foi obtida por um algoritmo recursivo, que vai mostrado no Apêndice E, variando-se  $c$  e apoiado na equação abaixo,

$${}_{35|}a_{18} \cdot S_{35}(1+b) = \sum_{k=1}^{35} \left[ S_1(1+s)^{k-1} \cdot c \cdot {}_kE_{18} \right], \quad (V.2.1)$$

onde  ${}_{35|}a_{18}$  é o fator da renda vitalícia,  $b$  é a taxa de incremento do benefi-

cio por sobre o salário terminal, sendo  $k_{18}^E$  os fatores para dotes puros usados para creditar o valor esperado de cada uma das contribuições em gradientes. Os resultados de três diferentes funções salariais cruzadas com três distintos níveis de benefícios vão dados abaixo, desconsiderando-se os custos administrativos do plano.

## QUADRO V.2.1

TAXAS PURAS DE CONTRIBUIÇÃO PARA EQUILIBRAR  
UM FUNDO HIPOTÉTICO DE APOSENTADORIAS

SALÁRIO		RAZÃO BENEFÍCIO/SALÁRIO TERMINAL		
INICIAL	TERMINAL	0,9	1,0	1,1
100	300	15,70	17,45	19,19
100	200	12,30	13,67	15,03
100	100	7,87	8,74	9,61

FONTE: Cálculos do autor.

A análise desses resultados revela não só a influência do sobrebenefício no custeio do plano, bem como a expressiva importância da progressão funcional no nível das contribuições de equilíbrio.

Este exemplo nos oferece outros dados muito sugestivos que vão resumidos no quadro abaixo referentes à visão de equilíbrio da situação extrema, com evolução salarial de \$100 para \$300 e com benefício acrescido de 10% sobre o salário terminal.

## QUADRO V.2.2

EVOLUÇÃO DAS PRINCIPAIS VARIÁVEIS DO MODELO  $S_{35} = 3.S_1$  E  $B = 1,1.S_{35}$ 

ANOS DE SERVIÇO	SALÁRIOS	CONTRIBUIÇÕES		SOMA DOS VALORES PRESENTES DAS CONTRIBUIÇÕES
		HISTÓRICAS	VALOR PRESENTE EM $x = 18$	
1	100,0	19,2	18,1	18,1
3	106,7	20,5	17,1	52,8
5	113,8	21,8	16,2	85,6
7	121,4	23,3	15,3	116,6
9	129,5	24,9	14,5	145,9
11	138,1	26,5	13,7	173,7
13	147,4	28,3	12,9	199,9
15	157,2	30,2	12,2	224,7
17	167,7	32,2	11,6	248,1
19	178,9	34,3	10,9	270,3
21	190,8	36,6	10,3	291,2
23	203,6	39,1	9,7	310,9
25	217,2	41,7	9,1	329,5
27	231,7	44,5	8,6	346,9
29	247,1	47,4	8,1	363,3
31	263,6	50,6	7,6	378,7
33	281,2	54,0	7,1	393,1
35	300,0	57,6	6,6	406,5

FONTE: Cálculos do autor.

É importante notar que embora os salários e as contribuições históricas cresçam exponencialmente, os valores presentes das contribuições anuais, vistas em  $x=18$  anos, são monotonicamente decrescentes quase na mesma proporção de 1 para 3. Vê-se claramente nesse modelo que é na fase inicial, a despeito de seus mais baixos salários, que mais se reforça o fundo dos benefícios, por ficarem esses recursos mais tempo aplicados. Este fato ressalta o equívoco de se creditar linearmente uma mesma alíquota do benefício integral por cada ano contribuído. Revela também porque a compra de um ano anterior ao ingresso no plano precisa ser consideravelmente mais cara que a do ano corrente, se se quer guardar coerência com a lógica de formação do fundo. Não há nada de intrinsecamente mau na aquisição de tempo anterior, desde que, na visão prospectiva, o valor presente das contribuições extras equivalha ao valor presente do incremento de benefícios, apurados ambos na idade em que se adquirem os novos créditos.

Não advogamos a adoção dos redutores de aposentadoria usados pelos americanos, até porque algumas das razões por eles apontadas não prevalecem entre nós. Para o aposentado brasileiro não há redução imediata do imposto de renda, não há suspensão da contribuição para o INPS e não há normalmente interrupção da contribuição para o próprio fundo de pensão. Também não são de todo verdadeiras as argumentações constantes dos seis itens restantes, mormente as relativas à educação dos filhos e amortização da casa própria, em virtude da idade em que se aposentam os nossos segurados da previdência privada.

Entendemos que, se a fundação de uma pensão privada é uma transferência intertemporal de renda, dever-se-ia dar ao participante a possibilidade de escolher o nível de benefícios, menor, igual ou maior do que o seu nível de salário, a vigorar na sua fase inativa.

Conquanto mais complicado de administrar, um tal fundo atenderia melhor aos interesses divergentes de segurados que preferem mais dinheiro no presente e de outros que optam por mais dinheiro no futuro.

Em qualquer caso, sem exceção, é imperativa uma adequada fundação antecipada de todos os benefícios programados, simplesmente porque uma EFPP não é uma cornucópia mágica de onde brota riqueza sem que nela se tenha guardado poupança. É imperativo também obstar-se transferências interpessoais de renda, nascidas da concessão dolosa a indivíduos e grupos de benefícios em desacordo com aqueles planejados pelas premissas atuariais do plano, concessões essas que determinam posteriormente aumento nas contribuições de todos os participantes para restaurar o equilíbrio da entidade.

### V.3. UMA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE UMA ENTIDADE FECHADA DE PREVIDÊNCIA PRIVADA

Para completar este trabalho, realizamos um estudo de sensibilidade em um plano privado de pensão, tomando por base um modelo atuarial ortodoxo, usando o seu banco de dados relativo a todos os seus participantes e assumindo com essa EFPP o compromisso de descaracterizá-la inteiramente nesta monografia.

Para tanto, a partir de seu expressivo quadro de segurados, escolhemos, por eleição aleatória estratificada, uma ampla amostra composta de 2.599 participantes ativos, aposentados e pensionistas, capaz de constituir um fundo de boa dimensão, classificável como uma entidade de porte médio.

QUADRO V.3.1

#### COMPOSIÇÃO DA AMOSTRA - TIPOS E QUANTIDADES DE PARTICIPANTES

DISCRIMINAÇÃO	CLASSES DE SALÁRIO TERMINAL			TOTAL
	MINORANTE	MEDIANTE	MAJORANTE	
<u>PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>82</u>	<u>447</u>	<u>1.784</u>	<u>2.313</u>
. Homem	58	312	1.287	1.657
. Mulher	24	135	497	656
<u>PARTICIPANTES APOSENTADOS</u>	<u>14</u>	<u>41</u>	<u>175</u>	<u>230</u>
. Homem	13	38	164	215
. Mulher	1	3	11	15
<u>PENSIONISTAS DE PARTICIPANTES</u>	<u>14</u>	<u>24</u>	<u>18</u>	<u>56</u>
. Homem	1	1	1	3
. Mulher	13	23	17	53
<u>TOTAL</u>	<u>110</u>	<u>512</u>	<u>1.977</u>	<u>2.599</u>
. Homem	72	351	1.452	1.875
. Mulher	38	161	525	724

FONTE: Amostra extraída pelo autor

Referido fundo oferta três benefícios básicos, a saber:

- i) Aposentadoria
  - por velhice;
  - por tempo de serviço;
  - por invalidez.;
- ii) Pensão de Sobrevivente;
- iii) Pecúlio Ordinário.

Na aposentadoria é paga uma complementação ao montante do INPS, proporcional ao tempo contribuído, de tal sorte que a plena cobertura assegura ao participante 100% do salário do seu cargo terminal.

Na pensão, o benefício segue a mesma filosofia da aposentadoria, mas é dividido em uma parcela familiar, equivalente a 50% do todo e em parcelas de 10%, uma para cada dependente, limitadas ao máximo de cinco.

O pecúlio se compõe de um pagamento único feito aos dependentes do segurado por ocasião de sua morte e em montante equivalente a 12 vezes a média dos salários dos últimos 12 meses.

As contribuições para participantes ativos levam em conta todos os proventos mensais e o 13º salário, limitados a três vezes o maior valor-teto do salário de benefício da Previdência Social para os entrantes depois de abril de 1982, e são calculados em cascata da seguinte forma:

- i) Para os participantes ativos:
  - . 3% sobre a parte da remuneração inferior ao menor valor-teto do salário-benefício da previdência social;
  - . 5% sobre a parte da remuneração que vai do limite anterior até o maior valor-teto da previdência social;
  - . 9% sobre a parte da remuneração que exceder o maior valor-teto acima referido.;
- ii) Para o participante aposentado:
  - . 10% de sua complementação de aposentadoria;
- iii) Para a patrocinadora e com relação aos participantes:
  - . ativos, uma quantia tal que eleve a contribuição global para 15% do total da folha mensal;
  - . inativos, uma quantia equivalente à aportada por esse tipo de participante.

O modelo atuarial adotado é típico dos planos operados no país, usando um método singular que não se enquadra completamente em nenhum dos métodos clássicos de custeio antes mostrados e que pode ser assim caracterizado. É um método de alocação de custos que trabalha com escala salarial, que expressa os benefícios em função do salário terminal e que computa os custos como uma percentagem fixa dos salários. Assemelha-se a um método tipo "idade de entrada", mas sem o desenvolvimento de passivo atuarial, o que o torna também classificável como um método tipo "unidade de crédito". Calcula o valor presente dos benefícios futuros em base individual mas aloca os custos agregadamente na medida em que impõe como contribuição uma mesma percentagem do salá-

rio, independentemente da idade de entrada, do tempo de serviço pretérito e do tamanho da família de cada participante. Por fim, os ganhos e perdas atuariais não são conhecidos explicitamente e as insuficiências acumuladas acaso detectadas são distribuídas para o futuro mediante reajustamento do custeio.

Esse plano adota em seus cálculos o regime financeiro de capitalização para os três benefícios citados, indo além do regime mínimo de repartição de capitais de cobertura previsto pelo Art. 28 do Decreto Nº 81.240 de 20.01.78 para pensão e pecúlio. Com isto, adota uma posição mais rigorosa visando a dimensionar mais altos requerimentos de reservas em busca de uma maior estabilidade.

Este estudo de sensibilidade trabalha com um conjunto de onze variáveis que, após a análise de seus impactos sobre o equilíbrio do fundo, foram classificadas em três categorias, a saber:

- i) Pequena influência:
  - . tamanho da família;
  - . salário de benefício da previdência social.;
- ii) Média influência:
  - . mês da aposentadoria dentro do ciclo semestral de reajustamento salarial;
  - . dessincronia entre reajustes salariais da previdência social e da categoria profissional;
  - . longevidade da coorte;
  - . nível de contribuição.;
- iii) Grande influência:
  - . taxa dos juros atuarial;
  - . tempo requerido para a aposentadoria;
  - . nível de benefícios;
  - . produtividade;
  - . reposição salarial.

Estas não são as únicas variáveis do modelo, mas são aquelas que têm atraído maior atenção dos que se dedicam à gestão de fundos de pensão. Outras há, sabidamente importantes para o modelo de um fundo, que, por inexistirem as políticas ou os dados capazes de tornarem a análise exequível, não foram introduzidas neste estudo.

A classificação acima pautou-se em dois critérios. Primeiro, a elasticidade das reservas em respeito à variável indicada; segundo, a variação relativa dessas reservas necessária à restauração do equilíbrio do fundo. Com

relação ao primeiro, adotou-se como "baixa influência" uma elasticidade inferior a 0,5 e como "alta influência" uma elasticidade superior a 1,5. Para o segundo, considerou-se como "baixa influência" uma variação de reservas menor que 5% e como "alta influência" uma variação de reservas maior que 50% daquelas apuradas para o testemunho do estudo. Em caso de discrepância adotou-se a aquela classificação que apontava influência mais elevada.

### V.3.1.- Situação de Referência

A análise foi procedida substituindo-se cada uma dessas variáveis, uma por vez, a partir do "status quo" caracterizado pelos valores correntes dessas onze variáveis abaixo registradas:

- tamanho da família segurada, igual a 3,14 pessoas;
- salário de benefício, expresso pela razão que forma com o salário terminal e igual a 0,85;
- mês da aposentadoria, o ponto mediano do ciclo semestral de salários;
- dessincronia entre reajustes salariais, igual a 2 meses;
- longevidade da coorte, a retratada pela tabela 1958 CSO;
- nível de contribuição, 15% dos salários para ativos e 20% das complementações para inativos;
- taxa de juros atuarial, igual a 6% ao ano;
- tempo requerido para a aposentadoria com 80% do benefício, igual a 30 anos, ou 55 anos de idade;
- nível dos benefícios, igual a 100% do salário terminal;
- fator de produtividade, ou multiplicador  $1+p$ , usado para alcançar o novo salário, igual ao operador neutro 1,0;
- fator de reposição salarial, ou multiplicador  $1+r$ , usado para alcançar o novo salário e igual a 1,0.

Aplicando-se o algoritmo atuarial sobre a amostra selecionada obteve-se o seguinte balanço atuarial que foi ajustado no valor de seu Patrimônio Líquido para refletir uma exata adequação das reservas, valor este a ser adotado para o cálculo das variações relativas de reservas requeridas em cada uma das situações subsequentes. O Balanço Atuarial é o que segue.

QUADRO V.3.2  
SITUAÇÃO DE REFERÊNCIA  
BALANÇO ATUARIAL

	Em Cr\$ Milhões
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO (*)</u>	<u>1.000.000</u>
BENEFÍCIOS CONCEDIDOS	285.054
. Complem. Aposent. Velhice	674
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	256.515
. Complem. Aposent. Invalidez	10.970
. Complem. Pensão	16.895
 BENEFÍCIOS A CONCEDER	 656.730
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	493.492
. Complem. Aposent. Invalidez	10.206
. Complem. Pensão Partic. Ativos	70.801
. Complem. Pensão Partic. Inativos	33.836
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	37.767
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	10.627
RISCOS EXPIRADOS	36.330
DESPESAS ADMINISTRATIVAS	21.886
 <u>VALOR PRESENTE DO ATIVO (*)</u>	 <u>1.000.000</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	558.960
CONTRIB. PARTIC. ATIVOS	364.770
CONTRIB. PARTIC. INATIVOS	57.011
CONTRIB. PATROCINADORA (**)	19.259
 <u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	 <u>2.431.797</u>

NOTAS: (\*) Os valores realmente encontrados foram normalizados para forçar a obtenção deste total. Todos os demais Balanços que com este se comparam foram igualmente normalizados sempre com o mesmo fator de normalização.

(\*\*) Baseada nos lucros e desligada da folha de salários.

A princípio pode parecer que há um equívoco no dimensionamento dos Benefícios a Conceder, que surgem como apenas 2,3 vezes os Benefícios concedidos quando a proporção de ativos para inativos é de 8 para 1. Ocorre que o caudal futuro de benefícios concedidos está colado ao presente enquanto que o

dos benefícios a conceder está distante no futuro, resultando em baixo valor presente.

Essa demonstração de saldos na forma unicolunar começando pelo Passivo soa estranha mas é na verdade a sua configuração natural e reflete a ordem em que são feitos os cálculos e adotada pela planilha eletrônica que os produziu num processamento por coluna com um mínimo de referências circulares.

### V.3.2 - Tamanho da Família Segurada

Neste trecho vamos investigar o que sucede com o nível de reservas se a família média for reduzida ou acrescida de um dependente temporário. O Quadro a seguir retrata a massa inteira de segurados, incluindo também os próprios participantes.

QUADRO V.3.3  
COMPOSIÇÃO DA MASSA DE SEGURADOS

DISCRIMINAÇÃO	ATIVOS	INATIVOS	TOTAL
Participantes	2.313	286	2.599
Dependentes Vitalícios	1.773	376	2.149
Dependentes Temporários	3.249	165	3.414
Total de Segurados	7.335	827	8.162
Tamanho Médio da Família Segurada	3,17	2,89	3,14

FONTE: Amostra e cálculos do autor.

Os dependentes vitalícios apresentaram uma idade média de 46 anos enquanto que os temporários revelaram uma idade média de 10 anos. Admitimos então subtrair ou acrescentar a essa unidade familiar média um dependente temporário, adotando a hipótese de menos um ou mais um filho para cada participante. Coincidentemente, essa idade média de 10 anos é o ponto mediano da faixa de idades de 0 a 20 anos completos que recebe cobertura das previdências social e complementar.

Esta variável, tamanho da família segurada, repercute exclusivamente no benefício da pensão que é calculada para cada participante com o auxílio do "Índice de compromisso familiar" que soma ponderadamente os fatores de renda vitalícia do grupo familiar e dos dependentes vitalícios e os fatores das rendas temporárias dos dependentes temporários.

Calculando-se, com o auxílio da Tabela CSO 1958 a 6%, o prêmio puro único de uma anuidade com 12 pagamentos mensais, temporária por 11 anos, ordinária e antecipada, encontra-se 8,089998 que ponderado por 10% dá o valor a ser retirado ou acrescentado àquele índice individual para reduzir ou expandir a família na forma desejada. O resultado dessa simulação vai resumido abaixo.

QUADRO V.3.4  
VARIAÇÃO NO TAMANHO DA FAMÍLIA  
BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

C O N T A S	Em Cr\$ Milhões	
	MENOS 1 DEPENDENTE	MAIS 1 DEPENDENTE
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>986.832</u>	<u>1.013.185</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>283.197</u>	<u>286.912</u>
. Compl. Aposent. Velhice	674	674
. Compl. Aposent. Tempo de Serviço	256.515	256.515
. Compl. Aposent. Invalidez	10.970	10.970
. Compl. Pensão	15.037	18.752
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>645.419</u>	<u>668.057</u>
. Compl. Aposent. Tempo de Serviço	493.492	493.492
. Compl. Aposent. Invalidez	10.206	10.206
. Compl. Pensão Participantes Ativos	64.923	76.695
. Compl. Pensão Participantes Inativos	28.403	39.269
. Pecúlio Ordinário Participantes Ativos	37.767	37.767
. Pecúlio Ordinário Participantes Inativos	10.627	10.627
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>36.330</u>	<u>36.330</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>21.886</u>	<u>21.886</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>986.832</u>	<u>1.013.185</u>
<u>PATRIMÔNIO LÍQUIDO</u>	<u>546.164</u>	<u>571.774</u>
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	364.770	364.770
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	56.639	57.382
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.431.797</u>	<u>2.431.797</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	-12.797	12.813
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	-2,29	2,29
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	0,07	0,07

FONTE: Cálculos do autor

A análise desses resultados nos informa que esta variável é de pouca significação para o modelo atuarial adotado, refletindo um dependente temporário a mais ou a menos em cada família uma oscilação na mesma direção de apenas 2,3% no volume das reservas apuradas como adequadas no estado de referência.

A elasticidade das reservas nos transmite idêntico sentimento. Para 1% de variação relativa no tamanho médio do grupo familiar, que inclui o próprio participante, há uma variação relativa de apenas 0,07% no requerimento de reservas.

Esta é portanto uma variável que não requer muita atenção do atuário. Arquivos algo desatualizados, falta de comunicação de nascimento de novos dependentes, não são fatores capazes de viesar significativamente os resultados do Balanço Atuarial.

Como o dependente vitalício é normalmente o cônjuge do participante, nos pareceu irrealista e desnecessário simular a variação desse número dentro de cada grupo familiar, ainda que em alguns casos esse dependente pudesse ser preenchido por ascendentes ou descendentes inválidos ou economicamente dependentes do participante. O caráter marginal dessa possibilidade nos levou a abandonar essa análise.

O resultado acima pode ser generalizado para outros fundos, sobretudo para aqueles com um tamanho médio de família maior que o presente, pois nestes o impacto da mudança deverá ser ainda mais reduzido.

### V.3.3 - Salário de Benefício da Previdência Social

O salário de benefícios do INPS é uma média dos salários de contribuição dos últimos 36 meses. No regime inflacionário que atravessamos seria insensato fazer-se essa média sem a atualização desses salários. Assim, o Decreto Nº 89.312 de 23.01.84 disciplinou a correção monetária desses valores mas de forma equivocada e, obviamente, causando prejuízos para o segurado.

Desse elenco de 36 valores, os doze últimos não são atualizados, corrigindo-se os outros 24 para o mês anterior ao do início do benefício pelo chamado "critério conceitual", cuja fórmula é:

$$SB = \frac{1}{36} \left[ \sum_{n=1}^{24} S_n \cdot C_{n,36} + \sum_{n=25}^{36} S_n \right] \quad (V.3.1)$$

Como essa equação demandava uma coleção diferente de 24 fatores atualização para cada mês em que se desse o benefício, adotou-se uma outra mais prática, embora mais obscura. Nesta, chamada de "critério aproximativo", os fatores de atualização são constantes ao longo de cada trimestre civil e calculados para o mês central desse trimestre, para serem usados na equação

$$SB = \frac{1}{36} \left[ \bar{C}_{n,36}^{(1)} \cdot \sum_{n=1}^p S_n + \bar{C}_{n,36}^{(2)} \cdot \sum_{n=p+1}^{p+12} S_n + \bar{C}_{n,36}^{(3)} \cdot \sum_{n=p+13}^{24} S_n + \sum_{n=25}^{36} S_n \right] \quad (V.3.2)$$

onde

- $\bar{C}_{n,36}^{(1)}$  = média aritmética dos fatores  $C_{n,36}$  do p meses do primeiro ano civil;  
 $\bar{C}_{n,36}^{(2)}$  = média aritmética dos fatores  $C_{n,36}$  dos 12 meses do segundo ano civil;  
 $\bar{C}_{n,36}^{(3)}$  = média aritmética dos fatores  $C_{n,36}$  dos 12-p meses referentes ao terceiro ano civil.

Independentemente do critério adotado, a não correção dos últimos doze meses conjugada com a inflação de três dígitos implica substancial perda de renda em relação ao seu salário terminal para os que dispõem somente da cobertura da previdência social. Em adição a este fato há a progressão funcional que continua atuando nesse período, fazendo deprimir ainda mais a razão alfa que se define como relação entre o salário de benefício e o salário do último mês de contribuição,

$$\alpha = \frac{\text{salário de benefício}}{\text{salário terminal}} \quad (V.3.3)$$

Ambos os salários, uma vez estabelecidos, tornam-se parâmetros do participante para a determinação de sua Complementação de Aposentadoria - CAP, e são corrigidos a partir de então. Desta forma, a ocorrência de um baixo alfa implica em maiores gastos por parte do plano para o cumprimento de seus compromissos para com o associado.

A entidade pesquisada registra os alfas de cada um de seus usufrutuários de benefícios de onde se extraiu uma média para o alfa agregado muito próxima de 0,85; valor este adotado na definição do estado de referência.

Um estudo paralelo utilizando-se da metodologia do INPS em conjugação com a função salarial deste modelo, que prevê promoções de dois em dois anos com aumento real de salário de 5% e anuênios com aumento real de salário de 1% e com diversos cenários inflacionários, revelou, para aposentadorias no início da segunda metade do ciclo de reajustamento salarial, valores de alfa muito próximos dos 0,85 extraídos dos registros do fundo em questão.

Este estudo lateral, procedido pelo autor, adotou sete cenários inflacionários e obteve outros tantos alfas, como vão a seguir anotados.

QUADRO V.3.5  
A INFLUÊNCIA DA INFLAÇÃO NO VALOR DE ALFA

CENÁRIO INFLACIONÁRIO	ALFA
Inflação nula	0,932
Inflação constante de 50% ao ano	0,868
Inflação constante de 150% ao ano	0,824
Inflação constante de 250% ao ano	0,812
Inflação constante de 350% ao ano	0,813
Inflação crescente 50%a.a., 150%a.a., 250%a.a. e 350%a.a. nos quatro períodos do cálculo de alfa	0,674
Inflação decrescente de 350%a.a., 250%a.a., 150%a.a. e 50%a.a. nos quatro períodos do cálculo	1,076

FONTE: Notas da investigação do autor.

Esse quadro nos ensina que: 1) a inflação, mesmo quando constante, é redutora do valor de alfa; 2) que esta redução aumenta com o nível inflacionário; 3) que inflações crescentes são mais danosas que altas inflações constantes e 4) que inflações decrescentes podem produzir salários de benefícios ligeiramente mais altos que o salário terminal.

Qualquer que seja a razão que se invoque para variar o alfa, mudança de critérios por parte da previdência social, mudança do cenário inflacionário, mudanças na função salarial da empresa, o que se pretende é investigar o impacto de uma variação de 1% em torno desse valor corrente de 0,85 no nível requerido de reservas da entidade, o que foi implementado substituindo-se esse valor, alternadamente por 0,8415 e 0,8585 no modelo adotado. O Quadro abaixo mostra os resultados da simulação.

## QUADRO V.3.6

VARIAÇÃO NO SALÁRIO DE BENEFÍCIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL  
BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

Em Cr\$ Milhões

C O N T A S	REDUÇÃO DE 1% NO ALFA DE 0,85	ELEVAÇÃO DE 1% NO ALFA DE 0,85
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.001.452</u>	<u>998.601</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>285.054</u>	<u>285.054</u>
. Complem. Aposent. Velhice	674	674
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	256.515	256.515
. Complem. Aposent. Invalidez	10.970	10.970
. Complem. Pensão	16.895	16.895
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>658.132</u>	<u>655.377</u>
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	495.231	491.799
. Complem. Aposent. Invalidez	10.248	10.169
. Complem. Pensão Participantes Ativos	70.801	70.801
. Complem. Pensão Participantes Inativos	33.836	33.836
. Pecúlio Ordinário Participantes Ativos	37.389	38.145
. Pecúlio Ordinário Participantes Inativos	10.627	10.627
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>36.379</u>	<u>36.283</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>21.886</u>	<u>21.886</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.001.452</u>	<u>998.601</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	560.412	557.561
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	364.770	364.770
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	57.011	57.011
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.431.797</u>	<u>2.431.797</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	1.452	-1.399
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	0,26	-0,25
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	-0,26	-0,25

FONTE: Cálculos do Autor

Da comparação da demonstração precedente com a do estado de referência, depreende-se que as mudanças no alfa não afetam os compromissos registrados sob a rubrica Benefícios Concedidos, em virtude da constância, em termos reais, dos salários presentes na fórmula do alfa, uma vez concedido o benefício.

Vê-se ainda que as variações absoluta e relativa são de pouca expressão dada a pequena mudança praticada no alfa, mas a elasticidade das reservas nos confirma inequivocamente que, pelo menos para este fundo, a influência da

variação, em torno dos montantes atuais, da base de benefício suprida pela previdência social não é de molde a causar impacto significativo no nível de reservas do plano. As reservas variam somente 1/4% por cada 1% de mudança em alfa, nesse nível corrente de 0,85.

Esta conclusão, contudo, não deve ser generalizada para outros fundos, sobretudo para aqueles de modestos salários terminais. Um retorno ao Quadro V.3.1 nos recorda que o fundo em questão é de relativamente altos salários e nele, quando da aposentadoria, 76% dos participantes teriam alcançado salários inscritos na classe majorante, ficando apenas 4% na classe minorante.

Numa tal situação, o salário de benefício é uma fatia minoritária do benefício total, ocorrendo o inverso com a CAP. Assim, uma variação relativa na porção menor provoca uma mudança relativa ainda menor na porção maior, quando ambas totalizam uma constante - o benefício.

Para fundos de salários terminais mais reduzidos, portanto, essa constatação não prevalece completamente, devendo-se analisar em cada caso a importância da variável sob comentário.

#### V.3.4 - Mês da Aposentadoria

A adoção pelo INPS, em nome da simplicidade do cálculo, de índices trimestrais para reajuste de salários de contribuição significou de fato um congelamento transitório desse reajustamento com prejuízos adicionais para os segurados. Desta forma, um segurado que se aposentou em outubro de 1985 e outro que se aposentou em dezembro do mesmo ano tiveram os seus vetores de salários passados corrigidos pelos mesmos índices trimestrais que foram de 18,72 para os últimos meses de 1982, de 12,33 para os doze meses de 1983, de 4,75 para os meses de 1984 e de 1,0 para os últimos doze meses da série.

Limitando a análise a esses dois casos e supondo que esses dois empregados tenham percebido mês a mês os mesmos salários, o que se aposenta depois vai contar com um salário de benefício nominal mais elevado, isto porque dentro de cada trimestre civil o único fator de melhoria do salário de benefício é o deslocamento de cada casela do vetor de 36 salários para duas posições mais recentes, obviamente de mais altos salários ainda que nominais.

O aumento do salário de benefício está assim movido pela troca dos índices trimestrais e pelo deslocamento do vetor de salários, ficando pois difícil generalizar qual o melhor mês de aposentadoria para um segurado de uma

determinada categoria.

O objetivo de quem sô tem a previdência social é extrair dela o maior benefício real possível. Para o segurado de um plano de benefícios definidos da previdência complementar, essa preocupação inexiste porque o eventual prejuízo se transfere para o fundo na medida em que, agora, mais baixos salários de benefícios representam mais altas complementações de aposentadorias.

Para a particular categoria e o particular fundo em questão, o estudo paralelo retromencionado, que utiliza a função salarial da empresa em conjugação com o ciclo de reajustamentos semestrais e com os diversos cenários inflacionários, produziu os seguintes resultados para o valor de alfa.

#### QUADRO V.3.7

##### A INFLUÊNCIA DO MÊS DE APOSENTADORIA NO VALOR DE ALFA

MÊS DE APOSENTADORIA (1)	CENÁRIOS INFLACIONÁRIOS (2)						
	0%	50%	150%	250%	350%	CRESCENTE 50% - 350%	DECRESCENTE 350% - 50%
1º	0,931	0,782	0,653	0,594	0,560	0,448	0,969
2º	0,934	0,843	0,773	0,749	0,742	0,611	1,029
3º	0,938	0,860	0,802	0,785	0,781	0,645	1,057
4º	0,932	0,868	0,824	0,812	0,813	0,674	1,076
5º	0,935	0,933	0,970	1,018	1,069	0,905	1,123
6º	0,939	0,950	1,001	1,057	1,113	0,941	1,154

NOTAS: (1) Posição dentro do ciclo semestral de reajustamento salarial.

(2) Os cinco primeiros cenários são de inflação anual constante ao nível indicado. Os dois últimos são de inflações anuais variáveis, com saltos de 100%a.a. entre os extremos indicados.

O Quadro acima nos revela que, para esse fundo, há um visível interesse em que as aposentadorias se dêem mais para o fim do ciclo semestral de reajustamento salarial uma vez que, sendo alfa crescente sob todos os cenários inflacionários, se alocaria à previdência social uma porção ligeiramente maior de encargos. Observemos o cenário de inflação constante de 250%a.a., não muito diferente da situação do país nestes últimos três anos, para notar que, para esse grupo, a aposentadoria no primeiro mês do ciclo faz com que o salário de benefício seja de tão somente 59,4% do salário terminal pelo qual se responsabilizou o fundo. Já uma aposentadoria no quinto mês eleva essa razão para 101,8% do mesmo salário terminal ou do salário de contribuição terminal.

