

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

RAFAEL DE GODOY OLIVEIRA ANDRADE

**RELEVÂNCIA DAS DIFERENÇAS ENTRE CONTRATOS FUTUROS E A TERMO:
O CASO DO TRIO**

SÃO PAULO
2015

**RELEVÂNCIA DAS DIFERENÇAS ENTRE CONTRATOS FUTUROS E A TERMO:
O CASO DO TRIO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de Concentração:
Economia.

Orientador:
Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

SÃO PAULO
2015

Andrade, Rafael de Godoy Oliveira.

Relevância das Diferenças entre Contratos Futuros e a Termo: O Caso do *Trio* / Rafael de Godoy Oliveira Andrade – 2014.

55 f.

Orientador: Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

Dissertação (MPFE) – Escola de Economia de São Paulo.

1. Câmbio. 2. Contratos futuros. 3. Monte Carlo, Método de. 4. Hedging (Finanças). I. Pinto, Afonso de Campos. II Dissertação (MPFE) – Escola de Economia de São Paulo. III. Título.

CDU 336.745

RAFAEL DE GODOY OLIVEIRA ANDRADE

**RELEVÂNCIA DAS DIFERENÇAS ENTRE CONTRATOS FUTUROS E A TERMO:
O CASO DO TRIO**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia.

Área de Concentração:

Economia

Data da aprovação:

___/___/___

Banca examinadora:

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

(Orientador)

EESP - FGV

Prof. Dr. Roberto Barbosa Cintra

EESP - FGV

Prof. Dr. Marcos Eugênio da Silva

FEA - USP

RESUMO

Visando estudar as diferenças entre contratos futuros e contratos a termo no mercado cambial brasileiro, este trabalho foca no contrato de Dólar Futuro negociado na BM&FBOVESPA que, para vencimentos sem liquidez, é marcado a mercado pelo preço teórico dos contratos a termo. Uma simulação por Monte Carlo de uma carteira *hedgeada* contendo contratos de Dólar Futuro, DI Futuro e DDI Futuro mostra claramente que essa metodologia de marcação a mercado deveria ao menos ser revista.

Palavras-chave: Contratos futuros, Contratos a termo, Monte Carlo, Carteira *hedgeada*

ABSTRACT

For the purpose of studying the differences between futures and forward contracts in the Brazilian currency market, this dissertation focus on the futures contracts traded at BM&FBOVESPA where, for maturities without liquidity, the mark to market is done using the theoretical price for forward contracts. A Monte Carlo simulation using a hedged portfolio comprising currency futures, DI futures and DDI futures clearly shows that this methodology should at least be reviewed.

Keywords: future contract, forward contract, Monte Carlo, hedged portfolio.

DEDICATÓRIA

Ao meu filho, Vitor, que está a caminho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus Pais e irmãos que sempre me deram todo suporte.

A minha esposa, Mariana, pela compreensão nas horas difíceis.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto, pelas ótimas sugestões e orientações ao longo deste trabalho.

Aos meus colegas de trabalho, em especial Daniel Tatsumi, pelas ótimas discussões sobre o tema deste estudo.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Contratos futuros de euro contra dólar na CME	13
Figura 2 - Contratos futuros dólar contra real mais longos na BM&FBOVESPA	14
Figura 3 - fator γ em relação ao prazo	37
Figura 4 – NDF vs Dólar Futuro estimado.....	42
Figura 5 – Histogramas das simulações de Monte Carlo	44
Figura 6 – Sensibilidade de V às volatilidades	46
Figura 7 – Sensibilidade de V às correlações	47
Figura 8 – Comparando <i>backtesting</i> com Monte Carlo	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Volatilidades e correlações históricas	39
Tabela 2 - Tamanho do erro de marcação a mercado	43

Sumário

1. Introdução.....	12
2. Revisão Bibliográfica	16
3. Aspectos Teóricos	19
3.1. Premissas.....	19
3.2. Notação	20
3.3. NDF	22
3.4. NDF com <i>reset</i> diário	23
3.5. Dólar Futuro.....	24
3.6. DI Futuro.....	25
3.7. DDI Futuro	26
3.8. Relação entre DI e DDI com o NDF com <i>reset</i> diário	27
3.9. <i>Trio</i>	28
3.10. Margem	32
3.11. Considerações Finais	32
4. Metodologia	34
4.1. Processos Estocásticos	34
4.2. Correlações	38
4.3. Dados	39
4.4. Análises de sensibilidade.....	40
4.5. Passo a Passo.....	40
5. Resultados.....	42
5.1. Diferencial entre o NDF e o Dólar Futuro	42
5.2. Análise de Dispersão	44
5.3. Sensibilidades.....	45
5.4. <i>Backtesting</i>	48
6. Conclusão.....	50
6.1. Propostas de Soluções	50
6.2. Possíveis Extensões.....	51
REFERÊNCIAS	52
APÊNDICE A.....	53

1. Introdução

As diferenças entre contratos futuros e contratos a termo são ao menos citadas por qualquer livro texto que se proponha a falar sobre derivativos (e.g. Hull (2009), Wilmott (2007) e Pina (2009)). Alguns simplesmente tratam os dois instrumentos como iguais, afirmando que a única diferença está no fato de contratos futuros terem ajustes diários, enquanto nos contratos a termo a movimentação financeira ocorre apenas no vencimento. Outros autores alertam que as diferenças não param nos ajustes diários, mas normalmente não entram em muitos detalhes sobre as relações afirmando que na prática os dois podem ser considerados como iguais.

Um dos livros sobre derivativos mais utilizados no mundo Hull (2009) trata brevemente da questão levantando o ponto que em um mundo com taxas de juros constantes, ou pelo menos determinísticas, futuros e termos têm preços teóricos iguais. Todavia quando consideramos taxas de juros estocásticas, como é o caso no mundo real, os dois preços podem divergir. O autor chega a apontar que a relação depende da correlação do preço do ativo considerado com a taxa de juros, mas não explora em mais detalhes. Alguns artigos já trataram do assunto com profundidade como Cox, Ingersoll e Ross (1981), porém grande parte dos autores não entra muito no detalhe a respeito da diferença entre futuros e termos.

A razão pela qual a maioria dos autores internacionais não se preocupam muito com essa diferença é muito simples: na prática, essa diferença é irrelevante para os mercados que esses autores observam. Primeiramente já são raros os mercados em que são negociados tanto futuros quanto termos. Depois, quando isso ocorre, normalmente o prazo é curto e as taxas de juros são baixas, o que, como será mostrado, torna a diferença insignificante. Para citar um exemplo, em 7 de fevereiro de 2011, o contrato futuro mais longo já aberto de euro contra dólar negociado na Chicago Mercantile Exchange (CME) tinha vencimento em março de 2012, ou seja, pouco mais que um ano como mostra a Figura 1 a seguir.

Description	Last	Chg	Settle	Time	Bid	Ask	Open Int	Volume	Yest Settle
Mar11	1.3582s	0003		Close	575	575	196135	284488	3579
Jun11	1.3566s	0004		Close	550	567	4025	912	3562
Sep11	1.3545s	0006		Close	050	850	43		1.3539
Dec11	1.3522s	0009		Close			79		1.3513
Mar12	1.3499s	0012		Close			282		3487
Jun12	1.3476s	0015		Close					3461

Figura 1 - Contratos futuros de euro contra dólar na CME

Fonte: Bloomberg

A Figura 1 mostra os contratos futuros de euro contra dólar na CME em 7 de fevereiro de 2011. Pode-se observar que a liquidez se concentra no futuro mais curto e o contrato mais longo aberto é o março 2012.

No Brasil, a liquidez para os derivativos de dólar contra real também se encontra no primeiro futuro¹ da BM&FBOVESPA. Entretanto, existem contratos futuros abertos para prazos mais longos. Por exemplo, em 7 de fevereiro de 2011 já existiam contratos futuros abertos com vencimento em janeiro de 2021 na BM&FBOVESPA como mostra a Figura 2, ou seja, quase dez anos, além do fato que as taxas de juros aqui sempre foram altas quando comparadas com países desenvolvidos.

A Figura 2 mostra os contratos futuros de dólar contra real mais longos abertos na BM&FBOVESPA em 7 de fevereiro de 2011. Pode-se observar que existem contratos abertos até janeiro de 2021.

Os Termos não são negociados diretamente na BM&FBOVESPA, entretanto, será mostrado a seguir que utilizando dois futuros de juros negociados na bolsa, o DI Futuro e o DDI Futuro, ambos com mais contratos em aberto que o Dólar Futuro nos prazos mais longos, é possível replicar um termo.

¹ Dólar futuro mais curto, com vencimento no primeiro dia útil do mês seguinte.

Description	Last	Chg	Settle	Time	Bid	Ask	Open Int	Volume	Yest Settle
Jul13	2103.348s	+4.719		Close					2098.629
Oct13	2148.911s	+7.727		Close			1715		2141.184
Jan14	2189.298s	+7.861		Close			5185		2181.437
Apr14	2232.369s	+9.504		Close			670		2222.865
Jun14	2258.618s	+8.436		Close					2250.182
Jul14	2271.534s	+7.929		Close					2263.605
Oct14	2315.421s	+8.296		Close					2307.125
Jan15	2361.598s	+13.445		Close			630		2348.153
Apr15	2404.018s	+13.750		Close					2390.268
Jul15	2445.921s	+15.690		Close					2430.231
Oct15	2496.294s	+18.235		Close					2478.059
Jan16	2532.281s	+3.523		Close			6020		2528.758
Apr16	2576.365s	+5.198		Close					2571.167
Jul16	2624.786s	+2.618		Close					2622.168
Oct16	2670.401s	+6.479		Close					2663.922
Jan17	2714.563s	+10.118		Close			4000		2704.445
Apr17	2759.008s	+9.595		Close					2749.413
Jul17	2802.657s	+8.934		Close					2793.723
Oct17	2849.300s	+8.344		Close					2840.956
Jan18	2894.410s	+7.618		Close	2902.000	2902.000	3100	750	2886.792
Jan19	s	--		Close					
Jan21	3495.555s	+6.232		Close	3487.000	3487.000	4000	4000	3489.323

Figura 2 - Contratos futuros dólar contra real mais longos na BM&FBOVESPA

Fonte: Bloomberg

Esse exemplo serve para ilustrar que o mercado cambial brasileiro possui características únicas que podem tornar a diferença de preço entre futuros e termos extremamente relevante, esse tema torna-se ainda mais interessante quando leva-se em consideração que a BM&FBOVESPA atualmente não considera qualquer possível diferença e marca a mercado os contratos de Dólar Futuro mais longos pelo preço teórico do termo, obtido através dos preços de ajuste do DI Futuro e DDI Futuro.

Mostrar que essa premissa da BM&FBOVESPA apresenta problemas significa mostrar que todos os agentes de mercado que possuem posições em contratos de Dólar Futuro longos estão com suas posições marcadas de maneira não adequada, o que possivelmente pode comprometer as decisões tomadas por estes agentes. Além disso, existe um risco não desprezível para a própria bolsa, pois caso um desses agentes se torne inadimplente, a BM&FBOVESPA não conseguirá desfazer a posição com o resultado esperado, o que levaria a prejuízos para a própria bolsa.

Os principais objetivos deste trabalho são: (i) mostrar que essa questão de fato existe, e (ii) tentar estimar a diferença de preço entre o futuro e o termo. Para isso, será montada uma carteira teórica, balanceada diariamente, comumente conhecida

no mercado como *Trio*, que é composta por contratos de Dólar Futuro, DI Futuro e DDI Futuro, onde o DDI e o DI representam um termo vendido que tenta zerar os riscos gerados pelo Dólar Futuro comprado. Então, por meio de uma Simulação de Monte Carlo, foi estimado o valor esperado desta carteira; se a marcação atualmente feita pela BM&FBOVESPA estivesse correta, o resultado esperado desta carteira seria zero. Além disso, o trabalho também se propõe a analisar o efeito que mudanças nos parâmetros mais relevantes ao modelo têm sobre a diferença entre o preço teórico do Dólar Futuro e do termo (este último que é usado para marcar a mercado o Dólar Futuro).