Nesta parte do estudo variou-se o alfa de 0,85, seu valor no estado

de referência, para 0,60 a fim de representar todas as aposentadorias futuras no primeiro mês do ciclo e para 1,00 buscando representar todas as aposentadorias futuras no quinto mês do ciclo de reajustamento salarial. Os pequenos arredondamentos foram, ambos, feitos na direção da prudência e porque se esperam mudanças nas regras do INPS para evitar alfas maiores que 1,0. Obviamente esta simulação não pode afetar os números dos direitos já adquiridos, uma vez que seus parâmetros já estão cristalizados.

As conseqüências destas duas mudanças estão mostradas no quadro abaixo.

QUADRO V.3.8  
VARIAÇÃO NO MÊS DE APOSENTADORIA  
BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

Em Cr\$ Milhões

CONTAS	APOSENTADORIA NO	
	1º MÊS (*)	5º MÊS (*)
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.127.795</u>	<u>989.076</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>285.054</u>	<u>285.054</u>
. Complem. Aposent. Velhice	674	674
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	256.615	256.615
. Complem. Aposent. Invalidez	10.970	10.970
. Complem. Pensão	16.895	16.895
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>780.430</u>	<u>646.418</u>
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	617.834	478.795
. Complem. Aposent. Invalidez	14.015	10.119
. Complem. Pensão Partic. Ativos	77.460	68.609
. Complem. Pensão Partic. Inativos	33.836	33.836
. Pecúlio Ordinário Participantes Ativos	26.659	44.432
. Pecúlio Ordinário Participantes Inativos	10.627	10.627
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>40.424</u>	<u>35.718</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>21.886</u>	<u>21.886</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.127.795</u>	<u>989.076</u>
<u>PATRIMÔNIO LÍQUIDO</u>	<u>686.756</u>	<u>548.036</u>
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	364.770	364.770
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	57.011	57.011
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.431.797</u>	<u>2.431.797</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	127.795	-10.924
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	22,86	-1,95
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	-0,30	-0,08

FONTE: Cálculos do autor.

NOTA: (\*) Do ciclo de reajuste semestral de salário.

Como se vê, a aposentadoria no primeiro mês demandaria mais Cr\$127,8 Bilhões, equivalentes à expressiva fatia de 22,86% das atuais reservas, enquanto que pouco progresso se faria postecipando essa aposentadoria para o quinto mês.

As elasticidades das reservas nos indicam, primeiro, que mês da aposentadoria e nível de reservas caminham em sentidos contrários como era de se esperar; segundo, que o fenômeno é assimétrico, oferecendo fortes perdas na direção da antecipação e fracos ganhos na direção da postecipação da aposentadoria.

O fundo em questão deve estudar cuidadosamente mecanismos de indução a uma aposentadoria posterior à metade do seu ciclo de reajustamento salarial.

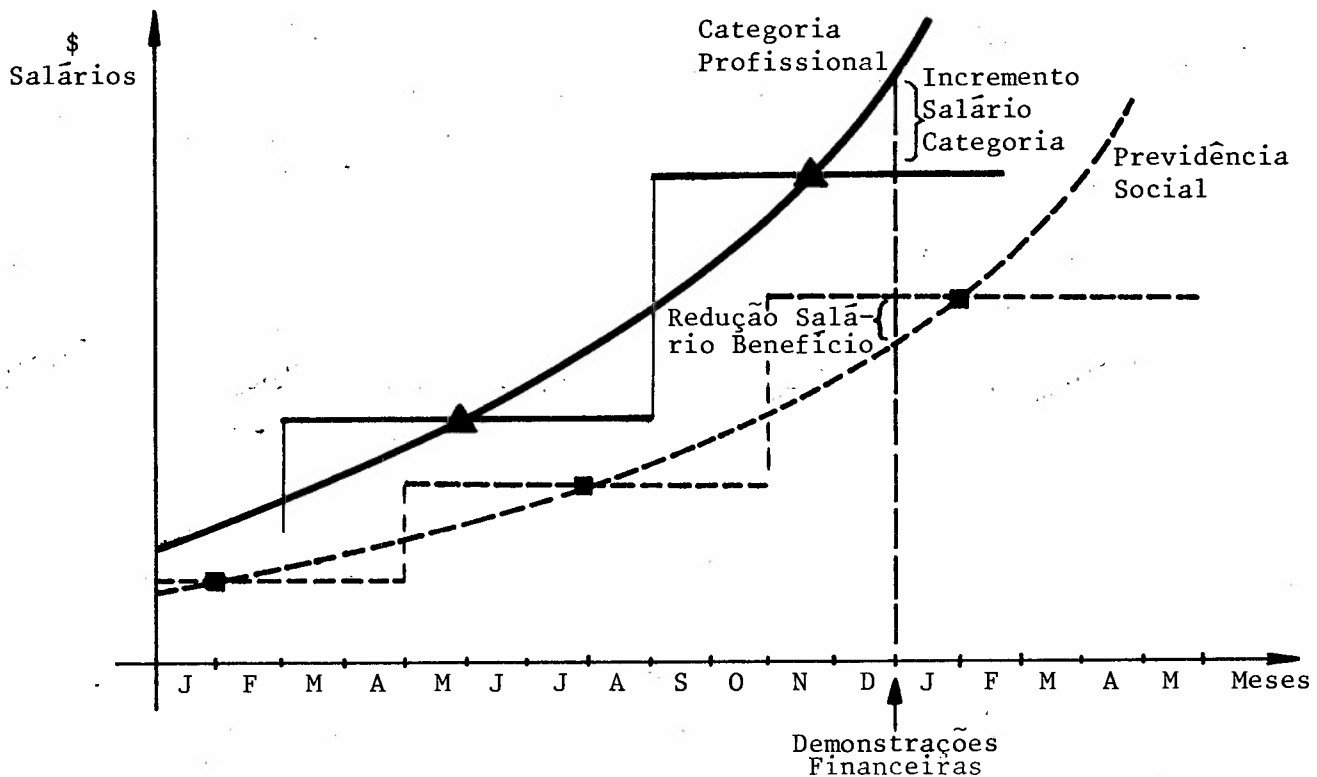
As constatações desta seção são inteiramente válidas para categorias que, como esta, tenham reajustamentos salariais quatro meses depois do reajustamento da previdência social. Outras situações merecem uma análise à parte. Mas são bem mais importantes para fundos com salários mais baixos onde o desembolso do INPS é mais significativo para a formação da renda do aposentado.

#### V.3.5 - Dessincronia entre Reajustes Salariais

Os efeitos da inflação em conjunção com a falta de coincidência entre o reajuste salarial da previdência social e o de uma particular categoria trabalhadora nas contas de sua EFPP não se esgotam no que foi atrás mencionado. É conveniente registrar ainda a heterogeneidade dos cifrões que comparecem nas demonstrações financeiras levantadas obrigatoriamente ao final de cada ano civil.

Na Figura V.3.1 abaixo vemos em linhas tracejadas a função em graus que representa a evolução dos salários da previdência social e em linhas cheias os platôs figurativos da evolução dos salários da categoria, pagos pela EFPP como benefício de aposentadoria.

FIGURA V.3.1  
CRONOLOGIA DOS REAJUSTES SALARIAIS



A primeira questão a enfrentar é identificar em que pontos de cada um dos conjuntos de patamares passam as respectivas funções contínuas representativas da evolução dos salários desses dois distintos grupos de trabalhadores. Os sindicatos afirmariam que passam no ponto da extrema esquerda de cada coleção, implicando dizer que o trabalhador vive sempre com o seu salário submergido, exceto nos dias de aumento. Os empresários, ao contrário, optariam pelo ponto extremo direito de cada patamar, significando dizer que os salários estão sempre emergido da linha contínua e crescente de seu salário nominal, exceção feita para o dia do aumento.

Entre as duas situações extremas se encontraria a posição das autoridades trabalhistas que postulam ficar o trabalhador emergido na primeira metade do percurso, acumulando sobras, ou pagando dívidas passadas, e submergido na segunda metade, consumindo sobras anteriores ou sacando contra sobras futuras.

Para o fim específico de praticar o ajuste financeiro que se impõe, optamos pela posição intermediária segundo a qual, em 31 de dezembro uma EFPP dessa categoria estaria injetando no cálculo do Valor Presente dos Benefícios

Futuros a pagar um nível de salário da função degrau prevalecente nessa data, quando deveria estar adotando um valor mais elevado retirado da função contínua.

De outra parte, está computando como parcela básica o salário de benefício da previdência social por um montante maior do que o devido. Esses dois vieses superpostos, decorrentes da dessincronia de dois meses constatada, conduz a um nível de reservas incorreto e abaixo do necessário para o cumprimento dos compromissos da EFPP.

## QUADRO V.3.9

DESSINCRONIA ENTRE OS REAJUSTES SALARIAIS DA  
PREVIDÊNCIA SOCIAL E DA CATEGORIA PROFISSIONAL

## BALANÇO ATUARIAL E INDICADORES DE IMPACTO

	Em Cr\$ Milhões
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.234.520</u>
BENEFÍCIOS CONCEDIDOS	326.227
. Complem. Aposent. Velhice	796
. Complem. Aposent. Tempo Serviço	293.720
. Complem. Aposent. Invalidez	12.910
. Complem. Pensão	18.802
BENEFÍCIOS A CONCEDER	839.033
. Complem. Aposent. Tempo Serviço	651.250
. Complem. Aposent. Invalidez	14.957
. Complem. Pensão Partic. Ativos	79.944
. Complem. Pensão Partic. Inativos	39.320
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	41.801
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	11.762
RISCOS EXPIRADOS	45.036
DESPESAS ADMINISTRATIVAS	24.224
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.234.520</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	746.285
CONTRIB. PARTIC. ATIVOS	403.731
CONTRIB. PARTIC. INATIVOS	65.245
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.691.543</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	187.324
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	33,51
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	-0,34

FONTE: Cálculos do autor

A correção salarial praticada em novembro de 85 foi de 70,25% ao semestre, equivalente a 9,27% ao mês. A correção salarial da categoria no último aumento de setembro de 85 foi de 89,55%, ou seja, de 11,25% ao mês, ignorando-se quanto será exatamente no próximo aumento de março.

Usando-se os dados disponíveis acima chegou-se aos resultados mostrados no Quadro V.3.9, onde se constata que o fenômeno descrito é significativo, determinando um requerimento adicional de reservas de Cr\$ 187,3 Bilhões, equivalentes a 33,5% das reservas pré-existentes. A elasticidade das reservas mostra que a variável dessincronia, inicialmente posicionada no valor dois, quando reduzida para o valor zero aumenta o nível de reservas de 0,34 vezes.

O efeito perturbador da variável dessincronia tem caráter universal, mas o impacto acima mensurado diz respeito apenas ao caso particular do fundo sob análise que, como já dissemos, apresenta altos salários e mediana dessincronia. A perturbação identificada não deve surgir em um fundo totalmente sincronizado e com salários abaixo do teto de contribuição. Assim sendo, cumpre aos fundos dessincronizados e de altos salários averiguar o impacto que suas dessincronias podem vir a causar no dimensionamento de suas reservas requeridas.

### V.3.6 - Longevidade da Coorte

Há, como dissemos linhas atrás, diferentes tabelas de sobrevivência, umas voltadas para o cálculo dos prêmios de seguros, retratando grupos tornados artificialmente menos longevos, outras construídas para a mensuração dos prêmios das anuidades, tratando com grupos tornados deliberadamente mais longevos que a realidade.

Dentre todas, a 1958 CS0 Table se tornou muito difundida e é usada largamente tanto no cálculo dos seguros como no das anuidades, como é o caso dos fundos de pensão no país.

O uso dessa tabela, que tem 100 anos como primeira idade inalcançável, para o cálculo de benefícios de aposentadorias e pensões não estaria isento de críticas, por conter "margens" do interesse do setor de seguros. Seu emprego no Brasil, contudo, seria aceitável buscando compensar a menor longevidade do homem brasileiro quando comparado com o de países mais desenvolvidos.

As tabelas de anuidades trazem em geral essa referência em seu título

lo e se desdobram em dois segmentos, o individual e o grupal. No primeiro, os segurados provêm da população em geral e apresentam longevidades intermediárias. No último, os participantes são originários de seletos grupos fechados mais homogêneos que, via de regra, exibem longevidades mais elevadas.

Uma EFPP oferece anuidades a um grupo fechado e como tal deveria usar uma tabela da natureza da 1971 Group Annuity Mortality Table que apresenta 111 anos como primeira idade inalcançável.

Nessa ordem de idéias, substituímos no fundo sob análise a 1958 CSO a 6%a.a. pela 1971 GAMT à 6%a.a. e refizemos todos os cálculos de reservas que vão a seguir resumidos.

QUADRO V.3.10  
LONGEVIDADE DA COORTE  
BALANÇO ATUARIAL E INDICADORES DE IMPACTO

	Em Cr\$ Milhões
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.050.780</u>
BENEFÍCIOS CONCEDIDOS	308.846
. Complem. Aposent. Velhice	748
. Complem. Aposent. Tempo Serviço	278.437
. Complem. Aposent. Invalidez	11.789
. Complem. Pensão	17.872
BENEFÍCIOS A CONCEDER	680.732
. Complem. Aposent. Tempo Serviço	543.187
. Complem. Aposent. Invalidez	10.725
. Complem. Pensão Partic. Ativos	58.261
. Complem. Pensão Partic. Inativos	29.249
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	30.132
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	9.178
RISCOS EXPIRADOS	39.023
DESPESAS ADMINISTRATIVAS	22.179
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.050.780</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	600.099
CONTRIB. PARTIC. ATIVOS	369.653
CONTRIB. PARTIC. INATIVOS	61.769
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259
VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS	2.464.351
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	41.139
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	7,36
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	0,67

FONTE: Cálculos do autor

A utilização dessa tabela de sobrevivência aumentou obviamente os requerimentos de todas as reservas, quer de benefícios concedidos, quer de benefícios a conceder, inclusive os riscos expirados. Em consequência, são alterados também o valor presente dos salários dos participantes ativos e as parcelas do Ativo, com exceção da contribuição estatutária da patrocinadora, que é uma alíquota de seus lucros.

O impacto observado nesta seção não é, no entanto, dos maiores encontrados neste estudo, mostrando que a discussão sobre a menor longevidade do trabalhador brasileiro com relação à do seu parceiro americano ou sobre a maior longevidade da mulher com respeito à do homem não resulta ser das mais relevantes no campo da previdência complementar.

No presente caso, a elevação no requerimento de reservas foi de Cr\$ 41,1 Bilhões, equivalente a apenas 7,36% das reservas do "status quo". A elasticidade foi calculada usando-se a primeira idade inalcançável como procuradora dessa variável "longevidade da coorte" e revelou-se positiva indicando que ambas as variáveis se movem na mesma direção. Seu valor de 0,67 informa que para cada ano adicionado à "longevidade" da tabela 1958 CSO o requerimento de reservas cresce de 0,67%.

O fenômeno acima descrito, ajustado às particularidades de cada grupo, é de indiscutível caráter universal e cresce de importância por repercutir mais intensamente sobre o valor presente dos benefícios futuros que sobre o valor presente das contribuições futuras, dada a adição de uma sobrevivência ao período de inatividade, deixando intocada a extensão do período produtivo.

### V.3.7 - Nível de Contribuição

Nos fundos do tipo "benefício definido", o nível de contribuição é a principal variável dependente ou de saída e que comanda todo o processo de acumulação de reservas, ou de "funding", como querem os americanos.

Um equívoco na sua determinação, como foi observado frequentemente no passado com os montepios e com algumas EFPPs mais antigas, causa consequências cuja gravidade convém mensurar.

Tendo como pano de fundo o estado de referência, para o qual as contribuições que lhe asseguram o equilíbrio futuro estão bem definidas, exercitamos duas simulações modificando o nível das contribuições dos participantes ativos e inativos e da patrocinadora, fixando-o primeiro em 9/10 e depois em 11/10 do nível de referência.

Uma tal mudança não tem qualquer repercussão sobre as contas do Passivo nem sobre o valor presente dos salários futuros, mas é decisiva para todas as contas do Ativo, reorganizando-as internamente sem, naturalmente, alterar o seu total.

Inspecionando-se o Quadro V.3.11 se verifica que se passando a adotar para o futuro contribuições equivalentes a 9/10 das atuais, o fundo até então equilibrado ficaria desfalcado em apenas 7,9% das reservas pré-existentes, ou Cr\$ 44,1 Bilhões. Contrariamente, uma emenda no estatuto do plano que prevesse contribuições equivalentes a 11/10 das atuais permitiria gerar um excedente de Cr\$ 44,1 Bilhões, ou absorver déficits acaso existentes nesse montante. Isto indica uma certa inércia do fundo tanto para se desorganizar como se reorganizar por culpa da inadequação das contribuições, partindo-se da contribuição de equilíbrio.

QUADRO V.3.11  
NÍVEL DE CONTRIBUIÇÃO  
BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

C O N T A S	Em Cr\$ Milhões	
	C O N T R I B U I Ç Õ E S	
	13,5% p/ativos 18,0% p/inativos	16,5% p/ativos 22,0% p/inativos
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.000.000</u>	<u>1.000.000</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>285.054</u>	<u>285.054</u>
. Complém. Aposent. Velhice	674	674
. Complém. Aposent. Tempo de Serviço	256.515	256.515
. Complém. Aposent. Invalidez	10.970	10.970
. Complém. Pensão	16.895	16.895
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>656.730</u>	<u>656.730</u>
. Complém. Aposent. Tempo de Serviço	493.492	493.492
. Complém. Aposent. Invalidez	10.206	10.206
. Complém. Pensão Partic. Ativos	70.801	70.801
. Complém. Pensão Partic. Inativos	33.836	33.836
. Pecúlio Ordinário Participantes Ativos	37.767	37.767
. Pecúlio Ordinário Participantes Inativos	10.627	10.627
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>36.330</u>	<u>36.330</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>21.886</u>	<u>21.886</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.000.000</u>	<u>1.000.000</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	603.065	514.857
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	328.293	401.247
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	51.310	62.712
CONTRIB. PATROCINADORA (1)	17.333	21.185
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.431.797</u>	<u>2.431.797</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	44.104	-44.104
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	7,89	-7,89
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	-0,79	-0,79

FONTE: Cálculos do autor

NOTA: (1) 90% e 110%, respectivamente.

As elasticidades negativas nos indicam acacianamente que, para um fundo equilibrado, reduzir as contribuições futuras implica a necessidade de mais reservas correntes acumuladas a partir de contribuições passadas, e que para cada 10% de aumento no esforço de poupança futura poderiam ser produzidas apenas 7,89% das reservas requeridas para o equilíbrio.

Em outras palavras, para o fundo em questão, eliminar déficits acaso existentes pela via da ampliação das contribuições futuras é uma estratégia cruenta. Para se gerar direitos de contribuições futuras equivalentes a 10% das reservas requeridas para o equilíbrio torna-se necessário elevarem-se permanentemente todos os tipos de contribuições em 12,7%.

Estas conclusões, nos seus aspectos quantitativos, têm adequação somente para o fundo sob análise, mas são qualitativamente válidas para qualquer outro. É custoso absorver déficits pelo aumento de contribuições que se espraiam por toda a vida futura, ativa e inativa, dos participantes. Benefícios já creditados ou concedidos devem estar integralmente fundados. Havendo significativo passivo suplementar, seu equacionamento deve ser buscado, primeiro, através de um arranjo financeiro determinístico com a patrocinadora do plano, depois, por meio de um arranjo misto envolvendo patrocinadora e seguradora e, por fim, com a redução atuarialmente equivalente dos benefícios.

#### V.3.8 - Taxa de Juros Atuarial

A literatura especializada reporta-se a esta variável como uma das mais importantes para um modelo de custeio de um fundo de pensão, o que é compreensível pois ela se envolve nos processos de capitalização composta que utiliza prazos de até cem anos.

O fundo sob comentário não usa uma Tabela de Serviço para retratar o seu ambiente multidecremental da morte acrescida da invalidez e do desligamento do emprego. Como a quase totalidade dos fundos brasileiros, adota apenas o ambiente unidecremental da morte expresso pela Tabela de Sobrevivência "Commissioners 1958 Standard Ordinary (CSO) Mortality Table" para homens, mais adaptada a transações com seguros do que com anuidades. Embora conte com um expressivo contingente de mulheres, 27,9% do total, mais longevas de 3 a 6 anos que os homens, também não emprega tabelas diferenciadas por sexo, de resto uma prática comum no país.

Quanto à taxa atuarial a ser adotada, o ordenamento legal brasileiro

atribuí sua disciplina ao Conselho de Previdência Complementar que, através da Resolução MPAS/CPC/Nº 01/78, em seu item 41, fixou o teto de 6% ao ano, te to este que é adotado por praticamente todos os fundos existentes no país, in clusive o que estivemos investigando.

Nossa simulação nesta seção consistiu em substituir por outros os nú meros de comutação da tabela indicadas, referentes a 6% ao ano, para refletir a adoção da taxa de 5% e em seguida da taxa de 7% ao ano real empregada no processo de cálculo do Valor Presente dos Benefícios Futuros e das Contribui- ções Futuras. Os resultados dessa investigação estão mostrados a seguir.

QUADRO V.3.12  
TAXA DE JUROS ATUARIAL  
BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

Em Cr\$ Milhões

CONTAS	TAXA ATUARIAL	
	5%a.a.	7%a.a.
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.175.641</u>	<u>863.776</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>309.718</u>	<u>263.806</u>
. Complem. Aposent. Velhice	720	634
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	278.842	237.237
. Complem. Aposent. Invalidez	12.023	10.074
. Complem. Pensão	18.133	15.861
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>802.786</u>	<u>546.028</u>
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	597.848	412.720
. Complem. Aposent. Invalidez	11.277	9.388
. Complem. Pensão Partic. Ativos	94.868	54.360
. Complem. Pensão Partic. Inativos	38.976	29.662
. Pecúlio Ordinário Participantes Ativos	47.615	30.556
. Pecúlio Ordinário Participantes Inativos	12.202	9.342
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>39.615</u>	<u>33.520</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>23.522</u>	<u>20.422</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.175.641</u>	<u>863.776</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	702.407	451.390
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	392.031	340.366
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	61.944	52.761
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS	2.613.543	2.269.106
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	143.447	-107.570
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	25,66	-19,24
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	-1,54	-1,15

FONTE: Cálculos do autor

Com exceção das contribuições estatutárias da patrocinadora, todos os demais valores do Quadro acima resultaram impactados por essas mudanças da taxa atuarial em apenas 1%. Adotando-se 5% ao ano, vê-se que são necessárias reservas adicionais de Cr\$ 143,4 Bilhões ou 25,66% a mais que o nível do estado de referência. Empregando-se 7% ao ano, verifica-se uma redução nas reservas requeridas de 19,24% do que existia anteriormente, equivalente a Cr\$107,6 Bilhões. Isto está plenamente consistente com o referido por Adams<sup>7</sup> sobre a matéria.

As elasticidades, algo assimétricas, são de 1,54 e -1,15, significando do dizer que para cada ampliação ou redução de 0,06% ao ano na taxa atuarial corrente de 6% ao ano as reservas variam até 1,54% traduzindo uma alta sensibilidade do modelo a esta variável, como se antecipou.

A importância da taxa atuarial aqui constatada se traduz na enorme responsabilidade em bem administrar os ativos do fundo. Perder ou ganhar marginal e sistematicamente 1% ao ano sobre os ativos do fundo pode significar a ruína ou o sucesso de uma EFPP. Para tanto são requeridas probidade e competência técnica.

Estas constatações têm caráter universal, isto é, abrangem todos os fundos e são particularmente mais importantes no quadro brasileiro dadas as idades precoces de seus aposentados. Para se fundar uma relativamente longa aposentadoria em um relativamente curto período de atividades são necessárias maiores taxas reais efetivas de rentabilidade a serem ganhas por uma eficiente administração na gestão dos ativos do fundo.

Os americanos entendem que a taxa pura de juros ficaria entre 3 e 4% ao ano que acrescida da taxa de risco de 1 a 2% ao ano, típica dos portfólios de seus fundos, elevaria sua taxa atuarial para o intervalo entre 4 e 6% ao ano. A regra básica reza que a taxa a ser adotada deve refletir a rentabilidade no longo prazo e não resultados circunstanciais, bons ou maus.

As EFPPs inscrevem-se entre os chamados "investidores institucionais" que comparecem de forma crescente nos mercados financeiro, bursátil e imobiliário brasileiros como dos mais ativos e destacados investidores do país.

Dados do Banco Central<sup>8</sup> revelam a estrutura desses ativos no período 1981-1984 como vai resumido no Quadro seguinte.

As resoluções Nos 974 e 1.025 do Conselho Monetário Nacional direcionam essas aplicações impondo um mínimo de 30% em títulos federais e um mínimo de 20% em ações e debêntures conversíveis, podendo os restantes 50% serem aplicados em outros investimentos.

(7) ADAMS, W. The effect of interest on pension contributions. Transactions of the Society of Actuaries. Vol. 19. 1967. pp.170-83.

(8) BANCO CENTRAL DO BRASIL - Diretoria de Fiscalização. Investidores Institucionais - entidades de previdência privada - fechadas. Brasília, 1984.

QUADRO V.3.13  
AS EFPPs COMO INVESTIDORES INSTITUCIONAIS  
Em Cr\$ Milhões Constantes de 1984

INVESTIMENTOS	EM 31 DEZEMBRO DE		
	1982	1983	1984
LTN	89.636	28.560	30.714
ORTN	2.083.690	2.625.731	4.405.800
Ações	1.054.514	2.434.032	4.205.413
Debêntures	1.351.900	1.643.892	971.754
Quotas de Fundos	6.636	58.415	65.582
Depósitos a Prazo	1.625.470	1.642.147	811.288
Letras de Câmbio	53.393	47.497	32.325
Letras Imobiliárias	997	8.727	12.470
Títulos Estaduais	1.345.183	1.317.423	1.097.322
Títulos Municipais	9.668	9.999	257
Obrigações da Eletrobrás	430.687	353.459	368.847
Títulos do BNDES	40.100	35.483	26.621
Cêdulas Hipotecárias	79.576	118.482	76.813
Imóveis e Direitos	2.130.608	2.071.108	2.196.382
Empréstimos e Financiamentos	1.056.598	1.524.468	1.529.647
Títulos da Dívida Agrária	-	43.128	53.185
<b>T O T A L</b>	<b>11.358.656</b>	<b>13.962.551</b>	<b>15.884.420</b>

FONTE: Banco Central do Brasil - Diretoria de Fiscalização

NOTA: Em 29.11.85 o Total ascendia a Cr\$ 67,9 Trilhões em 127 entidades representando 96% das aplicações do sistema.

Este potencial investidor deverá crescer nos próximos anos com a retomada do crescimento da economia e a difusão dos fundos fechados privados de de pensão.

### V.3.9 - Tempo Requerido para a Aposentadoria

Esta variável amplia o grupo das que têm grande influência sobre o nível das reservas, em coerência com o que dissemos em outros pontos deste trabalho.

Como vimos, a previdência complementar no Brasil se utiliza de um critério misto de tempo de serviço e idade, respectivamente, para os que a ela se filiaram antes ou depois do Decreto Nº 81.240 de 20.01.78. Assim sendo, a aposentadoria normal com 80% do benefício se dá, respectivamente, com 30 anos de serviço ou com 55 anos de idade.

Investigaremos neste segmento as influências da antecipação por um

ano, 29 anos de serviço e 54 anos de idade, e do adiamento por um ano, 31 anos de serviço e 56 anos de idade, dos eventos geradores, em cada caso, do direito à aposentadoria.

Mudando-se no programa as constantes que estabelecem essas restrições, foram obtidos os resultados a seguir expostos.

O Quadro V.3.12 é rico de boas informações sobre esse fundo. Os Benefícios Concedidos e as Contribuições sobre esses benefícios já têm suas cronologias de desembolsos estabelecidas em função das regras de aposentadoria anteriormente praticadas e por isso não sofrem qualquer modificação.

Os Benefícios a Conceder devem se elevar quando o tempo requerido é antecipado, reduzindo-se no caso contrário, como de fato se constata. Todas as parcelas que compõem esse grupo de contas também se elevam, exceção feita para a Complementação de Aposentadoria por Tempo de Serviço, que se reduz com respeito ao estado de referência para ambas as simulações. Mas esta constatação é falaciosa porque o conjunto de segurados cujo valor presente dos benefícios futuros foi apanhado nessa rubrica pelo estado de referência se alterou, vasocomunicando-se com a rubrica Riscos Expirados. Esta conta congrega aqueles participantes que já tendo preenchido todas as condições para a aposentadoria ainda não fizeram uso desse direito.

Com a antecipação de um ano no tempo requerido, cresce o número de pessoas catalogadas como Riscos Expirados às custas do contingente que estava sob a conta Complementação de Aposentadoria por Tempo de Serviço; crescem também os VPBFs de cada um dos indivíduos originariamente nessas duas contas, do que resulta um extraordinário crescimento de Riscos Expirados. A outra conta, no entanto, sofre mais perdas por fuga de participantes do que ganhos por ampliação dos direitos individuais a benefícios e resulta ligeiramente menor do que no estado de referência.

Com a ampliação de um ano no tempo requerido, esses mesmos fenômenos ocorrem em sentido contrário. Para avaliar corretamente o que se passa carece que essas duas contas sejam somadas nos três retratos do plano, resultando Cr\$ 552.671 Milhões para o estado de antecipação, Cr\$ 529.822 Milhões para o estado de referência e Cr\$ 506.229 Milhões no estado de postecipação da aposentadoria, mostrando o perfil descendente de valores que se esperava.

Encurtando-se o período produtivo do grupo, nota-se a redução dos Valores Presentes dos Salários dos Participantes Ativos e das suas Contribuições e do Valor Presente das Despesas Administrativas, calculado este como 6% dessas contribuições. Expandindo-se esse período, esses três valores se movem na

direção contrária.

QUADRO V.3.14  
TEMPO REQUERIDO PARA A APOSENTADORIA  
BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

Em Cr\$ Milhões

C O N T A S	TEMPO REQUERIDO	
	29 anos de serviço 54 anos de idade	31 anos de serviço 56 anos de idade
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.019.501</u>	<u>979.581</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>285.054</u>	<u>285.054</u>
. Complém. Aposent. Velhice	674	674
. Complém. Aposent. Tempo de Serviço	256.515	256.515
. Complém. Aposent. Invalidez	10.970	10.970
. Complém. Pensão	16.895	16.895
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>645.224</u>	<u>651.956</u>
. Complém. Aposent. Tempo de Serviço	483.995	486.889
. Complém. Aposent. Invalidez	9.284	10.871
. Complém. Pensão Partic. Ativos	70.226	71.437
. Complém. Pensão Partic. Inativos	33.836	33.836
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	37.255	38.296
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	10.627	10.627
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>68.676</u>	<u>19.340</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>20.547</u>	<u>23.230</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.019.501</u>	<u>979.581</u>
<u>PATRIMÔNIO LÍQUIDO</u>	<u>600.777</u>	<u>516.140</u>
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	342.455	387.171
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	57.011	57.011
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTIC. ATIVOS</u>	<u>2.283.031</u>	<u>2.581.141</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	41.816	-42.821
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	7,48	-7,66
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	-2,24	-2,30

FONTE: Cálculos do autor

Nota-se ainda que as reservas oscilam quase simetricamente em torno de seu valor referencial em montantes de Cr\$ 41,8 Bilhões e -Cr\$ 42,8 Bilhões representando respectivamente +7,48% e -7,66% das reservas do "status quo". Esses valores podem parecer modestos e refletir apenas uma influência mediana dessa variável, mas na verdade se devem à variação de um só ano no tempo re-

querido para a aposentadoria. Fosse a postergação da aposentadoria de cinco a nos - e ainda não se teria alcançado o padrão americano - já teríamos obtido reduções no requerimento de reservas superiores a Cr\$ 200 Bilhões, equivalentes a mais de 35% do nível anteriormente estabelecido.

A elasticidade das reservas confirma o sentimento acima sobre o comportamento desse fundo, nos dizendo que para oscilações de apenas 3,6 meses no período produtivo, os requerimentos de reservas oscilam em torno de 2 1/4%, colocando essa variável indubitavelmente no rol das que causam uma marcada influência no nível necessário de reservas do equilíbrio.

Este é um fenômeno inerente a todo fundo aqui e alhures, podendo ser mais ou menos intenso na dependência das idades em que se aposentam efetivamente os participantes do fundo. Fundos de participantes que se aposentam muito jovens tendem a ser menos sensíveis a ampliações de um ano nessa variável que fundos concedendo aposentadorias em idades mais avançadas quando a força de mortalidade atua mais fortemente no sentido de vedar esse benefício e quando a sobrevivência para desfrutá-lo se encolhe proporcionalmente mais.

#### V.3.10 - Nível de Benefícios

Queremos expressar com esta variável a razão entre o montante do benefício de aposentadoria e o montante do salário terminal e não a razão entre a Complementação de Aposentadoria, CAP, e esse salário de fim de carreira.

Para o fundo em questão, esse nível é de 100%, mas será de apenas 80% e 90% em cada uma das simulações adiante tratadas. Preferimos essas duas situações, às de níveis de 90% e 110%, por entendermos que são mais realistas e mais ricas de informações para o presente trabalho.

Ajustando os necessários parâmetros no algoritmo de cálculo das reservas, foram obtidos os resultados que a seguir vão registrados e comentados.

Optamos neste segmento por estender as novas restrições de benefícios também aos inativos para colher uma visão desse fundo como se tivesse operado desde as suas origens nesses novos níveis de benefícios. Os resultados de uma imposição somente ao grupo ativo são facilmente obtidos a partir do quadro abaixo, bastando que se preservem, nas posições da situação de referência, os sete valores relativos ao grupo dos inativos.

QUADRO V.3.15  
NÍVEL DE BENEFÍCIOS  
BALANÇO ATUARIAL E INDICADORES DE IMPACTO

C O N T A S	Em Cr\$ Milhões	
	N Í V E L	
	80%	90%
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>660.167</u>	<u>828.132</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>207.780</u>	<u>246.335</u>
. Complém. Aposent. Velhice	445	560
. Complém. Aposent. Tempo de Serviço	186.852	221.684
. Complém. Aposent. Invalidez	7.338	9.154
. Complém. Pensão	13.145	14.938
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>406.834</u>	<u>529.913</u>
. Complém. Aposent. Tempo de Serviço	275.143	383.696
. Complém. Aposent. Invalidez	5.407	7.527
. Complém. Pensão Partic. Ativos	63.764	66.382
. Complém. Pensão Partic. Inativos	23.803	28.753
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	30.214	33.990
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	8.502	9.564
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>23.667</u>	<u>29.999</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>21.886</u>	<u>21.886</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>660.167</u>	<u>828.132</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	234.582	394.836
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	364.770	364.770
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	41.556	49.267
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.431.797</u>	<u>2.431.797</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	-324.378	-164.124
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	-58,03	-29,36
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	2,90	2,94

FONTE: Cálculos do autor

Na fôrma de análise preferida, todos os valores do Quadro foram im pactados, exceção feita a quatro variáveis, a saber:

- o valor presente dos salários futuros dos participantes ativos que independe da política de benefícios do fundo;
- o valor presente das contribuições futuras dos participantes ativos que sendo calculada como 15% da variável anterior, dela herda sua fixidez;
- o valor presente das despesas administrativas, cuja fixidade

decorre de ser calculada como 6% da variável imediatamente anterior; e

- a contribuição estatutária do patrocinador, calculada como uma alíquota de seus lucros tributáveis, variável externa ao fundo.

O impacto observado é no sentido de uma expressiva redução das obrigações atuariais da EFPP estudada. Partindo-se do estado de referência, vê-se que os três agregados financeiros — Benefícios Concedidos, Benefícios a Conceder e Riscos Expirados — caem de Cr\$ 285,1 Bilhões, Cr\$ 656,7 Bilhões e Cr\$ 36,3 Bilhões para, respectivamente, Cr\$ 246,3 Bilhões, Cr\$ 529,9 Bilhões e Cr\$ 30,0 Bilhões, quando se adota um nível de benefício de 90% do usado naquele testemunho. Essa redução é, obviamente, mais acentuada quando o nível de benefícios cai para 80% do prometido, como se pode ver no Quadro pertinente.

Na ordem descendente dos níveis de benefícios mencionados, o Total do Passivo cai substancialmente de Cr\$ 1 Trilhão para Cr\$ 828,1 Bilhões e Cr\$ 660,1 Bilhões, respectivamente, representando uma queda de compromissos para o fundo de 17,2% no primeiro caso e de 34,0% na situação mais drástica.

Os reflexos no Ativo são igualmente dignos de menção. Como nesse bloco já há duas rubricas fixas e como a única rubrica variável — Contribuição de Participantes Inativos — é de pouca expressão, quase todo o impacto da redução do Passivo se traduz numa violenta compressão das Reservas Técnicas que caem 29,4% e 58,0%, respectivamente. Extensivamente, o Patrimônio Líquido requerido para o equilíbrio afunda de Cr\$ 559 Bilhões para respectivamente Cr\$ 394,8 Bilhões e Cr\$ 234,6 Bilhões, traduzindo reduções de Cr\$ 164,1 Bilhões no primeiro caso e de Cr\$ 324,4 Bilhões na hipótese mais austera de 80% dos benefícios.

As elasticidades resultantes são igualmente significativas e revelam que para cada 1% de redução no nível de benefícios reduz-se o nível requerido de benefícios em 2,9% numa proporção quase de 1 para 3.

Estes resultados mostram como é crítica a variável estudada neste segmento e como é possível equacionar amplos passivos suplementares penderes de solução com relativamente pequenas reduções nos benefícios. Para este fundo, por exemplo, uma insuficiência de reservas de quase 60% seria resolvida com apenas 20% de redução no nível de benefícios.

Este comportamento tem explicação na integração da previdência complementar com a previdência social que provê a base do benefício sobre a qual se adiciona a CAP do fundo de pensão privado. Uma certa redução percentual no todo, o benefício da aposentadoria, quando feita às custas apenas de uma de

suas parcelas, a complementação da aposentadoria, implica percentuais de redução mais drásticos nessa CAP e, por via de consequência, no fundo necessário para pagá-la.

Por fim, os ensinamentos aqui recolhidos são universais e alcançam com maior intensidade ainda os fundos de categorias com menores salários que a ligada ao fundo estudado.

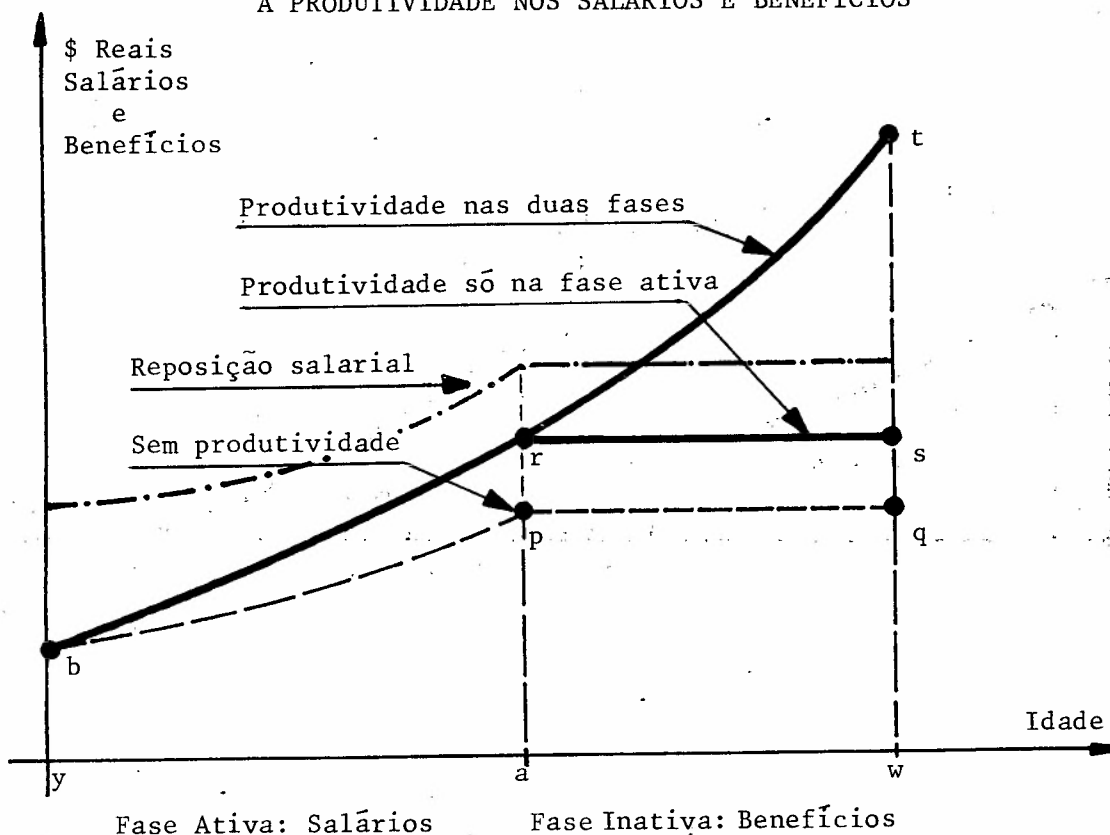
### V.3.11 - Produtividade

Neste segmento trataremos de uma variável de extrema importância para o futuro dos fundos de pensão no Brasil. Dividiremos o nosso estudo em duas partes. Na primeira, injetaremos a produtividade apenas na função salarial do participante ativo, nos grádientes de 1% ao ano ou de 3% ao ano, para a obtenção do salário terminal, que, uma vez alcançado, ficará constante ao longo de toda a vida inativa.

Na segunda parte, permitiremos que o operador da produtividade continue atuando também no trecho da curva relativa à aposentadoria como mostra a Figura abaixo.

FIGURA V.3.2

#### A PRODUTIVIDADE NOS SALÁRIOS E BENEFÍCIOS



O estado de referência está representado pela curva  $bpq$  sendo que suas contribuições serão cobradas com base na área  $ybpa$  e seus benefícios estão ligados ao retângulo  $apqw$ .

A primeira família de simulações, da produtividade  $s\tilde{o}$  na fase ativa, está representada pela curva  $brs$  que delimita como base para contribuições a área  $ybra$  e representa os benefícios pelo retângulo  $arsw$ .

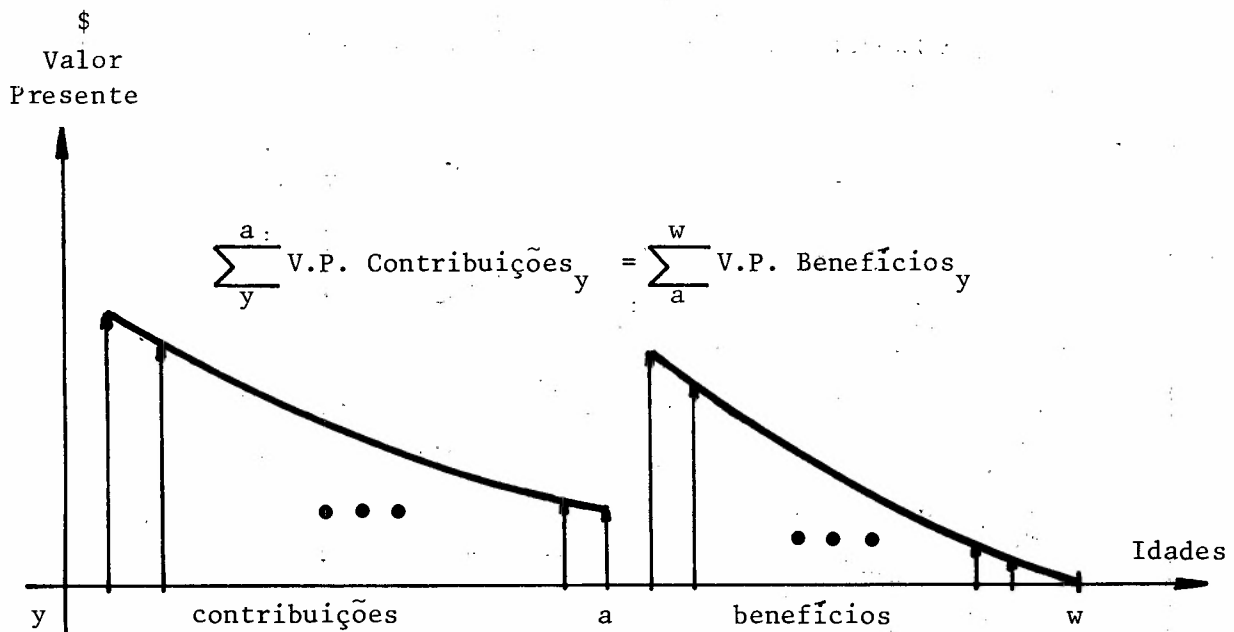
Os exercícios da segunda família estão traduzidos pela curva  $brt$  que tem para base das contribuições a área  $ybra$  e para os benefícios a área  $artw$ .

Não se deve considerar nem a área base das contribuições nem a área dos benefícios como exatas representantes dos montantes envolvidos. Como vimos, um valor incerto no futuro, contribuição ou benefício, é reduzido para o seu valor presente não só pelos fatores de atualização convencionais, mas também pela probabilidade de sobrevivência do participante entre o instante zero e o instante de que se trata.

As esperanças de contribuições e benefícios mensurados no instante  $y$ , idade de entrada do participante no plano, poderiam ser caricaturizadas na Figura a seguir.

FIGURA V.3.3

ESPERANÇAS DE CONTRIBUIÇÕES E BENEFÍCIOS



Os resultados da aplicação de taxas de produtividade de 1%a.a. e 3% a.a., uma por vez, no ambiente do fundo sob observação, vão mostrados abaixo.

QUADRO V.3.16  
 PRODUTIVIDADE SÓ PARA ATIVOS  
 BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

C O N T A S	Em Cr\$ Milhões	
	PRODUTIVIDADE ANUAL	
	1%	3%
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.107.646</u>	<u>1.430.671</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>285.054</u>	<u>285.054</u>
. Complem. Aposent. Velhice	674	674
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	256.515	256.515
. Complem. Aposent. Invalidez	10.970	10.970
. Complem. Pensão	16.895	16.895
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>761.959</u>	<u>1.078.946</u>
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	593.202	892.320
. Complem. Aposent. Invalidez	11.696	15.895
. Complem. Pensão Partic. Ativos	72.692	81.005
. Complem. Pensão Partic. Inativos	33.836	33.836
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	39.906	45.262
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	10.627	10.627
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>36.795</u>	<u>37.731</u>
<u>DESPEAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>23.838</u>	<u>28.940</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.107.646</u>	<u>1.430.671</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	634.082	872.060
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	397.295	482.342
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	57.011	57.011
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.648.633</u>	<u>3.215.610</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	75.121	313.099
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	13,44	56,01
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	13,44	18,67

Fonte: Cálculos do autor.

Neste grupo de exercícios não ampliamos os direitos já adquiridos, razão por que os sete valores relativos aos inativos permaneceram inalterados. Tivesse a alteração sido introduzida nesse grupo, os reflexos abaixo registrados teriam apresentado maior amplitude.

Os Riscos Expirados crescem modestamente pois os salários terminais já foram praticamente alcançados, mas os Benefícios a Conceder evoluem de Cr\$

656,7 Bilhões para Cr\$ 762 Bilhões e para Cr\$ 1.078,9 Bilhões, respectivamente, para 1%a.a. e 3%a.a. de produtividade, representando aumentos de 16% e 64,3%, nos dois casos. Essas duas últimas percentagens, e sobretudo a diferença entre elas, são um primeiro indicador da gravidade do fenômeno exponencial da produtividade para um fundo de pensão.

No Ativo, a única contribuição volátil é a dos participantes ativos, para quem o valor presente dos salários salta de Cr\$ 2.432 Bilhões para Cr\$ 2.649 Bilhões e Cr\$ 3.216 Bilhões, nas duas situações indicadas. Esses montantes comandaram elevações naquelas contribuições de Cr\$ 364,8 Bilhões para Cr\$ 397,3 Bilhões e para Cr\$ 482,3 Bilhões sob a influência de produtividades de 1%a.a. e 3%a.a., respectivamente.

As reservas requeridas, nos dois exercícios, evoluem de Cr\$ 559 Bilhões para Cr\$ 634 Bilhões e para Cr\$ 872 Bilhões, em incrementos de Cr\$ 75,1 Bilhões e Cr\$ 313,1 Bilhões que são 13,4% e 56% maiores que as reservas do estado de referência.

As magnitudes das elasticidades não só revelam uma enorme sensibilidade das reservas requeridas às variações do operador de produtividade  $1+p$  como nos indicam que essa sensibilidade se aguça com o aumento desse operador  $1+p$ . Assim sendo, esses valores nos mostram que, no primeiro exercício, para cada unidade percentual de produtividade permanente, as reservas precisam crescer 13,4%. O quadro fica mais grave no segundo exercício quando esse incremento de reservas passa para 18,7%, exibindo claramente o potencial perturbador do mecanismo da produtividade.

No Brasil tem sido algo frequente a concessão de produtividades de 3% ao ano e até mais. Para os participantes deste fundo, as produtividades recentes foram de 1,2% em 1980, 3% em 1981, 3% em 1982, 3% em 1983, zero em 1984 e 4% em 1985. Para 1986, o Ministério do Trabalho já estabeleceu 4,7% como indicador básico de reposição salarial. Se isto é acolhido com euforia pelo trabalhador, é, ou deveria ser, recebido com muita preocupação pelos dirigentes daqueles fundos de pensão que não têm introduzido em seus procedimentos de cálculo esta variável de extraordinária importância para suas entidades.

Numa tal situação, a produtividade significa um aumento de renda na vida ativa, mais próxima do presente, mas pode representar também uma velhice desassistida para aqueles participantes que se aposentando mais tarde irão assistir a erosão dos fundos que ajudaram a construir, consumidos com o pagamento dos benefícios daqueles que se aposentaram primeiro. Estes, legalmente privilegiados, passam a usufruir de um mecanismo que, além de transferidor

intertemporal de uma renda, é um odioso vetor de transferência interpessoal de riqueza.

Retornando-se à Figura V.3.2, observa-se que na passagem de "produtividade só para ativos" para "produtividade para ativos e inativos" a única diferença reside na fase da aposentadoria. Nesta, a curva dos salários, base desses benefícios, continua a subir em termos reais na mesma pendente verificada na fase de inatividade. Não há, portanto, qualquer modificação no que respeita às contribuições de participantes ativos, o que já permite antecipar um sensível agravamento da situação atrás descrita, o que é mostrado no Quadro que segue.

## QUADRO V.3.17

PRODUTIVIDADE PARA ATIVOS E INATIVOS  
BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

Em Cr\$ Milhões

C O N T A S	PRODUTIVIDADE ANUAL	
	1%	3%
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.188.247</u>	<u>1.827.544</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>291.797</u>	<u>335.868</u>
. Complem. Aposent. Velhice	681	762
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	261.954	299.574
. Complem. Aposent. Invalidez	11.843	14.969
. Complem. Pensão	17.319	20.563
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>833.065</u>	<u>1.412.444</u>
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	663.261	1.218.901
. Complem. Aposent. Invalidez	11.696	15.895
. Complem. Pensão Partic. Ativos	72.692	81.005
. Complem. Pensão Partic. Inativos	34.767	40.199
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	39.906	45.262
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	10.742	11.181
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>39.548</u>	<u>50.291</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>23.838</u>	<u>28.940</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.188.247</u>	<u>1.827.544</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	713.334	1.258.769
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	397.295	482.342
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	58.359	67.174
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.648.633</u>	<u>3.215.610</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	154.373	699.809
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS	27,62	125,20
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	27,62	41,73

FONTE: Cálculos do autor

Os efeitos da aplicação da produtividade de 1% a.a. e 3%a.a. nas duas fases são marcantes. Os Benefícios Concedidos e os Riscos Expirados sobem medianamente mas os Benefícios a Conceder dispararam para níveis 26,8% e 115,1% mais elevados, passando de Cr\$ 656,7 Bilhões no estado de referência para Cr\$ 833,1 Bilhões e Cr\$ 1.412,4 Bilhões, respectivamente.

O Total do Passivo evolui de Cr\$ 1 Trilhão para Cr\$ 1,188 Trilhão e Cr\$ 1,828 Trilhão, refletindo aumentos de 18,8% e 82,8%, respectivamente. Estes resultados desaguam no Ativo e, a despeito da boa ajuda para a obtenção de fundos ofertada pelos novos níveis das Contribuições dos Participantes Ativos, as Reservas Técnicas, antes de Cr\$ 559 Bilhões, são forçadas respectivamente para Cr\$ 713,3 Bilhões e Cr\$ 1.258,8 Bilhões, quando se quer estabelecer o equilíbrio.

Essas duas últimas variações significam aumentos de 27,6% e 125,2% sobre o nível anterior de reservas. As elasticidades dessas reservas ao operador de produtividade 1+p indicam que a elevação de cada 1% na produtividade de termina reservas adicionais de 27,6% a 41,7% do nível do estado de referência, dependendo do caso.

Comparemos agora, para este fundo, as situações "produtividade de 3% a.a. só na fase ativa" e "produtividade de 3%a.a. nas duas fases". As reservas requeridas passam de Cr\$ 713,3 Bilhões para Cr\$ 1.258,8 Bilhões, uma diferença de Cr\$ 545,4 Bilhões que representam adicionais 97,6% sobre os níveis do estado de referência.

A produtividade da fase ativa surge como factível de fundar. A da fase inativa requer um considerável esforço adicional de poupança por sobre os 15% que, conjuntamente, participantes e patrocinadora já aportam à EFPP no estado de referência. Transferir ou não mais riqueza presente para o futuro deve ser um ato de vontade criterioso e consciente. Incontornável, no entanto, é a obrigação de fundar os novos benefícios se se espera recebê-los efetivamente no futuro.

A lição extraída neste segmento é simples e clara. Os ganhos de produtividade são elementos altamente perturbadores do equilíbrio de uma EFPP e devem ser analisados com extrema atenção. Os relativos à fase ativa são imperativos e os relativos à fase inativa são desejáveis. Ambos demandam vultosos recursos para sua fundação e cada um de per si tem potencial para levar o fundo à insolvência.

As conclusões sobre os efeitos dessa variável produtividade são tão marcantes que não cabe qualquer dúvida sobre se podem ou não ser extendidas a outros fundos.

## V.3.12 - Reposição Salarial

É bem conhecido de todos o achatamento salarial ocorrido no país na última década. Este fenômeno, que atingiu a todos os trabalhadores, foi mais acentuado a partir de 1980 e sobretudo nas empresas estatais, onde passaram a vigorar aumentos diferenciados por faixas de salários, com menores reajustes para as camadas mais elevadas.

As evoluções salariais semestrais médias da massa segurada sob investigação, os Índices Nacionais de Preço ao Consumidor (INPC) e o Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna (IGP-DI) para o período considerado vão registrados em continuação.

QUADRO V.3.18  
AUMENTOS SALARIAIS E ÍNDICES DE PREÇOS

MÊS/ANO	AUMENTOS SALARIAIS MÉDIOS (%) (1)	INPC 1979=100 (2)	IGP-DI 1977=100
SET 79	-	126,61	237,4
MAR 80	44,0	174,35	333,9
SET 80	36,0	236,94	485,3
MAR 81	47,0	346,56	738,4
SET 81	39,0	488,33	1.018,1
MAR 82	40,0	679,16	1.414,2
SET 82	45,0	962,80	1.986,1
MAR 83	39,0	1.420,10	2.965,8
SET 83	47,8	2.332,25	5.460,4
MAR 84	62,0	3.968,21	9.777,0
SET 84	73,8	6.799,51	17.083,3
MAR 85	81,0	12.853,31	32.665,2
SET 85	89,6	21.884,29	55.161,6
FATOR AMPLIADOR SET 79-SET 85	161,25	172,85	232,36

FONTES: Patrocinadora, Fundação Getúlio Vargas, Fundação IBGE.

NOTAS: (1) Ponderados pela estrutura de salários da patrocinadora.

(2) Com expurgo.

No período de seis anos completos que vai de setembro de 1979 a setembro de 1985, quando vigoraram os reajustes semestrais, os salários cresceram 16.025%, o INPC evoluiu 17.185% e o IGP-DI ampliou-se 23.136%, o que revela uma defasagem dos salários qualquer que seja o índice adotado.

Para que os salários correntes recuperem o descompasso anotado, terá a que ocorrer uma nova reposição salarial, além da reposição parcial de 8,3%

já concedida em setembro de 1985. Assim, aumentos instantâneos de salários de 7,2% e de 44,1% seriam requeridos para recolocá-los em compasso com esses dois índices, respectivamente.

Imaginamos nas duas últimas simulações deste estudo que os salários foram repostos integralmente nessas amplitudes com vigência nas demonstrações financeiras de dezembro de 1985, como vão retratadas adiante.

A reposição com relação ao INPC é de pouca expressão e a discrepância encontrada é uma decorrência do uso da média ponderada para retratar a evolução salarial do grupo e não um afastamento efetivo de um índice que foi, nesse período, o comandante do processo de indexação dos salários.

Ainda assim, a modesta reposição salarial de 7,2%, que atinge tanto os participantes ativos como os inativos, produz resultados surpreendentes. O total do Passivo passa de Cr\$ 1 Trilhão para Cr\$ 1,117 Trilhão, significando uma elevação de 11,7%, mas as reservas, ainda que ajudadas pela ampliação das contribuições de ativos e inativos, saltam 15,3% entre Cr\$ 559 Bilhões no estado de referência e Cr\$ 644,4 Bilhões no novo padrão salarial.

Esse aumento do Passivo mais que proporcional ao aumento dos salários se deve ao fato de ser o incremento dos benefícios custeado apenas pela previdência complementar.

A elasticidade nesse nível de mudança indica que cada 1% de reposição salarial determina uma elevação de 2,12% no nível das reservas requeridas, o que dá fundados motivos para preocupação.

Os resultados do segundo exercício, onde os salários foram alçados para o nível do IGP-DI pela reposição de 44,1%, são de molde a ampliar esses receios. A elasticidade sobe para 2,32, mostrando que o processo se complica à medida que se avança na meta da reposição salarial. As reservas requeridas disparam para 102% dos montantes anteriores e o total do Passivo sobe 76,6%, tudo em termos reais.

A variável reposição salarial tem uma característica de perigo que as demais aqui analisadas não têm. Ela não é uma variável técnica natural do modelo atuarial de um fundo de pensão, mas uma variável "política", circunstancial, que surge em momento de distensão social como o que hoje vive o Brasil. Sendo assim, o atuário não dispõe de premissas atuariais estatisticamente suportadas para apoiar os seus cálculos, ficando na dependência da interpretação das tendências econômicas e políticas em vigor.

Há um outro elemento de perigo decorrente desse movimento pendular do salário real. Durante a fase de achatamento, os balanços patrimoniais anu-

ais de um fundo antes equilibrado devem apresentar superávits em face de o Passivo Atuarial Prospectivo - PAP passar a ser mensurado em termos de um menor nível de salários reais, enquanto que os ativos acumulados no passado continuam atuarialmente suficientes para conceder aqueles benefícios já creditados nos níveis reais mais elevados anteriores ao achatamento.

Esses ativos correntes, se bem administrados, terminam por resultar hipertrofiados face ao PAP corrente, criando as reservas de contingência e a falsa impressão de um fundo superabundante com o risco de aumento equivocado de benefícios.

## QUADRO V.3.19

## REPOSIÇÃO SALARIAL

## BALANÇOS ATUARIAIS E INDICADORES DE IMPACTO

Em Cr\$ Milhões

C O N T A S	PARA ALCANÇAR O ÍNDICE:	
	INPC: 7,2%	IGP-DI: 44,1%
<u>VALOR PRESENTE DO PASSIVO</u>	<u>1.117.334</u>	<u>1.766.253</u>
<u>BENEFÍCIOS CONCEDIDOS</u>	<u>313.052</u>	<u>457.362</u>
. Complem. Aposent. Velhice	756	1.177
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	281.594	410.123
. Complem. Aposent. Invalidez	12.278	18.980
. Complem. Pensão	18.425	27.083
<u>BENEFÍCIOS A CONCEDER</u>	<u>740.226</u>	<u>1.214.068</u>
. Complem. Aposent. Tempo de Serviço	563.477	948.534
. Complem. Aposent. Invalidez	12.142	22.997
. Complem. Pensão Partic. Ativos	75.177	115.901
. Complem. Pensão Partic. Inativos	37.552	56.899
. Pecúlio Ordinário Partic. Ativos	40.486	54.422
. Pecúlio Ordinário Partic. Inativos	11.392	15.314
<u>RISCOS EXPIRADOS</u>	<u>40.594</u>	<u>63.285</u>
<u>DESPESAS ADMINISTRATIVAS</u>	<u>23.462</u>	<u>31.538</u>
<u>VALOR PRESENTE DO ATIVO</u>	<u>1.117.334</u>	<u>1.766.253</u>
PATRIMÔNIO LÍQUIDO	644.433	1.129.888
CONTRIB. PARTICIPANTES ATIVOS	391.032	525.633
CONTRIB. PARTICIPANTES INATIVOS	62.610	91.472
CONTRIB. PATROCINADORA	19.259	19.259
<u>VALOR PRESENTE SALÁRIOS PARTICIPANTES ATIVOS</u>	<u>2.606.882</u>	<u>3.504.221</u>
VARIAÇÃO ABSOLUTA DAS RESERVAS	85.472	570.927
VARIAÇÃO RELATIVA DAS RESERVAS (%)	15,29	102,14
ELASTICIDADE DAS RESERVAS	2,12	2,32

FONTE: Cálculos do autor

Esse Patrimônio Líquido incrementado se transfere do Balanço Patrimonial para o Balanço Atuarial, onde os valores presentes não são dos benefícios mas também das contribuições vão ser apresentados deprimidos pela base salarial achatada.