Este trabalho está dividido em seis capítulos. Além dessa introdução, o capítulo dois trata da revisão bibliográfica, contextualizando o trabalho em relação aos estudos já realizados sobre o tema. No terceiro capítulo são apresentados os contratos derivativos utilizados no modelo, explica-se como é calculada e rebalanceada a carteira do *Trio*, e são feitas análises qualitativas visando esclarecer a razão da diferença entre os preços teóricos do futuro e do termo. O capítulo quatro apresenta a metodologia para a implementação do modelo, na qual são apresentadas as técnicas para a construção dos processos estocásticos e para o tratamento numérico por Monte Carlo. No capítulo cinco são apresentados os resultados da aplicação do modelo e o capítulo seis encerra com a conclusão do trabalho, sugestões de soluções para o problema e possíveis extensões.

2. Revisão Bibliográfica

As diferenças entre contratos futuros e a termo é um tema muito pouco abordado no meio acadêmico. No final dos anos 70, começo dos anos 80, foram escritos no exterior alguns poucos artigos sobre o tema, mas, com o passar do tempo, este tema ficou cada vez menos presente na literatura sobre derivativos. No Brasil não foram encontrados artigos sobre o tema.

Black (1976) apresenta a discussão sobre a relação entre futuros e termos chegando à conclusão de que são essencialmente equivalentes e por isso, teriam preços teóricos iguais. A conclusão de Black, apesar de correta, foi encontrada sob a hipótese de que as taxas de juros são constantes, o que retira do contexto a diferença fundamental entre futuros e termos.

Margrabe (1976) é um dos primeiros a destacar a importância das taxas de juros estocásticas na diferença entre futuros e termos. Seu trabalho encontra quais são as condições necessárias para que futuros e termos tenham preços iguais. Taxas de juros constantes são apontadas como condição suficiente, porém não necessária para que os preços coincidam.

Merton (1979) busca determinar qual é o sinal da diferença entre futuros e termos. Para isso, utiliza-se de um argumento de arbitragem em tempo discreto para o mercado de letras do Tesouro americano. Apesar de trabalhar apenas com o mercado de títulos americanos, os resultados obtidos no trabalho não apresentam perda de generalidade.

Cox, Ingersoll e Ross (1981) utilizam títulos que replicam perfeitamente os *payoffs* para futuros e termos, a fim de usar todo o instrumental disponível em finanças para a precificação de títulos e relacionar preços de futuros e termos. Apesar de serem derivadas várias relações importantes entre os preços de futuros e termos, não foi encontrado uma forma geral de relacionar estes preços. Os autores comentam também sobre um possível contrato que teria ajustes periódicos como o futuro, mas estes ajustes seriam no valor a mercado de um termo; este contrato, apesar de ser chamado diferentemente no texto, corresponde ao NDF com *reset* que tem um importante papel neste estudo.

Jarrow e Oldfield (1981), apesar de utilizarem uma abordagem um pouco diferente, chegam basicamente nas mesmas conclusões de Cox, Ingersoll e Ross (1981), focando na demonstração de que um futuro não é apenas um termo reescrito diariamente, como muitos artigos até hoje consideram. Na terminologia utilizada neste trabalho, eles mostram que o Dólar Futuro não é equivalente ao NDF com *reset*.

French (1983) usa as proposições de alguns artigos, em especial o de Cox, Ingersoll e Ross (1981), sobre a diferença entre futuros e termos e as compara com os preços de fato negociados nos mercados de cobre e prata. Enquanto as diferenças médias podem ser explicadas pelos modelos, o mesmo não ocorreu para diferenças dentro da amostra. Segundo os autores, isso se deve à dificuldade de obter dados precisos devido à baixa liquidez.

Duffie e Stanton (1992) derivam preços para derivativos continuamente reescritos utilizando difusão de Markov. Esse estudo complementa o trabalho de Cox, Ingersoll e Ross (1981), uma vez que o contrato futuro é um caso especial dos derivativos estudados por Duffie e Stanton.

No decorrer da pesquisa não foram encontrados trabalhos acadêmicos sobre a relação entre futuros e termos no mercado brasileiro. O que torna este fato mais curioso é o fato de que o mercado cambial brasileiro tem inúmeras características que torna essa diferença ainda mais acentuada que em outros mercados.

O Brasil tem uma das maiores taxas de juros do mundo e aqui será mostrado que quanto maior a taxa de juros, maior tenderá a ser a diferença entre futuros e termos. A BM&FBOVESPA possui contratos de Dólar Futuro de longo prazo abertos, haja vista que, em fevereiro de 2011 já havia contratos de Dólar Futuro com vencimento em janeiro 2021 abertos, o que é raramente encontrado em outros mercados. Além disso, na BM&FBOVESPA são negociados contratos de DDI Futuro e DI Futuro que, como será mostrado, podem ser usados para replicar um termo reescrito diariamente. Portanto, apenas usando contratos negociados na BM&FBOVESPA, é possível montar uma carteira que equivale a uma posição comprada em um futuro e vendida em um termo para um determinado vencimento, o que possibilita inúmeras simulações.

Este trabalho busca mostrar que futuros deveriam ser negociados a preços acima dos termos no mercado cambial brasileiro além de apontar discrepâncias, tanto na marcação a mercado como na chamada de margem, pela BM&FBOVESPA para os dólares futuros de longo prazo. O trabalho também estima a diferença entre futuros e termos neste mercado e ainda busca indicar o quão sensível é esta diferença aos parâmetros relevantes no modelo utilizando simulações de Monte Carlo.

No próximo capítulo são apresentados conceitos e premissas que servirão de suporte para a metodologia aqui desenvolvida.

3. Aspectos Teóricos

Neste capítulo serão brevemente explicados alguns conceitos que são fundamentais para o entendimento do trabalho como um todo, começando pelas premissas e notação utilizadas, passando pelas características dos derivativos envolvidos e terminando com algumas observações sobre as propriedades do *Trio*.

Na parte intermediária onde é feita a conexão entre os derivativos utilizados, o *Trio* e a diferença entre contratos futuros e a termo, a linha de raciocínio adotada foi a seguinte:

- Mostrar o que é um contrato a termo ou NDF e introduzir um derivativo muito semelhante chamado NDF com *reset* diário.
- Mostrar que o NDF com *reset* diário tem o mesmo preço teórico do NDF.
- Mostrar que é possível replicar um NDF com *reset* diário por meio de contratos de DI e DDI.
- Introduzir o *Trio* e mostrar que ele, na verdade, representa um Dólar Futuro casado com um NDF com *reset* diário em pontas opostas.

3.1. Premissas

O modelo aqui descrito faz as seguintes suposições:

- Não existem custos de transação.
- É possível comprar ou vender contratos de DI Futuro e DDI² Futuro nos preços de ajuste de cada dia afim de rebalancear a carteira.
- Os participantes do mercado conseguem tomar dinheiro emprestado na mesma taxa de juros livre de risco que conseguem aplicar dinheiro, e essa

² No caso do DDI o que se executa de fato é um FRA de cupom cambial, um dólar futuro curto (1º dia útil do mês seguinte) e um DI curto para sobrar apenas com o DDI de mesmo vencimento que o FRA. Isso é feito porque o DDI não possui liquidez, mas o FRA, o dólar futuro curto e o DI curto sim. Por isso podemos supor que é possível rebalancear a carteira por meio de um DDI.

taxa de juros coincide com a obtida a partir da curva de juros em reais observada no mercado no momento da aplicação ou empréstimo.

3.2. Notação

Com intuito de facilitar tanto a fluidez do texto como seu entendimento, será definida nessa seção a notação utilizada e os respectivos significados de cada variável e parâmetro:

T : a data de vencimento do contrato em questão;

t : uma data útil qualquer, $t < T$;

$t + n$: data t mais n dias úteis;

N : Nocial³ ou Volume do contrato em questão. Quando estiver tratando de um contrato futuro, N será o número de contratos vezes o valor do contrato unitário;

P : Preço que foi fechado no contrato em questão;

$R_\tau(t, T)$: taxa de juros ao ano em reais pré-fixada continuamente capitalizada (dias úteis sobre 252) entre t e T , calculada com a curva de fechamento de τ . Quando omitidos os parênteses, leia-se (t, T) ;

r_t : taxa de juros ao ano em reais de um dia (ou CDI) negociado em t , ou seja, $r_t = R_\tau(t, t + 1)$;

$C_\tau(t, T)$: cupom cambial limpo ao ano continuamente capitalizado (dias úteis sobre 252) entre t e T , calculado com a curva de fechamento de τ . Quando omitidos os parênteses leia-se, (t, T) ;

c_t : cupom cambial ao ano de um dia (ou Linha) negociado em t , ou seja, $c_t = C_\tau(t, t + 1)$;

³ Jargão comumente utilizado no mercado, derivado do inglês *Notional*.

$C_{\tau}^S(t, T)$: cupom cambial sujo ao ano continuamente capitalizado (dias úteis sobre 252) entre t e T , calculado com a curva de fechamento de τ . Quando omitidos os parênteses leia-se (t, T) ;

$S_{\tau}(t)$: Câmbio pronto de ajuste em τ carregado pelo número de CDIs e descontado pelo número de Linhas entre t e τ . Quando omitidos os parênteses leia-se (t) ;

$T - t$: número dias úteis entre T e t ;

$Ptax_t$: Ptax venda formada em t , ou seja, é a taxa de câmbio utilizada para liquidação de contratos que vencem em $t + 1$;

$V(t, X)$: Marcação a mercado em t do contrato X ;

$A(t, X)$: Ajuste em t do contrato X ;

$F_S(t; T)$: Preço de ajuste em t do Dólar Futuro que vence em T . Quando omitido o segundo argumento, leia-se T , i.e., $F_S(t)$ equivale a $F_S(t; T)$;

$F_R(t; T)$: Preço de ajuste (expresso em taxa) em t do DI Futuro que vence em T . Por definição coincide com $R_t(t, T)$. Quando omitido o segundo argumento, leia-se T ;

$F_C(t; T)$: Preço de ajuste (expresso em taxa) em t do DDI Futuro que vence em T . Quando omitido o segundo argumento, leia-se T ;

$\tilde{F}_S(t; T)$: Preço de ajuste em t do NDF que vence em T . Quando omitido o segundo argumento, leia-se T ;

$\tilde{F}_S^*(t; T)$: Preço de ajuste em t do NDF com *reset* diário que vence em T . Quando omitido o segundo argumento, leia-se T .

Nas próximas seções são descritos com detalhes os instrumentos financeiros utilizados no trabalho.

3.3. NDF

O Termo de Moeda, *Forward* ou NDF⁴ é o derivativo de câmbio mais simples que existe. Duas contrapartes, *A* e *B*, acordam uma taxa de câmbio P para *A* comprar de *B* uma quantidade N de dólares em uma data T , ambas predeterminadas. Nada acontece até a data T quando o resultado de *A* é obtido por meio da seguinte fórmula:

$$V(T, \tilde{F}_S) = N(Ptax_{T-1} - P), \quad (1)$$

onde a $Ptax_{T-1}$ é o preço do câmbio usado para liquidação dos derivativos com vencimento em T e P é o preço acordado no momento em que a operação foi realizada, analogamente o resultado de *B* é o oposto do obtido por *A*.

Devido a uma condição de não arbitragem o preço do termo de moedas com vencimento em T é dado por:

$$\tilde{F}_S(t; T) = S_t e^{(R_t - C_t)(T-t)/252}. \quad (2)$$

Essa equação é dita uma condição de não arbitragem, pois caso o preço do NDF $\tilde{F}_S(t)$ fosse diferente do que está escrito em (2) e as premissas anteriormente citadas fossem válidas seria possível realizar uma arbitragem⁵ negociando o *Spot* e o NDF em pontas contrárias além de tomar um empréstimo em uma moeda e fazer uma aplicação na outra⁶

Assim o Valor a Mercado de um NDF na data t é dado por:

$$V(t, \tilde{F}_S) = \frac{N(\tilde{F}_S(t; T) - P)}{e^{R_t(T-t)/252}}. \quad (3)$$

O numerador é a esperança em uma medida neutra ao risco do resultado que será obtido em T e o denominador está trazendo este resultado a valor presente em t .