Na passagem do enfoque patrimonial para o atuarial, acrescentaram-se ao Passivo os benefícios relativos ao serviço futuro e ao Ativo as contribuições referentes a esse serviço futuro. Caso os custos normais estejam corretamente mensurados, esses acréscimos se equivalem e a sobra de patrimônio líquido com relação às reservas técnicas, ou seja, as reservas de contingência, se não também as sobras atuariais de um balanço nesse enfoque.

Com a chegada da fase da reposição salarial, o PAP inicia sua subida tangido pela elevação real dos salários, enquanto que os ativos seguem sua marcha natural de valor, numa trajetória de restauração do antigo equilíbrio, sem no entanto atingi-lo. A depressão nas contribuições reais da fase de achatamento deixam uma seqüela na forma de um Passivo Suplementar a solucionar.

A situação é mais grave quando o fundo vem de uma situação de desequilíbrio anterior a essa fase. Neste caso, com a redução real de salários, o desequilíbrio deve se reduzir e pode até se anular dando a falsa impressão de se ter resolvido o problema. Esta é a situação retratada no Quadro V.3.19. Ali se supõe que o estado de referência reflete uma situação de equilíbrio num estágio próximo do máximo achatamento salarial, significando dizer que o fundo estava desequilibrado anteriormente ao processo de achatamento.

Os incrementos de reservas reivindicados nestes dois exercícios, portanto, não se devem à reposição salarial propriamente dita, mas também ao conserto de uma situação de desequilíbrio estrutural que o período de depressão apenas camuflou.

Esse fenômeno é de natureza universal e atinge todos os fundos privados mas é de extrema significação para o quadro brasileiro, pela duração do período de achatamento, mais de cinco anos, e pela intensidade do esvaziamento salarial ocorrido. Na hipótese de prevalecerem os índices de reajustes salariais pretendidos pelas lideranças sindicais, que se elevam a algumas centenas de unidades percentuais, não restará um fundo sequer equilibrado atuarialmente no cenário da previdência complementar brasileira.

Nesse período no Brasil, coincidentemente ou paradoxalmente, o mercado bursátil apresentou rentabilidades reais significativamente acima da taxa atuarial de 6%a.a. geralmente usada pelas EFPPs. Foram obtidos 176,0% em 1983, 67,4% em 1984 e 49,6% em 1985, segundo o Índice BOVESPA da Bolsa de Va-

lores de São Paulo. Mantendo de 20% a 40% desse tipo de investimento em seus portfólios, este fato deveria ter provocado aumentos inesperados no Ativo e no Patrimônio Líquido das EFPPs equilibradas, em adição à ampliação das reservas que o achatamento salarial já deveria por si só ter produzido.

Nessa ordem de idéias, os planos que hoje, antes de completa reposição salarial e após o triênio de bons rendimentos em ações, não apresentam reservas de contingência estão por certo com insuficiências expressivas em seu "funding".

### V.3.13 - As Ameaças Principais e as Soluções Mais Eficientes

Este estudo investigou a sensibilidade da variável "nível requerido de reservas" às mudanças de uma, por vez, das onze variáveis analisadas. Conhecidas a direção e amplitude dos resultados, é possível imaginarem-se as conseqüências de uma movimentação simultânea de duas ou mais dessas variáveis.

Algumas das variáveis investigadas têm menor conteúdo de realidade, como, por exemplo, mudar a época de aposentadoria por um ano, mudar o tamanho da família; outras são medidas desejáveis, como ajustar o mês da aposentadoria, anular o efeito da dessincronia dos reajustes salariais; outras, ainda, são práticas encontradas, tais como assegurar o salário do cargo terminal e não o salário terminal e conceder produtividade aos inativos. Por fim, a reposição salarial é uma tendência visível e inevitável no Brasil dos próximos anos.

A junção de algumas dessas variáveis, por exemplo, reposição salarial de 44,1% com produtividade de 3%a.a. para ativos e inativos e com a maior longevidade da tabela 1971 GAMT terão, sem qualquer sombra de dúvida, resultados desastrosos para a previdência fechada no país. E todas são realidades ou tendências presentes no quadro atual brasileiro, grave o bastante para que se repense com seriedade este importante instrumento de previdência complementar.

Olhando-se o problema no enfoque das Entidades Fechadas de Previdência Privada, e, em conseqüência, também e sobretudo no interesse do participante, a previdência privada tem hoje como principais elementos perturbadores de seu equilíbrio financeiro, sem que a ordem de apresentação signifique necessariamente a ordem de importância, os seguintes:

- reposição salarial: de extrema gravidade em face das atuais pressões sindicais; mais grave para aqueles fundos que não apresentaram nos últimos anos reservas de contingência significativas;

- produtividade para inativos: de extrema gravidade para os fundos que, concedendo-a, não ajustaram seus estudos atuariais e seus níveis de contribuição; grave para todos os fundos pelo conteúdo adicional de incerteza traduzido sobretudo pelo comportamento futuro do governo sobre a matéria; e
- rentabilidade dos ativos: grave pela crescente pressão para aplicação em títulos públicos, de baixo risco e baixa rentabilidade, pela progressiva perda de isenção de impostos por parte das EFPPs; grave, ainda, pelo despreparo técnico para a administração dos vultosos recursos de que são detentores.

Como principais estratégias de restauração do equilíbrio, têm as EFPPs as seguintes:

- congelamento real do salário terminal: importante na medida em que reduz a incerteza adicional que hoje inquina o cálculo do VPBF nas cida de eventos futuros como reposições salariais, reclassificações de cargos e funções e índices de produtividade;
- redução dos benefícios: importante, no sentido de liberar mais dinheiro gastável no presente e de tornar mais confiável a percepção dos benefícios do futuro; importante, ainda, por permitir maior participação relativa da patrocinadora, a quem devem caber de fato os custos da aposentadoria;
- ajustamento do mês de aposentadoria: importante por transferir para a previdência social uma parcela adicional dos custos dos benefícios básicos de prestação continuada; e
- administração eficiente dos ativos: importante corolário de elemento perturbador já enunciado; a taxa atuarial de gestação econômica dos ativos é, depois do mecanismo de transferência intertemporal de renda, o elemento lógico mais importante do arranjo previdenciário fundado e tem sido referido<sup>9</sup> como a variável mais impactante desses planos.

(9) WINKLEVOSS, Howard. Pension mathematics: with numerical illustrations. pp 196-8.

## CAPÍTULO VI

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A previdência complementar é um instituto de grande importância e de absoluta necessidade para um país moderno e urbano como o Brasil, que apresenta uma classe média ponderável cujos níveis de bem-estar extrapolam os limites da cobertura da previdência social.

Como destacado mecanismo de poupança e investimento, é também a previdência complementar um precioso instrumento de política econômica capaz de prestar uma valiosa contribuição ao processo de desenvolvimento do país.

O trabalho das EFPPs traz benefícios a todos. Para o segurado, a possibilidade de desfrutar de uma aposentadoria decente como fruto de suas poupanças na fase produtiva e sobretudo das contribuições da patrocinadora que, assim, embute como custos da produção presente os "salários" da vida futura da queles que para ela contribuíram.

A par do conforto material e psicológico que isto representa, o participante desfruta também de adiantamentos fiscais sobre suas contribuições para a EFPP que são acolhidas pelo fisco federal como dedução cedular na declaração anual de renda.

A previdência fechada oferta também a seu associado custos de administração da sua poupança sensivelmente inferiores aos praticados pela previdência aberta, como resultado de sua atuação não voltada para o lucro. Exibe, ainda, uma melhor rentabilidade sobre os investimentos que as obtidas com uma carteira individual da mesma natureza de ativos, em face da economia de escala surgida com a movimentação de grandes lotes, do maior nível de informação alcançado e do maior grau de competência técnica empregado na gestão dos ativos.

A patrocinadora também recolhe vantagens da cobertura previdenciária aos seus empregados. Na esfera subjetiva, desfruta de maior "status" em seu setor e na comunidade de negócios, em geral. A existência de uma fundação costuma significar maturidade, sucesso, competência e modernização empresarial. Ainda nessa esfera, a empresa lucra com o "espírito de corpo" que se desenvolve naturalmente nesse cenário e que redunde em maior integração, dedicação e eficiência de seus funcionários. Elimina, por fim, os constrangimentos e as dificuldades em aposentar pessoas idosas que, tendo prestado excelente colaboração no passado, tornam-se um entrave ao progresso da empresa mas que não

têm como preservar seu padrão de vida fora do trabalho.

No terreno prático, as vantagens são também numerosas. Na visão contábil, em conjunto com o Fundo de Garantia por Tempo de Serviço-FGTS, elimina o passivo contingente de natureza trabalhista, tornando mais transparente o patrimônio líquido da empresa. No que respeita ao princípio de competência de exercício, promove uma melhor confrontação entre receitas e despesas levando à apuração de lucros mais consentâneos com a realidade do exercício.

As contribuições da patrocinadora são dedutíveis para fins de imposto de renda reduzindo-se os custos efetivos desses "fringe benefits" ofertados a seus empregados pela transferência da parte complementar desses custos para o Tesouro da União.

Na outra ponta do circuito da poupança, as empresas em geral passam a dispor de uma maior disponibilidade de recursos de longo prazo direcionados para investimentos em ações e debêntures. Com isso são dinamizados os mercados primário e secundário com reflexos positivos para o financiamento do crescimento das empresas e para o ajustamento das suas estruturas de capital. As previsões indicam que até o final de 1986 as fundações terão aplicado Cr\$ 60 Trilhões em suas carteiras de ações.

Os reflexos positivos também se apresentam no mercado de consumo de bens e serviços na medida em que uma massa crescente de aposentados passa a dispor de rendas comparáveis às de suas vidas ativas, voltada nesta fase da existência mais para o consumo que para novas poupanças.

Os mercados de valores em geral são igualmente beneficiados com a presença das EFPPs como grandes investidores institucionais, pela elevação do volume de negócios e de corretagens, pela crescente democratização dos capitais investidos e pela maior racionalidade nas decisões de investir de seus administradores. Com isto, deve aumentar a eficiência na alocação de capital, direcionando-o preferencialmente para atividades marginalmente mais eficientes na geração de novas riquezas.

Por isso, a economia em geral e os governos são outros tantos beneficiários desse processo de poupança e investimento. Com o aumento da taxa de investimento acelera-se o crescimento do produto e da renda, indicadores primeiros do nível de bem-estar de uma população, ampliando-se as bases imponíveis geradoras das diferentes receitas tributárias.

No interesse da economia, os fundos de pensão são importantes instrumentos de poupança a partir de assalariados, grupo sabidamente com uma alta propensão marginal a consumir.

Só através de novos investimentos criam-se novos postos de trabalho para absorver os crescentes contingentes de jovens que anualmente buscam se incorporar ao segmento produtivo da nação e que, de outra forma, vão engrossar a onda de marginalidade que ameaça o país. O trabalho, a poupança e o investimento reprodutivo são os remédios para essa doença social e as EFPPs são agentes integrantes dessa terapia.

A redução do imposto sobre a renda dos participantes e dos patrocinadores é na verdade uma postecipação do tributo com uma ampliação do seu montante para o futuro, porque os benefícios são tributáveis e devem ser financeiramente equivalentes às contribuições capitalizadas à taxa atuarial. Sendo assim, os impostos cobrados sobre os benefícios de hoje devem equivaler atuarialmente ao valor capitalizado dos impostos perdidos no passado com a dedução das contribuições geradoras desses benefícios.

No entanto, para que todas essas vantagens se materializem, é indispensável que a previdência complementar brasileira se encontre assentada em bases financeiras sólidas, para o que se requer, no cenário nacional, uma inteligente regulamentação e uma adequada fiscalização da atividade, e no ambiente de cada fundo, uma política realista e uma administração austera dos benefícios, uma determinação atuarialmente correta e uma cobrança eficiente das contribuições e por fim uma gestão racional e proba de seus ativos.

No que tange às disciplinas legais e regulamentares, o quadro brasileiro comporta ainda alguns melhoramentos. No ângulo dos benefícios, poderíamos mencionar uma limitação mais austera para a concessão do benefício da aposentadoria mas acompanhada de uma redução, mesmo que parcial, da tributação do imposto de renda sobre esses benefícios. Com isto buscar-se-ia proteger o nível do bem-estar do aposentado sem onerar sobremaneira o mecanismo do fundo.

Entendemos ser necessário também reforçar na lei a proteção à família, importante preocupação da previdência, ampliando o benefício da pensão, ainda que em detrimento do benefício da aposentadoria. O participante aposentado de uma EFPP é, com frequência, um profissional em condições de obter alguma renda marginal para ampliar o seu bem-estar. Contrariamente, a família depende largamente dessa renda previdenciária e não exhibe maiores habilidades para suprir a sua insuficiência.

Os estatutos dos fundos têm-se revelado algo descuidados nesse particular, sobretudo para sobreviventes de participantes falecidos na idade ativa e com poucos créditos conquistados na previdência privada, a qual não costuma oferecer para esses casos sequer o nível mínimo de 70% do benefício pleno as-

segurado pela previdência social.

Na visão das contribuições, caberia esclarecer melhor, na letra dos regulamentos, as obrigações da patrocinadora para com o funcionamento do plano, atribuindo-lhe responsabilidades mais explícitas na formação do nível requerido de reservas e na hipótese de extinção do plano. Comportaria, também, restringir a faculdade em vigor dada à patrocinadora de dispor de substanciais recursos do fundo para o giro de seus negócios.

Ainda nessa visão, deveria a moldura legal trazer para o seu texto a obrigatoriedade de assegurar aos participantes o direito integral sobre a porção dos fundos constituídos com suas próprias contribuições, o que hoje se deixa para a letra do estatuto do plano, e o direito ainda que parcial sobre as contribuições da patrocinadora.

Entendemos ainda caber ao poder público fiscalizador impor a todos os fundos modelos atuariais padronizados incorporando todas as variáveis e características relevantes do problema, tarefa deixada hoje a critério de cada atuário, com o objetivo não só de assegurar padrões mais rigorosos de fundação antecipada dos benefícios como também de facilitar a fiscalização e de tornar mais comparáveis as demonstrações financeiras de diferentes entidades.

Deveria, por fim, ser devolvida às EFPPs, como integrantes do Sistema Nacional de Previdência e Assistência Social, sua condição de isentas face ao imposto de renda, o qual lhes foi retirado nos últimos anos da Velha República. Esta medida representaria importante contribuição para o alcance da rentabilidade necessária ao reclamado equilíbrio financeiro.

Como nenhuma disciplina é efetiva por si só, competiria ao poder público desenvolver uma eficiente "fiscalização preventiva" para que se evite com as EFPPs o que ocorreu com os montepios e mais recentemente com o sistema financeiro nacional abalado que foi por um punhado de grandes quebras e escândalos imperdoáveis. Para tanto, deveria empreender mais frequentes auditorias "in loco" e não se limitar à análise à distância de buriladas demonstrações financeiras.

O Brasil tem se valido pouco de instrumentos de partilhamento de risco na área financeira, não dispondo por exemplo de instituições como a "Federal Deposit Insurance Corporation - FDIC", ou como a citada "Pension Benefit Guaranty Corporation - PBGC". O sistema de previdência complementar brasileiro começa a ganhar dimensão e maturidade capazes de justificar pelo menos um estudo profundo da conveniência de se instalar no país uma retaguarda securitária para os próprios fundos de pensão, nos moldes da PBGC.

A proximidade da fase de vultosas concessões de benefícios nas fundações maiores e mais antigas indica que esse estudo não deve ser adiado para que se evite a desmoralização de mais um instituto financeiro, como ocorreu, por exemplo, com as cooperativas de crédito, com as associações de poupança e empréstimo e sobretudo com os montepios.

No âmbito de cada fundo, entendemos como imperativo para a sua sobrevivência cortar as ligações, encontradas sobretudo nos fundos das empresas estatais, que atrelam os benefícios ao salário do cargo terminal, passando a relacioná-los com a expressão real do salário terminal. Na primeira forma, toda e qualquer evolução na prática salarial da empresa, envolvendo, por exemplo, produtividade, reclassificações, bonificações, elevação do percentual de horas extras, impacta de forma incontornável o montante de benefícios concedidos e a conceder, sem uma fundação pretérita correspondente.

Este procedimento traz um elemento de incerteza inaceitável para a gestão responsável de uma EFPP, que a cada um desses impactos se vê constrangida, após apurar o passivo suplementar correspondente, a reivindicar da patrocinadora a fundação das conseqüências de medidas tomadas no âmbito da empresa, sem qualquer diálogo com a entidade previdencial.

Na segunda forma, a única efetivamente administrável, os benefícios dependeriam do salário terminal histórico e estariam adequadamente fundados com contribuições calculadas com o emprego de uma razoável função de progressão funcional. Restaria todavia a produtividade na vida inativa para contaminar de erro a conta individual de cada participante.

Entendemos que a produtividade geral da economia deve ser incluída, pelo menos parcialmente, nos benefícios de prestação continuada, mas a postura final deve ser objeto de consulta ao corpo social depois de cuidadoso esclarecimento sobre as necessidades de fundação que a medida encerra.

Como não cabe à previdência complementar prover níveis luxuosos de bem-estar, seria razoável esperar-se que as EFPPs difundissem entre seus associados uma postura de classe média financeiramente madura voltada para uma vida austera sem comportamentos exageradamente consumptivos influenciados pela propaganda de alta pressão dos dias de hoje.

No campo da atuária, as EFPPs estão muito dependentes da orientação do consultor contratado, sem muita condição de influir e decidir sobre as características técnicas de seus algoritmos de cálculo. A Matemática Atuarial continua sendo uma caixa preta e as diretorias e conselhos fiscais das patro-

cinadoras e das próprias entidades têm demonstrado pouca familiaridade com os processos de cálculo existentes por trás das demonstrações financeiras anuais.

Compreensivelmente, não são bemvindas versões de cálculos que revelem grandes insuficiências atuariais que poderiam ser interpretadas como má gestão da entidade ou que seriam difíceis de negociar com a patrocinadora. Disso decorre uma certa inércia na evolução da forma de cálculo das reservas sob o argumento adicional de que não ficariam comparáveis com as de anos anteriores. Assim sendo, as insuficiências atuariais detectadas pela inclusão de novas rotinas ao modelo anterior passam por certo processo de rejeição até que a nova realidade se torne bem evidente e incômoda para a administração.

Há neste aspecto, portanto, um bom caminho a percorrer no campo técnico e sobretudo no gerencial. Não só carecem as fundações de independência técnica para fazer ou criticar os cálculos de seu consultor atuarial como lhes é difícil admitir os resultados de cálculos mais elaborados sempre que os números não são favoráveis.

Convinha pois que a Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Privada - ABRAP promovesse cursos avançados de atuária para aprimorar entre o pessoal técnico de suas associadas as modalidades de cálculo mais adequadas ao trato dos graves problemas identificados.

A mais difícil das questões reside, no entanto, na administração dos ativos para o que não há procedimentos infalíveis nem regras acabadas. Semelhantemente à Atuária, a Análise de Investimentos cuida de eventos probabilísticos no futuro mas, diferentemente do amplo e assentado suporte estatístico que lastreia aquela, conta no segmento de renda variável apenas com teorias falíveis e dados voláteis.

Para se "bater o mercado", ou seja, obterem-se sistematica e consistentemente ganhos superiores à média desse mercado, não há qualquer ensinamento válido em nenhum livro de Finanças. Esta é uma bravata de probabilidade nula no longo prazo e um bom desempenho nesse campo, entendido como mediano, depende ainda de muita análise e capacidade de julgamento associadas a uma ampla experiência passada.

É com a análise das economias internacional, nacional e setorial e com a investigação individual das empresas envolvidas que se obtêm os dados indispensáveis às decisões racionais de investimento nesse mercado. Mas este é um processo demorado e oneroso para o qual, mais uma vez, poderia contribuir a ABRAP fazendo funcionar um departamento de análise fundamentalista para

reunir estudos de outras fundações ou centros de pesquisas, desenvolver estudos próprios, tudo com o fim de partilhá-los com seus associados.

Alternativamente, poderia a ABRAP promover a divisão desse trabalho de análise econômica entre aquelas fundações com maior potencial para fazê-lo, setORIZANDO a pesquisa para evitar multiplicidade de esforços, canalizando para os respectivos investigadores todas as informações pertinentes, a partir das próprias empresas, dos escritórios técnicos das corretoras, das firmas de consultorias e da imprensa especializada.

Poderia ainda a ABRAP gerir um "pool" de recursos de seus associados para contratar estudos setoriais, sobretudo para aqueles setores que estão atraindo em maior volume os investimentos das fundações.

Cursos de análise financeira poderiam também ser ministrados, em paralelo com os cursos de atuária antes sugeridos, tudo dentro da maior feição prática e suportados por professores e entidades de reconhecida competência.

Muito lucraria ainda o setor com o cultivo de um código de honra por parte de seus dirigentes visando a impedir operações fraudulentas, excesso de trocas de posição, e permuta de favores em detrimento dos interesses da massa de segurados. Este é um aspecto razoavelmente bem coberto pela regulamentação, restando fazer com que se cumpram as disciplinas prescritas.

Encerramos nossas reflexões acrescentando uma recomendação mais ampla que supomos de grande alcance econômico e social. Não nos parece equitativo que funcionários de empresas que não patrocinam uma EFPP fiquem impedidos de desfrutar da segurança ofertada pela previdência complementar, sobretudo naqueles casos de pequenas empresas com menos de 100 empregados.

Presentemente, são duas as saídas possíveis. Primeiro e da iniciativa do empregador, a formação de uma EFPP pela junção de várias patrocinadoras, como faculta o Art. 34, § 2º da Lei Nº 6.435 de 15.07.77, com as complicações adicionais da exigência de celebração de um convênio de adesão para estabelecer as condições de solidariedade das partes, ali prescrita. Segundo, e por decisão do segurado, a sua vinculação a um oneroso plano de previdência privada aberta.

Contra este estado de coisas, se insurgiram há poucos anos algumas lideranças na área do que resultou o desenho do Programa de Aposentadoria Individual do Trabalhador - PAIT que conquistou a simpatia de alguns setores financeiros como o Comitê de Divulgação do Mercado de Capitais - CODIMEC.

Essa concepção, que não logrou sucesso, não continha qualquer espírito de mutualidade e se propunha simplesmente amearhar poupanças em carteiras

individuais tripartidas em títulos públicos, títulos privados de renda fixa e ações.

Os valores assim acumulados só poderiam ser integralmente retirados após 15 anos de permanência no plano, na homologação da aposentadoria da previdência social ou na idade de 65 anos.

Resgates parciais de 1/3 do valor acumulado poderiam ocorrer para custear educação universitária, para amortizar hipoteca da casa própria ou para atravessar períodos de desemprego. Fora disso, só com deságio de 20% do valor resgatado.

O PAIT era uma tentativa de montagem de um instrumento classificável na terceira categoria da previdência, ou seja, como formação de riqueza ou patrimônio individual, com as restrições acima descritas mas com as vantagens da dedução para fins de imposto de renda e da total liberdade quanto ao fluxo de aportes à carteira.

Enxergamos como possível criar-se um mecanismo de transferência inter-temporal de renda fora dos fundos privados de pensão, preservando-lhe o princípio da mutualidade e agregando-lhe total flexibilidade no "timing" das contribuições.

Julgamos que esse fundo deveria funcionar no âmbito de uma instituição financeira federal, largamente disseminada por todo o país e amplamente acreditada junto à população. O Banco do Brasil e a Caixa Econômica Federal são as duas únicas instituições que, no nosso entender, preenchem cumulativamente essas duas condições, recaindo nossa preferência na Caixa, por se situar mais perto das classes assalariadas.

A esse Fundo Nacional de Previdência Individual - FUNAPI poderia aderir qualquer pessoa vinculada ou não à previdência social, o que lhe conferiria uma característica de complementariedade de renda mais ampla que a adotada até então.

O FUNAPI deveria oferecer apenas os benefícios de prestação continuada de aposentadoria e de pensão, que seriam expressos em salário mínimo ou em ORTN ou em qualquer outra medida de valor considerada estável.

Com o intuito de ressaltar as amplas possibilidades do sistema, a anuidade vitalícia tipo aposentadoria poderia começar em qualquer época, até mesmo no mês seguinte ao da contribuição, sem vinculação com a previdência social. Assim, no "lato sensu", seria possível transformar-se uma certa quantidade de dinheiro, fruto de uma loteria, de uma doação ou herança, num caudal atuarialmente equivalente de rendas vitalícias em favor de qualquer pessoa.

Um pai ou padrinho, um tutor ou um mecenas, poderiam comprar uma "aposentadoria" para seu protegido, abrindo mão de um poder de compra certo no presente em troca de um conjunto futuro de benefícios incertos, atuarialmente equivalente.

A anuidade vitalícia da pensão poderia ser paga a quantos favorecidos o titular inscrevesse no sistema, independentemente de serem ou não dele parentes ou dependentes econômicos, expressando-se os direitos de cada um através de alíquotas do benefício do titular falecido e podendo essas rendas serem vitalícias ou temporárias. Obviamente, cada proposta de adesão seria um caso particular que demandaria o tratamento atuarial correspondente.

Para tornar o arranjo ainda mais flexível, seriam permitidas várias adesões de um mesmo segurado ao sistema sob diferentes regras, concedendo-se-lhe em cada uma delas um conjunto de direitos intransferíveis.

Em cada contrato, as contribuições poderiam ser pactuadas como valores isolados ou como séries, uniformes ou não, mas a inadimplência não traria qualquer outra consequência além da perda do crédito atuarial respectivo. Cada contribuição geraria direitos como se o segurado tivesse aderido a um plano de um só pagamento para vencimento naquela data. Nesse momento, o cálculo dos montantes dos benefícios vitalícios conquistados consideraria as idades de todos os segurados, titular e sobreviventes e a época escolhida para início da vigência da aposentadoria.

Uma tal moldura geral permitiria acomodar as mais diversas situações e dela partir-se para ajustar os interesses de grupos particulares como, por exemplo, de ministros de confissão religiosa, de profissionais liberais, de funcionários de empresas não patrocinadoras de EFPPs, e até daqueles que tendo essa proteção desejassem ampliar sua cobertura para incrementar o nível de bem-estar futuro.

Voltando ao nosso interesse inicial, os contratos individuais e coletivos de trabalho feitos por qualquer empresa poderiam conter cláusulas disciplinando a retenção de uma parcela dos salários à qual se agregaria a contribuição acertada para a patrocinadora, de cuja soma se subtrairia a comissão de administração do arranjo securitário firmado com o FUNAPI, aplicando-se o remanescente nas contas individuais de cada funcionário.

Um sistema nesses moldes estaria respeitando, mais que o das atuais EFPPs, o princípio da equidade individual que manda cumular de benefícios cada participante de acordo com suas contribuições sem abrir mão do princípio da mutualidade que transfere para os mais longevos as riquezas não consumidas

pelos que fenecem mais precocemente.

O tratamento tributário seria desenhado em pé de igualdade com o da previdência complementar, acolhendo-se as contribuições dos participantes de qualquer natureza como abatimentos da renda bruta, e permitindo-se a dedução das contribuições patronais como despesas do exercício.

O funcionamento de um tal sistema não seria substantivamente complexo, mas requereria uma considerável estrutura administrativa para estabelecer, cobrar e controlar as contribuições, para pagar os benefícios e para administrar os ativos correspondentes. Seus custos básicos seriam cobertos pela comissão de administração cobrada como parcela das contribuições, mas ganhos atuariais adicionais poderiam ser obtidos na gerência das reservas acumuladas nascidas da obtenção de rentabilidades sobre os ativos superiores à taxa atuarial embutida nos cálculos do plano.

As eventuais perdas atuariais do FUNAPI seriam absorvidas pela própria instituição sem possibilidade de repasse para o Tesouro da União mas poderiam ser resseguradas junto ao Instituto de Resseguros do Brasil - IRB. Com o numeroso corpo de associados que o FUNAPI grangearia, reduzir-se-ia expressivamente o risco de ruína por acidentes amostrais, ficando essa possibilidade ligada sobretudo à má gestão desses ativos, servindo essa ameaça como um estímulo extra para a boa condução dos negócios do fundo.

Com a vultosa dimensão dos recursos acumulados, poder-se-ia adotar uma gestão de portfólio das mais elaboradas pautada nos desenvolvimentos mais recentes da ciência financeira.

Contra um tal sistema, se insurgiriam, sem dúvida, as Entidades Abertas de Previdência Privada - EAPPs e as Companhias de Seguros, também vendedoras de anuidades. Para torná-lo factível, seria forçoso limitar-lhe o escopo, fazendo-o o mais próximo possível das atuais fundações privadas. Restringir-se-ia, assim, sua ação às pessoas ligadas ao mercado de trabalho voltando-o sobretudo para aqueles grupos de funcionários de empresas de qualquer porte que não tendo, não podem ou não querem patrocinar uma EFPP própria.

Manter-se-ia, contudo, a independência dos benefícios com respeito aos da previdência social, por trazer essa complementariedade complicações de difícil superação no âmbito de uma massa muito heterogênea de participantes. Seriam adotados, no entanto, os demais parâmetros usuais da previdência complementar como tetos para benefícios e contribuições, idade mínima para a aposentadoria e critérios de eleição e preferência dos dependentes.

Uma via dos comprovantes das contribuições individuais e patronais seria entregue a cada participante, a quem cumpriria arguir os seus direitos face ao FUNAPI na época devida. Este, por sua vez, emitiria, uma vez por ano, ou a pedido, uma demonstração dos créditos acumulados.