⁴ *Non Deliverable Forward*

⁵ Ganho sem risco associados

⁶ Para uma explicação mais detalhada da operação de arbitragem ver, por exemplo, Hull(2009).

3.4. NDF com *reset* diário

O NDF com *reset* diário, ou \tilde{F}_S^* , não é um derivativo muito conhecido. Entretanto, neste estudo, ele tem uma função didática muito importante, pois tem o mesmo preço do NDF, com o benefício de ser ainda mais semelhante ao Dólar Futuro na medida em que também tem ajustes diários.

O *reset* diário significa que todo dia útil o \tilde{F}_S^* é recomprado pelo preço de fechamento do NDF que vence no mesmo dia, sendo pago às partes o valor a mercado de suas posições, e reaberto o mesmo contrato, também pelo preço de fechamento do NDF. Portanto, no primeiro dia (t_0) o ajuste seria:

$$A(t_0, \tilde{F}_S^*) = \frac{N(\tilde{F}_S(t_0) - P)}{e^{R_{t_0}(T-t_0)/252}}. \quad (4)$$

Para o último dia (dia que fixa a $Ptax_{T-1}$) o ajuste será:

$$A(T-1, \tilde{F}_S^*) = \frac{N[Ptax_{T-1} - \tilde{F}_S(T-2)]}{e^{[R_{T-1}(T-1,T)]1/252}}. \quad (5)$$

Para os dias intermediários, $t_0 < t < T$, o ajuste será:

$$A(t, \tilde{F}_S^*) = \frac{N(\tilde{F}_S(t) - \tilde{F}_S(t-1))}{e^{(R_t)(T-t)/252}} \quad \text{para todo } t \in]t_0, T-1[. \quad (6)$$

Proposição 3.1: *Dada a premissa de que é possível tomar e dar dinheiro em reais nas taxas de juros de mercado, o preço do NDF com reset diário tem que coincidir com o do NDF, ou seja, $\tilde{F}_S^*(t; T) = \tilde{F}_S(t; T)$, para todo $t < T$.*

Demonstração:

Para mostrar que $\tilde{F}_S^*(t; T) = \tilde{F}_S(t; T)$ para todo $t < T$, basta demonstrar que se o detentor de um \tilde{F}_S^* aplicar todos os ajustes positivos até T e tomar empréstimos com vencimento também em T , para cobrir todos os ajustes negativos ele terá

exatamente o mesmo resultado do detentor de um \tilde{F}_S em T . Para essa demonstração temos que o valor total líquido em T , $L(T)$, obtido pelo detentor de \tilde{F}_S^* , após todas as aplicações e empréstimos serem liquidados, é dado por:

$$L(T) = N \left[Ptax_{T-1} - \tilde{F}_S(T-2) + \tilde{F}_S(t_0) - P + \sum_{i=t_0+1}^{T-2} (\tilde{F}_S(i) - \tilde{F}_S(i-1)) \right]. \quad (7)$$

$L(T)$ nada mais é que a soma dos numeradores das expressões (4), (5) e (6), uma vez que os denominadores somem quando é considerado o empréstimo/aplicação para levar a valores de T .

Simplificando a expressão (7) acima obtemos:

$$L(T) = N(Ptax_{T-1} - P), \quad (8)$$

que é a mesma expressão do resultado do NDF em T . Portanto é possível reproduzir o resultado do NDF por meio de um NDF com *reset* diário com o mesmo N . Isso mostra que o preço dos dois instrumentos deve ser igual para que não haja possibilidade de arbitragem, Ou seja:

$$\tilde{F}_S^*(t; T) = \tilde{F}_S(t; T) \text{ para todo } t < T. \quad (9)$$

□

3.5. Dólar Futuro

O Dólar Futuro ou F_S , é semelhante ao NDF, e mais semelhante ainda ao NDF com *reset* diário. A maioria dos livros de Derivativos (e. g. Hull (2009), Wilmott (2007)) apenas cita as principais diferenças entre os dois e depois trata os instrumentos como intercambiáveis. Entretanto, esse estudo visa explorar exatamente as diferenças entre eles, no caso específico do mercado cambial brasileiro.

Uma diferença bem óbvia é o fato do Dólar Futuro, por ser um contrato futuro negociado na BM&FBOVESPA, ter ajustes diários, enquanto o NDF não. Por isso iremos compará-lo com o \tilde{F}_S^* que, como já mostrado, tem o mesmo preço que o \tilde{F}_S , e ainda tem o equivalente a um ajuste diário.

A principal diferença entre F_S e \tilde{F}_S^* é a fórmula de cálculo do ajuste diário uma vez que no Dólar Futuro o ajuste não é trazido a valor presente, ou seja em uma data t qualquer o ajuste diário do F_S é:

$$A(t, F_S) = N(F_S(t) - F_S(t - 1)). \quad (10)$$

Isso faz com que o Dólar Futuro seja dependente do caminho, pois se o Dólar Futuro sobe 10 centavos no primeiro dia e fica inalterado o resto do tempo, é melhor para a parte comprada do que o caso em que o tudo fica inalterado até o penúltimo dia, quando sobe os mesmos 10 centavos, pois o dinheiro ganho no primeiro dia seria sido aplicado anteriormente, rendendo mais juros. É fácil observar que tanto para o NDF como para o NDF com reset diário os dois cenários seriam indiferentes.

3.6. DI Futuro

Os contratos de DI Futuro são os derivativos de juros mais líquidos do Brasil e como se trata de um contrato futuro negociado na BM&FBOVESPA, ele possui, entre outras características, ajuste diário.

A parte comprada⁷, doravante referida apenas por comprado, em um DI está apostando que o CDI acumulado entre o dia do negócio e o vencimento do contrato será mais alto que o preço que o DI está sendo negociado. Analogamente, a parte vendida, doravante referida apenas por vendido, em um DI está apostando que o CDI acumulado entre o dia do negócio e o vencimento do contrato será mais baixo que o preço que o DI está sendo negociado.

⁷ Para derivativos de juros sempre será usada a nomenclatura comprada ou vendida em relação à taxa, nunca a PU (preço unitário).

É importante perceber que o DI com vencimento em T negociado hoje é diferente do DI com vencimento em T negociado amanhã, uma vez que hoje o derivativo negociado refere-se ao CDI acumulado entre hoje e T e o derivativo negociado amanhã refere-se ao CDI acumulado entre amanhã e T . Por isso, muitas vezes esse estudo estará se referindo ao preço de ajuste do DI em um dia ajustado para o dia seguinte. Ver a definição de $R_\tau(t, T)$ na seção 3.2.

O ajuste do DI para o comprado é calculado pela seguinte fórmula⁸:

$$A(t, F_R) = \left(e^{-[R_{t-1}(t, T)](T-t)/252} - e^{-[R_t(t, T)](T-t)/252} \right) N, \quad (11)$$

$$\text{onde } R_{t-1}(t, T) = \frac{R_{t-1}(t-1, T)[T - (t-1)] - r_{t-1}}{T - t}.$$

Observe que o primeiro exponencial refere-se ao PU de $t - 1$ ajustado por 1 dia de CDI, e o segundo exponencial refere-se ao PU de t .

3.7. DDI Futuro

O DDI Futuro é o contrato utilizado no mercado brasileiro para negociar a taxa de juros em dólar⁹. O comprado em DDI tem exposição a 2 fatores de riscos, ganha se o cupom cambial subir ou se o dólar *spot* cair. Analogamente o vendido no DDI fica vendido no cupom cambial e comprado no dólar.

Partindo da fórmula encontrada no site da BM&FBOVESPA e transformando as taxas para capitalização contínua com dias úteis/252 obtemos:

$$A(t, F_C) = \left[\frac{\left(e^{-\left(c_{t-1}^S(t-1, T) \right) [T - (t-1)] / 252} \right) \left(e^{r_{t-1} / 252} \right)}{\left(\frac{Ptax_{t-1}}{Ptax_{t-2}} \right)} - e^{-\left(c_t^S(t, T) \right) (T-t) / 252} \right] N Ptax_{t-1}. \quad (12)$$

⁸ Para chegar nessa fórmula partindo da fórmula encontrada no site da BM&FBOVESPA é necessário transformar as taxas para capitalização contínua com contagem em dias úteis sobre 252.

⁹ É mais preciso dizer que o mercado negocia o FRA de cupom cambial que são 2 DDI combinados. Entretanto, como é possível zerar o DDI mais curto e ficar com o outro, será considerado que o DDI é negociado diretamente sem afetar nenhuma conclusão.

Usando a definição de cupom sujo¹⁰, obtemos:

$$e^{(-c_t^S(t,T))(T-t)/252} = \frac{S_t}{Ptax_{t-1}} e^{(-c_t(t,T))(T-t)/252}. \quad (13)$$

Uma vez observado que trocando t por $t-1$ em (13) obtemos $e^{-(c_{t-1}^S(t-1,T))[T-(t-1)]/252} = \frac{S_{t-1}}{Ptax_{t-2}} e^{-(c_{t-1}(t-1,T))[T-(t-1)]/252}$, basta substituir (13) em (12) e simplificar para obter:

$$A(t, F_C) = [S_{t-1} (e^{-(c_{t-1}(t-1,T))[T-(t-1)]/252}) e^{r_{t-1}/252} - S_t e^{-(c_t(t,T))(T-t)/252}] N. \quad (14)$$

A equação (14) trás o ajuste do DDI em função do cupom limpo e do *Spot* ao invés do cupom sujo. Isso é útil pois, nesse trabalho os principais fatores de risco tratados são a curva de juros em reais, o *Spot* e o cupom limpo.

3.8. Relação entre DI e DDI com o NDF com *reset* diário

Toda essa álgebra para colocar a fórmula do ajuste do DI e do DDI na notação desse estudo visa explicar que é possível replicar perfeitamente o resultado de um \tilde{F}_S^* com volume N por meio de uma carteira composta por $N\tilde{F}_S(t-1)$ em volume de DI e N em volume de DDI, todos vencendo em T .

Proposição 3.2: *Os ajustes $A(t, \tilde{F}_S^*)$, $A(t, F_C)$ e $A(t, F_R)$ obedecem a seguinte relação:*

$$A(t, \tilde{F}_S^*) + A(t, F_C) - A(t, F_R)\tilde{F}_S(t-1) = 0. \quad (15)$$

Demonstração:

Para mostrar este resultado é preciso trabalhar um pouco com as equações de ajuste encontradas nas seções anteriores.

¹⁰ O cupom sujo é o Cupom Limpo ajustado pela variação cambial entre S_t e $Ptax_{t-1}$.

Apenas rearranjando (6) obtemos:

$$A(t, \tilde{F}_S^*) = \frac{\tilde{F}_S(t)N}{e^{(R_t(t,T))(T-t)/252}} - \frac{\tilde{F}_S(t-1)N}{e^{(R_t(t,T))(T-t)/252}}. \quad (16)$$

Combinando (14) com (2) obtemos:

$$A(t, F_C) = \frac{\tilde{F}_S(t-1)N}{e^{(R_{t-1}(t,T))(T-t)/252}} - \frac{\tilde{F}_S(t)N}{e^{(R_t(t,T))(T-t)/252}}. \quad (17)$$

Rearranjando (11) obtemos:

$$A(t, F_R) * \tilde{F}_S(t-1) = \frac{\tilde{F}_S(t-1)N}{e^{(R_{t-1}(t,T))(T-t)/252}} - \frac{\tilde{F}_S(t-1)N}{e^{(R_t(t,T))(T-t)/252}}. \quad (18)$$

Substituindo (16), (17) e (18) em (15) fica fácil perceber que todos os termos se cancelam mostrando que (15) é verdadeira.

□

Com essa relação podemos tratar da carteira composta por Dólar Futuro e NDF com *reset* diário mesmo que o \tilde{F}_S^* não seja observado normalmente no mercado, pois sua replicação por meio de um contrato de DI e outro de DDI é bastante direta, como foi mostrado acima.