Com este novo instrumento se reforçariam todas as vantagens enunciadas no início deste capítulo e se alcançaria uma outra, qual seja, a de se democratizar uma proteção previdenciária que hoje se enxerga como um privilégio dos quadros de empresas de alto padrão administrativo, na sua grande maioria empresas estatais, órgãos governamentais, corporações internacionais e grandes empresas privadas nacionais.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

1. ADAMS, Warren. The effect of interest on pension contributions. Transactions of the Society of Actuaries. p.170-83.
2. ALLAIS, Catherine & HATTON, Françoise. Morbidité et mortalité en France et dans le monde. La Recherche, nº 115, oct. 1980. p.1038-41.
3. ALLEN, Everett; MELONE, Joseph; ROSENBLOOM, Jerry. Pension planning - pensions, profit sharing, and other defferred compensation plans. 3a. ed. Homewood, Illinois. Richard D. Irwin, Inc., 1976
4. ANDERSON, Arthur. A new look at gain and loss analysis. Transactions of the Society of Actuaries. Vol. XXIV, part I, meeting nº 65, apr. 1971. p. 7-47.
5. ANDERSON, Kathryn. The determination of fertility, schooling, and child survival in Guatemala. International Economic Review, vol. 24, nº 3, oct. 1983. p. 567-89.
6. ARRIAGA, Eduardo. Mortality decline and its demographic effects in Latin America. World Population Conference, 1965.
7. New life tables for latin american population in the nineteenth and twentieth centuries. Berkeley, CA, International Population and Urban Reseach, 1956.
8. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DE PREVIDÊNCIA FECHADA. Conheça melhor a entidade fechada de previdência privada, Fortaleza, out. 1984.
9. BANCO CENTRAL DO BRASIL. Diretoria de Fiscalização. Investidores institucionais - entidades de previdência privada fechadas. Brasília, 1985.
10. BASSETT, Preston. Progressive approach to pension funding. Harvard Business Review, Harvard, NOV/DEC. 1972. p. 125-35.
11. BATTEN, Robert. A logical approach to population problems. Transactions of the Society of Actuaries. p. 49-58.
12. BAYO, Francisco. Mortality and remarriage experience for widow beneficiaries under OASDI. Transactions of the Society of Actuaries. p. 59-60.
13. BEEKMAN, John. A ruin function approximation. Transactions of the Society Actuaries. p. 41-8.
14. BICKELHAUPT, David. General insurance. 10a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1979.
15. BICKNELL, William, & NESBITT, Cecil. Premiums and reserves in multiple decrement theory. Transactions of the Society of Actuaries. p. 344-77.
16. BOARD OF SOCIETY OF ACTUARIES. Actuarial principles and practice in relation to private pension plans. Transactions of the Society of Actuaries. p. D597-623

17. BRAGA, Luiz Nicolau. O plano de contas padrão nas entidades fechadas de previdência privada. Seminário para Entidades de Previdência Privada - Ministério da Previdência e Assistência Social. Fev., 1982.
18. BRONSON, Dorrance. Concepts of actuarial soundness in pensions plans. 1a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin. Inc., 1957.
19. BUHLMANN, Hans. Mathematical methods in risk theory. Germany, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1970.
20. CAMPANHOLE, Adriano. Lei orgânica e regulamento do regime de previdência social. 2a. ed. Sao Paulo, Editora Atlas, 1973.
21. CASTELO, Júlio. The insurance market in Latin America - Portugal and Spain. Athens. The University of Georgia Press, 1976.
22. CASWELL, Jerry. Economic efficiency in pension plan administration - a study of the construction industry. The journal of Risk and Insurance, vol. XLIII, nº 2. june, 1976. p. 257-73.
23. THE CERTIFIED EMPLOYEE BENEFIT SPECIALIST PROGRAM. Social security, saving plans and other retirement arrangements. Pennsylvania, The Wharton School University of Pennsylvania, 1979.
24. CLARKE, R. The concept of probability. The journal of the Institute of Actuaries. oct. 1953. p. 1-12.
25. COALE, Ansley. Age composition in the absence of mortality and in other odd circumstances. New Jersey, Demography, vol. 10, nº 4, nov. 1973. p. 537-42.
26. \_\_\_\_\_. The growth and structure of human populations - a mathematical investigation. 2a. ed. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1975.
27. COHN, Amélia. Previdência social e processo político no Brasil. 1a. ed. São Paulo, Editora Moderna, 1981.
28. COOPER, Steven, & HICKMAN, James. A family of accrued benefit actuarial cost methods. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XIX, part I, nº 54, june 1967. p.53-65.
29. DARNTON, John. Are pension plans facing runaway cost?. Forum: Adequacy of Pension Funding under Private Plans. p. 396-406.
30. DICKERSON, O.D. Health insurance. 1a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1959.
31. DIPAOLO, Frank. An application of simulated stock market trends to investigate a ruin problem. Transactions of the Society of Actuaries. p. 549-559.
32. DREHER, William. Gain and loss analysis for pension fund valuations. Conference of Actuaries in Public Practice, p. 588-635.

33. DUVALL, Richard; HOFFLANDER, Alfred; LAMBERT, Eugene. Optimum liquidity levels for multiple line insurance companies. The Journal of Risk and Insurance. Vol. XXXV, n<sup>o</sup> 2, june. 1968. p. 199-205
34. ELKIN, Jack. A method of allocating actuarial gains and losses in a pension fund. The Conference of Actuaries in Public Practice, vol. 7, 1957/1958. p. 192.
35. FELDSTEIN, Martin & MORCK, Randall. Pension funds and the value of equities. Financial Analysis Journal. Sept/oct., 1983. p. 29-39.
36. FIBIGER, John & KELLISON, Stephen. Actuarial functions as expected values. Transactions of Society of Actuaries, vol. XXIII, part. I, n<sup>o</sup> 65, apr. 1971. p. 1-5.
37. GERBER, Hans. An introduction to mathematical risk theory. Monography 8. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1979.
38. GREENLEE, Harold & HEY, Alfonso, The 1971 group annuity mortality table. Transactions of the Society of Actuaries. p. 569-604
39. GREGG, Davis & LUCAS, Vane. Life and health insurance handbook. 3a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1973.
40. GRIFFIN, Frank. Concepts of adequacy in pension plans funding. Transactions of the Society of Actuaries. p. 46-63.
41. HALL, William & LANDSITTED, David. A new look at accounting for pension. 1a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1977.
42. HAMILTON, James & BRONSON, Dorange. Pension. New York, McGraw Hill Book Company, 1958.
43. HANSON, John. Funded and unfunded provision for the cost of a pension plan. Illinois, The Conference of Actuaries in Public Practice, vol. XIV 1964/1965. p. 223-61.
44. HEYWOOD, Geoffrey & LANDER, Maxwell. Pension fund valuations in modern conditions. The Journal of the Institute of Actuaries, London, vol. 87, apr. 1961. p.315-38.
45. HELLMAN, Gabriel. Gain-and-loss analysis in a self-insured retirement plan. Conference Actuaries in Public Practice. p. 223-9.
46. HICKMAN, James. A statistical approach to premiums and reserves in multiple decrement theory. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XVI, part. I, n<sup>o</sup> 44A e 44B. p. 1-16.
47. HOFFLANDER, Alfred. Minimum capital and surplus requirement for multiple line insurance companies - a new approach. Chapter 6. Richard D. Irwin, Inc., 1969.
48. INTERNATIONAL FOUNDATION OF EMPLOYER BENEFIT PLANS. Social security, saving plans and other retirement arrangements. Brookfield, 1979.

49. INTERNATIONAL LABOR OFFICE. Pensions and inflation, an international discussion. 1a. ed. Genova, International Labour Office, 1977.
50. JACKSON, Paul & Hamilton, James. The valuation of pension fund assets. Financial Analysts Journal, 1968.
51. JORDAN, Chester Wallace. Society of actuaries - textbook on life contingencies. 2a. ed. Chicago, Illinois, The Society of Actuaries, 1975.
52. KEYFITZ, Nathan, Introduction to the mathematics of population - with revisions. Massachusetts, Addison Wesley Publishing Company, 1977.
53. \_\_\_\_\_. Models. Demography. vol. 8, nº 4, nov. 1971. p. 571-81.
54. KRALL, John & HICKMAN, James. Adjusting multiple - decrement tables. Transactions of the Society of the Actuaries. p. 163-79.
55. LATIMER, Murray & MUSER, Joseph. The actuarial impact of long-term wage trends on salary scales for industrial type pension plans. The conference of actuaries in Public Practice, vol. 6, 1956/1957. p.174-204.
56. MARPLES, William. Actuarial aspects of pension security. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1964.
57. \_\_\_\_\_. Cost of vesting in pensions. Transactions of the Society of Actuaries. p. 277-95.
58. \_\_\_\_\_. Pensions and the cost of living. The Journal of Insurance. Illinois, vol. XXVII, nº 4. Dec. 1960. p. 19-31.
59. McCORMICK & SALVADORI. Métodos numéricos em FORTRAN. São Paulo, Editora USP/polígono, 1971.
60. McFARLAND, David. Comparison of alternative marriage models. Population Dynamic - Academic Press. London, 1972. p. 89-106.
61. McGILL, Dan & GRUBS, Donald. Fundamentals of private pensions. 4a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1979.
62. \_\_\_\_\_. Preservation of pension benefit rights. 1a. ed. Richard D. Irwin, Inc., 1972.
63. \_\_\_\_\_. Social security and private pension plans: competitive or complementary? 1a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1977.
64. MENNIS, Edmund. Management and regulation of private pension funds in the United States. Security Pacific Investment Managers, Inc., Oct. 1978. p. 1-10.
65. MILLER, John & COURANT, Simon. Some observation on the nature of the risk of disability - its measurement and control. Transactions of the Society of Actuaries. p. 349-66
66. MONTAGU, A. The natural superiority of women. University of Rutgers.

67. MORCK, R. & FELDSTEIN, Martin. Pension funds and the value of equities. Financial Analysts Journal, 1983.
68. MYERS, Robert. Indexation of pension and other benefits. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1978.
- 69- \_\_\_\_\_. New international convention on social security. Social Security Bulletin, oct. 1951.
70. \_\_\_\_\_. Social security. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1978.
71. NIESSEN, Abraham. Cost calculations for pension funds subject to adjustment for inflation. The Conference of Actuaries in Public Practice. Illinois, vol. X, 1960/1961. p. 161-77.
72. \_\_\_\_\_. Measure of actuarial soundness in a plan of the railroad retirement type. Transaction of the Society of Actuaries. p. 26-41.
73. NOGUEIRA, Rio. Atuaria sem fórmulas. STEA-Serviços Técnicos de Estatística e Atuária, Ltda.. Rio de Janeiro, 1981.
74. \_\_\_\_\_. Conceituação, constituição das reservas das entidades, análise e informação das funções e definições e classificações das reservas. STEA-Serviços Técnicos de Estatística e Atuária, Ltda.. Rio de Janeiro, 1981.
75. NYE, David. A simulation analysis of capital structure in a property insurance firm. Monograph 3. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1975.
76. OSLER, Robert & BICKLEY, John. Glossary of insurance terms. Santa Mônica, CA, Insurors Press, Inc., 1972.
77. PAIXÃO, Floriceno. A previdência social em perguntas e respostas. 20a. ed. Porto Alegre, RS, Editora Síntese, 1982.
78. PETERSON, Ray. Group annuity mortality. Transaction of the Society of Actuaries. p. 246-307.
79. PHILLIPS, Susan & FLETCHER, Linda. The cost of funding benefits under the ERISA - a statistical survey. The Journal of Risk and Insurance. vol. XLII, nº 4, Dec. 1976. p.569-585.
80. PHILLIPS, William. A basic curve of deaths. The Journal of the Institute of Actuaries. Jan. 1954. p. 289.305.
81. POLLAK, Otto. The social aspects of retirement. 1a. ed. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1956.
82. POLLARD, J. Mathematical models for the growth of human populations. 2a. ed. Cambridge, Cambridge University Press. 1975.
83. RAIFFA, Howard. Decision analysis - introductory lectures on choices under uncertainty. Reading, MA, 1970.

84. REED, L. & BARBOSA, M. A short method for constructing an abridged life table. In: U.S. Department of Commerce Bureau of Census. Handbook of Statistical Methods for Demographers. Washington, 1960.
85. REGAN, Patrick. Pension fund perspective. Finance Analysts Journal. Sept/oct. 1983. p. 19-23.
86. REZENDE, Nilza P. Empregados domésticos, seus direitos e obrigações. 3a. ed. Rio de Janeiro-RJ, Gráfica Auriverde, Ltda., 1975.
87. ROSSER, Harwood. Supplementary death benefits in pension plan. Transactions of the Society of Actuaries. Vol. X, nº 6, Apr. 1958, p. 1-13.
88. SCHEINFELD, A. The new-you and heredity.
89. SCHOLEY, J. Accounting for the cost of pension plans. Journal of the Institute of Actuaries. Apr. 1969. p. 393-424.
90. SEAL, Hilary. The mathematical risk of lump-sum death benefits in a trustee pension plan. Transactions of the Society of Actuaries, 1952. p. 135-142.
91. \_\_\_\_\_. Simulation of the ruin potential of non life insurance companies. Transactions of the Society of the Actuaries. p. 563-85.
92. \_\_\_\_\_. Stochastic theory of a risk business. New York, John Wiley Sons, Inc., 1969.
93. SENDRAIL, Marcel. Santé et maladie des temps modernes. in: Histoire culturelle de la maladie. Toulouse, Éditions Privat, 1980.
94. SETUBAL, Paulo. Planos atuariais e remuneração dos investimentos. Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Privada. Julho/agosto, 1982.
95. SHARPE, William. Corporate pension funding policy. Journal of Financial Economics. Jan, 1976. p. 183-93.
96. SMITH, Franklin. On the effect of different actuarial assumptions in variable benefit pension plan. Conference of Actuaries in Public Practice. 1957-1958. p. 199-211.
97. \_\_\_\_\_. The use of continuous functions with the retirement endowment plan, actuarial note. Transactions of the Society of Actuaries. p. 364-7.
98. \_\_\_\_\_ & McKELVEY, Chandler. A proposed method of valuing variable benefit retirement plans. Transactions of the Society of Actuaries. p. 512-8.
99. TAYLOR G, Sickness. A stochastic process. Journal of the Institute of Actuaries, London, vol. 97, 1971. p. 69-83.
100. TAYLOR, John. The generalized family of aggregate actuarial cost methods for pensions funding. Transactions of the Society of Actuaries, vol. XIX, part I, nº 53A e 53B. April, 1967. p. 1-12.

101. TEPPER, Irwin. Optimal financial strategies for trustee pension plans. Journal of Financial and Quantitative Analysis, June, 1974. p.357-76.
102. TOSTA DE SÁ, Geraldo. Sistemas de controle para aplicações em títulos e valores mobiliários que compoem as carteiras das entidades de previdência privada fechada. Março, 1982.
103. TROWBRIDGE, Charles. ABC's of pension funding. Harvard Business Review. Harvard, March/April, 1966. p. 115-126.
104. \_\_\_\_\_. Cost of vesting in private pension plans. Transactions of the Society of Actuaries. p. 397-409.
105. \_\_\_\_\_. Fundamentals of pension funding. Transactions of the Society of Actuaries, vol. IV, nº 17, 1952. p. 17-43.
106. \_\_\_\_\_. The theory and practice of pension funding. Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1976.
107. \_\_\_\_\_. The unfunded present value family of pension funding methods. Transactions of the Society of Actuaries. p. 151-69.
108. TURLER, Heinrich. Actuarial matemática del seguro. 2a. ed. Bogotá. Intergráficas Ltda., 1977.
109. UNITED NATIONS DEPARTMENT OF INTERNATIONAL ECONOMIC AND SOCIAL AFFAIRS. Demographics indicators of countries. New York, 1982.
110. VAN DER LINDER, Hilton. Constituição de reservas x fluxo de caixa dos planos de previdência privada.
111. WARTERS, Dennis & RAE, William. The risks in equity investment for pension funds. Transactions of the Society of Actuaries. p. 920-944.
112. WINKLEVOSS, Howard. Cost sensitivity analysis of mandatory funding and vesting standards in pension plans. The Journal of Risk and Insurance, vol. XLI, nº 1, March, 1974. p. 57-73.
113. \_\_\_\_\_. Pension mathematics, with numerical illustration. Homewood, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1977.
114. \_\_\_\_\_, & SHAPIRO, Arnold. Estimating the costs of vesting in pension plans. Transactions of the Society of Actuaries. p. 373-94.

APÊNDICE A

PROGRAMA PARA CALCULAR O MAIOR AUTOVALOR E O RESPECTIVO  
AUTOVETOR NORMALIZADO DE UMA MATRIZ QUADRADA

```

5 CLS:DEFDBL A-Z:DEFINT I,J:PRINT"CALCULO DO MAIOR";
10 PRINT" AUTOVALOR POR ITERACAO":PRINT
15 DIM A(20,20),X(20),Y(20):A$="###.#####"
20 INPUT"DIMENSAO DA MATRIZ QUADRADA";N
25 PRINT"ENTRE COM A MATRIZ"
30 FORI=1TON:PRINT"LINHA";I
35 FORJ=1TON:PRINT"  COLUNA";J;
40 INPUT A(I,J)
45 NEXTJ:NEXTI
50 FOR I = 1 TO N:IF A(I,I)=0. THEN A(I,I)=1.D-9:NEXTI
55 X(1)=1.
60 CLS:PRINT"ITERACAO          AUTOVALOR"
65 FOR IT=1TO100
70 GOSUB140
75 NEXT IT
80 GOSUB 140
85 IF ABS(Y(1)-M)>1.D-7 THEN M=Y(1):IT=IT+1:GOTO 80
90 PRINT:PRINT"MAIOR AUTOVALOR";:PRINTTAB(40)USINGA$;Y(1)
95 PRINT
100 PRINT"AUTOVETOR NORMALIZADO RESPECTIVO";
105 FORI=2TON
110 X(I)=Y(I)/Y(1)
115 NEXTI
120 FORI=1TON
125 PRINTTAB(33)I;:PRINTTAB(40)USINGA$;X(I)
130 NEXTI:PRINT
135 END
140 FORI=1TON
145 Y(I)=0.
150 FORJ=1TON
155 Y(I)=Y(I)+A(I,J)*X(J)
160 NEXTJ
165 NEXTI
170 FORI=2TON
175 X(I)=Y(I)/Y(1)
180 NEXTI
185 PRINT IT,Y(1)
190 RETURN

```

APÊNDICE B

PROGRAMA PARA CALCULAR TODOS OS AUTOVALORES E RESPECTIVOS

AUTOVETORES DE UMA MATRIZ QUADRADA

```

1005 CLS: CLEAR 100: A$="#####.#####": B$="###.#####": DEF
      DBL A-Z: DEFINT I,J,K,N
1010 PRINT "DETERMINACAO DOS AUTOVALORES E DOS AUTOVETORES DE
      UMA MATRIZ": PRINT "METODO DE RUTISHAUSER": PRINT
1015 E1=1.D-7: INPUT "TOLERANCIA 1 (1.D-7 POR DEFAULT)"; E1
1020 E2=1.D-3: INPUT "TOLERANCIA 2 (1.D-3 POR DEFAULT)"; E2
1025 E3=1.D-4: INPUT "TOLERANCIA 3 (1.D-4 POR DEFAULT)"; E3
1030 E4=1.D-1: INPUT "TOLERANCIA 4 (1.D-1 POR DEFAULT)"; E4
1035 SW$="S": INPUT "LIMPEZA (S)IM OU (N)AO (S POR DEFAULT)"; S
      W$
1040 IG=5: INPUT "FREQUENCIA DE LIMPEZA (5 POR DEFAULT)"; IG
1045 IM=50: INPUT "NUMERO MAXIMO DE TRANSFORMACOES (50 POR DEF
      AULT)"; IM
1050 EI$="S": INPUT "DESEJA AUTOVETORES (S)IM OU (N)AO (S POR
      DEFAULT)"; EI$
1055 ST$="N": INPUT "E' MATRIZ TRIDIAGONAL (S)IM OU (N)AO (N P
      OR DEFAULT)"; ST$
1060 CLS: INPUT "DIMENSAO DA MATRIZ QUADRADA (MAXIMO 20)"; N
1065 IF N<2 THEN PRINT "DIMENSAO < 2 ; DIGITE <ENTER> PARA VO
      LTA R A QUESTAO": GOTO 1075
1070 IF N>20 THEN PRINT "DIMENSAO LIMITADA A 20; DIGITE <ENTE
      R> PARA VOLTAR A QUESTAO": GOTO 1075 ELSE GOTO 1080
1075 IF INKEY$="" THEN 1075 ELSE GOTO 1060
1080 DIM A(N,N), B(N,N), U(N,N), V(N), X(N,N), IB(N), IS(N)
1085 CLS: PRINT "ENTRE COM A MATRIZ": PRINT
1090 FOR I=1 TO N: PRINT "LINHA"; I
1095 FOR J=1 TO N
1100 PRINT "  COLUNA"; J;: INPUT A(I,J)
1105 NEXT J
1110 NEXT I
1115 FOR K=1 TO N
1120 IF A(K,K)=0 THEN A(K,K)=1.D-7
1125 NEXT K
1130 GOSUB 1435 : PRINT "COMPUTACAO TERMINADA": PRINT "LIGUE A I
      MPRESSORA"
1135 NE=1: GOSUB 1420 : GOSUB 1430 : LPRINT " ": LPRINT "DETERMINA
      CAO DOS AUTOVALORES E DOS AUTOVETORES DE UMA MATRIZ QUA
      DRADA": LPRINT "METODO DE RUTISHAUSER": LPRINT " ": GOSUB 143
      0
1140 PRINT "IMPRESSAO DAS CONDICAOES DA ANALISE": LPRINT " ": LPR
      INT "CONDICAOES DA ANALISE": LPRINT " "
1145 LPRINT "TOLERANCIA 1 ="; E1
1150 LPRINT "TOLERANCIA 2 ="; E2
1155 LPRINT "TOLERANCIA 3 ="; E3
1160 LPRINT "TOLERANCIA 4 ="; E4
1165 LPRINT "LIMPEZA ="; SW$
1170 LPRINT "FREQUENCIA DE LIMPEZA ="; IG
1175 LPRINT "NUMERO MAXIMO DE TRANSFORMACOES ="; IM

```

## APÊNDICE B (CONT.)

```

1180 LPRINT"DESEJA AUTOVETORES.=";EI$
1185 LPRINT"MATRIZ TRIDIAGONAL =" ;ST$
1190 NE=2:GOSUB1420 :LPRINT"MATRIZ A SER ANALISADA":LPRINT"
"
1195 FORI=1 TO N:LPRINT"LINHA";I
1200 FORJ=1 TO N:LPRINTUSINGB$;A(I,J);
1205 NEXTJ:LPRINT" "
1210 NEXTI:LPRINT" "
1215 CLS:PRINT"NUMERO DE ITERACOES";IT:LPRINT"NUMERO DE ITER
ACOES =" ;IT
1220 PRINT"CONDICAO 1 ";T1$:LPRINT"CONDICAO 1 =" ;T1$
1225 PRINT"CONDICAO 2 ";T2$:LPRINT"CONDICAO 2 =" ;T2$
1230 CLS:LPRINT" ":PRINT"MATRIZ TRANSFORMADA"
1235 FORI=1TON:PRINT"LINHA";I
1240 FORJ=1TON
1245 IF J<N THEN PRINTUSINGA$;B(I,J);:GOTO 1255
1250 PRINTUSINGA$;B(I,J)
1255 NEXTJ
1260 NEXTI
1265 LPRINT" ":LPRINT"MATRIZ TRANSFORMADA":LPRINT" "
1270 FORI=1 TO N:LPRINT"LINHA";I
1275 FORJ=1 TO N:LPRINTUSINGB$;B(I,J);
1280 NEXTJ:LPRINT" "
1285 NEXT I
1290 LPRINT" ":LPRINT"OBS: UMA SUBDIAGONAL IMEDIATAMENTE INF
ERIOR INTEGRALMENTE NULA INDICA QUE TODOS OS AUTOVALORE
S SAO REAIS. ";
1295 LPRINT"CADA CASELA NAO NULA INDICA A EXISTENCIA DE UM P
AR DE AUTOVALORES COMPLEXOS QUE SAO OBTIDOS CALCULANDO-
SE AS DUAS RAIZES COMPLEXAS DA EQUACAO CARACTERISTICA";
1297 LPRINT"DO DETERMINANTE DA MATRIZ 2 X 2 ";
1300 LPRINT"QUE TEM ESSA CASELA COMO ELEMENTO SUDOESTE.":NE=
2:GOSUB 1420
1305 LPRINT"AUTOVALORES DA MATRIZ (SE NAO HOVER COMPLEXOS)"
:LPRINT" "
1310 FOR K=1 TO N:LPRINTUSINGB$;B(K,K);
1315 NEXTK
1320 NE=2:GOSUB 1420
1325 IF EI$="S"THEN 1335
1330 PRINT"AUTOVETORES NAO SOLICITADOS":LPRINT"MATRIZ DE AUT
OVETORES NAO SOLICITADA":LPRINT" ":LPRINT" ":GOTO1415
1335 IF T1$="F"THEN 1345
1340 PRINT"AUTOVETORES NAO CALCULADOS: UM OU MAIS ELEMENTOS
SUBDIAGONAL MUITO GRANDES":LPRINT"AUTOVETORES NAO CO
MPUTADOS: UM OU MAIS ELEMENTOS DA SUBDIAGONAL MUITO";
1343 LPRINT"GRANDES":LPRINT" ":LPRINT" ":GOTO 1415
1345 IF T2$="F"THEN 1355
1350 PRINT"AUTOVETORES NAO COMPUTADOS: OCORREU UM PAR DE AUT
OVALORES MUITO PROXIMOS":LPRINT"AUTOVETORES NAO COMPUTA
DOS: OCORREU UM PAR DE AUTOVALORES MUITO PROXIMOS"
1353 LPRINT" ":LPRINT" ":GOTO 1415
1355 CLS:PRINT"MATRIZ DOS AUTOVETORES NORMALIZADOS"
1360 FORI=1TON:PRINT"LINHA";I

```

APÊNDICE B (CONT.)

```

1365 FORJ=1TON:IF J<N THEN PRINTUSINGA#:U(I,J):GOTO1380
1370 IF J<N THEN PRINTUSINGA#:U(I,J):GOTO 1380
1375 PRINTUSINGA#:U(I,J)
1380 NEXTJ
1385 NEXTI
1390 LPRINT" ":LPRINT"MATRIZ DOS AUTOVETORES NORMALIZADOS":L
PRINT" "
1395 FORI=1 TO N:LPRINT"LINHA";I
1400 FORJ=1 TO N:LPRINTUSINGB#:U(I,J);
1405 NEXTJ:LPRINT" "
1410 NEXTI:NE=2:GOSUB1420
1415 GOSUB 1430 :NE=9:GOSUB 1420 :END
1420 FOR K= 1 TO NE:LPRINT" "
1425 NEXTK:RETURN
1430 LPRINTSTRING$(80,"#"):RETURN
1435 'INICIO SUBROTINA RUTIS
1440 N1=N-1
1445 L=0
1450 FORI=1TON
1455 FORJ=1TON
1460 X(I,J)=0.:U(I,J)=0.
1465 NEXTJ
1470 NEXT I
1475 T1$="F"
1480 T2$="F"
1485 IF ST$="N"THEN 1540
1490 IB(1)=1
1495 IB(N)=N1
1500 IS(1)=2
1505 IS(N)=N
1510 IF N<=2 THEN 1560
1515 FORJ=2TON1
1520 IB(J)=J-1
1525 IS(J)=J+1
1530 NEXTJ
1535 GOTO1560
1540 FORJ2=1TON:J=J2
1545 IB(J)=1
1550 IS(J)=N
1555 NEXTJ2
1560 E1=E1
1565 FORI=1TON
1570 JL=IB(I)
1575 JH=IS(I)
1580 FORJ=JLTOJH
1585 B(I,J)=A(I,J)
1590 NEXTJ
1595 NEXTI
1600 FORIT=1TOIM:CLS:PRINT"SUBROTINA RUTISHAUSER - ITERACAO"
:IT
1605 FORJ9=1TON:J=J9
1610 IL=IB(J)
1615 FORI=ILTOJ

```

APENDICE B (CONT.)

```
1620 SU=0.
1625 I1=I-1
1630 KL=IB(I)
1635 IF KL>I1 THEN 1655
1640 FORK=KLTOI1
1645 SU=SU+B(I,K)*B(K,J)
1650 NEXTK
1655 B(I,J)=B(I,J)-SU
1660 NEXTI
1665 J1=J+1
1670 IH=IS(J)
1675 IF J1>IH THEN 1735
1680 FORI=J1TOIH
1685 SU=0.
1690 KL=IB(I)
1695 J2=J-1
1700 IF KL>J2 THEN 1720
1705 FORK=KLTOJ2
1710 SU=SU+B(I,K)*B(K,J)
1715 NEXTK
1720 B(I,J)=(B(I,J)-SU)/B(J,J)
1725 NEXTI
1730 NEXTJ9
1735 IF EI#="N" THEN 1795
1740 FORI=2TON
1745 I1=I-1
1750 FOR J=1 TO I1
1755 X(I,J)=B(I,J)+X(I,J)
1760 KL=J+1
1765 IF KL>I1 THEN 1785
1770 FORK=KL TO I1
1775 X(I,J)=X(I,J)+X(I,K)*B(K,J)
1780 NEXTK
1785 NEXTJ
1790 NEXTI
1795 FORI9=1TON:I=I9
1800 JL=IB(I)
1805 I1=I-1
1810 IF JL>I1 THEN 1860
1815 FORJ=JLTOI1
1820 B(I,J)=B(I,I)*B(I,J)
1825 I2=I+1
1830 KH=IS(I)
1835 IF I2>KH THEN 1855
1840 FORK=I2TOKH
1845 B(I,J)=B(I,J)+B(I,K)*B(K,J)
1850 NEXTK
1855 NEXTJ
1860 JH=IS(I)
1865 FORJ=ITOJH
1870 J1=J+1
1875 KH=IS(J)
1880 IF J1>KH THEN 1900
```

APENDICE B (CONT.)

```
1885 FORK=J1TOKH
1890 B(I,J)=B(I,J)+B(I,K)*B(K,J)
1895 NEXTK
1900 NEXTJ
1905 NEXTI9
1910 FORI=1TON
1915 JL=IB(I)
1920 JH=IS(I)
1925 FORJ=JLTOJH
1930 IF ABS(B(I,J))<(1.0D-10 THEN B(I,J)=0.
1935 N=N
1940 NEXTJ
1945 NEXTI
1950 L=L+1
1955 SS=0.
1960 FORI=2TON
1965 SS=SS+ABS(B(I,I-1))
1970 NEXTI
1975 IF NOT( L=IG AND SS<E4 AND SW$="S" ) THEN 2190
1980 FORJ8=1TON1:J=J8
1985 FORI=1TON
1990 IF ABS(B(J,J)-B(I,I))<E2 AND J<>I THEN 2155
1995 N=N
2000 NEXTI
2005 J1=J+1
2010 FORI3=J1TON
2015 I=N+J1-I3
2020 V(I)=B(I,J)
2025 I2=I+1
2030 IFI=N THEN 2050
2035 FORK=I2TON
2040 V(I)=V(I)+B(I,K)*V(K)
2045 NEXTK
2050 V(I)=V(I)/(B(J,J)-B(I,I))
2055 NEXT I3
2060 FORI3=J1TON
2065 I=N+J1-I3
2070 X(I,J)=X(I,J)+V(I)
2075 I1=I-1
2080 IF J1>I1 THEN 2100
2085 FORK=J1TOI1
2090 X(I,J)=X(I,J)+X(I,K)*V(K)
2095 NEXTK
2100 NEXTI3
2105 FORI=1TON
2110 FORK=J1TON
2115 B(I,J)=B(I,J)+B(I,K)*V(K)
2120 NEXTK
2125 NEXTI
2130 FORI=J1TON
2135 FORK=1TON
2140 B(I,K)=B(I,K)-V(I)*B(J,K)
2145 NEXTK
```

APÊNDICE B (CONT.)

```
2150 NEXTI
2155 NEXTJ8
2160 IF ST#="N" THEN 2185
2165 FORJ=1TON
2170 IB(J)=1
2175 IS(J)=N
2180 NEXTJ
2185 E1=E1
2190 E1=E1
2195 IF NOT( L=IG OR IT=IM OR SS(E1 )THEN 2205
2200 L=0
2205 E1=E1
2210 IF SS(E1 THEN 2225
2215 N=N
2220 NEXT IT
2225 FORI=1TON
2230 X(I,I)=0.
2235 NEXTI
2240 IF EI#="N" THEN 2520
2245 IF SS <= E3 THEN 2260
2250 T1#="V"
2255 GOTO2520
2260 FORI=1TON1
2265 I2=I+1
2270 FORJ=I2TON
2275 IF ABS(B(I,I)-B(J,J))=E2 THEN 2290
2280 T2#="V"
2285 GOTO2520
2290 NEXTJ:NEXTI
2295 FORJ=1TON
2300 X(J,J)=1.
2305 IF J=1 THEN 2365
2310 J2=J-1
2315 FORI3=1TOJ2
2320 I=J-I3
2325 SU=B(I,J)
2330 I2=I+1
2335 IF I2>J2 THEN 2355
2340 FORK=I2TOJ2
2345 SU=SU+B(I,K)*X(K,J)
2350 NEXTK
2355 X(I,J)=SU/(B(J,J)-B(I,I))
2360 NEXT I3
2365 NEXTJ
2370 FORI8=1TON:I=I8
2375 I1=I-1
2380 IF I=1 THEN 2425
2385 FORJ=1TOI1
2390 U(I,J)=X(I,J)
2395 J2=J-1
2400 IF J=1 THEN 2420
2405 FORK=1TOJ2
2410 U(I,J)=U(I,J)+X(I,K)*X(K,J)
```

APÉNDICE B (CONT.)

```
2415 NEXTK
2420 NEXTJ
2425 FORJ=1TON
2430 U(I,J)=X(I,J)
2435 I1=I-1
2440 IF I=1 THEN 2460
2445 FORK=1TOI1
2450 U(I,J)=U(I,J)+X(I,K)*X(K,J)
2455 NEXTK
2460 NEXTJ
2465 NEXTI8
2470 FORJ=1TON
2475 SQ=0.
2480 FORI=1TON
2485 SQ=SQ+U(I,J)C2
2490 NEXTI
2495 LG=SQC.5
2500 FORI=1TON
2505 U(I,J)=U(I,J)/LG
2510 NEXTI
2515 NEXTJ
2520 E1=E1
2525 RETURN
2530 END
```

## APÊNDICE C

PROGRAMA PARA PROJETAR POPULAÇÕES COM  
O EMPREGO DA MATRIZ DE LESLIE

```

10 CLS: CLEAR 100: PRINT@192, "PROJECÃO MATRICIAL DE UMA POPULAÇÃO": PRINT "Fonha a Matriz de Leslie e o Vetor População em DATA' ."
20 A$="####.#####": B$="###.###": P$="###,###,###.": STOP
30 DEFDBL A-Z : DEFSNG I,K,J,L
40 DIM A(20,20), B(20,20), S(20,20), P(20), V(20), W(20)
50 D=15
60 ' *** LEITURA DA MATRIZ DE LESLIE ***
70 PRINT: PRINT@448, "ESTOU LENDO AS 'DATAS' DA MATRIZ DE LESLIE 15 x 15 : "
80 FOR I=1 TO D
90 FOR J=1 TO D
100 PRINT@595, I, J
110 READ B(I, J)
120 NEXT J
130 NEXT I
140 FOR I=1 TO D: A(I, I)=1: NEXT I
150 CLS: PRINT "CONFIRA A MATRIZ DE LESLIE ( USE <SHIFT> @ PARA FIXAR O VIDEO )": PRINT
160 FOR I=1 TO D
170 PRINT "LINHA"; I
180 FOR K= 0 TO 2
190 FOR J=K*5+1 TO K*5+5
200 PRINT USING A$; B(I, J);
210 NEXT J
220 PRINT
230 NEXT K
240 NEXT I
250 PRINT: PRINT "DIGITE <ENTER> PARA CONTINUAR OU <BREAK> PARA CORRIGIR": PRINT "AS ENTRADAS ERRADAS EM B(I, J); DEPOIS <GOTO 150>"
260 IF INKEY$="" THEN 260
270 ' *** IMPRESSÃO DA MATRIZ DE LESLIE ***
280 CLS: PRINT@320, "LIGUE A IMPRESSORA ."
290 GOSUB 1430: LPRINTTAB(16) "PROJECÃO MATRICIAL DE UMA POPULAÇÃO": GOSUB 1430
300 LPRINTTAB(16) "DADOS DE ENTRADA": LPRINTTAB(16) STRING$(16, "="): LPRINT " "
310 LPRINTTAB(16) "MATRIZ DE LESLIE 15 x 15 : "
320 FOR I=1 TO D
330 LPRINTTAB(16) "LINHA"; I
340 FOR K= 0 TO 2: LPRINTSTRING$(16, " ");
350 FOR J=K*5+1 TO K*5+5
360 LPRINT USING A$; B(I, J);
370 NEXT J
380 LPRINT " "
390 NEXT K

```

APÊNDICE C (CONT.)

```

400 NEXT I
410 ' *** CALCULO DO MAIOR AUTOVALOR E DO AUTOVETOR NORMALIZ
    ADO ***
420 FOR I=1 TO D
430 FOR J=1 TO D
440 S(I,J)=B(I,J)
450 NEXT J
460 NEXT I
470 FOR I = 1 TO D:IF S(I,I)=0. THEN S(I,I)=1.D-9:NEXTI
480 IT=1
490 V(1)=1.
500 CLS:PRINT@320,"ITERACAO # ";IT;" PARA CALCULO DO MAIOR A
    UTOVALOR":PRINT:PRINT W(1)
510 FORI=1TOD
520 W(I)=0.
530 FORJ=1TOD
540 W(I)=W(I)+S(I,J)*V(J)
550 NEXTJ
560 NEXT I
570 FORI=2TOD
580 V(I)=W(I)/W(1)
590 NEXTI
600 IT=IT+1
610 IF IT<50 THEN 500
620 IF ABS(W(1)-M)>>1.D-7 THEN M=W(1):GOTO 500
630 CLS:PRINT@320,"O MAIOR AUTO VALOR DA MATRIZ DE LESLIE E'
    :";W(1):LPRINT
640 LPRINT " ":LPRINTTAB(16)"O MAIOR AUTOVALOR DA MATRIZ ACIM
    A E' :";:LPRINTTAB(60)USINGA#;W(1):LPRINT " "
650 PRINT"SEU AUTOVETOR NORMALIZADO E' :":PRINT
660 FOR K=0 TO 2
670 FOR I=K*5+1 TO K*5+5
680 PRINTUSINGA#;V(I);
690 NEXTI
700 PRINT
710 NEXTK
720 LPRINTTAB(16)"SEU AUTOVETOR NORMALIZADO E' :":
730 FOR K=0 TO 2:LPRINTSTRING$(16," ");
740 FOR I=K*5+1 TO K*5+5
750 LPRINTUSINGA#;V(I);
760 NEXTI
770 LPRINT " "
780 NEXTK
790 ' *** LEITURA E IMPRESSAO DO VETOR FOULACAO EM T=0 ***
800 CLS:PRINT@320,"ESTOU LENDO A 'DATA' DO VETOR POPULACAO :
    "
810 FOR I=1 TO D
820 PRINT@600,I
830 READ P(I)
840 NEXT I
850 CLS:PRINT"CONFIRA O VETOR POPULACAO ":PRINT:SO=0

```

APÊNDICE C (CONT.)

```

860 FORK=0T02
870 FOR I=K*5+1TOK*5+5
880 PRINTUSINGP$;P(I);:SO=SO+P(I)
890 NEXT I:PRINT:NEXTK
900 PRINT:PRINT"DIGITE <ENTER> PARA CONTINUAR OU <BREAK> PAR
A CORRIGIR":PRINT"AS ENTRADAS ERRADAS EM P(I); DEPOIS <G
OTO 850)"
910 IF INKEY$="" THEN 910
920 LPRINT " ":LPRINTTAB(16)"VETOR POPULACAO PARA O PERIODO O
":LPRINTTAB(16)STRING$(32,"-")
930 FOR I=1 TO D:LPRINTSTRING$(16," ");
940 LPRINT"LINHA";I;:LPRINTTAB(28)USINGP$;P(I);:LPRINTTAB(45
)USINGB$;100*P(I)/SO;:LPRINT " %"
950 NEXT I:LPRINTSTRING$(16," ");:LPRINT"TOTAL";TAB(28)USING
P$;SO;:LPRINTTAB(45)USINGB$;100.000;:LPRINT " %":GOSUB143
O
960 LPRINTTAB(16)"DADOS DE SAIDA":LPRINTTAB(16)STRING$(14,"=
")
970 ' *** EXPONENCIACAO DA MATRIZ DE LESLIE ***
980 PRINT:L=L+1:PRINT"POTENCIA";L:PRINT
990 FOR I=1 TO D
1000 PRINT"LINHA";I
1010 FOR I1= 0 TO 2
1020 FOR J=I1*5+1 TO I1*5+5
1030 S(I,J)=0
1040 FOR K=1 TO D
1050 S(I,J)=S(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
1060 NEXT K
1070 PRINTUSINGA$;S(I,J);
1080 NEXT J
1090 PRINT
1100 NEXT I1
1110 NEXT I
1120 PRINT:PRINT"DIGITE <C> PARA <C>ONTINUAR A EXPONENCIACAO
DA MATRIZ DE LESLIE":PRINT"DIGITE <P> PARA <P>ROJETAR A
POPULACAO"
1130 C$=INKEY$:IF C$="" THEN 1130 ELSE GOSUB 1140 :GOTO 98
O
1140 FOR I=1 TO D
1150 FOR J=1 TO D
1160 A(I,J)=S(I,J)
1170 NEXT J: NEXT I
1180 IFC$="C" RETURN
1190 ' *** IMPRESSAO DA POTENCIA DA MATRIZ DE LESLIE ***
1200 CLS:PRINT"MATRIZ DE LESLIE A POTENCIA";L:PRINT
1210 LPRINT " ":LPRINTTAB(16)"MATRIZ DE LESLIE A POTENCIA";L:
LPRINTTAB(16)STRING$(30,"-")
1220 FORI=1 TO D
1230 PRINT"LINHA";I:LPRINTTAB(16)"LINHA";I
1240 FOR K= 0 TO 2:LPRINTSTRING$(16," ");
1250 FOR J=K*5+1 TO K*5+5

```

## APÊNDICE C (CONT.)

```

1260 PRINTUSINGA$;A(I,J);:LPRINTUSINGA$;A(I,J);
1270 NEXT J
1280 PRINT:LPRINT" "
1290 NEXT K
1300 NEXT I
1310 / *** PROJECÃO DO VETOR POPULAÇÃO ***
1320 PRINT:PRINT"VETOR POPULAÇÃO PARA O PERÍODO";L:PRINT:LPR
INT" ":LPRINTTAB(16)"VETOR POPULAÇÃO PARA O PERÍODO";L:
LPRINTTAB(16)STRING$(33,"-")
1330 FOR I=1 TO D:W(I)=0:NEXT I:SO=0
1340 FOR I=1 TO D
1350 FOR K=1 TO D
1360 W(I)=W(I)+A(I,K)*P(K)
1370 NEXTK:SO=SO+W(I):NEXTI
1380 FOR I=1 TO D:LPRINTSTRING$(16," ");
1390 LPRINT"LINHA";I;:LPRINTTAB(28)USINGF$;W(I);:LPRINTTAB(4
5)USINGB$;100*W(I)/SO;:LPRINT" %"
1400 NEXT I:LPRINTSTRING$(16," ");:LPRINT"TOTAL";TAB(28)USIN
GP$;SO;:LPRINTTAB(45)USINGB$;100.000;:LPRINT" %":GOSUB1
430
1410 PRINT:PRINT"QUER CONTINUAR A PROJECÃO ? (S)IM OU (N)AO
"
1420 Q$=INKEY$:IF Q$="" THEN 1420 ELSE:IF Q$="S" GOTO 980 E
LSE FOR I=1 TO 7:LPRINT" ":NEXTI:END
1430 LPRINT" ":LPRINTTAB(16)STRING$(55,"#"):LPRINT" ":RETURN
1440 /
1450 / *** DADOS DA MATRIZ DE LESLIE ***
1460 /
1470 DATA 0, 0, .073020, .280038, .422794, .389301, .284814,
.168946, .069572, .017508, .006442, .001817, 0, 0, 0
1480 DATA .961822, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1490 DATA 0, .988571, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1500 DATA 0, 0, .997676, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1510 DATA 0, 0, 0, .997606, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1520 DATA 0, 0, 0, 0, .993784, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1530 DATA 0, 0, 0, 0, 0, .992223, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1540 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, .990548, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1550 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .987592, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1560 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .981447, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1570 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .970563, 0, 0, 0, 0, 0
1580 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .953730, 0, 0, 0, 0
1590 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .925932, 0, 0, 0
1600 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .880025, 0, 0
1610 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, .795701, .5
67415
1620 /
1630 / *** DADOS DO VETOR POPULAÇÃO ***
1640 /
1650 DATA 8192115, 7045598, 6746806, 6793147, 5973696, 49503
74, 3916886, 3232579, 2844848, 2407010, 2113899, 167359
0,1334127, 1131306, 1568787

```

APÊNDICE D

ATUÁRIA - PROGRAMA PARA SOLUÇÃO DOS QUARENTA  
PROBLEMAS ATUARIAIS MAIS COMUNS

```

1000 CLEAR 1000
1010 CLS
1020 DEFDBL A-Z
1030 DEFINT I, K, X, Z
1040 V=1.0000000000
1050 A$="###,###,###"
1060 B$="###,###,###.##"
1070 C$="# ,###,###"
1080 D$="###,###.##"
1090 E$="# ,###,###,###.##"
1100 F$="# ,###,###.##"
1110 G$="##,###,###,###.##"
1120 PRINT TAB(18)"A T U A R I A"
1130 PRINT TAB(17)STRING$(21,"-")
1140 PRINT
1150 PRINT"PROGRAMA PARA CALCULO DE NUMEROS DE COMUTACAO E S
    OLU-"
1160 PRINT"CAO DE 40 PROBLEMAS RELATIVOS A ANUIDADES E SEGUR
    OS ."
1170 PRINT
1180 PRINT"Que tabela de sobrevivencia pretende utilizar ?"
1190 PRINT" 1) GAMT - Homens - 1971 - Ja' incorporada ao pr
    ograma (*) ;"
1200 PRINT" 2) GAMT - Mulheres - 1971 - Ja' incorporada ao
    programa (*) ;"
1210 PRINT" 3) Outra, previamente digitada, a ser lida de d
    isco ;"
1220 PRINT" 4) Outra, a ser digitada e gravada em disco ."
1230 PRINT
1240 PRINT"      Nota: (*) Tabelas de Greenlee e Keh para os
    E.U.A."
1250 PRINT @ 896,"Digite o numero correspondente aa sua esco
    lha ."
1260 W$=INKEY$
1270 IF W$="" THEN 1260
1280 IF VAL(W$)<1 OR VAL(W$)>4 THEN GOSUB 7810: GOTO 1250
1290 CLS
1300 DIM V(112), L(112), D1(112), D(112), N(112), C(112), M(
    112), S(112), R(112)
1310 FOR I=0 TO 4
1320 L(I)=9.D37
1330 NEXT I
1340 IF VAL(W$)=3 THEN 2220
1350 IF VAL(W$)=4 THEN 1500
1360 IF VAL(W$)=1 THEN PRINT @ 320,"Estou lendo o vetor L(X)
    da GAMT-1971-Homens.": READ TS$, IE, IA: FOR I=IE TO IA
    : READ L(I): PRINT @ 370, I: NEXT I: GOTO 1710
1370 PRINT @ 320,"Estou lendo o vetor L(X) da GAMT-1971-Mulh
    eres."
1380 READ TS$, IE, IA

```

## APÊNDICE D (CONT.)

```

1390 FOR I=IE TO IA
1400 READ L(I)
1410 PRINT @ 370, I
1420 NEXT I
1430 PRINT @ 370, "      "
1440 READ TS$, IE, IA
1450 FOR I=IE TO IA
1460 READ L(I)
1470 PRINT @ 370, I
1480 NEXT I
1490 GOTO 1710
1500 CLS
1510 PRINT"Qual o nome de sua tabela de sobrevivencia "
1520 INPUT TS$
1530 INPUT"Qual a primeira idade presente na tabela ";IE
1540 IF IE<0 OR IE>119 THEN GOSUB 7810: GOTO 1530
1550 INPUT"Qual a primeira idade ausente da tabela ";IA
1560 IF IA>120 OR IA<=IE THEN GOSUB 7810: GOTO 1550
1570 PRINT
1580 PRINT"Entre com o vetor L(X) usando de preferencia"
1590 PRINT"uma RAIZ maior que 1.000.000 : "
1600 PRINT
1610 PRINT"  L(";IE;") ";
1620 INPUT L(IE)
1630 IF L(IE)<=0 OR(L(IE)-INT(L(IE)))>0 THEN PRINT"* ERRO :
L(";IE;") só pode ser inteiro e maior que 0. Redigite.
": GOTO 1610
1640 FOR I=IE+1 TO IA
1650 PRINT"  L(";I;") ";
1660 INPUT L(I)
1670 IF(L(I)<=0 OR(L(I)-INT(L(I)))>0)AND(I<IA)THEN PRINT"* E
RRO : L(";I;") só pode ser inteiro e positivo. Redigit
e.":GOTO 1650
1680 IF L(I)>L(I-1)THEN PRINT"* ERRO : L(";I;") deve ser men
or que L(";I-1;"). Refaca ambos.": I=I-1: GOTO 1650
1690 NEXT I
1700 IF L(IA)<>0 THEN PRINT"* ERRO : L(";IA;") deve ser 0 po
rque";IA;"e a idade inatingivel.": PRINT"  L(";IA;")"
;: INPUT L(IA): GOTO 1700
1710 PRINT
1720 PRINT"Deseja conferir o vetor L(X) (S/N) ?"
1730 GOSUB 7760
1740 IF W$(>)"S" AND W$(>)"s" AND W$(>)"N" AND W$(>)"n" THEN GOS
UB 7800: GOTO 1710
1750 IF W$="N" OR W$="n" THEN 2190
1760 GOSUB 1780
1770 GOTO 1880
1780 CLS
1790 PRINT @ 320,"Estou consistindo o vetor L(X). "
1800 IF L(IE)<1 THEN I1=1 ELSE: I1=0
1810 FOR I=IE+1 TO IA
1820 PRINT @ 370, I
1830 IF L(I)<0 THEN I1=I1+1
1840 IF L(I)>L(I-1)THEN I1=I1+1
1850 NEXT I

```

APÊNDICE D (CONT.)

```

1860 IF L(IA)<>0 THEN I1=I1+1: RETURN
1870 RETURN
1880 IP=IE
1890 IQ=IE+9
1900 IF IQ>IA THEN IQ=IA
1910 CLS
1920 IF I1>0 THEN PRINT"* ERRO : Ha'";I1;"erro(s) fatal(is)
      no vetor L(X)."

```

APÊNDICE D (CONT.)

```

2270 INPUT#1, IE
2280 INPUT#1, IA
2290 FOR I=IE TO IA
2300 INPUT#1, L(I)
2310 NEXT I
2320 CLOSE
2330 GOTO 1710
2340 PRINT @ 320, "Deseja gravar em disco esta tabela (S/N)
?"
2350 GOSUB 7760
2360 IF W$((">"S" AND W$((">"s" AND W$((">"N" AND W$((">"n" THEN GOS
UB 7800: GOTO 2340
2370 IF W$="N" OR W$="n" THEN 2480
2380 PRINT
2390 INPUT "Qual o nome do arquivo ";AR$
2400 OPEN"O",1, AR$
2410 PRINT#1, TS$
2420 PRINT#1, IE
2430 PRINT#1, IA
2440 FOR I=IE TO IA
2450 PRINT#1, L(I)
2460 NEXT I
2470 CLOSE
2480 CLS
2490 PRINT @ 320, "Informe a taxa de juros da tabela : "
2500 INPUT "(expressao percentual com 9 decimais) ";J
2510 J=J/100.0000000000
2520 CLS
2530 PRINT TAB(12)"x"
2540 PRINT"O VETOR v E' : "
2550 V(0)=1.0000000000
2560 V=1.0000000000
2570 FOR I=1 TO(IA+1)
2580 V=(1.0000000000+J)*V
2590 V(I)=1.0000000000/V
2600 PRINT TAB(3)I; TAB(15)USING"#.#####";V(I)
2610 NEXT I
2620 GOSUB 7750
2630 CLS
2640 PRINT @ 320, "Estou calculando os numeros de comutacao."
2650 FOR I=IE TO IA
2660 PRINT @ 370, I
2670 D1(I)=L(I)-L(I+1)
2680 NEXT I
2690 PRINT @ 370, " "
2700 FOR I=IE TO IA
2710 PRINT @ 370, I
2720 D(I)=V(I)*L(I)
2730 C(I)=V(I+1)*D1(I)
2740 NEXT I
2750 N=0
2760 M=0
2770 FOR I=IA TO IE STEP -1
2780 PRINT @ 370, I
2790 N=N+D(I)
2800 M=M+C(I)

```

APÊNDICE D (CONT.)

```
2810 N(I)=N
2820 M(I)=M
2830 NEXT I
2840 S=0
2850 R=0
2860 FOR I=IA TO IE STEP -1
2870 PRINT @ 370, I
2880 S=S+N(I)
2890 R=R+M(I)
2900 S(I)=S
2910 R(I)=R
2920 NEXT I
2930 CLS
2940 PRINT @ 320,"Deseja imprimir tabela de mortalidade"
2950 PRINT"e os numeros de comutacao (S/N) ?"
2960 GOSUB 7760
2970 IF W$( ) "S" AND W$( ) "s" AND W$( ) "N" AND W$( ) "n" THEN
  GOTO 2930
2980 IF W$="N" OR W$="n" THEN 3350
2990 PRINT
3000 PRINT"Ligue a impressora."
3010 LPRINT " "
3020 LPRINT " "
3030 LPRINT TS#
3040 LPRINT"TABELA DE SOBREVIVENCIA E NUMEROS DE COMUTACAO F
  ARA JUROS DE ";100*J;" % AO ANO"
3050 GOSUB 6830
3060 LPRINT"IDADE";
3070 LPRINT TAB(11)"l×";
3080 LPRINT TAB(22)"d×";
3090 LPRINT TAB(36)"D×";
3100 LPRINT TAB(54)"N×";
3110 LPRINT TAB(68)"M×";
3120 LPRINT TAB(75)"IDADE"
3130 GOSUB 6830
3140 FOR I=IE TO IA
3150 PRINT I;
3160 PRINT TAB(6)USING A#; L(I);
3170 PRINT TAB(20)USING C#; D1(I);
3180 PRINT TAB(30)USING B#; D(I);
3190 PRINT TAB(46)USING E#; N(I)
3200 PRINT USING G#; S(I);
3210 PRINT TAB(19)USING D#; C(I);
3220 PRINT TAB(32)USING F#; M(I);
3230 PRINT TAB(48)USING B#; R(I)
3240 LPRINT I;
3250 LPRINT TAB(5)USING A#; L(I);
3260 LPRINT TAB(18)USING C#; D1(I);
3270 LPRINT TAB(28)USING B#; D(I);
3280 LPRINT TAB(44)USING E#; N(I);
3290 LPRINT TAB(62)USING F#; M(I);
3300 LPRINT TAB(75)I
3310 NEXT I
3320 GOSUB 6830
3330 LPRINT " "
3340 LPRINT " "
```

## APÊNDICE D (CONT.)

```

3350 CLS
3360 PRINT @ 320,"Espere um instante."
3370 M1$="NOME DO BENEFICIO"
3380 M2$="CRONOLOGIA DO BENEFICIO"
3390 M3$="DURACAO DOS DIREITOS AOS BENEFICIOS"
3400 M4$="ORIGEM DO PAGAMENTO DOS BENEFICIOS"
3410 M5$="OCASIAO DO PAGAMENTO DOS BENEFICIOS"
3420 M6$="CONDICAO DE PAGAMENTO DO PREMIO"
3430 A$(1)="1 - DOTE PURO"
3440 A$(2)="2 - DOTE DE 'TONTI'"
3450 A$(3)="3 - ANUIDADE"
3460 A$(4)="4 - SEGURO DE VIDA SIMPLES"
3470 A$(5)="5 - SEGURO DE VIDA DOTAL"
3480 A$(6)="6 - SEGURO DE VIDA COM DEVOLUCAO DOS PREMIOS ACU
MULADOS"
3490 B$(1)="1 - PAGAMENTO UNICO"
3500 B$(2)="2 - PAGAMENTOS ANUAIS IGUAIS"
3510 B$(3)="3 - PAGAMENTOS SUB-ANUAIS EM m PARCELAS IGUAIS S
OMANDO $1"
3520 B$(4)="4 - PAGAMENTOS CRESCENTES EM PROGRESSAO ARITMETI
CA DE RAZAO RE-          LATIVA $1
3530 B$(5)="5 - PAGAMENTOS SUB-ANUAIS TIPO 3) MAS EM PROGRES
SAO ARITMETICA          TIPO 4)"
3540 B$(6)="6 - PAGAMENTO UNICO E CONSTANTE (AO LONGO DO PER
IODO SEGURADO)"
3550 B$(7)="7 - PAGAMENTO UNICO MAS CRESCENTE EM PROGRESSAO
ARITMETICA AO          LONGO DO PERIODO SEGURADO"
3560 C$(1)="1 - VITALICIA (PELO RESTO DA VIDA)"
3570 C$(2)="2 - TEMPORARIA POR n ANOS (POR PARTE DO RESTO DA
VIDA)"
3590 D$(1)="1 - ORDINARIA (SEM CARENCIA)"
3600 D$(2)="2 - DIFERIDA POR k ANOS (COM CARENCIA DE k ANOS)
"
3610 E$(1)="1 - IMEDIATA (NO FIM DO PERIODO DE SOBREVIVENCIA
)"
3620 E$(2)="2 - ANTECIPADA (NO INICIO DO PERIODO DE SOBREVIV
ENCIA)"
3630 E$(3)="3 - IMEDIATA (NO FIM DO PERIODO RELATIVO A MORTE
)"
3640 F$(1)="1 - PREMIO UNICO (NO ATO DA COMPRA)"
3650 F$(2)="2 - PREMIO ANUAL ORDINARIO ANTECIPADO TEMPORARIO
POR m ANOS"
3660 F$(3)="3 - PREMIO UNICO (NO ATO DA COMPRA)"
3670 F$(4)="4 - PREMIO ANUAL ORDINARIO ANTECIPADO VITALICIO
(PELO RESTO DA          VIDA)"
3680 F$(5)="5 - PREMIO ANUAL ORDINARIO ANTECIPADO TEMPORARIO
POR m ANOS          (PARTE DO RESTO DA VIDA)"
3690 M=0
3700 X=0
3710 K=0
3720 N=0
3730 CLS
3740 PRINT @ 320,"Qual a idade, em anos, do comprador do ben
eficio,"
3750 PRINT"no momento do contrato ";
3760 INPUT X

```

APÊNDICE D (CONT.)

```

3770 IF X<IE OR X>(IA-1) THEN 3690
3780 CLS
3790 PRINT "PRIMEIRA ESCOLHA : "; M1#
3800 PRINT
3810 PRINT A$(1)
3820 PRINT A$(2)
3830 PRINT A$(3)
3840 PRINT A$(4)
3850 PRINT A$(5)
3860 PRINT A$(6)
3870 GOSUB 6810
3880 INPUT NB#
3890 IF VAL(NB#)<1 OR VAL(NB#)>6 THEN GOSUB 7810: GOTO 3870
3900 IF VAL(NB#)=1 THEN CB#="1": DB#="2": N=1: FB#="1": CP#="1": GOTO 4060
3910 IF VAL(NB#)=2 THEN CB#="1": DB#="2": N=1: FB#="2": CP#="2": GOTO 4060
3920 IF VAL(NB#)=3 THEN GOSUB 6160: GOTO 3950
3930 IF VAL(NB#)=6 THEN CB#="7": DB#="1": OB#="1": FB#="3": CP#="4": N=IA-X: M=N: GOTO 4250
3940 GOSUB 6320
3950 CLS
3960 PRINT "TERCEIRA ESCOLHA : "; M3#
3970 PRINT
3980 PRINT C$(1)
3990 PRINT C$(2)
4000 GOSUB 6810
4010 INPUT DB#
4020 IF VAL(DB#)<1 OR VAL(DB#)>2 THEN GOSUB 7810: GOTO 4000
4030 IF VAL(DB#)=1 THEN 4060
4040 INPUT "Temporaria por quantos anos "; N
4050 IF N<1 THEN 4040
4060 CLS
4070 PRINT "QUARTA ESCOLHA : "; M4#
4080 PRINT
4090 PRINT D$(1)
4100 PRINT D$(2)
4110 IF VAL(NB#)<3 THEN OB#="2": PRINT @ 640," "; GOTO 4180
4120 GOSUB 6810
4130 INPUT OB#
4140 IF VAL(OB#)<1 OR VAL(OB#)>2 THEN GOSUB 7810: GOTO 4110
4150 IF VAL(OB#)=2 THEN 4180
4160 IF VAL(OB#)=1 THEN N=IA-X: GOTO 4230
4170 GOTO 4230
4180 INPUT "Diferida por quantos anos "; K
4190 IF K<1 THEN GOSUB 7810: GOTO 4180
4200 IF VAL(NB#)=1 THEN 4250
4210 IF VAL(NB#)=2 THEN N=K: GOTO 4250
4220 IF VAL(OB#)=1 THEN N=IA-X-K
4230 IF VAL(NB#)=3 THEN GOSUB 6410: GOTO 4250
4240 GOSUB 6590
4250 EQ=VAL(NB#)*100000+VAL(CB#)*10000+VAL(DB#)*1000+VAL(OB#)*100+VAL(FB#)*10+VAL(CP#)
4260 GOSUB 6850 NUMERO IDENTIFICADOR DA EQUACAO
4270 IF EQ=112221 THEN 4700 INICIO DAS ANUIDADES
4280 IF EQ=212212 THEN 4740