3.9. Trio

Trio é o nome dado a uma operação composta por um Dólar Futuro com Volume N , um DDI na mesma ponta do Dólar Futuro com Volume $N e^{(R_t(t+1,T))[T-(t+1)]/252}$, e um DI na ponta contrária com Volume $N(e^{(R_t(t+1,T))[T-(t+1)]/252}) \tilde{F}_S(t-1)$, todos com vencimento em T .

É importante perceber que o volume do DI é o volume do DDI vezes $\tilde{F}_S(t-1)$, exatamente o necessário para replicar o \tilde{F}_S^* . Por isso, falar do *Trio* é o mesmo que falar de uma carteira composta por um Dólar Futuro com Volume N e um \tilde{F}_S^* na ponta contrária do Dólar Futuro com Volume $N e^{(R_t(t+1,T))[T-(t+1)]/252}$. Por questões didáticas e de simplicidade, analisaremos essa segunda carteira para precificar o *Trio*, mas sempre tendo em mente que, ao realizar essa operação no mercado, trata-se de um Dólar Futuro casado com um DDI Futuro e um DI Futuro.

Como o Volume do \tilde{F}_S^* depende de $e^{(R_t(t+1,T))[T-(t+1)]/252}$ o mesmo tem que ser rebalanceado todos os dias úteis. Por isso nesse estudo sempre será utilizada a premissa de que é possível comprar ou vender o DI e o DDI nos preços de ajuste. Dito isso, o ajuste do *Trio* em um determinado dia t é dado pela fórmula:

$$A(t, Trio) = N(F_S(t) - F_S(t-1)) - (\tilde{F}_S(t) - \tilde{F}_S(t-1)) N \left(\frac{e^{(R_{t-1}(t,T))(T-t)/252}}{e^{(R_t(t,T))(T-t)/252}} \right). \quad (19)$$

Como, para os contratos de Dólar Futuro mais longo que um mês, a BMF&BOVESPA determina que o preço de ajuste seja igual ao preço do NDF (ou seja $F_S(t) = \tilde{F}_S(t)$), calculado com os preços de ajuste do DI e DDI, para o mesmo período, a fórmula acima fica:

$$A(t, Trio) = N(\tilde{F}_S(t) - \tilde{F}_S(t-1)) \left(1 - \frac{e^{(R_{t-1}(t,T))(T-t)/252}}{e^{(R_t(t,T))(T-t)/252}} \right). \quad (20)$$

Caso a curva de juros em reais fosse determinística (ou seja, $R_t(t, T) = R_{t-1}(t, T)$ para todo t) o ajuste seria sempre zero¹¹, o que seria condizente com a marcação do Dólar Futuro pelo preço do NDF e da ausência de chamada de margem para o *Trio*. Entretanto, basta observar o mercado de DI Futuro para compreender que a curva de juros definitivamente não é determinística.

¹¹ Essa conclusão foi demonstrada, de uma maneira distinta, por Cox, Ingersoll e Ross (1981)

Para fins de análise de sensibilidade aos fatores de risco do *Trio*, é preciso lembrar que $\tilde{F}_S(t)$ é função de $R_t(t, T)$, S_t e $C_t(t, T)$, por tanto o ajuste do *Trio* e suas primeiras derivadas¹² são:

$$A(t, Trio) = N \left(S_t e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252} - \tilde{F}_S(t-1) \right) \left(1 - e^{(R_{t-1}(t, T) - R_t(t, T))(T-t)/252} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T)} = N \frac{(T-t)}{252} \left(\tilde{F}_S(t) - \tilde{F}_S(t-1) e^{(R_{t-1}(t, T) - R_t(t, T))(T-t)/252} \right), \quad (22)$$

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial S_t} = N \left(e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252} - e^{(R_{t-1}(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252} \right), \quad (23)$$

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial C_t(t, T)} = -N \tilde{F}_S(t) \frac{(T-t)}{252} \left(1 - e^{(R_{t-1}(t, T) - R_t(t, T))(T-t)/252} \right). \quad (24)$$

Nota-se que todas as derivadas primeiras são iguais a zero no ponto $(S_{t-1}(t), R_{t-1}(t, T), C_{t-1}(t, T))$. Na verdade para as derivadas em relação ao cupom e ao *spot* serem zero precisa-se apenas de $R_t(t, T) = R_{t-1}(t, T)$. Essa, provavelmente, é a razão da BM&FBOVESPA não exigir margem para uma carteira com um *Trio*, pois a bolsa olha apenas para os riscos de primeira ordem, que, como demonstrado, estão totalmente zerados nos preços de ajuste do mercado.

Observando as segundas derivadas isso muda bastante, como segue:

¹² A álgebra por trás dos cálculos das derivadas mostradas nas equações (22), (23), (24), (25), (26) e (27) é explicada com mais detalhe no Apêndice A

$$\frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T)^2} = N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2 \left(\tilde{F}_S(t) + \tilde{F}_S(t-1) e^{(R_{t-1}(t, T) - R_t(t, T))(T-t)/252} \right). \quad (25)$$

Essa é a derivada segunda mais importante pois, como já foi mostrado, nenhum risco surge a menos que $R_t(t, T)$ seja diferente de $R_{t-1}(t, T)$. A equação (25), acima, mostra que a convexidade é sempre positiva em relação a mudanças no Pré para uma posição de *Trio* comprada¹³, outra conclusão importante é que essa derivada é proporcional ao quadrado do tempo, ou seja um *Trio* com um prazo três vezes mais longo tem uma convexidade nove vezes maior. Esse resultado não impossibilita que o Dólar Futuro tenha o mesmo preço do NDF, mas dificulta muito, pois as derivadas segundas cruzadas e as correlações teriam que atuar fortemente contra a posição comprada no *Trio* para que isso acontecesse uma vez que a convexidade dos juros em reais sempre atuará a favor do comprado. Já a variação em relação ao Cupom Cambial da variação do ajuste do *Trio* e relação à taxa de juros em reais é dada por:

$$\frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T) \partial C_t(t, T)} = -N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2 \tilde{F}_S(t). \quad (26)$$

Essa derivada cruzada é sempre negativa, o que significa que, para o comprado no *Trio*, seria bom que a correlação entre os juros em reais e o cupom cambial fosse negativa. Historicamente observamos que essa correlação é aproximadamente 0.27 para o *Trio* com vencimento em janeiro 2021, o que sugere que essa correlação atua ligeiramente contra o comprado no *Trio*. Já a variação em relação ao *Spot* da variação do ajuste do *Trio* e relação à taxa de juros em reais é dada por:

$$\frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T) \partial S_t} = N \frac{(T-t)}{252} e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252}. \quad (27)$$

Essa derivada cruzada é sempre positiva o que significa que para o comprado no *Trio* seria bom que a correlação entre a taxa de juros em reais e o *Spot* fosse positiva, historicamente observamos que essa correlação é em torno de 0.31 para o

¹³ Comprada no Dólar futuro e no DDI e vendida no DI

Trio com vencimento em janeiro 2021, o que sugere que essa correlação atua ligeiramente a favor do comprado no *Trio*.

As demais segundas derivadas são bem menos relevantes, pois como foi mostrado, é a diferença entre $R_t(t, T)$ e $R_{t-1}(t, T)$ que abre exposição a todos os riscos no *Trio*.

Considerando as correlações históricas, vemos que uma derivada cruzada atua ligeiramente a favor do comprado no *Trio*, e a outra atua ligeiramente contra, no entanto, a mais importante de todas, a segunda derivada em relação ao juro em reais é sempre a favor (pois a “correlação” do juro em reais com ele mesmo é 1, por definição), o que nos leva a intuir que alguém estaria disposto a pagar um prêmio para ficar comprado no *Trio*. As simulações de Monte Carlo tentam estimar o valor desse prêmio e suas sensibilidades às correlações e volatilidades dos preços de mercado.

3.10. Margem

A BM&FBOVESPA exige um depósito de margem para qualquer operação em contratos futuros. No caso do detentor de um contrato futuro não pagar o ajuste diário, a bolsa utiliza essa margem para se desfazer do contrato no mercado.

Como diferentes contratos possuem alguns riscos em comum, uma carteira com 2 contratos diferentes pode ter menos margem do que teria a soma de duas carteiras onde cada uma tivesse um dos contratos. A forma detalhada de como esse cálculo é feito não está disponível. Entretanto simulações com uma carteira contendo um *Trio* têm margem igual a zero. Isso ocorre provavelmente porque a bolsa utiliza apenas a primeira derivada para calcular os riscos da carteira e, como já mostrado, esses riscos estão zerados no *Trio* nos preços de ajuste do mercado.

3.11. Considerações Finais

Este capítulo teve como principal objetivo mostrar no detalhe qual é o problema e já introduzir algumas análises das razões por trás dos resultados obtidos.

Uma vez demonstrado que (i) o *Trio* comprado equivale a uma carteira comprada no Dólar Futuro e vendida no NDF com *reset* diário com volumes escolhidos de forma que os riscos de primeira ordem estejam zerados, e (ii) caso a marcação a mercado realizada pela BM&FBOVESPA estivesse correta, um carteira composta por um *Trio* deveria ter um valor esperado igual a zero, pode-se concluir que, se o valor esperado desta carteira for positivo, então a BM&FBOVESPA marca a mercado o Dólar Futuro em um preço abaixo do que deveria.

No próximo capítulo será detalhada a metodologia utilizada para estimar o quão diferente de zero é essa diferença. Para efeito de ilustração, é analisada em detalhe a situação de mercado em sete de fevereiro de 2011.

4. Metodologia

Este capítulo descreve passo a passo como foi estruturado o modelo para estimar os prêmios dos *Trios* para diversos vencimentos e as sensibilidades destes prêmios aos *inputs* do modelo por meio de simulações de Monte Carlo.

Após montar os *Trios* para quatro vencimentos (janeiro de 2015, 2017, 2019 e 2021) a preços de mercado de 7 de fevereiro de 2011 (sendo considerado o Dólar Futuro no preço justo para o NDF, como considera a marcação a mercado feita pela BM&FBOVESPA), são simulados aleatoriamente caminhos para todos os preços de mercado envolvidos e calculados os resultados dessas carteiras até o seu vencimento. Esse processo é repetido M vezes.

Para simular esses caminhos, são necessários alguns *inputs*: (i) as dinâmicas de evolução para cada um dos preços de mercado envolvidos, (ii) a volatilidade de cada um desses preços e (iii) as correlações entre as variações desses preços.

Em seguida, analisa-se a sensibilidade dos resultados aos parâmetros escolhidos, uma vez que esses *inputs* são estimativas e não valores exatos e definitivos.

O objetivo é mostrar que essas carteiras têm valores esperados muito positivos, sendo pouquíssimo provável a observação de resultados negativos. Analisa-se quatro vencimentos para ilustrar o quanto o prazo é importante na determinação do tamanho desse valor esperado positivo.

As seções a seguir visam explicar detalhadamente cada etapa da construção deste modelo.

4.1. Processos Estocásticos

A ideia básica de uma simulação de Monte Carlo aplicada à maioria dos derivativos consiste em sortear de forma aleatória um grande número de caminhos do ativo base, apurar o resultado do derivativo para cada um dos caminhos sorteados e calcular a média desses resultados.

Para o caso do *Trio*, a ideia é muito semelhante, com a diferença de existirem vários ativos base e não apenas um. Por isso foram necessários sortear caminhos aleatórios para cinco preços de mercado correlacionados entre si. São eles:

- Taxa de juros em reais com vencimento em T , $R_t(t, T)$;
- Cupom Cambial para vencimento em T , $C_t(t, T)$;
- Taxa de câmbio *Spot*, S_t ;
- CDI ou Taxa de juros em reais com vencimento em 1 dia útil, r_t ;
- Linha ou Cupom Cambial para vencimento em 1 dia útil, c_t .

4.1.1. Processo para $R_t(t, T)$

Para o caso da taxa juros em reais, o processo estocástico adotado é muito simples: a taxa de t a T vista em t é a taxa de t a T vista em $t - 1$ mais um fator estocástico com média zero e desvio padrão constante em percentual da taxa segundo a curva de $t - 1$. A equação para o processo estocástico da taxa de juros em reais fica assim:

$$R_t(t, T) = R_{t-1}(t, T) + R_{t-1}(t, T)\sigma_R dW_t^R, \quad (28)$$

onde σ_R é a volatilidade da taxa juros em reais com vencimento em T e W_t^R segue um processo de Wiener.

Para efeito de simplificação assumimos que a volatilidade da taxa de juros em reais com vencimento em T é constante. O mesmo tipo de aproximação é adotado nos demais processos aqui descritos.

4.1.2. Processo para $C_t(t, T)$

Para o caso do Cupom Cambial, o processo estocástico é muito semelhante ao da taxa de juros em reais, ou seja, o Cupom de t a T visto em t é o Cupom de t a T visto em $t - 1$ mais um fator estocástico com média zero e desvio padrão constante em percentual da taxa segundo a curva de $t - 1$. A equação para o processo estocástico do Cupom fica assim:

$$C_t(t, T) = C_{t-1}(t, T) + C_{t-1}(t, T)\sigma_C dW_t^C, \quad (29)$$

onde σ_C é a volatilidade do Cupom Cambial com vencimento em T e W_t^C segue um processo de Wiener.

4.1.3. Processo para S_t

Para o caso do *Spot* o processo também é semelhante. O *Spot* em t é o *Spot* em $t - 1$ carregado por um dia de CDI e descontado por um dia de Linha mais um fator estocástico com média zero e desvio padrão constante em percentual de $S_{t-1}(t)$. A equação para o processo estocástico do *Spot* fica assim:

$$S_t(t) = S_{t-1}(t) + S_{t-1}(t)\sigma_S dW_t^S \quad (30)$$

Onde σ_S é a volatilidade do *Spot* e W_t^S segue um processo de Wiener. Lembrar que $S_{t-1}(t) = S_{t-1}(t-1)e^{(r_t - c_t)/252}$ pela definição dada na seção 3.2.

4.1.4. Processo para r_t

O CDI ou taxa de juros em reais para 1 dia útil, desempenha um papel secundário no modelo. Ele é necessário pra calcular a taxa de juros de t a T vista em $t - 1$, $(R_{t-1}(t, T))$, que é a esperança para a taxa de juros de t a T vista em t , $(R_t(t, T))$. Como o *hedge* dinâmico é mais relevante quando o *Trio* está longe do vencimento, o CDI afeta muito pouco a esperança para a taxa de juros em t . Entretanto, o CDI é necessário para a coerência do Modelo.

Outro ponto relevante é que, conforme o vencimento se aproxima, o CDI e a taxa de juros em reais com vencimento em T têm que convergir, por definição. Para garantir tal comportamento, foi colocado na equação estocástica do CDI um termo de convergência para a taxa de juros em reais no vencimento que depende de um fator

$\gamma(t, T)$, que é zero enquanto o prazo até o vencimento é superior a 3 anos e sobe até 1 no dia do vencimento¹⁴. A equação para o processo estocástico do CDI fica assim:

$$r_t = r_{t-1} + r_{t-1}\sigma_r dW_t^r + \gamma(t, T)[R_{t-1}(t-1, T) - r_{t-1}], \quad (31)$$

onde σ_r é a volatilidade do CDI, W_t^r segue um processo de Wiener e $\gamma(t, T)$ é o fator discutido acima, que se comporta como o gráfico apresentado na Figura 3, a seguir.

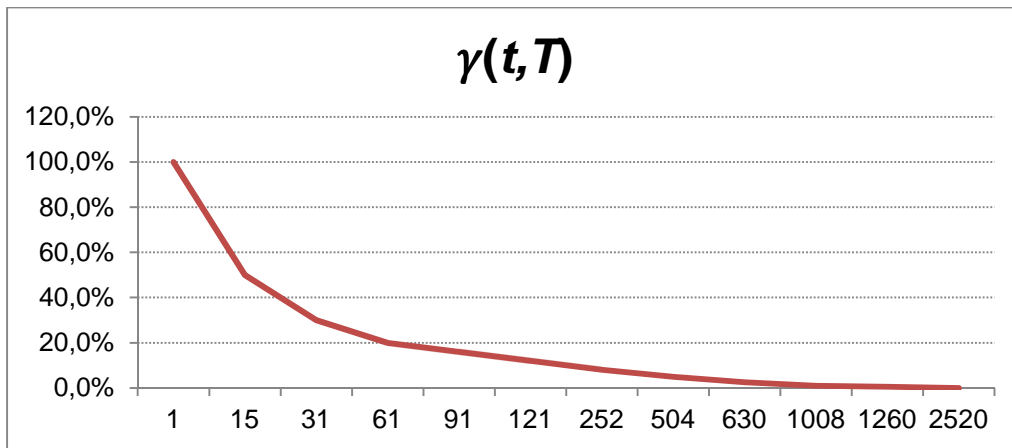


Figura 3 - fator γ em relação ao prazo

A Figura 3 mostra o comportamento do fator γ , escolhido arbitrariamente. O eixo horizontal representa o prazo em dias úteis para o vencimento e o eixo vertical representa o valor do fator $\gamma(t, T)$ para um certo prazo.

4.1.5. Processo para c_t

A Linha está para o cupom cambial assim como o CDI está para taxa de juros em reais. Portanto, a Linha é necessária pra calcular o Cupom Cambial de t a T visto em $t-1$ ($C_{t-1}(t, T)$), que é a esperança para o Cupom Cambial de t a T visto em t ($C_t(t, T)$). Dessa forma, a equação para o processo estocástico da Linha fica assim:

¹⁴ A velocidade de convergência foi estipulada arbitrariamente. Entretanto testes mostraram que os efeitos de uma convergência mais rápida ou mais lenta não influenciam de forma relevante os resultados.

$$c_t = c_{t-1} + c_{t-1}\sigma_c dW_t^c + \gamma(t, T)(C_{t-1}(t-1, T) - c_{t-1}), \quad (32)$$

onde σ_c é a volatilidade da Linha, W_t^c segue um processo de Wiener e γ é o fator discutido acima que se comporta como o gráfico mostrado na Figura 3.

Por simplicidade e sem perda de generalidade, o fator $\gamma(t, T)$ utilizado para a Linha é o mesmo que o adotado para o caso do CDI.

4.2. Correlações

Outra questão que surge quando se utiliza vários ativos em simulações de Monte Carlo é que os movimentos desses ativos podem ser correlacionados, e isso deve ser considerado no modelo, pois tem potencial para afetar consideravelmente os resultados.

Analisando os dados históricos, observa-se que o CDI e a Linha não possuem correlações significantes (nenhuma correlação histórica em módulo acima de 0,10 foi encontrada) tanto com os outros ativos, como entre si. Por isso, foi considerado no modelo que os choques desses ativos (dW_t^r e dW_t^c) são independentes entre si, assim como independentes dos demais choques.

No caso dos juros em reais, Cupom Cambial e *Spot*, os dados históricos mostram que as correlações entre os três ativos são significativas, portanto dW_t^R , dW_t^C e dW_t^S têm que ser correlacionados entre si. Ou seja $\langle dW_t^R, dW_t^C \rangle$, $\langle dW_t^R, dW_t^S \rangle$ e $\langle dW_t^C, dW_t^S \rangle$ são todos diferentes de zero e estimados a partir de dados históricos.

Para gerar choques normalmente distribuídos, com média zero, variância um e correlação diferente de zero, foram utilizadas combinações lineares de três variáveis aleatórias independentes normalmente distribuídas, com média zero e variância um. O peso de cada variável aleatória dada uma matriz de correlações históricas foi obtida por meio de uma fatoração de Cholesky¹⁵.

¹⁵ Para uma explicação mais detalhada da fatoração de Cholesky ver, por exemplo, Wilmott (2007).

Com essas combinações lineares dW_t^R, dW_t^C e dW_t^S ficam normalmente distribuídos, com média zero, variância um e correlação igual à historicamente estimada. Isto é,

$$\langle dW_t^R, dW_t^C \rangle = \rho_{R,C}$$

$$\langle dW_t^R, dW_t^S \rangle = \rho_{R,S}$$

$$\langle dW_t^C, dW_t^S \rangle = \rho_{C,S}$$

4.3. Dados

Os dados para inferir as volatilidades e correlações históricas foram todos obtidos na Bloomberg e foi utilizada a janela de 02/01/2010 a 01/07/2014. Como não haviam dados anteriores a 2010 disponíveis para todos os ativos e treze meses foi considerada uma janela muito pequena para a coleta de dados históricos, optou-se por utilizar dados até 2014 para estimar *Trios* que foram montados em 2011. $P_{S,R}$

Essas estimativas têm apenas a função de determinar um marco inicial e não de tentar acertar as volatilidades e correlações reais dos ativos, até porque esses parâmetros são claramente estocásticos no mundo real. Isso torna ainda mais importante a análise de sensibilidade explicada na seção 4.4.

A Tabela 1, a seguir, mostra todas as volatilidades e correlações utilizadas no modelo que foram inferidas a partir desses dados históricos. Obviamente para o *Spot*, CDI e Linha as volatilidades independem do prazo do *Trio*.

Tabela 1 - Volatilidades e correlações históricas

	Volatilidades					Correlações		
	σ_S	σ_R	σ_C	σ_T	σ_c	$\rho_{R,S}$	$\rho_{R,C}$	$\rho_{C,S}$
jan/15	0,78%	0,81%	14,00%	0,80%	1,72%	0,18	0,04	0,17
jan/17	0,78%	0,83%	2,50%	0,80%	1,72%	0,29	0,25	0,26
jan/19	0,78%	0,84%	1,81%	0,80%	1,72%	0,29	0,26	0,23
jan/21	0,78%	0,81%	1,49%	0,80%	1,72%	0,31	0,27	0,21

Como mencionado anteriormente, os *Trios* estimados foram com vencimento em janeiro 2015, janeiro 2017, janeiro 2019 e janeiro 2021, todos iniciando em 07/02/2011, que foi a data onde os primeiros quatro mil lotes de Dólar Futuro com vencimento em janeiro 2021 foram abertos na BM&FBOVESPA.

Para todas as simulações foram usadas amostras com $M = 5000$ observações.

4.4. Análises de sensibilidade

Como as volatilidades e as correlações utilizadas no modelo foram obtidas a partir de dados históricos (o que significa que esses parâmetros são apenas estimativas e podem mudar com o passar do tempo), é necessário entender como o prêmio do *Trio* se comporta quando cada um desses parâmetros é alterado marginalmente.

Para isso em cada uma das M simulações foi medido o efeito de uma mudança em cada um dos parâmetros individualmente, as volatilidades em 0.10% e as correlações em 0.10. Para cada alteração, foi recalculado o prêmio do *Trio* mantendo-se todos os choques constantes e depois calculada a média das M sensibilidades obtidas para cada parâmetro. Em outras palavras, uma vez sorteados todos os números aleatórios necessários para calcular um resultado do *Trio*, altera-se marginalmente cada um dos parâmetros (volatilidades e correlações) e recalcula-se o resultado do *Trio* com os mesmo números aleatórios a fim de se estimar o efeito de uma mudança em cada um dos parâmetros individualmente. Esse processo se repete nas M simulações

Foram utilizadas alterações para cima e para baixo em cada um dos parâmetros a fim de minimizar o erro na estimação da sensibilidade.

4.5. Passo a Passo

Nesta seção é apresentado um resumo passo a passo da metodologia utilizada neste trabalho com o intuito de facilitar a consulta e o seu entendimento.