```

## APÉNDICE D (CONT.)

```

4290 IF EQ=321111 THEN 4780
4300 IF EQ=321121 THEN 4820
4310 IF EQ=321211 THEN 4840
4320 IF EQ=321221 THEN 4880
4330 IF EQ=321222 THEN 4920
4340 IF EQ=322111 THEN 4960
4350 IF EQ=322121 THEN 5000
4360 IF EQ=322211 THEN 5040
4370 IF EQ=322221 THEN 5080
4380 IF EQ=331111 THEN 5120
4390 IF EQ=331121 THEN 5160
4400 IF EQ=331211 THEN 5180
4410 IF EQ=331221 THEN 5220
4420 IF EQ=332111 THEN 5260
4430 IF EQ=332121 THEN 5300
4440 IF EQ=332211 THEN 5340
4450 IF EQ=332221 THEN 5380
4460 IF EQ=341111 THEN 5420
4470 IF EQ=341121 THEN 5460
4480 IF EQ=342111 THEN 5480
4490 IF EQ=342121 THEN 5520
4500 IF EQ=351111 THEN 5560
4510 IF EQ=351121 THEN 5600
4520 IF EQ=352111 THEN 5620
4530 IF EQ=352121 THEN 5660
4540 IF EQ=461133 THEN 5700 INICIO DOS SEGUROS
4550 IF EQ=461134 THEN 5720
4560 IF EQ=461135 THEN 5740
4570 IF EQ=461233 THEN 5780
4580 IF EQ=462133 AND N=1 THEN 5820 PREMIO NATURAL
4590 IF EQ=462133 AND N>1 THEN 5860
4600 IF EQ=462135 THEN 5900
4610 IF EQ=462233 THEN 5940
4620 IF EQ=471133 THEN 5980
4630 IF EQ=562133 THEN 6000
4640 IF EQ=562135 THEN 6040
4650 IF EQ=562233 THEN 6080
4660 IF EQ=671134 THEN 6120
4670 Z=999
4680 GOTO 7030
4690 IF INKEY$="" THEN 4690 ELSE 3690
4700 Z=X+K
4710 GOSUB 6140
4720 Y=D(X+K)/D(X)
4730 GOTO 7030 INICIO DAS ANUIDADES
4740 Z=X+K
4750 GOSUB 6140
4760 Y=(N(X)-N(X+K))/D(X+K)
4770 GOTO 7030
4780 Z=X+1
4790 GOSUB 6140
4800 Y=N(X+1)/D(X)
4810 GOTO 7030
4820 Y=N(X)/D(X)
4830 GOTO 7030
4840 Z=X+K+1

```

APENDICE D (CONT.)

```

4850 GOSUB 6140
4860  $Y=N(X+K+1)/D(X)$ 
4870 GOTO 7030
4880  $Z=X+K$ 
4890 GOSUB 6140
4900  $Y=N(X+K)/D(X)$ 
4910 GOTO 7030
4920  $Z=X+K$ 
4930 GOSUB 6140
4940  $Y=N(X+K)/(N(X)-N(X+K))$ 
4950 GOTO 7030
4960  $Z=X+N+1$ 
4970 GOSUB 6140
4980  $Y=(N(X+1)-N(X+N+1))/D(X)$ 
4990 GOTO 7030
5000  $Z=X+N$ 
5010 GOSUB 6140
5020  $Y=(N(X)-N(X+N))/D(X)$ 
5030 GOTO 7030
5040  $Z=X+K+N+1$ 
5050 GOSUB 6140
5060  $Y=(N(X+K+1)-N(X+K+N+1))/D(X)$ 
5070 GOTO 7030
5080  $Z=X+K+N$ 
5090 GOSUB 6140
5100  $Y=(N(X+K)-N(X+K+N))/D(X)$ 
5110 GOTO 7030
5120  $Z=X+1$ 
5130 GOSUB 6140
5140  $Y=N(X+1)/D(X)+(M-1)/(2*M)$ 
5150 GOTO 7030
5160  $Y=N(X)/D(X)-(M-1)/(2*M)$ 
5170 GOTO 7030
5180  $Z=X+K+1$ 
5190 GOSUB 6140
5200  $Y=N(X+K+1)/D(X)+((M-1)/(2*M))*(D(X+K)/D(X))$ 
5210 GOTO 7030
5220  $Z=X+K$ 
5230 GOSUB 6140
5240  $Y=N(X+K)/D(X)-((M-1)/(2*M))*(D(X+K)/D(X))$ 
5250 GOTO 7030
5260  $Z=X+N+1$ 
5270 GOSUB 6140
5280  $Y=(N(X+1)-N(X+N+1))/D(X)+((M-1)/(2*M))*(1-D(X+N)/D(X))$ 
5290 GOTO 7030
5300  $Z=X+N$ 
5310 GOSUB 6140
5320  $Y=(N(X)-N(X+N))/D(X)-((M-1)/(2*M))*(1-D(X+N)/D(X))$ 
5330 GOTO 7030
5340  $Z=X+K+N+1$ 
5350 GOSUB 6140
5360  $Y=(N(X+K+1)-N(X+K+N+1))/D(X)+((M-1)/(2*M))*((D(X+K)-D(X+K+N))/D(X))$ 
5370 GOTO 7030
5380  $Z=X+K+N$ 
5390 GOSUB 6140

```

## APÉNDICE D (CONT.)

```

5400 Y=(N(X+K)-N(X+K+N))/D(X)-((M-1)/(2*M))*((D(X+K)-D(X+K+N)
    )/D(X))
5410 GOTO 7030
5420 Z=X+1
5430 GOSUB 6140
5440 Y=S(X+1)/D(X)
5450 GOTO 7030
5460 Y=S(X)/D(X)
5470 GOTO 7030
5480 Z=X+N+1
5490 GOSUB 6140
5500 Y=(S(X+1)-S(X+N+1)-N*N(X+N+1))/D(X)
5510 GOTO 7030
5520 Z=X+N
5530 GOSUB 6140
5540 Y=(S(X)-S(X+N)-N*N(X+N))/D(X)
5550 GOTO 7030
5560 Z=X+1
5570 GOSUB 6140
5580 Y=S(X+1)/D(X)+((M-1)/(2*M))*(N(X+1)/D(X))
5590 GOTO 7030
5600 Y=S(X)/D(X)-((M-1)/(2*M))*(N(X)/D(X))
5610 GOTO 7030
5620 Z=X+N+1
5630 GOSUB 6140
5640 Y=(S(X+1)-S(X+N+1)-N*N(X+N+1))/D(X)+((M-1)/(2*M))*((N(X
    +1)-N(X+N+1))/D(X)-N*(D(X+N)/D(X)))
5650 GOTO 7030
5660 Z=X+N
5670 GOSUB 6140
5680 Y=(S(X)-S(X+N)-N*N(X+N))/D(X)-((M-1)/(2*M))*((N(X)-N(X+
    N))/D(X)-N*(D(X+N)/D(X)))
5690 GOTO 7030
5700 Y=M(X)/D(X)
5710 GOTO 7030 INICIO DOS SEGUROS
5720 Y=M(X)/N(X)
5730 GOTO 7030
5740 Z=X+M
5750 GOSUB 6140
5760 Y=M(X)/(N(X)-N(X+M))
5770 GOTO 7030
5780 Z=X+K
5790 GOSUB 6140
5800 Y=M(X+K)/D(X)
5810 GOTO 7030
5820 Z=X+1
5830 GOSUB 6140
5840 Y=(M(X)-M(X+1))/D(X)
5850 GOTO 7030
5860 Z=X+N
5870 GOSUB 6140
5880 Y=(M(X)-M(X+N))/D(X)
5890 GOTO 7030
5900 IF M>N THEN Z=X+M ELSE Z=X+N
5910 GOSUB 6140
5920 Y=(M(X)-M(X+N))/(N(X)-N(X+M))

```

APÊNDICE D (CONT.)

```

5930 GOTO 7030
5940 Z=X+K+N
5950 GOSUB 6140
5960 Y=(M(X+K)-M(X+K+N))/D(X)
5970 GOTO 7030
5980 Y=R(X)/D(X)
5990 GOTO 7030
6000 Z=X+N
6010 GOSUB 6140
6020 Y=(M(X)-M(X+N)+D(X+N))/D(X)
6030 GOTO 7030
6040 IF M>N THEN Z=X+M ELSE Z=X+N
6050 GOSUB 6140
6060 Y=(M(X)-M(X+N)+D(X+N))/(N(X)-N(X+M))
6070 GOTO 7030
6080 Z=X+K+N
6090 GOSUB 6140
6100 Y=(M(X+K)-M(X+K+N)+D(X+K+N))/D(X)
6110 GOTO 7030
6120 Y=M(X)/(N(X)-R(X))
6130 GOTO 7030
6140 IF Z>(IA-1) THEN 7030
6150 RETURN
6160 CLS
6170 PRINT"SEGUNDA ESCOLHA : ";M2$
6180 PRINT
6190 PRINT B$(1)
6200 PRINT B$(2)
6210 PRINT B$(3)
6220 PRINT B$(4)
6230 PRINT B$(5)
6240 GOSUB 6810
6250 INPUT CB$
6260 IF VAL(CB$)<1 OR VAL(CB$)>5 THEN GOSUB 7810: GOTO 6240
6270 M=0
6280 IF VAL(CB$)=3 OR VAL(CB$)=5 THEN INPUT"Quantos pagament
os subanuais ";M: GOSUB 6300: RETURN
6290 RETURN
6300 IF M<1 THEN 6270
6310 RETURN
6320 CLS
6330 PRINT"SEGUNDA ESCOLHA : ";M2$
6340 PRINT
6350 PRINT B$(6)
6360 PRINT B$(7)
6370 GOSUB 6810
6380 INPUT CB$
6390 IF VAL(CB$)<6 OR VAL(CB$)>7 THEN GOSUB 7810: GOTO 6370
6400 RETURN
6410 CLS
6420 PRINT"QUINTA ESCOLHA : ";M5$
6430 PRINT
6440 PRINT E$(1)
6450 PRINT E$(2)
6460 GOSUB 6810
6470 INPUT FB$

```

## APÊNDICE D (CONT.)

```

6480 IF VAL(FB$)<1 OR VAL(FB$)>2 THEN GOSUB 7810: GOTO 6460
6490 CLS
6500 PRINT"SEXTA E ULTIMA ESCOLHA : ";M6$
6510 PRINT
6520 PRINT F$(1)
6530 PRINT F$(2)
6540 GOSUB 6810
6550 INPUT CP$
6560 IF VAL(CP$)<1 OR VAL(CP$)>2 THEN GOSUB 7810: GOTO 6540
6570 IF VAL(CP$)=2 THEN M=K: RETURN
6580 RETURN
6590 CLS
6600 PRINT"QUINTA ESCOLHA : ";M5$
6610 PRINT
6620 PRINT"No caso de SEGUROS, a ocasio do pagamento do ben-
eficio e sempre IMEDIATA, isto e', no fim do peri-
odo relativo aa morte."
6630 PRINT
6640 PRINT"Como nao se conhece antecipadamente quem vai morr
er no periodo,"
6650 PRINT"ficaria sem sentido falar-se na ocasio ANTECIPA
DA que signifi-caria o pagamento no inicio do periodo e
m que ocorre o obito."
6660 FB$="3"
6670 GOSUB 7750
6680 CLS
6690 PRINT"SEXTA E ULTIMA ESCOLHA : ";M6$
6700 PRINT
6710 PRINT F$(3)
6720 PRINT F$(4)
6730 PRINT F$(5)
6740 GOSUB 6810
6750 INPUT CP$
6760 IF VAL(CP$)<3 OR VAL(CP$)>5 THEN GOSUB 7810: GOTO 6740
6770 IF VAL(CP$)>5 THEN RETURN
6780 INPUT"Temporaria por quantos anos";M
6790 IF M<1 THEN GOSUB 7810: GOTO 6780
6800 IF M>(N+K) THEN GOSUB 6850: GOTO 7030
6810 PRINT @ 640,"Digite o numero correspondente aa sua esco
lha ."
6820 RETURN
6830 LPRINT STRING$(80,"-")
6840 RETURN
6850 FOR I=1 TO 6
6860 IF VAL(A$(I))=VAL(NB$) THEN NB$=A$(I): GOTO 6880
6870 NEXT I
6880 FOR I=1 TO 7
6890 IF VAL(B$(I))=VAL(CB$) THEN CB$=B$(I): GOTO 6910
6900 NEXT I
6910 FOR I=1 TO 2
6920 IF VAL(C$(I))=VAL(DB$) THEN DB$=C$(I): GOTO 6940
6930 NEXT I
6940 FOR I=1 TO 2
6950 IF VAL(D$(I))=VAL(OB$) THEN OB$=D$(I): GOTO 6970
6960 NEXT I
6970 FOR I=1 TO 3

```

APÊNDICE D (CONT.)

```

6980 IF VAL(E$(I))=VAL(PB$) THEN PB$=E$(I): GOTO 7000
6990 NEXT I
7000 FOR I=1 TO 5
7010 IF VAL(F$(I))=VAL(CP$) THEN CP$=F$(I): RETURN
7020 NEXT I
7030 CLS
7040 PRINT"CARACTERIZACAO DO PROBLEMA"
7050 PRINT STRING$(26,"-")
7060 PRINT NB$
7070 PRINT CB$
7080 PRINT DB$
7090 PRINT OB$
7100 PRINT PB$
7110 PRINT CP$
7120 PRINT"    m = ";M,
7130 PRINT"    x = ";X,
7140 PRINT"    k = ";K,
7150 PRINT"    n = ";N
7160 PRINT STRING$(63,"-")
7170 IF Z=999 THEN 7710
7180 IF VAL(CB$)=3 OR VAL(CB$)=5 THEN 7200
7190 IF M>(N+K)OR N<1 THEN 7680
7200 IF Z>(IA-1)THEN 7640
7210 PRINT"RESPOSTA PARA JUROS DE";J*100;"% AO ANO : "
7220 PRINT"PREMIO PURO UNITARIO = $";Y
7230 PRINT STRING$(63,"-")
7240 PRINT"Deseja imprimir os resultados (S/N) ?";
7250 GOSUB 7760
7260 IF W$(">"S" AND W$(">"s" AND W$(">"N" AND W$(">"n" THEN GOS
    UB 7810: GOTO 7240
7270 IF W$="N" OR W$="n" THEN 7500
7280 PRINT
7290 PRINT"Ligue a impressora."
7300 LPRINT" "
7310 LPRINT" "
7320 LPRINT"CARACTERIZACAO DO PROBLEMA"
7330 LPRINT STRING$(26,"-")
7340 LPRINT NB$
7350 LPRINT CB$
7360 LPRINT DB$
7370 LPRINT OB$
7380 LPRINT PB$
7390 LPRINT CP$
7400 LPRINT"    m = ";M,
7410 LPRINT"    x = ";X,
7420 LPRINT"    k = ";K,
7430 LPRINT"    n = ";N
7440 LPRINT STRING$(79,"-")
7450 LPRINT"RESPOSTA PARA JUROS DE";J*100;"% AO ANO : "
7460 LPRINT"PREMIO PURO UNITARIO = $";Y
7470 LPRINT STRING$(79,"-")
7480 LPRINT" "
7490 LPRINT" "
7500 PRINT
7510 PRINT"Deseja outro calculo com a mesma taxa de juros (S
    /N) ?"

```

## APÊNDICE D (CONT.)

```

7520 GOSUB 7760
7530 IF W$(">"S" AND W$(">"s" AND W$(">"N" AND W$(">"n" THEN GOS
    UB 7810: GOTO 7500
7540 IF W$="S" OR W$="s" THEN 3690
7550 PRINT"Deseja outro calculo com outra taxa de juros (S/N
    ) ?"
7560 GOSUB 7760
7570 IF W$(">"S" AND W$(">"s" AND W$(">"N" AND W$(">"n" THEN GOS
    UB 7810: GOTO 7550
7580 IF W$="S" OR W$="s" THEN 2190
7590 PRINT"Deseja outro calculo com outra tabela de sobreviv
    encia (S/N) ?"
7600 GOSUB 7760
7610 IF W$(">"S" AND W$(">"s" AND W$(">"N" AND W$(">"n" THEN GOS
    UB 7810: GOTO 7590
7620 IF W$="S" OR W$="s" THEN RUN
7630 END
7640 PRINT"* ERRO : Os valores acima, quando aplicados na eq
    uacao adequada,";
7650 PRINT"  reclamam numeros de comutacao fora da tabela de
    sobrevivencia,";
7660 PRINT"  revelando assim inconsistencia na proposicao."
7670 GOTO 7730
7680 PRINT"* ERRO : O prazo 'M' para pagar seguro nao pode s
    er maior do que";
7690 PRINT"  o prazo de carencia 'K' somado ao prazo 'N' de
    sua cobertura."
7700 GOTO 7730
7710 PRINT"* ERRO : O problema proposto nao se enquadra em n
    enhum dos"
7720 PRINT"  40 problemas tratados por este programa."
7730 PRINT"  Reveja seus dados e tente de novo."
7740 GOSUB 7750
7750 PRINT @ 975,"<ENTER> para continuar. ";
7760 W$=""
7770 W$=INKEY$
7780 IF W$="" THEN 7760
7790 RETURN
7800 PRINT CHR$(27);
7810 PRINT CHR$(27); CHR$(30);
7820 RETURN
7830 DATA"GROUP ANNUITY MORTALITY TABLE - USA - 1971 - HOMEN
    S",5, 111
7840 DATA 100000000, 99954400, 99912019, 99871755, 99832605,
    99793770
7850 DATA 99754851, 99715248, 99674863, 99633698, 99591652,
    99548529, 99504329, 99458856, 99412011, 99363697
7860 DATA 99313717, 99261875, 99207876, 99151725, 99093126,
    99031787, 98967417, 98899723, 98828317, 98752911
7870 DATA 98673020, 98588162, 98497855, 98401524, 98298596,
    98188305, 98070086, 97943085, 97806259, 97658669
7880 DATA 97499193, 97324767, 97130117, 96910603, 96661640,
    96379194, 96059408, 95698801, 95294187, 94842492
7890 DATA 94341250, 93787749, 93180005, 92515911, 91793732,
    91011741, 90168790, 89263586, 88291595, 87238806

```

## APÉNDICE D (CONT.)

7900 DATA 86094320, 84851118, 83505124, 82051050, 80476900,  
78765961, 76903698, 74879900, 72694306, 70336466

7910 DATA 67796897, 65084479, 62232022, 59276685, 56240474,  
53130769, 49939310, 46647111, 43260764, 39813227

7920 DATA 36332317, 32864579, 29456818, 26148729, 22981700,  
19991734, 17206586, 14647726, 12326266, 10246714

7930 DATA 8407921, 6806304, 5433602, 4276321, 3307585, 25099  
14, 1866864, 1358181, 964087, 666064

7940 DATA 446379, 289051, 180015, 106892, 59699, 30734, 1415  
8, 5577, 1743, 374, 0

7950 DATA "GROUP ANNUITY MORTALITY TABLE - USA - 1971 - MULHE  
RES", 5, 111

7960 DATA 100000000, 99976600, 99957305, 99941111, 99926820,  
99913430

7970 DATA 99900241, 99885955, 99870473, 99853795, 99835821,  
99816553, 99796090, 99774335, 99751287, 99726848

7980 DATA 99700919, 99673501, 99644396, 99613606, 99581033,  
99546478, 99509845, 99471036, 99429855, 99386106

7990 DATA 99339494, 99289923, 99237002, 99180536, 99120234,  
99055707, 98986566, 98912326, 98832504, 98746619

8000 DATA 98653994, 98554058, 98446240, 98329482, 98203031,  
98065841, 97916879, 97754924, 97578770, 97386833

8010 DATA 97177354, 96951513, 96707196, 96442411, 96154820,  
95841740, 95499202, 95122171, 94704775, 94240626

8020 DATA 93723340, 93146379, 92503855, 91790465, 91000333,  
90130097, 89177872, 88141536, 87006538, 85748336

8030 DATA 84335461, 82733087, 80920322, 78888251, 76629523,  
74147876, 71448300, 68535424, 65418981, 62107734

8040 DATA 58624422, 54998326, 51261959, 47450581, 43583312,  
39696595, 35827448, 32013544, 28292738, 24702588

8050 DATA 21279377, 18062106, 15080467, 12359936, 9920715, 7  
776561, 5933749, 4402492, 3168751, 2203299

8060 DATA 1472619, 940472, 569769, 324560, 171523, 82469, 35  
053, 12607, 3569, 691, 0

APÊNDICE E

## FUNDO DE APOSENTADORIA HIPOTÉTICO

```

10  CLS: CLEAR 100: DIMS(35), C(35), F(35), SO(35): L$ = STRING$(63, ".")
15  M$ = "#,###.#"
20  PRINT@192, "FUNDO SIMPLIFICADO DE APOSENTADORIAS": PRINTL#
30  PRINT "PREMISSAS:"
40  PRINT "TABELA DE SERVICO=TABELA DE SOBREVIVENCIA 1958 CSO ."
50  PRINT "INGRESSO=18 ANOS ; APOSENTAD.=53 ANOS : ";
55  PRINT "TEMPO SERVICO=35 ANOS "
60  PRINT "JUROS ATUARIAIS=6% ; TAXA DE CARREGAMENTO=0% ."
70  PRINT "SALARIO EXPONENCIAL ENTRE SAL. INICIAL E SAL. ";
75  PRINT "TERMINAL ."
80  PRINT "APOSENTADORIA CONSTANTE, FUNCAO DO SALARIO TERMINAL ."
85  PRINTL#
90  FOR I=1 TO 35: READ F(I): NEXT I 'LEITURA DOS FATORES DOTAIS
100 SI=100: PRINT "SALARIO INICIAL = "; SI
110 INPUT "QUAL O SALARIO TERMINAL "; ST
120 IF ST<=0 THEN PRINT CHR$(27); CHR$(29); CHR$(30); : GOTO 110
130 INPUT "QUAL A RAZAO BENEFICIO/SAL. TERMINAL "; R
140 IF R<.1 OR R>10 THEN PRINT CHR$(27); CHR$(29); CHR$(30); : GOTO 130
150 BE=R*ST: VB=BE*1.231742 'V.P. DAS APOSENTADORIAS EM X=18
160 EX=(ST/SI)^(1/34) 'EXPONENCIAL DA FUNCAO SALARIAL REAL
170 S(0)=SI/EX 'SALARIO DO ESCALAR ZERO
180 TC=.1 'TAXA CONTRIBUICAO INICIAL = 10%
190 FL=1
200 VC=0
210 CMD "T": OUT 254, 13 'ACELERADOR DO CLOCK DO MICRO
220 CLS: PRINT "Contribuicao Tentativa = "; TC*100; "%": PRINTL#
230 FOR I=1 TO 35
240 S(I)=S(I-1)*EX
250 C(I)=S(I)*TC
260 VC=VC+F(I)*C(I): SO(I)=VC 'SOMA DO V.P. DAS CONTR. EM X=18
270 PRINT " Ano"; I; TAB(9) "Salar.="; TAB(16) USINGM#; S(I);
273 PRINT TAB(25) "V.P. Cont.="; TAB(35) USINGM#; F(I);
275 PRINT TAB(44) "Soma V.P.="; TAB(54) USINGM#; VC
280 NEXT I
290 CMD "R": OUT 254, 8 'DESACELERADOR DO CLOCK
300 PRINTL#: FOR J=1 TO 200: NEXT J
310 IF FL=1 THEN 320 ELSE 330
320 IF VC<VB THEN TC=TC+.1: GOTO 200
325 IF VC=VB THEN FL=2: TC=TC-.1+.01: GOTO 200
330 IF FL=2 THEN 340 ELSE 350
340 IF VC<VB THEN TC=TC+.01: GOTO 200
345 IF VC=VB THEN FL=3: TC=TC-.01+.001: GOTO 200
350 IF FL=3 THEN 360 ELSE 370
360 IF VC<VB THEN TC=TC+.001: GOTO 200
365 IF VC=VB THEN FL=4: TC=TC-.001+.0001: GOTO 200
370 IF VC>VB THEN TC=TC+.0001: GOTO 200
380 PRINT "SALARIO INICIAL = $"; SI; " ";

```

APÊNDICE E (CONT.)

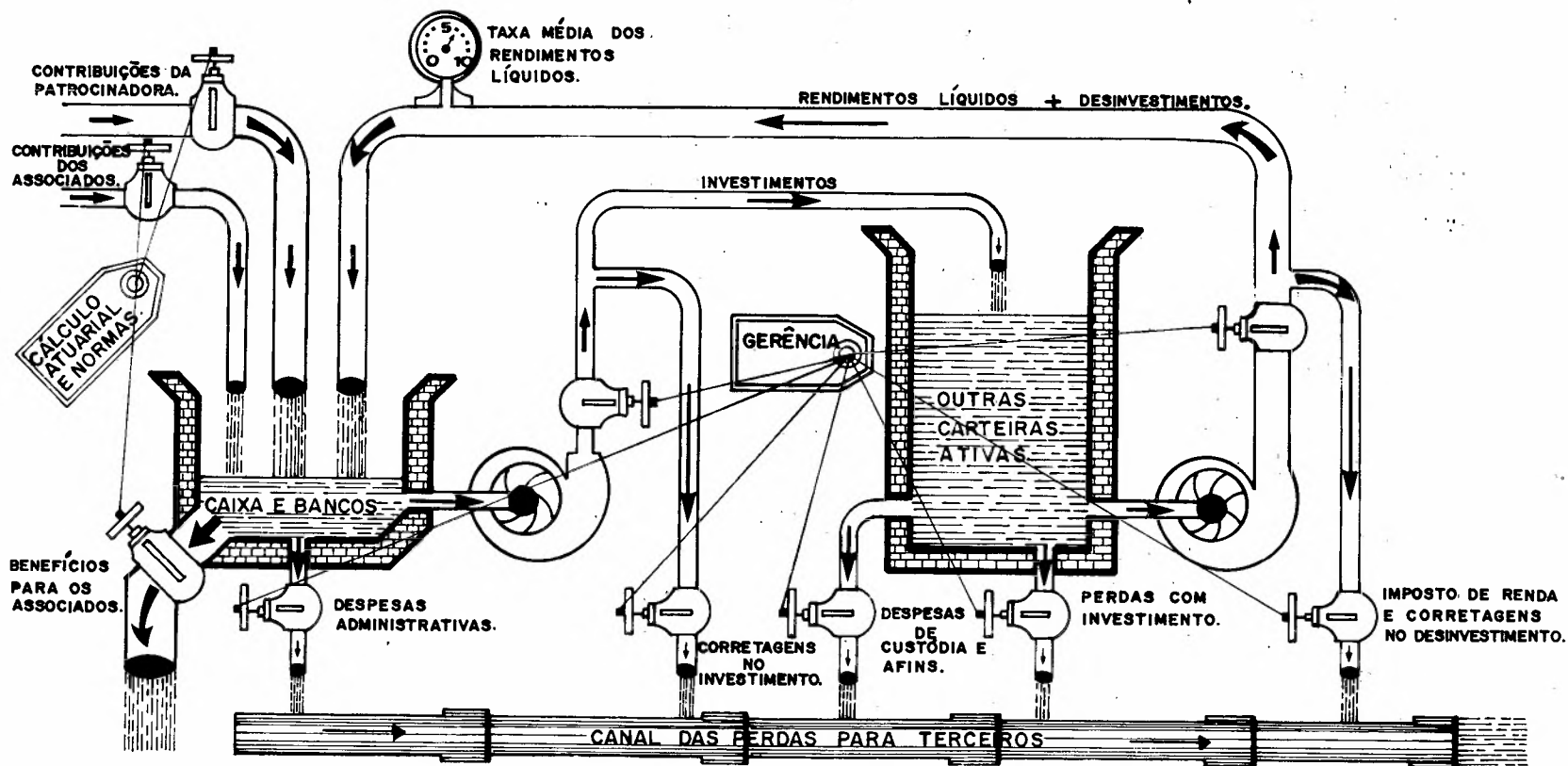
FUNDO DE APOSENTADORIA HIPOTÉTICO

```

390 PRINTTAB(32)"SALARIO TERMINAL = $";ST
400 PRINT"APOSENTADORIA VITALICIA = $";BE
410 PRINT"TAXA CONTRIB. NO EQUILIBRIO (%) = ";TC*100
420 PRINT"VAL.PRES.APOSENT. = $";VB;
425 PRINTTAB(32)"VAL.PRES.CONTRIB. = $";VC:PRINTL$
430 PRINT"Deseja rever os vetores da situacao de equilibrio ";
435 PRINT"(S/N) ?"
440 Z$=INKEY$:IFZ$=""THEN440
450 IFZ$("<")"S"ANDZ$("<")"s"THENEND
460 CLS:PRINT"Salarios : "
465 FORI=1TO35:PRINTUSING"##,###.#";S(I);:NEXTI
470 PRINT:PRINT"Contribuicoes : "
475 FORI=1TO35:PRINTUSING"##,###.#";C(I);:NEXTI
480 PRINT:INPUT"<ENTER> P/ CONTINUAR";Z$
490 PRINTCHR$(27);CHR$(29);CHR$(30);
500 PRINT"Valor Presente das Contribuicoes : "
505 FORI=1TO35:PRINTUSING"##,###.#";C(I)*F(I);:NEXTI
510 PRINT:PRINT"Soma dos V. P. das Contribuicoes : "
515 FORI=1TO35:PRINTUSING"##,###.#";SO(I);:NEXTI
520 END
530   CONTRIBUICOES =   DOTES PUROS DIFERIDOS DE 1 A 35 ANOS
540 DATA .941802, .886946, .835244, .786524, .740624
550 DATA .697381, .656650, .618286, .582145, .548101
560 DATA .516026, .485805, .457330, .430499, .405217
570 DATA .381393, .358942, .337774, .317814, .298985
580 DATA .281212, .264432, .248584, .233612, .219470
590 DATA .206109, .193486, .181557, .170282, .159622
600 DATA .149540, .140003, .130980, .122440, .114359

```

# Analogia Hidráulica dos Fluxos Financeiros de uma Entidade Fechada de Previdência Privada.



APÊNDICE F

## ANEXO 1

ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA  
 POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
1	- ADVENTISTA	-INST.ADVENTISTA DE JUBILAÇÃO E ASSISTÊNCIA -CONFEDERAÇÃO DAS UNIÕES BRASILEIRAS DA IGREJA ADVENTISTA DO SÉTIMO DIA	P
2	- AEROS	-INSTITUTO VASP DE SEGURIDADE SOCIAL-AEROS -VIAÇÃO AÉREA SÃO PAULO S/A - VASP	P
3	- AERUS	-INSTITUTO AERUS DE SEGURIDADE SOCIAL -CRUZEIRO DO SUL S/A-TRANSBRASIL S/A-VARIG S/A	P
4	- AGROS	-AGROS-INST.UNIVERSIDADE FED.VIÇOSA DE SEGURI- DADE SOCIAL -FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA	E
5	- ALPHA	-FUNDAÇÃO ALPHA DE PREVID. E ASSIST.SOCIAL -COMPANHIA DE HABITAÇÃO POPULAR DE CURITIBA- COHAB E OUTROS	E
6	- ARSAPREV	-INSTITUTO ARSA DE SEGURIDADE SOCIAL-ARSAPREV -ARSA-AEROPORTOS DO RIO DE JANEIRO S/A	E
7	- ARUS	-ARUS-FUNDAÇÃO ARACRUZ DE SEGURIDADE SOCIAL -ARACRUZ CELULOSE S/A E OUTROS	P
8	- ATLANTIC	-ATLANTIC-SOCIEDADE PREVIDENCIÁRIA -CIA.ATLANTIC DE PETRÓLEO E EMP.CARIOCA DE PRODS.QUÍMICOS S/A-EMCA	P
9	- ATILIO	-FUNDAÇÃO ATILIO FRANCISCO XAVIER FONTANA -SADIA CONCORDIA S/A IND.COM E OUTRAS EMPRE- SAS DO GRUPO SADIA	P
10	- AVELINO	-FUNDAÇÃO AVELINO VIEIRA -BANCO BAMERINDUS DO BRASIL S/A	P
11	- BANDEPREV	-BANDEPREV-BANDEPE PREVIDÊNCIA SOCIAL -BANCO DO ESTADO DE PERNAMBUCO S/A	E
12	- BANESES	-FUNDAÇÃO BANESTES DE SEGURIDADE SOCIAL - BANESES -BANCO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO S/A, BANES TES SEGUROS S/A E OUTROS	E
13	- BANORTE	-BANORTE-FUND.MANOEL BAPTISTA DA SILVA DE SEGURIDADE SOCIAL -BANCO NACIONAL DO NORTE S/A - BANORTE	P

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
 E = ESTATAL

## ANEXO I (CONT.)

## ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA

POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
14	- BANRISUL	-FUNDAÇÃO BANRISUL DE SEGURIDADE SOCIAL -BANCO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL S/A	E
15	- BP	-INSTITUTO BP -UNIBANCÓ - UNIÃO DE BANCOS BRASILEIROS S/A	P
16	- BRAHMA	-INSTITUTO BRAHMA DE SEGURIDADE SOCIAL -COMPANHIA CERVEJARIA BRAHMA	P
17	- BRASILETROS	-FUNDAÇÃO CERJ DE SEGURIDADE SOCIAL - BRA- SILETROS -CIA. DE ELETRICIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - CERJ	E
18	- BRASILIGHT	-FUNDAÇÃO DE SEGURIDADE SOCIAL BRASILIGHT -LIGHT-SERVIÇOS DE ELETRICIDADE S/A	E
19	- BRASPREV	-BRASPREV-FUNDAÇÃO BRASCAN DE PREVIDÊNCIA -BRASCAN ADM.E INVEST.LTDA E VEREDA S/A DTVM	P
20	- CABEA	-CAIXA DE ASSIST.FUNCIONÁRIOS DO B.DO ESTADO DO AMAZONAS S/A -BANCO DO ESTADO DO AMAZONAS S/A	E
21	- CABEC	-CAIXA DE PREVIDÊNCIA PRIVADA DO BANCO DO ESTADO DO CEARÁ -BANCO DO ESTADO DO CEARÁ S/A-BEC	E
22	- CAEMI	-FUNDAÇÃO CAEMI-DE PREVIDÊNCIA SOCIAL -COMPANHIA AUXILIAR DE EMPRESAS DE MINERAÇÃO CAEMI	P
23	- CAFBEP	-CAIXA DE PREVID.E ASSIST.FUNC.DO BANCO DO ESTADO DO PARÁ S/A -BANCO DO ESTADO DO PARÁ S/A	E
24	- CAPAF	-CAIXA DE PREV.E ASSIST.FUNCIONÁRIOS B.DA AMAZÔNIA S/A - CAPAF -BANCO DA AMAZÔNIA S/A-BASA	E
25	- CAPEB	-CAIXA DE ASSIST.E PREVIDÊNCIA DOS FUNC. DO BANDECE - CAPEB -BANDECE-BCO. DE DESENVOLVIMENTO DO CEARÁ S/A	E
26	- CAPEF	-CAIXA DE PREV.FUNC.B.DO NORDESTE DO BRASIL- CAPEF - BANCO DO NORDESTE DO BRASIL S/A	E

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
E = ESTATAL

## ANEXO 1(CONT.)

## ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA

POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
27	CAPESESP	-CAIXA DE PECÚLIOS ASSIST. E PREV. SERV. FUND. SERVIÇ. SAÚDE PUB. -FUNDAÇÃO SERVIÇOS DE SAÚDE PÚBLICA	E
28	CAPOF	-CAIXA DE ASSIST. E APOS. DOS FUNCIONÁRIOS DO B. EST. DO MARANHÃO -BANCO DO ESTADO DO MARANHÃO S/A	E
29	CASFAM	-CAIXA ASSIST. FÁBIO DE ARAÚJO MOTA DOS SERV. SESI E OUTROS -SESI SENAI FIEMG E IEL	E
30	CBS	-CAIXA BENEFICENTE EMPR. CIA. SIDERÚRGICA NA- CIONAL - CBS -COMPANHIA SIDERÚRGICA NACIONAL	E
31	CELOS	-FUNDAÇÃO CELESC DE SEGURIDADE SOCIAL-CELOS -CENTRAIS ELÉTRICAS DE SANTA CATARINA S/A	E
32	CELPOS	-FUNDAÇÃO CELPE DE SEGURIDADE SOCIAL - CELPOS -CIA. DE ELETRICIDADE DE PERNAMBUCO-CELPE	E
33	CENTRUS BC	-FUNDAÇÃO BANCO CENTRAL DE PREVIDÊNCIA PRI- VADA - CENTRUS -BANCO CENTRAL DO BRASIL	E
34	CENTRUS MT	-CENTRUS-INSTITUTO MATO GROSSO DE SEGURIDADE SOCIAL -BANCO DO ESTADO DE MATO GROSSO S/A	E
35	CEPLUS	-CEPLUS-INSTITUTO CELPAC DE SEGURIDADE SOCIAL -COMISSÃO EXECUTIVA DO PLANO DA LAVOURA CACA- EIRA - CEPLAC	E
36	CERES	-CERES-FUND. SEG. SOCIAL DOS SISTEMAS EMBRAPA- EMBRATER -EMBRAPA E EMBRATER	E
37	CESP	-FUNDAÇÃO CESP -CENTRAIS ELÉTRICAS DE SÃO PAULO - CESP	E
38	CIBRIUS	-CIBRIUS-INSTITUTO CIBRAZEM DE SEGURIDADE SOCIAL -CIA. BRASILEIRA DE ARMAZENAMENTO-CIBRAZEM	E
39	CIFRÃO	-CIFRÃO-FUNDAÇÃO DE PREVIDÊNCIA DA CASA DA MOEDA DO BRASIL -CASA DA MOEDA DO BRASIL	E

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
E = ESTATAL

## ANEXO1(CONT.)

ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA  
 POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
40	COMIND	-FUNDAÇÃO COMIND -BANCO DO COMÉRCIO E INDÚSTRIA DE SÃO PAULO S/A E OUTROS	P
41	COMSHELL	-COMSHELL-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -SHELL BRASIL S/A (PETROLEO)	P
42	COOPERCOTIA	-COOPERCOTIA-PREVIDÊNCIA PRIVADA SOCIEDADE CIVIL -COOPERATIVA AGRÍCOLA DE COTIA-COOPERATIVA CENTRAL	P
43	COPEL	-FUNDAÇÃO COPEL DE PREVIDÊNCIA E ASSISTÊNCIA SOCIAL -COMPANHIA PARAENSE DE ENERGIA ELÉTRICA-COPEL	E
44	CORSAN	-FUNDAÇÃO CORSAN DOS FUNC.DA CIA.RIOGRANDENSE DE SANEAMENTO -CIA.RIOGRANDENSE DE SANEAMENTO-CORSAN	E
45	CREDIREAL	-CREDIREAL-ASSOC.PREVID.SOCIAL COMPLEMENTAR -BANCO DE CRÉDITO REAL DE MG S/A E OUTRAS EMPRESAS DO GRUPO	P
46	DERMINAS	-DERMINAS-SOCIEDADE CIVIL DE SEGURIDADE SOCIAL -DEPTO.ESTRADAS E RODAGENS ESTADO MINAS GERAIS	E
47	DESBAN	-DESBAN-FUNDAÇÃO BDMG DE SEGURIDADE SOCIAL -BANCO DO DESENVOLVIMENTO DE MINAS GERAIS	E
48	DU PONT	-SOCIEDADE PREVIDENCIÁRIO DU PONT DO BRASIL -DU PONT DO BRASIL S/A	P
49	DURATEX	-FUNDAÇÃO DURATEX -DURATEX S/A IND. E COM., DURATEX FLORESTAL S/A E OUTROS	P
50	ECONOMUS	-ECONOMUS - INSTITUTO DE SEGURIDADE SOCIAL -CEESP-CAIXA ECONÔMICA DO ESTADO DE SÃO PAULO	E
51	ECOS	-FUNDAÇÃO DE SEGURIDADE SOCIAL DO BANCO ECONÔ MICO S/A-ECOS -BANCO ECONÔMICO S/A E OUTROS	P
52	ELETRA	-ELETRA-FUNDAÇÃO CELG SEGUROS E PREVIDÊNCIA -CELG-CENTRAIS ELÉTRICAS DE GOIÁS S/A	E

FONTE: BACEN/DECON/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
 E = ESTATAL

## ANEXO I (CONT.)

ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA  
POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
53	- ELETROCEEE	-FUNDAÇÃO CEEE SEGURIDADE SOCIAL-ELETROCEEE -CEEE-CIA. ESTADUAL DE ENERGIA ELÉTRICA-RS	E
54	- ELETROS	-FUNDAÇÃO ELETROBRÁS DE SEGURIDADE SOCIAL- ELETROS -CENTRAIS ELÉTRICAS BRASILEIRAS S/A-ELETROBRAS	E
55	- ELOS	-FUNDAÇÃO ELETROSUL DE PREV. E ASSIST. SOCIAL- ELOS -CENTRAIS ELÉTRICAS DO SUL DO BRASIL S/A- ELETROSUL	E
56	- FACEAL	-FUNDAÇÃO CEAL DE ASSISTÊNCIA SOCIAL E PREVI- DÊNCIA - FACEAL -COMPANHIA DE ELETRICIDADE DE ALAGOAS-CEAL	E
57	- FACEB	-FACEB-FUNDAÇÃO DE ASSISTÊNCIA DOS EMPREGADOS DA CEB -CIA. DE ELETRICIDADE DE BRASÍLIA-CEB	E
58	- FACEPI	-FUNDAÇÃO CEPISA DE SEGURIDADE SOCIAL-FACEPI -CENTRAIS ELÉTRICAS DO PIAUÍ S/A-CEPISA	E
59	- FACHESF	-FUNDAÇÃO CHESF DE ASSISTÊNCIA E SEGURIDADE SOCIAL-FACHESF -CIA. HIDROELÉTRICA DO SÃO FRANCISCO-CHESF	E
60	- FAELBA	-FUNDAÇÃO COELBA DE ASSISTÊNCIA E SEGURIDADE SOCIAL-FAELBA -COMPANHIA DE ELETRICIDADE EST. BAHIA-COELBA	E
61	- FAELCE	-FUNDAÇÃO COELCE DE SEGURIDADE SOCIAL-FAELCE -COMPANHIA DE ELETRICIDADE DO CEARÁ-COELCE	E
62	- FAPA	-FUNDAÇÃO ASSISTENCIAL E PREVIDENCIÁRIA DA ACARPA-FAPA -ASSOC. CRÉD. ASSIST. RURAL DO PARANÁ-ACARPA	E
63	- FAPERS	-FUND. ASSIST. E PREVID. EXTENSÃO RURAL RGSUL -ASSOC. SULINA CRÉD. E ASSIST. RURAL - ASCAR	E
64	- FAPES	-FUND. ASSIST. E PREVID. SOCIAL BNDES-FAPES -B. NAC. DESENV. ECONÔMICO E SOCIAL-BNDES/OUTROS	E
65	- FAPIEB	-FUNDO APOS. PENSÕES IGR. EPISCOPAL BRASIL-FAPIEB -IGREJA EPISCOPAL DO BRASIL	P

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
E = ESTATAL

## ANEXO1(CONT.)

ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA  
 POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
66	FASASS	-FUND.AMÉRICA DO SUL ASSIST.SEGURID.SOCIAL- FASASS -BANCO AMÉRICA DO SUL	P
67	FASBEMGE	-FASBEMGE-FUND.BEMGE DE SEGURIDADE SOCIAL -BANCO DO ESTADO DE MINAS GERAIS S/A-BEMGE	E
68	FCRT	-FUNDAÇÃO DOS EMPREGADOS CIA.RIOGRANDENSE DE TELECOMUNICAÇÕES -COMPANHIA RIOGRANDENSE TELECOMUNICAÇÕES-CRT	E
69	FEMCO	-FUNDAÇÃO COSIPA DE SEGURIDADE SOCIAL-FEMCO -CIA.SIDERÚRGICA PAULISTA-COSIPA E OUTROS	E
70	FIOPREV	-INST.OSWALDO CRUZ SEGURID.SOCIAL-FIOPREV -FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ	E
71	FIPECQ	-FIPECQ-FUND.PREV.PRIVADA DOS EMPREGADOS DA FINEP, IPEA E CNPQ -IPEA, CNPQ E FINEP	E
72	FORLUZ	-FUNDAÇÃO FORLUMINAS DE SEGURID.SOCIAL-FORLUZ -CENTRAIS ELÉTRICAS MINAS GERAIS-CEMIG	E
73	FPM	-FUNDO DE PENSÃO MONTREALBANK -BCO.ANTº QUEIROZ S/A E RENASA S/AINDS.QUÍMIC.	P
74	FRANCISCO	-FUNDAÇÃO FRANCISCO CONDE -BCO.CRÉD.NACIONAL S/A E CIA.MERC.FCO. CONDE	P
75	FRANPREV	-FRANPREV PREVIDÊNCIA PRIVADA -BANCO FRANCÊS E BRASILEIRO S/A E OUTROS	P
76	FUCAE	-FUND.DÓS FUNCIONÁRIOS DA CAIXA ECONÔMICA ESTA DUAL DO R.G.SUL -CAIXA ECONÔMICA ESTADUAL DO RIO GRANDE DO SUL	E
77	FUCAP	-FUNDO DE PENSÃO CAPEMI-FUCAP -CAPEMI SEGURIDADE S/A-CAPESA	P
78	FUNAPEME	-FUNAPEME-FUNDO DE PENSÃO EMPRESARIAL -FUNDO MÚLTIPLO	P
79	FUNBEP	-FUNBEP-FUNDAÇÃO BANESTADO DE SEGURID.SOCIAL -BANCO DO ESTADO DO PARANÁ S/A E OUTROS	E

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
 E = ESTATAL

## ANEXO 1 (CONT.)

## ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA

POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
80	- FUNCEF	-FUNDAÇÃO DOS ECONOMIÁRIOS FEDERAIS-FUNCEF -CAIXA ECONÔMICA FEDERAL	E
81	- FUNDASEMG	-FUND.SEGURID.SOCIAL MINAS GERAIS-FUNDASEMG -CIA.SENEAMENTO MINAS GERAIS-COPASA-MG/OUTROS	E
82	- FUNDEXCIBRA	-FUNDEXCIBRA-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -EXCIBRA-EXPANSÃO COM.EINDUSTRL.BRASIL.LTDA.	P
83	- FUNGRAPA	-FUND.GRÃO-PARÁ DE PREVID.E ASSIST.SOCIAL -CENTRAIS ELÉTRICAS DO PARÁ S/A-CELPA	E
84	- FUSAN	-FUNDAÇÃO SANEPAR PREVID.ASSIST.SOCIAL-FUSAN -COMPANHIA SANEAMENTO DO PARANÁ-SANEPAR	E
85	- FUSESC	-FUNDAÇÃO CODESC SEGURIDADE SOCIAL-FUSESC -CIA.DESENV.EST.STA. CATARINA - CODESC	E
86	- GEIPREV	-INST.GEIPOT DE SETURIDADE SOCIAL - GEIPREV -EMPRESA BRASILEIRA PLANEJ.TRANSPORTES-GEIPOT	E
87	- GRAVUS	-INST.TAPECAR DE SEGURIDADE SOCIAL-GRAVUS -TAPECAR GRAVAÇÕES S/A	P
88	- IBC	-CAIXA DE ASSIST.SERVS.INST.BRASILEIRO DO CAFÉ -INSTITUTO BRASILEIRO DO CAFÉ	E
89	- IBM	-FUNDAÇÃO PREVIDENCIÁRIA IBM -IBM DO BRASIL-INDÚSTRIA DE MÁQUINAS E SERVS.	P
90	- IJMS	-INST.JOÃO MOREIRA SALLES - IJMS -UNIBANCO-UNIÃO DE BANCOS BRASILEIROS S/A	P
91	- IMSS	-INSTITUTO MONGERAL DE SEGURIDADE SOCIAL -MONGERAL-MONTEPIO GERAL DE ECONOMIA	P
92	- ISBRE	-INSTITUTO SEGURID.SOCIAL DO BRDE-ISBRE -BCO.REGIONAL DESENVOLVIMENTO EXTREMO SUL-BRDE	E
93	- ITAUBANCO	-FUNDAÇÃO ITAUBANCO -BANCO ITAÚ S/A	P
94	- JOHNSON E JOHNSON	-JOHNSON E JOHNSON-SOCIEDADE PREVIDENCIÁRIA -JOHNSON E JOHNSON S/A	P
95	- MAC LAREN	-FUNDAÇÃO MAC LAREN -MAC LAREN ESTALEIROS E SERVS.MARÍTIMOS S/A E OUTROS	P

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA

E = ESTATAL

## ANEXO I(CONT.)

ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA  
POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SÍGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
96	- MANNESMANN	-FUNDAÇÃO MANNESMANN -MANNESMANN S/A	P
97	- MÁRIO COUTINHO	-FUNDAÇÃO MÁRIO COUTINHO -SOTAVE S/A SOTAVE CENTRO OESTE S/A E OUTROS	P
98	- METRUS	-METRUS-INSTITUTO DE SEGURIDADE SOCIAL -COMPANHIA DO METROPOLITANO DE SÃO PAULO	E
99	- NESTLÉ	-FUNDAÇÃO NESTLÉ DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -CIA.INDL.E COML. BRAS.PROD.ALÍM.NESTLÉ/OUTROS	P
100	- NORPREV	-NORPREV-ASSOCIAÇÃO NOROESTE DE PREVIDÊNCIA -BANCO NOROESTE DO ESTADO DE SÃO PAULO S/A	P
101	- NUCLEOS	-INSTITUTO NUCLEBRAS DE SEGURID.SOCIAL-NUCLEOS -EMPRESAS NUCLEARES BRASILEIRAS-NUCLEBRAS	E
102	- ORIUS	-ORIU ASSOC.ORION DE SEGURIDADE SOCIAL -ORION S/A	P
103	- PARSE	-INST.SEGURID.SOC. BCO.DESENV.PARANÁ-PARSE -BANCO DE DESENVOLVIMENTO DO PARANÁ S/A-BADEP	E
104	- PETROS	-FUNDAÇÃO PETROBRÁS DE SEGURID.SOCIAL-PETROS -PETRÓLEO BRASILEIRO S/A-PETROBRÁS	E
105	- PORTUS	-INSTITUTO PORTOBRÁS SEGURID.SOCIAL-PORTUS -EMPRESA DE PORTOS DO BRASIL S/A-PORTOBRAS	E
106	- POSTALIS	-POSTALIS-INST.SEG.SOCIAL CORREIOS/TELÉGRAFOS -EMPR.BRASILEIRA CORREIOS E TELÉGRAFOS-ECT	E
107	- PREBEG	-PREBEG-CAIXA DE PREV.FUNC.B.ESTADO DE GOIÁS -BANCO DO ESTADO DE GOIÁS S/A E OUTROS	E
108	- PRECE	-PRECE - PREVIDÊNCIA DA CEDAE -COMPANHIA ESTADUAL DE ÁGUA E ESGOTO-RJ	E
109	- PRESIFEISC	-SOC.PREV.COMPLEM.SIST.FEDER.IND.STA.CATARINA -FEDERAÇÃO IND.SATA CATARINA E OUTROS	P
110	- PREVDATA	-SOC.PREVID.COMPLEM.DA DATAPREV-PREVDATA -EMPR.PROCESSAMENTO DADOS PREVID.SOC-DATAPREV	E
111	- PREVEME	-SOCIEDADE PREVIDENCIÁRIA 3M - PREVEME -3M DO BRASIL LTDA.	P

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA

E = ESTATAL

## ANEXO 1(CONT.)

## ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA

POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD. SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
112 - PREVHAB	-ASSIT.PREV.EMPR.BCO.NACIONAL HAB.-PREVHAB -BANCO NACIONAL DA HABITAÇÃO - BNH	E
113 - PREVI	-CAIXA DE PREVIDÊNCIA FUND.BANCO DO BRASIL -BANCO DO BRASIL S/A	E
114 - PREVIARMCO	-PREVIARMCO-SOCIEDADE PREVIDENCIÁRIA -ARMCO DO BRASIL S/A	P
115 - PREVIBAN	-PREVIDÊNCIA PRIVADA PARAIBAN-PREVIBAN -BCO.ESTADO DA PARAÍBA S/A-PARAIBAN E OUTROS	E
116 - PREVIBAYER	-PREVIBAYER-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -BAYER DO BRASIL S/A	P
117 - PREVICAIXA	-FUND.SEG.SOCIAL CAIXA ECONÔMICA EST.M.GERAIS -CAIXA ECONÔMICA DO ESTADO DE MINAS GERAIS	E
118 - PREVID EXXON	-PREVID EXXON-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -ESSO BRASILEIRA PETRÓLEO S/A E SOC.TEC.IND. LUBRIF.SOLUTEC S/A	P
119 - PREVIGEL	-PREVIGEL-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -INDÚSTRIAS GESSY LERVER LTDA. E OUTROS	P
120 - PREVIRB	-FUND.PREV.SERV.INST.RESSEGUROS DO BRASIL - PREVIRB -INSTITUTO DE RESSEGUROS DO BRASIL - IRB	E
121 - PREVISÃO	-PREVISÃO ASSOCIAÇÃO DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -BRASIL CIA.DE SEGUROS GERAIS ETERNIT S/A	P
122 - PREVISCANIA	-PREVISCANIA-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -SAAB-SCANIA DO BRASIL S/A	P
123 - PREVI-BANERJ	-CAIXA DE PREVID. DOS FUNCION. DO SISTEMA BANERJ/PREVI-BANERJ -BANCO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BANERJ	E
124 - PREVI-TOKYO	-PREVI-TOKYO SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -BANCO DE TOKYO S/A	P
125 - PREVUNIÃO	-PREVUNIÃO-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -ELETRO MANGANÊS LTDA.FUNGSTÊNIO BRASIL MIN. MET.LTDA. E OUTROS	P

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA

E = ESTATAL

## ANEXO 1(CONT.)

ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA  
POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
126	PRODUBAN	-FUNDAÇÃO PRODUBAN -BANCO DO ESTADO DE ALAGOAS S/A	E
127	PROMON	-FUNDAÇÃO PROMON DE PREVIDÊNCIA SOCIAL -PROMON ENGENHARIA S/A	P
128	PSS	-PSS-ASSOCIAÇÃO PHILIPS DE SEGURIDADE SOCIAL -ORGANIZAÇÃO PHILIPS BRASILEIRA	P
129	REAL GRANDEZA	-REAL GRANDEZA-FUND.PREVID.E ASSIST.SOCIAL -FURNAS-CENTRAIS ELÉTRICAS S/A	E
130	REFER	-FUNDAÇÃO REDE FERROVIÁRIA SEGURID.SOC.-REFER -REDE FERROVIÁRIA FEDERAL S/A	E
131	RHODIA	-INSTITUTO RHODIA DE SEGURIDADE SOCIAL -RHODIA S/A	P
132	SANIUS	-FUND.SABESP SEGURID.SOCIAL - SANIUS -CIA.SANEAMENTO BÁSICO EST.SÃO PAULO-SABESP	E
133	SÃO BERNARDO	-SÃO BERNARDO-ASSOCIAÇÃO PREVIDÊNCIA PRIVADA -BRASILIT S/A	P
134	SÃO FRANCISCO	-FUNDAÇÃO S.FRANCISCO DE SEGURIDADE SOCIAL -CIA.DESENVOLV.VALE SÃO FRANCISCO-CODEVASF	E
135	SÃO RAFAEL	-SÃO RAFAEL-SOCIEDADE DE PREVIDÊNCIA PRIVADA -XEROX DO BRASIL S/A E OUTRAS	P
136	SERGUS	-SERGUS-INST.BANESE DE SEGURIDADE SOCIAL -BANCO DO ESTADO DE SERGIPE S/A	E
137	SERPROS	-SERPROS-INSTITUTO SERPRO DE SEGURIDADE SOCIAL -SERV.FED.PROCESSAMENTO DE DADOS - SERPRO	E
138	SIAS	-SOCIED.IBGEANA ASSIST. E SEGURIDADE - SIAS -FUNDAÇÃO IBGE	E
139	SILIUS	-FUND.SILOS E ARMAZENS DE SEGURID.SOCIAL-SILUS -CIA.ESTADUAL DE SILOS E ARMAZENS-CESA	E
140	SISTEL	-FUNDAÇÃO TELEBRÁS DE SEGURIDADE SOCIAL-SISTEL -TELECOMUNICAÇÕES BRASILEIRAS S/A-TELEBRÁS	E
141	STEIO	-STEIO-INSTITUTO STEA DE SEGURIDADE SOCIAL -STEA-SERV.TÉCNICOS ESTATÍSTICA E ATUÁRIA LTDA	P

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
E = ESTATAL

## ANEXO 1(CONT.)

ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA PRIVADA  
 POSIÇÃO EM 31.03.85

ORD.	SIGLA	ENTIDADE/PATROCINADOR	TIPO(*)
142	- SULBRASILEIRO	-SULBRASILEIRO-INSTITUTO DE SEGURIDADE SOCIAL -BANCO SUL BRASILEIRO S/A	E
143	- TELOS	-TELOS-FUNDAÇÃO EMBRATEL DE SEGURIDADE SOCIAL -EMPRESA BRASILEIRA TELECOMUNICAÇÕES-EMBRATEL	E
144	- TREVO	-TREVO-INST.BANDEIRANTES SEGURIDADE SOCIAL -BANCO BANDEIRANTES S/A	P
145	- ULTRAPREV	-ULTRAPREV-ASSOCIAÇÃO PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR -COMPANHIA ULTRAGAZ S/A E OUTROS	P
146	- URANUS	-URANUS-FUNDAÇÃO DE SEGURIDADE SOCIAL -COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR-CNEN	E
147	- USIMINAS	-CAIXA DOS EMPREGADOS DA USIMINAS -USINAS SIDER.DE MINAS GERAIS S/A-USIMINAS	E
148	- VALIA	-FUND.VALE DO RIO DOCE DE SEGURID.SOCIAL-VALIA -COMPANHIA VALE DO RIO DOCE	E
149	- VAN LEER	-SOCIEDADE PREVIDENCIÁRIA VAN LEER -VAN LEER EMBALAGENS INDS. DO BRASIL LTDA	P
150	- VICENTE	-CAIXA DE ASSISTÊNCIA VICENTE ARAÚJO -GRUPO FINANCEIRO MERCANTIL DO BRASIL	P
151	- VISIUS	-VISIUS-INSTITUTO BOAVISTA DE SEGURID.SOCIAL -BANCO BOAVISTA S/A	P
152	- VOLKSWAGEN	-FUNDAÇÃO VOLKSWAGEN -VOLKSWAGEN DO BRASIL S/A	P

FONTE: BACEN/DECAD/DICON

NOTA: (\*) P = PRIVADA  
 E = ESTATAL

ANEXO 2PRINCIPAIS PROCEDIMENTOS NOS CÁLCULOS ATUARIAIS ADOTADOS EM 31.12.85I. CÁLCULO DA COMPLEMENTAÇÃO DE APOSENTADORIA - BENEFÍCIOS A CONCEDER

## 1. CRITÉRIOS UTILIZADOS:

- a) o salário do participante corresponde ao somatório de todas as parcelas componentes dos seus proventos mensais,
- b) momento provável da aposentadoria:
- participantes admitidos antes de 01.01.78: aos 30 anos de contribuição para a Previdência Social;
  - participantes admitidos após 01.01.78: aos 30 anos de contribuição para a Previdência Social e 55 anos de idade;
- c) teto do salário de contribuição para a Previdência Social:
- TSC = Cr\$ 12.000.000 (20 salários-mínimos).

## 2. DICIONÁRIO DE VARIÁVEIS:

- mVT = menor valor teto do salário de benefício da Previdência Social = Cr\$ 4.556.000;
- MVT = maior valor teto do salário de benefício da Previdência Social = Cr\$ 9.112.000;
- CAP = valor da Complementação de Aposentadoria anual da EFPP;
- I = valor da aposentadoria do INPS;
- SB = Salário de Benefício da Previdência Social = 0,85 do salário de contribuição para a Previdência Social;
- S = Salário do participante na data provável da aposentadoria;
- n = número de contribuições mensais recolhidas à EFPP até a data provável da aposentadoria;
- $n_1$  = número de anos contados de 1974 (alteração do teto do salário de contribuição para a Previdência Social, de 10 para 20 salários-mínimos) até o ano provável da aposentadoria;
- $n_2$  = número de anos de contribuição para a Previdência Social.

ANEXO 2 (CONT.)

## 3. CÁLCULO DO VALOR DA APOSENTADORIA DO INPS (I):

## 3.1. Por tempo de Serviço

a)  $SB < mVT$ 

HOMEM :  $I = SB \times 0,8$

MULHER:  $I = SB \times 0,95$

b)  $mVT \leq SB \leq MVT$ 

HOMEM :  $I = mVT \times 0,8 + (SB - mVT) \times n_1/30$

MULHER:  $I = mVT \times 0,95 + (SB - mVT) \times n_1/30$

c)  $SB > MVT$ 

HOMEM :  $I = mVT \times 0,8 + (MVT - mVT) \times n_1/30$

MULHER:  $I = mVT \times 0,95 + (MVT - mVT) \times n_1/30$

## 3.2. Por invalidez (não há distinção de sexo)

a)  $SB < mVT$ 

$I = SB \times (0,7 + n_2/100)$

b)  $mVT \leq SB \leq MVT$ 

$I = mVT \times (0,7 + n_2/100) + (SB - mVT) \times n_1/30$

c)  $SB > MVT$ 

$I = mVT \times (0,7 + n_2/100) + (MVT - mVT) \times n_1/30$

## 4. CÁLCULO DO VALOR DA COMPLEMENTAÇÃO DE APOSENTADORIA (CAP):

$CAP = (S - I) \times 13 \times n/360$

II: CÁLCULO DO COMPROMISSO MÉDIO FAMILIAR  $H_x^{(12)}$ 

## 1. CRITÉRIOS UTILIZADOS:

a) os dependentes foram classificados em:

- Beneficiários Vitalícios;
- Beneficiários Temporários (fazem jus aos benefícios até completarem 21 anos de idade).;

b) a cota familiar é detida pelo beneficiário vitalício, ou, na falta deste, pelo beneficiário temporário mais jovem

## 2. DICIONÁRIO DE VARIÁVEIS:

 $a_y^{(12)}$  = valor atual de uma renda unitária vitalícia; $a_{21-z}^{(12)}$  = valor atual de uma renda temporária;

ANEXO 2 (CONT.)

y = idade de beneficiário vitalício;

z = idade de beneficiário temporário.

3. CÁLCULO DE  $H_x^{(12)}$ :

a) Cota Familiar:

- para dependentes vitalícios:  $H_1 = 0,5 \times a_y^{(12)}$ , ou

- para dependentes temporários:  $H_1 = 0,5 \times a_{\overline{21-z}|}^{(12)}$

b) Cotas Individuais (até 5 dependentes):

$$H_2 = 0,1 \times a_y^{(12)}$$

$$H_3 = 0,1 \times a_{\overline{21-z}|}^{(12)}$$

c) Compromisso Médio:

$$H_x^{(12)} = H_1 + H_2 + H_3$$