- 1) Montar a Carteira do *Trio* a preços de ajuste do dia inicial.
- 2) Definir a regra de rebalanceamento diário da carteira e as fórmulas para os processos estocásticos.
- 3) Definir os parâmetros (volatilidades e correlações) inferindo a partir de dados históricos.
- 4) Sortear todos os números aleatórios necessários para a simulação e calcular o resultado da carteira para este caminho dos preços de mercado.
- 5) Mantendo os mesmos números aleatórios simular perturbações para cima e para baixo em todos os parâmetros definidos no Passo 3 e comparar cada um dos novos resultados com o resultado obtido no Passo 4.
- 6) Repetir os Passos 4 e 5 por cinco mil vezes guardando todos os resultados da carteira e das sensibilidades
- 7) Calcular a média dos cinco mil resultados obtidos para a carteira e para cada uma das sensibilidades.

No capítulo a seguir são apresentados e analisados os resultados das simulações de Monte Carlo, das análises de sensibilidade, e dos *backtestings* realizados.

5. Resultados

Neste capítulo são descritos os resultados obtidos com as simulações de Monte Carlo e com os backtestings realizados. Será mostrado que os resultados são extremamente robustos, não deixando dúvida que a marcação a mercado atualmente utilizada na BM&FBOVESPA para os contratos de Dólar Futuro mais longos deve ser revista.

5.1. Diferencial entre o NDF e o Dólar Futuro

O diferencial entre o Dólar Futuro e o NDF estimado foi, qualitativamente, o que era esperado, ou seja, o Dólar Futuro deveria ser mais alto que o NDF. Essa diferença aumenta conforme o prazo aumenta e essa taxa de crescimento também aumenta com o aumento do prazo.

A Figura 4, a seguir, mostra, com base nos preços de mercado em 7 de fevereiro de 2011, a curva de NDF e a curva de Dólar Futuro estimada pelas simulações de Monte Carlo. Foram plotadas também curvas com a estimativa mais ou menos quinze desvios-padrão para explicitar a robustez do modelo.

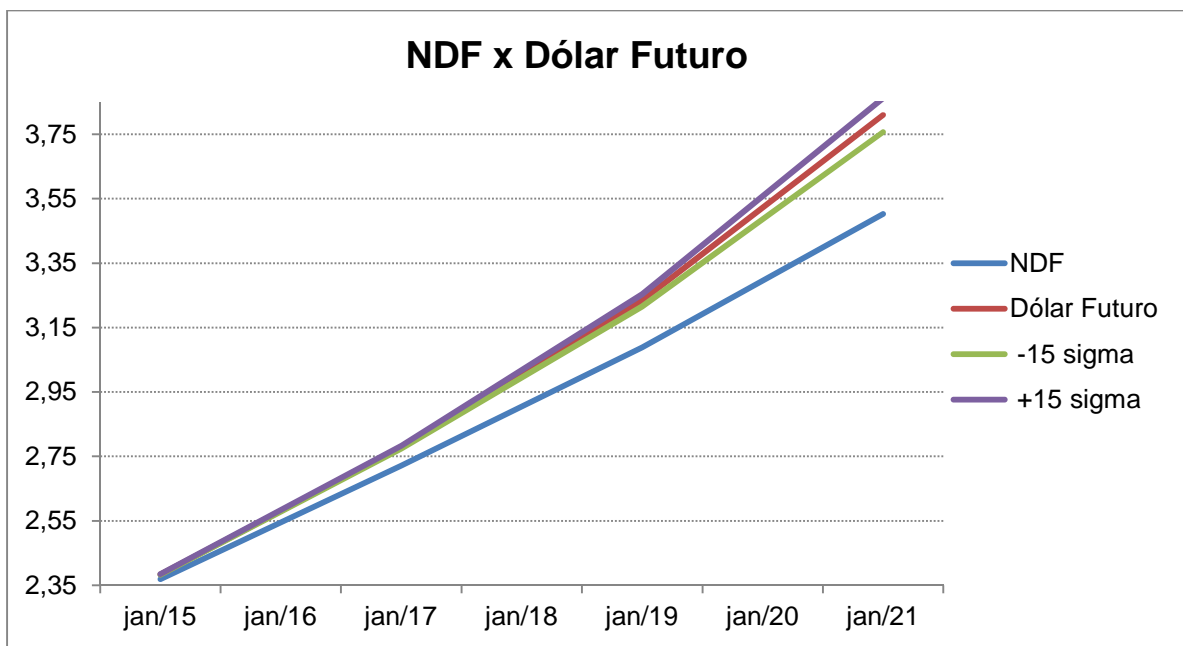


Figura 4 – NDF vs Dólar Futuro estimado

É possível observar que mesmo a curva que representa o preço estimado para o Dólar Futuro menos quinze desvios-padrão ainda se encontra muito acima da curva de NDF. Isso corrobora fortemente a conclusão que o Dólar Futuro deveria ser marcado acima do NDF.

A fim de ilustrar de forma ainda mais contundente a relevância da diferença entre o Dólar Futuro e o dólar a termo, a Tabela 2 abaixo, utiliza os resultados do modelo para estimar, com base na posição em aberto na BM&FBOVESPA em sete de fevereiro de 2011, o valor em reais do erro de marcação a mercado cometido pela bolsa para cada contrato de janeiro 2015 para frente. Para o janeiro 2016 e janeiro 2018 foram utilizadas interpolações lineares tanto para o NDF como para o Dólar Futuro uma vez que esses prazos não foram estimados pelo Monte Carlo.

Por exemplo, para o *Trio* com vencimento em janeiro 2021 a diferença entre o preço do Dólar Futuro estimado (3,8100) e o preço no NDF (3,5031) é 0,3069. Essa diferença em cima dos 4000 contratos em aberto na BM&FBOVESPA em 7 de fevereiro de 2011 representa um erro de R\$61.380.000,00 ($0,3069 * 4.000 * 50.000$).

Tabela 2 - Tamanho do erro de marcação a mercado

Prazo	NDF	DolFut	Contratos em aberto	Diferença em BRL
jan/15	2,3686	2,3839	630	R\$ 481.950,00
jan/16*	2,5452	2,5812	6020	R\$ 10.836.000,00
jan/17	2,7219	2,7786	4000	R\$ 11.340.000,00
jan/18*	2,9052	3,0064	3100	R\$ 15.686.000,00
jan/19	3,0885	3,2342	0	R\$ 0,00
jan/21	3,5031	3,8100	4000	R\$ 61.380.000,00
Total			17750	R\$ 99.723.950,00

* estimados por interpolação linear

É possível observar que o erro estimado em fevereiro de 2011 é da ordem de 100 milhões de reais. Como a margem cobrada de uma carteira de *Trio*, calibrada pelos preços de ajuste do mercado, é zero se todos os agentes vendidos no *Trio* se tornassem inadimplentes, a BM&FBOVESPA sobraria com uma posição que ela considera sem risco e de valor zero, mas que na verdade tem risco e vale algo em torno de cem milhões de reais de prejuízo.

A Tabela 2 também deixa claro o quão importante é o prazo para que o Dólar Futuro seja mais alto que o NDF. A diferença começa em 1.5 centavos para o *Trio* de 4 anos, sobe para 5.7 centavos para o *Trio* de 6 anos, depois sobe para 14.6 centavos para o *Trio* de 8 anos e termina em 30.7 centavos para o *Trio* de 10 anos. Com isso, o *Trio* com vencimento em janeiro 2021, tendo apenas 22.5% dos contratos de Dólar Futuro longos é responsável por 61.5% do erro na marcação a mercado.

5.2. Análise de Dispersão

Para melhorar a análise dos resultados, foram observados os histogramas das simulações de Monte Carlo para os quatro prazos escolhidos.

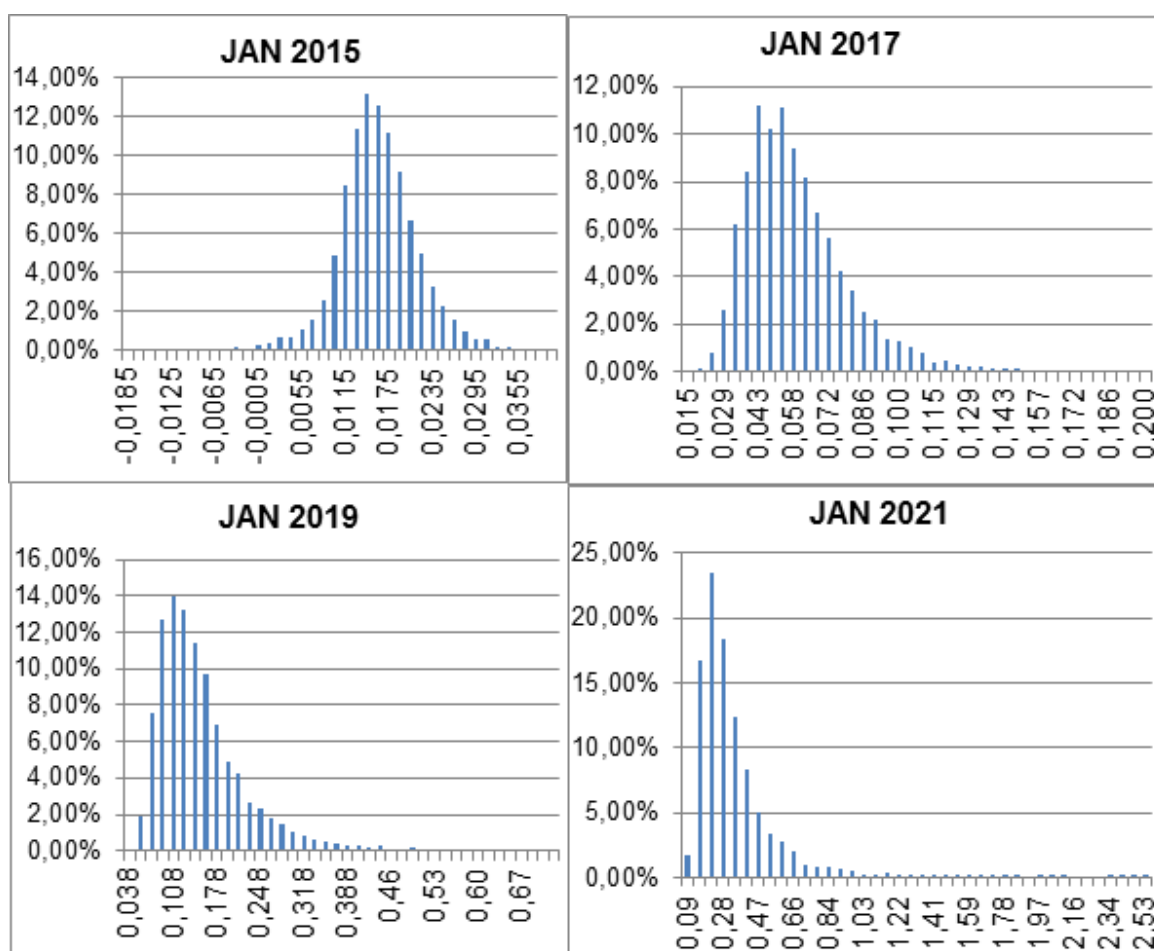


Figura 5 – Histogramas das simulações de Monte Carlo

A Figura 5 mostra os histogramas para os quatro prazos simulados. O eixo horizontal representa a diferença entre o preço do Dólar Futuro e o preço do NDF

enquanto o eixo vertical representa a porcentagem das simulações contidas em cada intervalo.

É possível observar que apenas para o *Trio* com vencimento em janeiro de 2015 houve observações em que o *Trio* comprado no Dólar Futuro perdeu (o que indicaria que a diferença entre Dólar Futuro e NDF seria negativa) e isso ocorreu em apenas 0.74% das observações, em todos os outros *Trios* mais longos nenhuma das cinco mil observações apresentaram resultados negativos para o *Trio* comprado no Dólar Futuro, o que é mais uma fortíssima evidência que o Dólar Futuro deveria ser marcado acima do NDF.

5.3. Sensibilidades

As simulações de Monte Carlo também estimaram as sensibilidades da diferença entre o Dólar Futuro e o NDF a mudanças de 0.10% nas volatilidades dos ativos.

Como foi mostrado no capítulo 3, era esperado que o resultado do *Trio* fosse mais sensível em relação a mudanças na volatilidade da taxa de juros em reais do que em relação a qualquer outra volatilidade, essa expectativa foi confirmada.

Sendo que:

V é a diferença entre o preço estimado para o Dólar Futuro e o preço do NDF,

$\partial V / \partial \sigma_S$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10% em σ_S ,

$\partial V / \partial \sigma_R$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10% em σ_R ,

$\partial V / \partial \sigma_C$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10% em σ_C ,

$\partial V / \partial \sigma_r$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10% em σ_r ,

$\partial V / \partial \sigma_c$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10% em σ_c ,

$\partial V / \partial \rho_{S,R}$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10 na correlação entre dW_S e dW_R ,

$\partial V/\partial \rho_{R,C}$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10 na correlação entre dW_R e dW_C ,

$\partial V/\partial \rho_{S,C}$ representa o efeito em V de um aumento de 0.10 na correlação entre dW_S e dW_C .

A Figura 6, a seguir, mostra um gráfico do impacto sobre a diferença estimada entre o Dólar Futuro e o NDF (V) de um choque de 0.10% na volatilidade de cada um dos 5 processos estocásticos. O eixo horizontal representa a data de vencimento dos contratos e o eixo vertical representa o impacto na diferença entre o preço estimado do Dólar Futuro e o preço do NDF.

Por exemplo, a Figura 6 aponta que, para o *Trio* com vencimento em janeiro 2021, um aumento de 0.10% em σ_R aumenta a diferença entre o preço estimado do Dólar Futuro e o preço do NDF em aproximadamente 9 centavos de real por dólar. Para o *Trio* com vencimento em janeiro 2017 esse efeito é de aproximadamente 1,3 centavos.

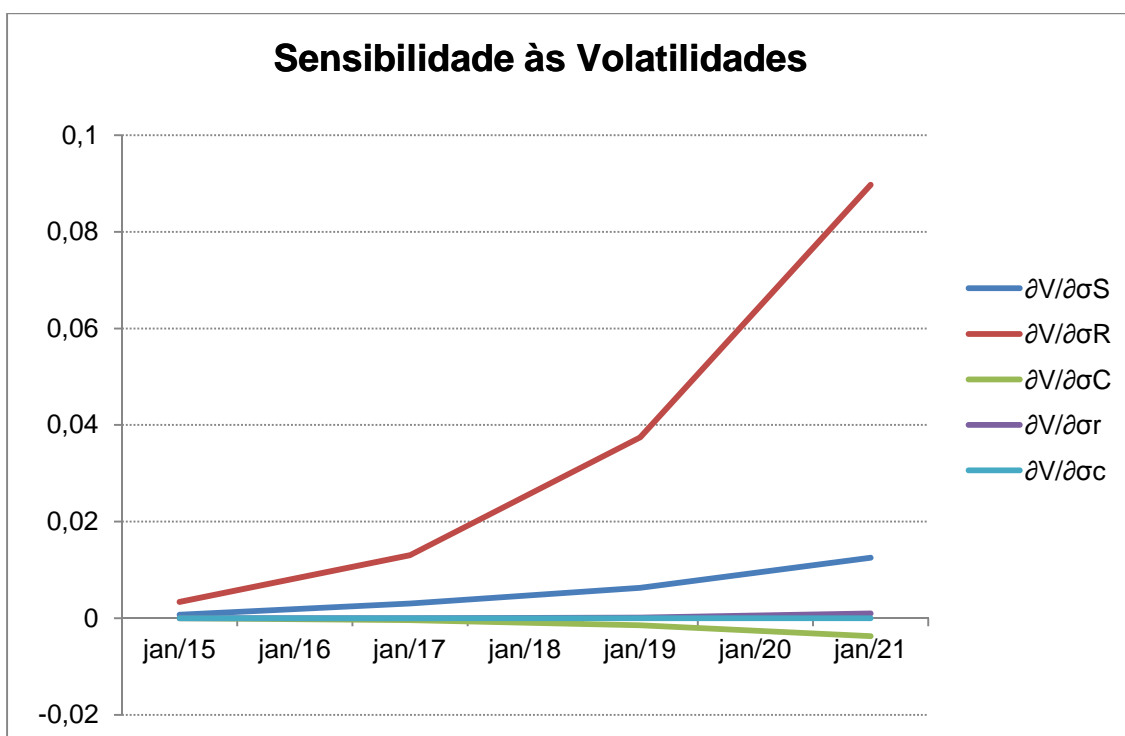


Figura 6 – Sensibilidade de V às volatilidades

Além da alta sensibilidade a mudanças na volatilidade da taxa de juros em reais, pode-se confirmar pelo gráfico acima que as volatilidades do CDI e da Linha são

praticamente irrelevantes, e que aumentos na volatilidade da taxa de juros em reais e do *Spot* aumentam a diferença entre o NDF e o Dólar Futuro, enquanto aumentos na volatilidade do Cupom Cambial diminuem essa diferença. Isso se torna esperado quando levamos em consideração que todas as correlações entre a taxa de juros em reais, o *Spot* e o Cupom Cambial são positivas e as sensibilidade às correlações tem sinal positivo para o *Spot* com a taxa de juros, e negativo para o Cupom Cambial com a taxa de juros, como foi mostrado no capítulo 3.

As simulações de Monte Carlo também estimaram as sensibilidades da diferença entre o Dólar Futuro e o NDF a mudanças de 0.10 nas correlações entre o *Spot*, o Cupom Cambial e a taxa de juros. Os resultados estão resumidos na Figura 7, a seguir, corroborando as conclusões do capítulo 3.

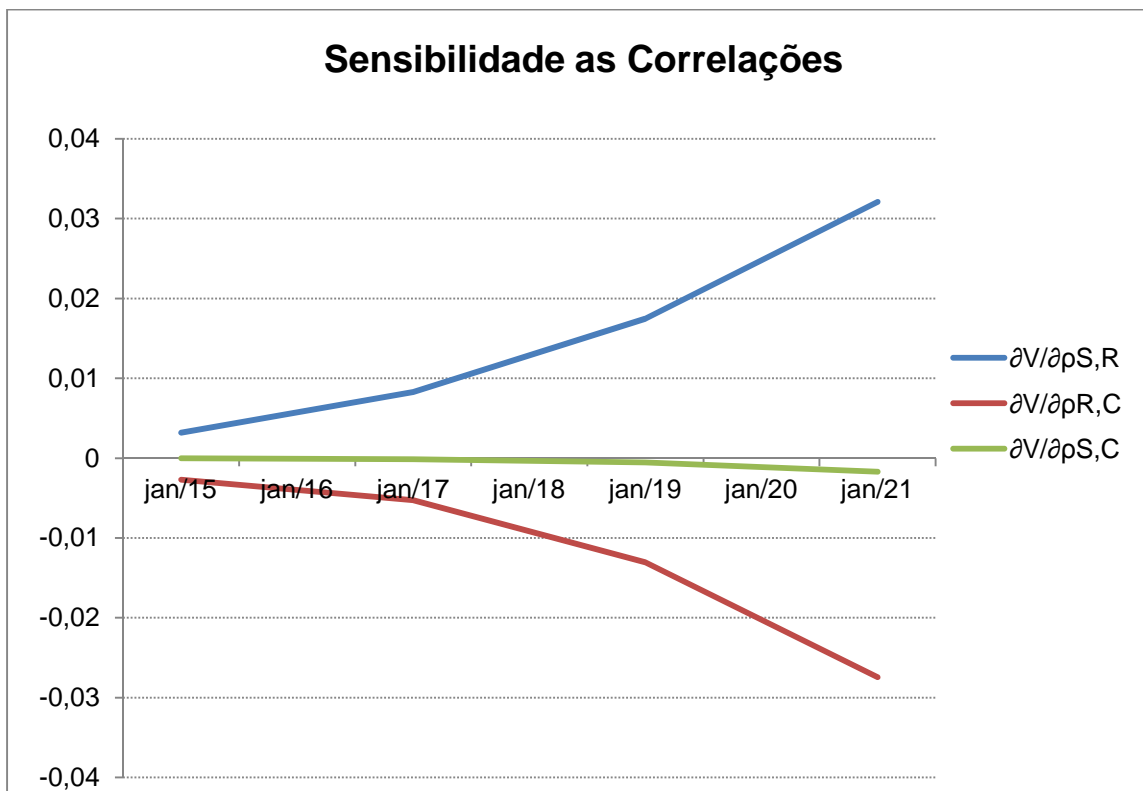


Figura 7 – Sensibilidade de V às correlações

A Figura 7 mostra um gráfico do impacto sobre a diferença estimada entre o Dólar Futuro e o NDF (V) de um choque de 0.10 nas correlações envolvendo a taxa de juros, o *Spot* e o Cupom Cambial. O eixo horizontal representa a data de vencimento dos contratos e o eixo vertical representa o impacto na diferença entre o preço teórico do Dólar Futuro e o preço do NDF.

Por exemplo, a figura 7 aponta que, para o *Trio* com vencimento em janeiro 2021, um aumento de 0.10 na correlação entre dW_t^R e dW_t^S aumenta a diferença entre o preço estimado do Dólar Futuro e o preço do NDF em aproximadamente 3,2 centavos de real por dólar. Para o *Trio* com vencimento em janeiro 2017 esse efeito é de aproximadamente 0,8 centavos.

Além dos sinais opostos entre o efeito de uma mudança na correlação do *Spot* com a taxa juros em reais e na correlação do Cupom Cambial com o a taxa juros em reais, o gráfico acima também ilustra bem que a correlação entre o *Spot* e o Cupom Cambial é pouco relevante e que o aumento do prazo aumenta muito a importância de todas as correlações, como já era esperado pela análise das derivadas feita no capítulo 3.

5.4. Backtesting

Para complementar os resultados foi feito um *backtesting* para os quatro *Trios* simulados, foram usadas as informações de mercado de 07 de fevereiro de 2011, quando iniciaram todas as simulações, até 01 de julho de 2014 e comparados com as simulações de Monte Carlo durante este mesmo período.

A Figura 8, a seguir, mostra, para os quatro prazos simulados, gráficos comparando a média das simulações de Monte Carlo com os resultados encontrados no *backtesting*, foram colocadas também curvas da média das simulações com mais dois e menos dois desvios-padrão para dar base de comparação entre o *backtesting* e o Monte Carlo. O eixo horizontal representa o tempo decorrido e o eixo vertical representa o resultado em reais obtido por um *Trio* composto por mil contratos de Dólar Futuro.

Pelos gráficos da Figura 8 é possível observar que os resultados do *backtesting* estão ligeiramente abaixo da média das simulações, mas confortavelmente inseridos entre as curvas de mais e menos dois desvios para todos os prazos, interessante também o fato das curvas dos *backtesting* serem muito semelhantes entre si o que mostra que as curvas de juros em reais e do Cupom Cambial devem ter uma alta correlação entre diferentes maturidades, uma consequência disso é que os

resultados dos *backtestings* são muito correlacionados, ou seja, se pegarmos um período em que o *Trio* com vencimento em janeiro 2021 tenha obtido um resultado melhor que a média apontada pelas simulações de Monte Carlo muito provavelmente o mesmo ocorreu para os *Trios* com vencimentos mais curtos e vice-versa.

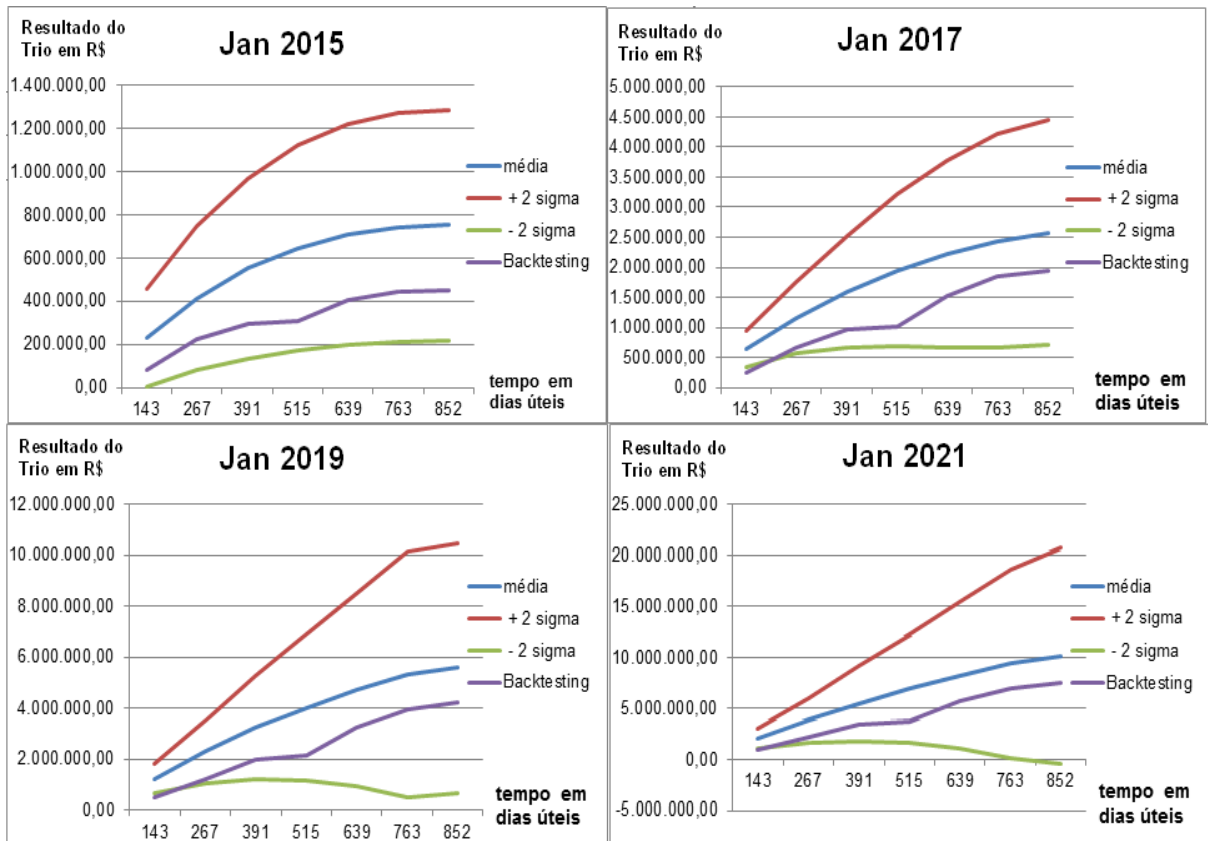


Figura 8 – Comparando *backtesting* com Monte Carlo

Outro ponto importante é que os resultados, além de serem positivos no final, têm trajetórias praticamente monotônicas de alta durante todo o período analisado (utilizando vértices aproximadamente semestrais). Isso é mais um indício do quão improvável é um resultado negativo para uma carteira comprada em um *Trio* com prazo superior a 4 anos.

6. Conclusão

Partindo de uma carteira formada a partir de preços de ajuste, que não exige nenhuma margem depositada, rebalanceando essa carteira diariamente nos preços de ajuste do DI e DDI Futuros, foram obtidos ganhos em todas as 5.000 simulações para os *Trios* com vencimento em janeiro de 2017, 2019 e 2021 e em mais de 99% das simulações para o *Trio* com vencimento em janeiro de 2015.

Essas são evidências extremamente robustas que o Dólar Futuro deveria ser marcado a mercado em um preço acima do preço teórico do termo, diferentemente do que faz atualmente a BM&FBOVESPA, e que a margem inicial necessária para um *Trio* deveria ser diferente de zero.

Este trabalho teve por objetivo, muito mais mostrar que o problema existe e é bem relevante do que almejar uma grande precisão nas estimativas da diferença entre o Dólar Futuro e o NDF para os diversos prazos. Este objetivo principal parece ter sido alcançado.

6.1. Propostas de Soluções

Apesar de estar claro que a atual metodologia da BM&FBOVESPA precisa ser revista, soluções para resolver este equívoco não são simples.

A alternativa mais correta, mas provavelmente impossível de ser implementada operacionalmente, seria a BM&FBOVESPA montar um modelo similar ao proposto neste trabalho e, a partir de parâmetros históricos e processos estocásticos bem definidos, estimar por Monte Carlo a diferença entre o Dólar Futuro e o termo todos os dias, e assim calcular um preço de ajuste diário do Dólar Futuro. Entretanto, a discussão tanto na inferência dos dados históricos quanto na determinação dos melhores processos estocásticos promete ser bastante desafiadora, para não citar a dificuldade operacional de rodar N simulações de Monte Carlo para cada vencimento de Dólar Futuro todos os dias.

Outra alternativa seria criar um novo contrato onde o cálculo do ajuste diário fosse o do Dólar Futuro atual trazido a valor presente pela taxa de juros em reais e incentivar os agentes a migrarem as posições para esse novo contrato.

As equações abaixo mostram as fórmulas de ajuste do Dólar Futuro atual e desse novo contrato (F_S^*).

$$A(t, F_S) = N(F_S(t) - F_S(t - 1)) \quad (33)$$

$$A(t, F_S^*) = \frac{N(F_S(t) - F_S(t - 1))}{e^{R_t(t,T)(T-t)/252}} \quad (34)$$

Esse novo contrato seria equivalente a um NDF com *reset* diário, que possui o mesmo preço teórico do NDF como foi mostrado no capítulo 3. Portanto todo o problema deixaria de existir quando todos os contratos em aberto passassem a ser esse novo e não mais o Dólar Futuro tradicional.

6.2. Possíveis Extensões

Esse trabalho buscou apresentar o problema da diferença entre futuros e termos para o mercado cambial brasileiro por meio da precificação do *Trio*. Como este é o primeiro modelo utilizado para simular esse tipo de carteira foram escolhidos processos estocásticos razoavelmente simples, pois o foco era muito mais mostrar que o problema existe de fato e não deve mais ser ignorado do que estimar com máxima precisão a diferença entre futuros e termos.

Uma vez alcançado este objetivo, abre-se espaço para várias complicações do modelo visando uma melhor estimativa dessa diferença, como a introdução de custos de transação e liquidez, volatilidades e correlações dependentes do prazo e estocásticas, *jumps* e estudos para obter uma forma ótima para coletar os parâmetros históricos.

REFERÊNCIAS

Black F. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, n. 3, p. 167-179, 1976.

Cox, J.; Ingersoll, J. e Ross, S. The relationship between forward and Futures Prices. *Journal of Financial Economics* 9, p.321-346, 1981.

Duffie, D. Futures Markets. *Prentice Hall*.1989.

Duffie, D. e Stanton, R. Pricing Continuously Resettled Contingent Claims. *Journal of Economic Dynamics and Control* 16, p. 561-573, 1992.

French, K. R. A Comparison of Futures and Forward Prices. *Journal of Financial Economics* 12, p.311-342, 1983.

Glasserman, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2003.

Hull, J. C. Options, Futures and Other Derivatives. *Prentice Hall*, 7th Ed. 2009.

Jarrow, R. A. e Oldfield, G. S. Forward Contracts and Futures Contracts. *Journal of Financial Economics* 9, p.373-382, 1981.

Margrabe, William. A Theory of Forward and Futures Prices. *Preprint*, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1976.

Merton, R. C. On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller theorem. *Journal of Financial Economics* 5, p. 241-249, 1977.

Merton, R. C. *Unpublished class notes* (Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA),1979.

Pina, Mario. Derivativos Financeiros. Curitiba: *IESDE*, 2009

Wilmott, P. Paul Willmott Introduces Quantitative Finance. *John Wiley & Sons*, 2nd Ed. 2007.

APÊNDICE A

A fim de facilitar a verificação do cálculo das derivadas apresentadas no capítulo 3, este apêndice mostra, de forma mais detalhada, a álgebra para obtenção desses resultados.

Partindo da equação (21):

$$A(t, Trio) = N \left(S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} - \tilde{F}_S(t-1) \right) \left(1 - e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252} \right),$$

e realizando a operação distributiva temos:

$$\begin{aligned} A(t, Trio) &= N S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} - N \tilde{F}_S(t-1) \\ &\quad - N S_t e^{(R_{t-1}(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} \\ &\quad + N \tilde{F}_S(t-1) e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252} \end{aligned} \quad (35)$$

Derivando (35) em função de $R_t(t, T)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T)} &= N \frac{(T-t)}{252} S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} \\ &\quad - N \frac{(T-t)}{252} \tilde{F}_S(t-1) e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252}, \end{aligned} \quad (36)$$

pois apenas o primeiro e o quarto termos dependem de $R_t(t, T)$. Colocando $N \frac{(T-t)}{252}$ em evidência e substituindo $S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252}$ por $\tilde{F}_S(t)$, obtemos a equação (22).

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T)} = N \frac{(T-t)}{252} \left(\tilde{F}_S(t) - \tilde{F}_S(t-1) e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252} \right)$$

Derivando (35) em função de S_t obtemos:

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial S_t} = N e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} - N e^{(R_{t-1}(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252},$$

pois apenas o primeiro e o terceiro termos dependem de S_t . Colocando N em evidência obtemos a equação (23).

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial S_t} = N (e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} - e^{(R_{t-1}(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252})$$

Derivando (35) em função de $C_t(t, T)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, Trio)}{\partial C_t(t, T)} &= -N \frac{(T-t)}{252} S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} \\ &\quad + N \frac{(T-t)}{252} S_t e^{(R_{t-1}(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252}. \end{aligned}$$

pois apenas o primeiro e o terceiro termos dependem de $C_t(t, T)$. Substituindo $S_t e^{(R_{t-1}(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252}$ por $S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, Trio)}{\partial C_t(t, T)} &= -N \frac{(T-t)}{252} S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} \\ &\quad + N \frac{(T-t)}{252} S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252} e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252}. \end{aligned}$$

Substituindo $S_t e^{(R_t(t,T) - C_t(t,T))(T-t)/252}$ por $\tilde{F}_S(t)$ obtemos:

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial C_t(t, T)} = -N \frac{(T-t)}{252} \tilde{F}_S(t) + N \frac{(T-t)}{252} \tilde{F}_S(t) e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252},$$

Colocando $-N \frac{(T-t)}{252} \tilde{F}_S(t)$ em evidência obtemos a equação (24).

$$\frac{\partial A(t, Trio)}{\partial C_t(t, T)} = -N \tilde{F}_S(t) \frac{(T-t)}{252} (1 - e^{(R_{t-1}(t,T) - R_t(t,T))(T-t)/252})$$

Uma vez mostrados os cálculos das primeiras derivadas (equações (22), (23) e (24)), será mostrado os cálculos das segundas derivadas exploradas no capítulo 3 (equações (25), (26) e (27)). Derivando (36) em função de $R_t(t, T)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T)^2} &= N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2 S_t e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252} \\ &\quad + N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2 \tilde{F}_S(t-1) e^{(R_{t-1}(t, T) - R_t(t, T))(T-t)/252}, \end{aligned}$$

Colocando $N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2$ em evidência e substituindo $S_t e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252}$ por $\tilde{F}_S(t)$ obtemos a equação (25).

$$\frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T)^2} = N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2 (\tilde{F}_S(t) + \tilde{F}_S(t-1) e^{(R_{t-1}(t, T) - R_t(t, T))(T-t)/252})$$

Derivando (36) em função de $C_t(t, T)$ obtemos:

$$\frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T) \partial C_t(t, T)} = -N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2 S_t e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252},$$

pois apenas o primeiro termo depende de $C_t(t, T)$. Substituindo $S_t e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252}$ por $\tilde{F}_S(t)$ obtemos a equação (26).

$$\frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T) \partial C_t(t, T)} = -N \left(\frac{T-t}{252} \right)^2 \tilde{F}_S(t)$$

Derivando (36) em função de S_t obtemos:

$$\frac{\partial^2 A(t, Trio)}{\partial R_t(t, T) \partial S_t} = N \frac{(T-t)}{252} e^{(R_t(t, T) - C_t(t, T))(T-t)/252},$$

pois apenas o primeiro termo depende de S_t . A equação acima é a equação (27).